

Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme¹

Nathalie Auger – Université Montpellier 3, LHUMAIN

Aurélié Chesnais – Université de Montpellier, LIRDEF

Introduction

« La connaissance consiste pour une part importante à établir des relations et à les organiser en systèmes » (Vergnaud 1981 : 13). Les « relations », en tant que catégorie de la logique, jouent donc un rôle central dans la conceptualisation, en particulier en mathématiques. Leur prise en charge langagière nécessite de disposer de moyens syntaxiques allant de formes relativement simples comme le complément du nom (le « centre du cercle » ou « la moitié de 8 »), à des formes très élaborées, comme dans « la figure *F* est symétrique de la figure *G* par rapport à la droite *d* » ou encore « 1 est le reste de la division euclidienne de 10 par 3 ».

Nous proposons dans ce texte de nous intéresser aux enjeux d'apprentissages liés à la prise en charge en langue française des relations en mathématiques. Il s'agit de montrer, d'une part, qu'elle constitue un obstacle important pour les élèves et probablement encore davantage pour ceux dont le français n'est pas la langue familiale², d'autre part que les moyens de cette prise en charge dans d'autres langues peuvent représenter une ressource pour la classe de mathématiques.

Les deux premières parties nous permettent de préciser notre réflexion concernant la question du rôle des langues dans l'apprentissage, puis des relations en mathématiques. Nous présentons dans la troisième partie des tests que nous avons fait passer dans des classes de mathématiques au début de l'enseignement secondaire. La discussion est l'occasion de

1. Nous remercions Mehmet-Ali Akinci, Mercè Bernaus, Andrea Briglia, Anis Gandeel, Nathalie Pépiot-Gandeel pour les traductions en turc, espagnol, italien et arabe. Nous remercions Nazha Lahmouche pour les traductions en arabe et en dialecte marocain et pour avoir fait passer les tests dans ses classes. Merci à Laurence De Zanet pour avoir fait passer les tests dans plusieurs de ses classes.

2. Qu'ils soient nouvellement arrivés en France ou non, quelle que soit leur nationalité.

revenir sur la manière dont le plurilinguisme peut être considéré comme un obstacle ou une ressource dans la classe de mathématiques.

1 Langues de l'élève : frein ou ressource dans les représentations et les pratiques

1.1 Les langues de l'élève et le rapport au français : des représentations encore fortes du handicap

Les langues connues par les élèves sont prises en tension entre valorisation ou dévalorisation. Ainsi, pour les élèves dont les langues font partie des marchés linguistiques (Bourdieu 1982) valorisés comme l'anglais, qui sont scolarisés dans des classes prestigieuses comme les sections européennes, le bi-plurilinguisme est considéré comme une ressource de valeur. À l'inverse, pour les élèves nouvellement arrivés en France ou parlant en famille des langues peu reconnues à l'école (comme le turc, l'arabe ou des langues subsahariennes), les langues sont suspectées d'être une entrave à la réussite scolaire. Pour preuve, les circulaires ont considéré jusque dans les années 1980 la langue des élèves comme un « handicap » :

Même si, dans leur majorité, ces enfants sont nés en France ou y résident depuis un temps suffisant pour parler notre langue, il n'en reste pas moins qu'ils rencontrent des difficultés spécifiques dues à un handicap linguistique diffus [...]. (Circulaire 78-238 du 25 juillet 1978)

À l'heure actuelle, les élèves nouvellement arrivés en France sont toujours perçus comme des « élèves à besoins spécifiques », dans les formations des Instituts nationaux supérieurs du professorat et de l'éducation (INSPE), et l'Institut national supérieur de formation et de recherche pour l'éducation des jeunes handicapés et les enseignements adaptés (Inshea) propