8

Équivalence des praxéologies dans le cadre d'une comparaison franco-germanophone d'activités numériques

Ismaïl Mili – HEP-Valais, Suisse
Julie Candy – HEP-Valais, Suisse

Introduction

Composée de plusieurs régions linguistiques, la Suisse proposait jusqu'à récemment un large panorama de plan de scolarité. En effet, jusqu'à l'introduction il y a une quinzaine d'années du Plan d'Études Romand (PER), c'est-à-dire le programme officiel pour la partie francophone du pays (consultable sur le site de la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin [1], désormais CIIP), ce sont jusqu'à une dizaine de parcours de formation des élèves qui coexistaient. Plus récemment, l'implémentation du LehrPlan 21 (LP21 [2]) dans la partie germanophone a également permis une certaine coordination des formations des élèves suisse allemands et, depuis, ces deux plans d'études font foi sur l'ensemble du territoire helvétique en fonction de la région linguistique.

À des fins de mutualisation de ressources, ce sont désormais des conférences intercantonales qui procèdent, pour toutes les disciplinaires scolaires, à l'élaboration et l'édition des manuels d'enseignement publics et officiels nommés Moyens d'Enseignements Romand (MER [3]) devant répondre aux exigences du PER – pour les régions francophones – ou de leurs pendants germanophones, respectivement le ZahlenBuch (Wittmann et Müller 2017a, 2017b) et le LP21.

Ainsi, même dans des disciplines « partageables » ou supposées transférables comme les mathématiques, le cas de cantons bilingues (comme Berne ou le Valais, régions dans lesquelles coexistent ces deux systèmes scolaires) nous amène à nous questionner sur la concordance des savoirs

---

1. https://www.plandetudes.ch/
2. https://www.lehrplan21.ch/
3. https://www.ciip-esper.ch/

enseignés et appris par les élèves. C'est dans ce contexte que nous étudierons la similitude des premiers enseignements numériques et de la formation des enseignants de part et d'autre de la frontière linguistique.

1 Éléments institutionnels

Étant donné son organisation fédérale, la Suisse se compose de plusieurs niveaux administratifs, chacun possédant ses propres domaines de compétences étatiques. La Confédération a notamment délégué aux différents cantons tout ce qui a trait à l'enseignement. De la même manière, les langues officielles sont reconnues à ces deux niveaux : parmi les quatre langues nationales reconnues par la Confédération, chaque canton accorde un statut officiel à l'une ou plusieurs d'entre elles. Ainsi, moyennant divers accords intercantonaux, cohabitent au sein du pays, des systèmes scolaires d'une grande variété et, parfois, plusieurs langues de scolarité à l'intérieur d'un même canton[4].

À noter que la formation du corps enseignant relève, elle aussi, de cette compétence cantonale. Les diplômes délivrés par les instituts de formations cantonaux accordent néanmoins la possibilité d'enseigner sur tout le territoire suisse, et donc a fortiori, sur tout le canton. Dès lors, dans le cas du Valais, canton bilingue dont les deux langues officielles sont le français et l'allemand, les étudiants et étudiantes se doivent d'acquérir un double profil linguistique et culturel en effectuant, selon une injonction légale, le tiers de leur formation sur le site de l'institut de formation (la Haute École Pédagogique du Valais) situé dans l'autre partie linguistique du canton.

On assiste ainsi, toujours dans le cas du Valais, à un système scolaire dans lequel cohabitent (certes, dans des zones géographiques relativement bien circonscrites) non seulement deux langues d'enseignement, mais deux programmes officiels et deux manuels officiels de mathématiques.

De plus, afin de maintenir (et d'encourager) le bilinguisme, le système scolaire valaisan comprend parfois des classes bilingues qui proposent un découpage linguistique selon les disciplines. Dans le cas des mathématiques, cela signifie notamment que leurs élèves, s'ils sont scolarisés dans une zone francophone, suivront les cours de cette discipline en allemand à l'aide des ressources germanophones et des cours d'autres disciplines en français à l'aide des ressources francophones ; la réciproque est tout aussi exacte : les germanophones suivront les cours de mathématiques en français avec des ressources francophones et d'autres disciplines en allemand avec des ressources germanophones.

---

4. On trouvera par exemple sur cette page une carte des cantons et des zones linguistiques. Trois cantons sont bilingues, un canton est trilingue. https://www.plurilingua.admin.ch/plurilingua/fr/home/themen/mehrsprachigkeit-der-schweiz.html

2 Questionnement et objectifs de l'étude

Cette configuration linguistique et disciplinaire implique la cohabitation de plusieurs institutions et le croisement de multiples contraintes. Dès lors, la genèse de notre questionnement pourrait être formulée comme suit : assiste-t-on, des deux côtés linguistiques du canton, à un enseignement de concepts mathématiques similaires ? Et quelles conséquences ces éventuelles différences peuvent-elles avoir sur la formation des enseignants et des enseignantes dans ce canton bilingue ?

Pour affiner cette question, s'affranchir d'éventuelles différences antérieures dans le parcours scolaire et parce qu'un apprentissage du nombre s'effectue dans toutes les sociétés, ce chapitre se centrera sur la numération en 1-2H (deux premiers degrés de la scolarité, élèves de 4 à 6 ans).

3 Cadre théorique

Nous remarquons que, dans ce projet, la dimension institutionnelle est forte et requiert des outils permettant de comparer l'enseignement proposé par les manuels officiels de plusieurs institutions, ce qui nécessite de modéliser les choix effectués dans les manuels officiels (et ce de manière à fournir des modèles à comparer). De ce fait, nous avons choisi de placer notre étude dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1998) qui développe l'outil praxéologique que nous présentons ci-dessous et qui permettra d'analyser le développement de la numération au sein des institutions.

Notre outil principal sera le concept de praxéologie (ou d'organisation mathématique). Une praxéologie est un quadruplet $[T,\tau,\theta,\Theta]$ où :

– T est le type de tâches. Le mot tâche est employé dans un sens plus large que son sens commun. Une tâche est souvent exprimée à travers un verbe d'action, par exemple « dénombrer une collection non spatialement ordonnée de jetons dans une boîte » qui se rattacherait, par exemple, au type de tâches « dénombrer une collection d'objets non spatialement ordonnée ».

– τ est la technique associée. Si l'on considère un type de tâches T donné, dans une praxéologie relative à T, on doit trouver une manière de mener à bien ce type de tâches que l'on nomme la technique. Par exemple, une technique pourrait être : « ordonner spatialement la collection puis associer un mot-nombre à chaque objet tout en conservant le dernier mot-nombre prononcé ».

– Le type de tâches et la technique forment le bloc pratico-technique $[T, \tau]$ de la praxéologie relative à T. Une praxéologie « contient un « bloc » $[T, \tau]$, qu'on identifiera génériquement à ce qu'on nomme couramment un savoir faire : un certain type de tâches, T, et une certaine manière, τ, d'accomplir les tâches de ce type ». (Chevallard 1998 : 136)

– θ est la technologie associée. D'après (Chevallard 1998 : 3) « on entend par technologie, et on note généralement θ, un discours rationnel (logos) sur la technique – la tekhnê – τ, discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T ». Quelle que soit l'institution I et le type de tâches T considéré dans cette institution, T est toujours accompagné d'éléments technologiques. Par exemple la technologie pour la technique τ « ordonner spatialement la collection puis associer un mot-nombre à chaque objet tout en conservant le dernier mot-nombre prononcé » pourrait être θ « principe d'énumération ».

– Θ est la théorie associée. Chevallard explique que l'on « passe [...] à un niveau supérieur de justification – explication – production, celui de la théorie, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique ». (Chevallard 1998 : 138). Dans le cas de notre exemple, on pourrait identifier comme théorie la numération (vu comme un système) car c'est cette théorie qui permet notamment la définition des concepts mobilisés.

Dans ce chapitre, afin d'apporter des réponses à nos questions de recherche précédemment énoncées, nous étudierons le caractère équivalent d'activités se rattachant au même type de tâche. Nous pourrons considérer des praxéologies comme étant équivalentes si leurs composantes sont les mêmes (types de tâche, technique, technologie et théorie) ; comparer l'enseignement dans les deux régions linguistiques y consistera à détecter les similarités et les différences praxéologiques

4 Présentation des corpus

Mais avant de poursuivre plus avant, au regard des différences institutionnelles mentionnées plus haut, il convient de détailler quelque peu le corpus sur lequel s'effectueront ces analyses. Avant d'aller mener une étude comparée en classe sur les différentes zones linguistiques du canton, il nous semble important de débuter par une étude des manuels à disposition du corps enseignant. Par leur caractère officiel et unique, les moyens d'enseignement (MER ou ZalhenBuch) apparaissent comme des composantes institutionnelles fortes et nous permettront de dresser un premier modèle. Ce sont donc ces manuels qui constituent notre corpus et que nous décrivons ci-après.

4.1 Structure des Moyens d'Enseignement Romands

Du côté des MER (Moyens d'Enseignement Romands, francophones), les rédacteurs et rédactrices ont choisi de répartir les activités du chapitre « Nombre » à la fois en termes de concepts ou de savoirs dans la partie « apprentissages visés » – en les reliant au programme officiel, le plan d'étude romand – et en termes de « temps d'enseignement » qui sont, selon les rédacteurs et rédactrices, les suivants : activités d'introduction, activités d'entraînement et problèmes. Nous attirons l'attention du lectorat qu'une activité peut être constituée de plusieurs tâches. C'est le cas notamment dans les jeux de société où les élèves doivent parfois savoir identifier le nombre sur un dé, déplacer un pion d'un nombre de cases données ou encore identifier la collection ayant le plus grand cardinal (lors de l'identification du gagnant par exemple).

Ainsi, les activités sont déjà classées en termes de temps d'enseignement, proposant au corps enseignant un certain fil rouge. Par ailleurs, les savoirs en jeu ont déjà été identifiés au préalable par l'équipe de rédaction. Toutes ces données étant présentes dans le livre destiné au corps enseignant. On peut avoir l'impression que ce livre présente une structure assez figée qui contraint fortement l'enseignant ou l'enseignante, notamment à cause de la classification en temps d'enseignement.

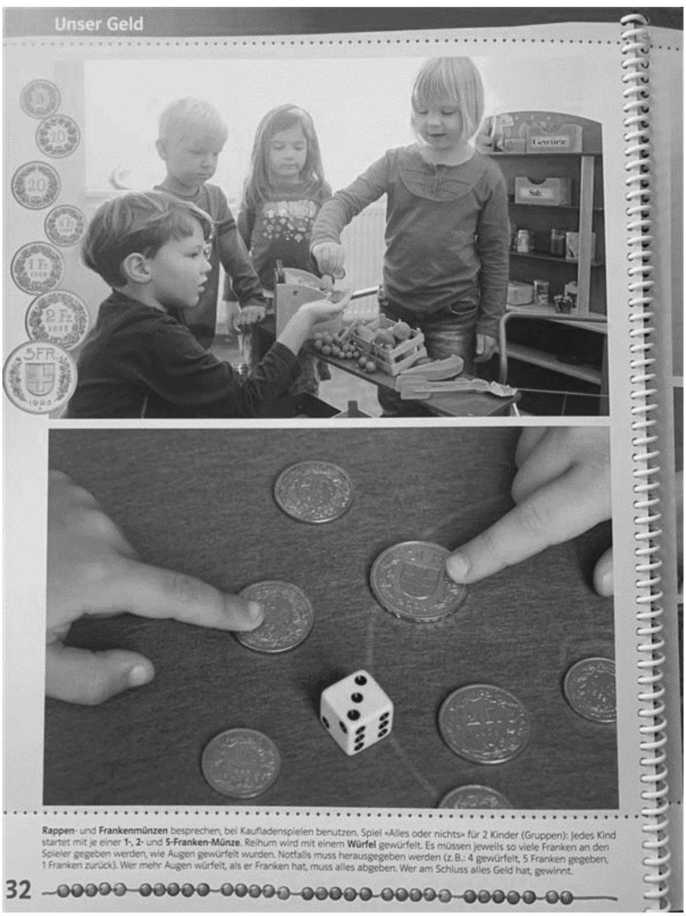
Cependant, cette structure est nuancée dans les commentaires généraux qui accompagnent le chapitre par une recommandation qui incite l'enseignant ou l'enseignante à anticiper l'aménagement de la tâche ainsi que certaines de ses interventions à l'aide d'une analyse *a priori*. « Il va donc falloir définir les conditions pour que ce [saut informationnel] soit rendu indispensable. Pour cela, il sera nécessaire de se livrer à une analyse *a priori* des activités qu'on propose aux élèves » (extrait du fichier « Le nombre, premiers apprentissages, cycle 1 », ESPER CIIP). En effectuant une référence explicite à Brousseau (1998), l'équipe de rédaction définit l'analyse *a priori* de la manière suivante :

> « L'analyse *a priori* d'une tâche mathématique a pour objectif d'identifier les savoirs et savoir-faire mathématiques nécessaires pour résoudre cette tâche. Pour cela, les procédures que les élèves peuvent mettre en place pour résoudre la tâche, les erreurs potentielles et les blocages qu'ils risquent de rencontrer doivent être anticipés. Cela permet de faire le choix des variables didactiques de la tâche envisagée de façon à optimiser les chances d'atteindre les objectifs fixés. » (extrait du lexique, ESPER CIIP)

On remarque donc que l'accent est mis sur l'analyse des procédures et l'utilisation des variables didactiques et ce de manière à permettre aux élèves l'atteinte des objectifs. La notion de variable didactique est prise ici au sens de Margolinas (1992) comme étant les éléments de l'énoncé, modifiables par l'enseignant ou l'enseignante et provoquant des changements qualitatifs dans les procédures de résolutions et les apprentissages des élèves. Cette recommandation accorde ainsi une certaine « marge de manœuvre » dans le pilotage de l'activité et dans la posture à adopter, en fonction notamment des objectifs d'enseignement – apprentissage jugés essentiels par l'enseignant dans le contexte de classe. Dans le livre destiné au corps enseignant, cette recommandation est matérialisée par le fait que chacune des activités est accompagnée de commentaires, mentionnant parfois la pluralité des *techniques* (nommées *procédures* par l'équipe de rédaction du MER) envisageables et attendues pour résoudre le *type de tâche* auquel se rattache la tâche en jeu dans l'activité. Par ailleurs, les principales modulations de variables didactiques sont également données.

4.2 Structure du Zahlenbuch

Dans son pendant germanophone, le ZahlenBuch la partie « Zahlen » qui se rattache au LP21, est composée d'une succession d'activités qui concernent le nombre. La répartition de ces activités au sein d'une séquence didactique ainsi que l'identification de types de tâches « institutionnels » (en référence aux « apprentissages visés » des MER) sont ici dévolues à l'enseignant ou l'enseignante.



Doc.1 : Reproduction d'une page du manuel Wittmann et Müller (2017a : 32) [5].

---

5. *Texte en bas de page : « Rappen- und Frankenmünzen besprechen, bei Kaufladen-spelen benutzen. Spiel «Alles oder nichts» für 2 Kinder (Gruppen): jedes Kind startet mit je einer 1-, 2- und 5- Franken-Münze. Reihum wird mit einem Würfel gewürfelt Es müssen jeweils so viele Franken an den Spieler gegeben werden, wie Augen gewürfelt wurden. Notfalls muss herausgegeben werden (z.B.: 4 gewürfelt, 5 Franken gegeben, 1 Franken zurück). Wer mehr Augen würfelt, als er Franken hat muss alles abgeben. Wer am Schluss*

Comme en témoigne l'illustration extraite de Wittmann et Müller (2017a : 32), les rédacteurs et rédactrices ont choisi de ne faire figurer que l'énoncé des tâches, sans adjoindre de commentaires sur les activités, laissant à l'enseignant le soin d'identifier les savoirs hébergés par ces « tâches – jeux » et de les relier aux divers types de tâches « institutionnels » qui ne sont pas présentés dans le manuel.

5 Méthodologie

Pour mener à bien cette étude, nous avons adopté la même méthodologie que dans Candy et Mili (2020) et effectué une analyse praxéologique de l'ensemble du corpus. Puis, nous avons étudié comparativement le développement des praxéologies générées par des activités ayant le même type de tâche. En particulier nous avons étudié les différentes techniques et technologies qui sont développées par les organisations mathématiques tout en tenant compte des spécificités institutionnelles. Dans ce chapitre, nous présenterons l'analyse détaillée de seulement deux activités et ce afin de mettre en lumière de premiers résultats concernant l'équivalence des praxéologies développées du côté francophone et germanophone.

6 Analyse fine d'activités ayant un même type de tâche

6.1 Dans le Moyen d'enseignement Romand (ESPER CIIP)

Dès lors, à des fins de comparaisons des deux corpus et au regard de ces différences de structure, nous choisirons, lorsque les rédacteurs et rédactrices du corpus francophone (MER) ne fixent pas les valeurs des variables didactiques, d'envisager toutes les techniques possibles dans l'étude praxéologique. Par exemple, si l'on est dans une activité de dénombrement de jetons mais que le manuel ne précise pas le nombre de jetons, alors nous envisagerons aussi bien des techniques pour des nombres de jetons qui permettent l'appui des mains qu'un dénombrement de la collection par énumération.

À titre d'exemple, considérons l'activité « Pochette Surprise » (énoncé en annexe), activité d'entraînement ayant pour enjeu annoncé de « comparer des collections ». Après avoir disposé des pochettes transparentes en plastique contenant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 objets (4 ou 5 pochettes pour chaque

---

alles Geld hat, gewinnt ». — *Traduction :* « Présenter des pièces de centimes et de francs puis les utiliser dans des jeux de magasin. Jeu du Tout ou rien pour 2 enfants (groupes) : chaque enfant commence avec une pièce de 1, 2 et 5 francs. Les dés sont lancés à tour de rôle. Il faut donner au joueur autant de francs que le nombre de points obtenus. Le cas échéant, le complément doit être rendu (par exemple : dé lancé sur 4, 5 francs donnés, 1 franc rendu). Si vous lancez plus de points que vous n'avez de francs, vous devez tout rendre. Le joueur qui a tout l'argent à la fin gagne ».

nombre), une « grande boîte pour ranger toutes les pochettes » et « 6 boîtes pour classer les pochettes », l'enseignant ou l'enseignante demandera :

– à un premier élève de tirer une pochette de la grande boîte et la ranger dans une petite boîte,

– au suivant de faire de même (et ainsi de suite),

– de faire en sorte, lorsqu'il y a déjà une pochette dans une petite boîte, que l'élève ne puisse y mettre la sienne uniquement si sa pochette n'a « pas plus, pas moins d'objets » à l'intérieur que les autres pochettes déjà placées dans cette boîte.

Ainsi, on attend de l'élève que celui-ci, après avoir distribué les premières pochettes dans les boîtes, identifie et regroupe les diverses collections équipotentes.

On relèvera ici que les pochettes seront dans un premier temps réparties au hasard dans les différentes boîtes et que l'ordre de ces dernières en devient aléatoire. En d'autres termes, la boîte contenant les pochettes qui contiennent trois éléments peut tout à fait se retrouver entre celle qui contiendra les pochettes à 6 éléments et celle qui contiendra les pochettes à un seul élément. Ainsi, une technique qui consisterait à associer *l'ordre* des boîtes avec le *cardinal* de la collection contenue dans sa pochette s'avère invalide dans la plupart des cas, sauf si le déplacement des boîtes est autorisé.

De manière générale, pour résoudre la tâche du type T « Déterminer si deux collections présentées sous forme analogique ou physique sont équipotentes », l'élève, pour autant que les contenus des différentes boîtes soient visuellement accessibles à l'élève, peut mobiliser les quatre techniques (associées aux technologies θ_i respectives, relevées par Candy et Mili, 2020) suivantes :

– τ_1 : par **estimation**. Avec θ_1 : perception globale et définition de l'équipotence.

– τ_2 : par **dénombrement en comptant**, si les deux mots-nombres prononcés sont les mêmes alors les collections sont équipotentes. Avec θ_2 : propriétés du dénombrement et définition de l'équipotence.

– τ_3 : par **dénombrement sans compter** (subtizing), si les deux mots-nombres prononcés sont les mêmes alors les collections sont équipotentes. On retrouve alors θ_1.

– τ_4 : par **correspondance terme à terme**. θ_3 : si deux collections peuvent être mises en correspondance terme à terme alors elles sont équipotentes.

Dans le cas de τ_4, notons que les collections sont regroupées non pas selon un critère numérique, mais selon une relation de bijection entre les composantes des collections ; l'élève qui mobilise cette procédure ne fait alors pas référence à une caractéristique de la collection, mais plutôt à une caractéristique de ses composantes.

En revanche, si les différentes boîtes choisies s'avèrent opaques ou recouvertes d'un couvercle, rendant alors le contenu visuellement inaccessible pour l'élève, le recours à un « représentant » de la collection devra probablement être mobilisé (aucune indication à ce sujet n'est donnée dans les commentaires qui accompagnent l'activité). On assisterait alors à l'émergence d'une technique τ_5 : « par le recours à un représentant de l'ensemble des collections équipotentes à une collection donnée » qui, contrairement à τ_4, fait alors référence à une caractéristique de la collection et qui se détache des caractéristiques des objets qui la compose.

Ainsi, au-delà d'une seule modification des techniques, cette modulation d'une variable didactique donnée (caractère opaque de la boîte) a également un impact sur les *technologies* du nombre qui sous-tendent et justifient ces techniques. Dans le cas de τ_5, la *technologie* associée serait « nombre en tant que représentant d'une classe d'équivalence ». D'ailleurs, Candy et Mili (2020) grâce à une modélisation praxéologique des moyens d'enseignement romand 1-2H en numération ont montré que cette technologie ne se développe dans le MER que sous l'effet de la modulation des variables didactiques par l'enseignant ou l'enseignante. Sans cette modulation, les élèves peuvent résoudre les tâches en ne mobilisant que les techniques 1 à 4.

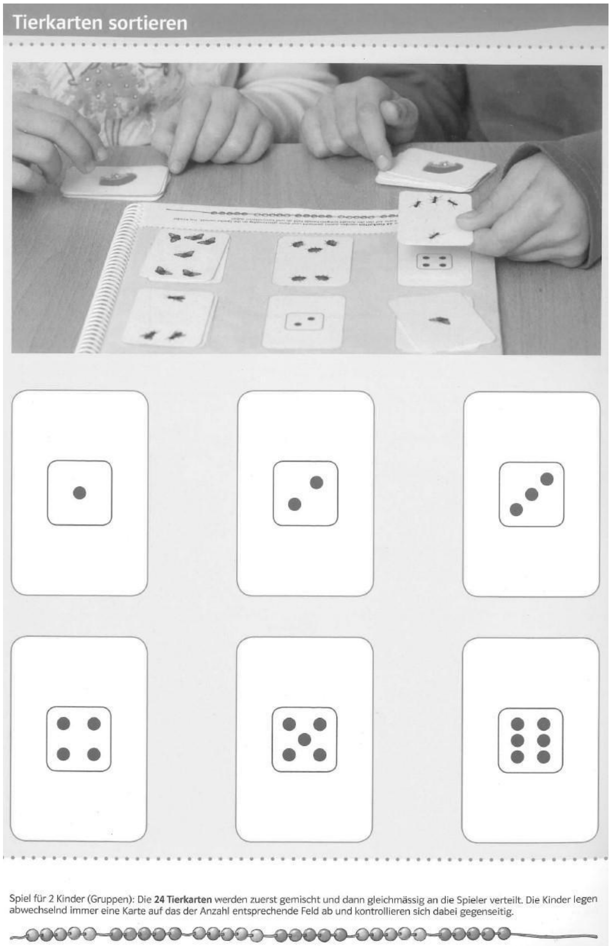
6.2 Dans le Zahlenbuch

Ce regroupement de collections équipotentes est repris dans le corpus germanophone dans lequel on retrouve plusieurs activités cousines à « Pochettes Surprises », travaillant le même type de tâche T « Déterminer si deux collections présentées sous forme physique ou analogique sont équipotentes ». Parmi elles, on relèvera « Tierkarten sortieren » [6] (Wittmann et Müller 2017b :30) qui invite les élèves à poser les cartes dans la pile adéquate, en fonction du cardinal de la collection (d'animaux) qui y figure.

Bien entendu, pour effectuer cette même tâche T, les mêmes techniques τ_1 à τ_4 seront mobilisables, sous tendues par leurs technologies respectives. En ce sens, les deux activités « Pochettes Surprises » et « Tierkarten sortieren » peuvent apparaître sinon jumelles du moins similaires.

Toutefois, étant donné le caractère « figé » du plateau de jeu et de la répartition spatiale des cases de « Tierkarten sortieren », deux éléments doivent ici être relevés.

6. Traduction : « Tri de cartes d'animaux »



Doc. 2 : Reproduction d'une page du manuel Wittmann et Müller (2017a : 30)[7].

En premier lieu, un représentant des collections équipotentes est d'office introduit dans le milieu didactique, et ce sous la forme d'une constellation de points. Il sera certes caché au fur et à mesure par les cartes le recouvrant – et il reste toujours possible pour les élèves de ne pas le percevoir comme tel en mobilisant la technique τ_4 : « Par correspondance terme à terme (énumération en pointant, collection intermédiaire) » – mais le

7. Texte en bas de page : « *Spiel für 2 Kinder (Gruppen): Die 24 Tierkarten werden zuerst gemischt und dann gleichmässig an die Spieler verteilt. Die Kinder legen abwechselnd immer eine Karte auf das der Anzahl entsprechende Feld ab und kontrollieren sich dabei gegenseitig* ». — *Traduction :* « Jeu pour 2 enfants (groupes) : Les 24 cartes d'animaux sont d'abord mélangées, puis réparties de manière égale entre les joueurs. Les enfants placent à tour de rôle une carte sur le champ correspondant au nombre de LA carte et se vérifient mutuellement ».

statut de cette constellation peut être discuté avec les élèves et ce de manière à stabiliser des éléments technologiques du nombre en tant que classe d'équivalence.

En second lieu, contrairement à ce qui prévalait dans « Pochettes Surprises », l'ordre des regroupements n'est pas laissé à la charge de l'élève. Une nouvelle technique τ_6 prenant appui sur le cardinal de la collection adjacente est donc mobilisable. En effet, un élève pourra se dire « ma carte a un élément de plus que la carte qui est posée ici, je place donc ma carte à côté… ». Nous verbaliserons donc τ_6 de la manière suivante : « Par comparaison avec une collection adjacente » dont la technologie est composée des propriétés de la relation d'ordre ainsi que de l'existence et l'unicité d'un successeur dans la suite numérique. On remarque que ces éléments technologiques n'ont pu être mis en avant dans « Pochettes Surprises », activité dans laquelle, souvenons-nous, l'ordre de répartition des collections parmi les boîtes relevait plutôt de l'aléatoire.

Ainsi, au-delà de l'apparence très similaire de ces activités (type de tâches identique et des techniques en commun), nous remarquons qu'un jeu sur les variables didactiques peut amener à des techniques justifiées par des discours technologiques différents.

7 Résultats d'analyse, impact de ces différences

Tout d'abord, nous remarquons que les deux activités analysées se ressemblent de prime abord puisqu'elles peuvent être associées au même type de tâche (« trier des collections avec leur cardinal pour critère »). De plus, toutes les deux permettent, sous certaines conditions, la construction de la notion de classe d'équivalence du nombre, centrale dans la construction du dénombrement.

Cependant, une analyse praxéologique de ces deux activités tend à montrer qu'il existe des différences importantes entre ces deux activités.

Dans l'activité germanophone, les valeurs des variables didactiques sont fixées de manière à ce que les éléments dans une classe d'équivalence soient « cachés » : on y voit seulement le dernier élément placé qui joue le rôle de représentant de la classe d'équivalence. De plus, la disposition spatiale des différentes classes, fixée dans le ZahlenBuch mais laissée libre dans le MER, permet dans le cas de l'activité germanophone d'évoquer la notion de relation d'ordre (entre les représentants).

Dans l'activité francophone, au contraire, la construction du nombre en tant que classe d'équivalence n'est pas effectuée telle quelle. En effet, les boîtes sont laissées ouvertes, ce qui autorise un travail sur les éléments d'une collection et ne permet pas forcément de faire émerger le besoin d'un représentant. Ainsi, la construction de la classe d'équivalence ne se fera que si l'enseignant ou l'enseignante change les valeurs des variables en jeu (par exemple, ici, le fait de fermer la boîte).

Cet exemple illustre que ces activités qui pourraient être utilisées *a priori* dans un même but (« le tri de collections par le cardinal ») ne vont, en réalité, pas permettre la construction des mêmes organisations mathématiques et ne se rattachent pas à des praxéologies équivalentes. Nous remarquons que c'est la modulation des variables didactiques par l'enseignant ou l'enseignante dans l'activité francophone qui va pousser à l'introduction du nombre en tant que classe d'équivalence, tandis que l'activité germanophone pourrait laisser envisager une institutionalisation de cette technologie. Nous remarquons également qu'une technique supplémentaire naît de la disposition spatiale fixée dans le ZahlenBuch. Cette technique pourrait également apparaître dans une mise en place francophone où l'enseignant pousserait la modulation des variables jusqu'à demander une disposition ordonnée des boîtes (ce qui ne paraît pas implicite au vu de l'énoncé initial où l'élève choisi un sac « au hasard », ou en tout cas sans intention spécifique).

Conclusion

Si cette analyse a montré que des types de tâches identiques permettent la construction d'organisations mathématiques différentes, une étude plus large de l'ensemble du corpus montrera que les activités associées aux mêmes types de tâches ne génèrent pas des praxéologies équivalentes, et ce principalement à cause des technologies en jeu. Cette différence peut être imputée aux paradigmes choisis par les moyens d'enseignements romands et germanophones quant à la construction des organisations mathématiques : les MER, au regard de l'injonction institutionnelle à moduler les variables didactiques, proposent un spectre plus large de techniques ; à l'inverse, la structure d'accompagnement au ZahlenBuch fera en sorte que des techniques sous-tendues par des technologies nécessaires à l'apprentissage du nombre, mais mobilisables dans un faible nombre de tâches, ont une probabilité plus grande d'être mobilisées (car le spectre des techniques est rendu moins large)

Les moyens d'enseignement romands, préférant laisser l'enseignant et l'enseignante plus libre de ses choix, vont proposer qu'il ou elle varie les valeurs des variables pour la construction des activités. Ce choix peut par exemple permettre, lors d'un enseignement dans une classe à deux niveaux scolaires, la construction de praxéologies adaptées à tous les apprenants et apprenantes grâce au travail sur les variables didactiques (Candy et Mili 2020). Au contraire, le Zahlenbuch propose des valeurs de variables fixées laissant moins de choix à l'enseignant ou à l'enseignante mais s'assurant ainsi de « contrôler » les organisations mathématiques qu'il développe.

Et si le geste d'analyse *a priori* est mis en avant par les moyens d'enseignement romand, notre analyse permet de cerner une des raisons de cette mise en lumière. En effet, sous l'effet de la modulation des variables, le corps enseignant peut faire émerger un panel de techniques autour du nombre reposant sur des technologies allant de la « correspondance terme à terme » au « nombre en tant que classe d'équivalence » et ce sur une même activité. Les moyens d'enseignement germanophones contiennent des énoncés plus « fermés » au sens où un grand nombre de variables didactique voient leurs valeurs fixées dans l'énoncé (disposition spatiale des représentants, nombre d'éléments maximum dans la collection…) et n'insistent donc pas sur cette caractéristique.

Ces différences nous amènent dès lors à questionner la similitude 1) des enseignements / apprentissages de part et d'autre d'une frontière linguistique d'un concept jugé pourtant universel ainsi que, par ricochet, 2) de la formation des enseignants et des enseignantes entre les deux cultures linguistiques (alors que, rappelons-le, dans le cas du Valais, les enseignants et les enseignantes sont habilités à enseigner des deux côtés du canton).

Il nous semble que la mise en lumière d'activités issues d'un même type de tâches peut justifier l'enseignement du geste d'analyse *a priori* et cela même dans le cadre de la formation des enseignants et enseignantes germanophones. En effet, dans le cas d'un changement de lieu d'enseignement ou d'affectation en classe bilingue, ces enseignants et enseignantes devront malgré tout être capables de permettre la construction du nombre chez leurs élèves. Par ailleurs, il nous semble d'autant plus difficile pour un enseignant ou une enseignante d'envisager la modulation des valeurs des variables didactiques si un grand nombre sont déjà fixées par l'énoncé. Par exemple, pour rendre coûteuses les techniques τ_1 à τ_4 voire, si souhaité, la technique τ_6, il serait envisageable d'augmenter le cardinal des collections à classer : les élèves seraient ainsi amenés à faire émerger des techniques où le nombre est considéré comme un représentant d'une classe d'équivalence. Or pour que les enseignants et enseignantes pensent à le faire (et puissent le faire, voire se sentent la compétence de le faire, quand bien même l'énoncé fixe des valeurs au départ), il importe que leur formation les outille pour ce type de gestes professionnels. C'est notamment à cette fin que Candy et Mili (2021) soulignent l'importance du geste d'analyse *a priori*, de son enseignement en formation et, dans le cadre des petits degrés, de l'étude qu'elle permet des liens entre les jeux de l'élève et les activités structurées, et ce quelle que soit la culture linguistique.

Références

Brousseau Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Candy Julie et Mili Ismaïl, 2021, « Faire une passerelle entre les jeux libres et les MER : analyse des gestes professionnels d'une enseignante », *Revue*

Mathématiques pour l'école, 235, p. 21-30. Disponible en ligne.

Candy Julie et Mili Ismaïl, 2020, « L'apport du modèle praxéologique de référence du moyen d'enseignement romand de 1-2H (élèves de 4 à 6 ans) à la formation des enseignants du cycle 1 », dans *Actes du 46e colloque de la Copirelem*. Lausanne, p. 679-687. Disponible en ligne.

Chevallard Yves, 1998, « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique ». Dans *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. IREM de Clermont-Ferrand, p. 91–120. Disponible en ligne.

ESPER CIIP, *Espace des moyens d'enseignement romands*. Disponible en ligne.

Margolinas Claire, 1992, « Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion », *Recherches en Didactique Des Mathématiques*, T. 12, fasc. 1, p. 113–158.

Wittmann Erich et Müller Gerhard, 2017a, *Schweizer Zahlenbuch : Spiele zur Frühförderung 2*, Klett und Balmer.

Wittmann Erich et Müller Gerhard, 2017b, *Schweizer Zahlenbuch : Arbeitsheft*, Klett und Balmer.

Annexe

Pochettes surprises

Entraînement **Année(s) 1re - 2e**

Apprentissage visé

Comparer des collections

Nombre d'élèves

Toute la classe ou demi-classe ou un petit groupe de 6 élèves.

Durée de l'activité / Fréquence

- Les élèves doivent se mettre d'accord et dialoguer, ce qui demande du temps.
- Il faudra peut-être scinder cette activité pour maintenir leur attention.

Matériel

- Pochettes transparentes en plastique contenant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 objets (4 ou 5 pochettes pour chaque nombre) ;
- 1 grande boîte pour ranger toutes les pochettes ;
- 6 boîtes pour classer les pochettes.

Remise du matériel

Le matériel est mis à disposition au milieu des élèves.

L'enseignant peut préparer le matériel en plaçant en ligne les 6 boîtes pour classer.

Il pose la grande boîte avec toutes les pochettes à proximité.

Consigne (ou règle)

- Un premier élève tire une pochette de la grande boîte et la range dans une petite boîte.
- Le suivant fait de même et ainsi de suite.
- Lorsqu'il y a déjà une pochette dans une petite boîte, l'élève ne peut y mettre la sienne que si sa pochette n'a « pas plus, pas moins d'objets » à l'intérieur (il est possible d'utiliser le mot autant tout en veillant à sa bonne

compréhension en l'illustrant par « pas plus, pas moins »).

- Tous les élèves doivent être d'accord avant de passer au prochain joueur et tirer la pochette suivante.

Gestion de l'activité

Les premiers élèves vont probablement placer leur pochette dans une des 6 boîtes vides, indépendamment du nombre d'objets qu'elle contient (ce qui ne contrevient pas à la consigne). Il va arriver un moment où il n'y aura plus de boîtes vides à disposition. C'est le départ du questionnement qui devrait être à la charge des élèves, mais qui doit être guidé avec les plus jeunes.

L'idée est de faire émerger la solution qui consiste à regrouper les pochettes contenant le même nombre d'objets dans une boîte commune. Une fois cette proposition validée, les élèves ont encore un travail de comparaison à réaliser.

Il est important de dire « pas plus, pas moins » dans la consigne afin de laisser les élèves élaborer, dans un premier temps, leurs propres stratégies.

Les pochettes peuvent ensuite servir dans la classe comme support visuel, associé par exemple à une bande numérique.

Pour les élèves de 1re année : Il s'agit de relever les stratégies utilisées par les élèves à un moment donné de l'activité, puis il est possible de reprendre l'activité en proposant d'utiliser spécialement la correspondance terme à terme par exemple.

Éléments de différenciation

- Proposer un champ numérique selon les besoins et compétences des élèves.
- Un nombre élevé d'objets va contraindre au dénombrement.

Procédures

Les procédures probables sont :
1re année : petites quantités, subitizing et correspondance terme à terme (en ouvrant les pochettes).
2e année : à terme, le dénombrement et le passage au nombre.

Erreurs / Blocages

Si les élèves procèdent par « essai-erreur » sans représentation du but, il est important de reprendre la consigne en la démontrant soi-même ou en la faisant faire par une mascotte.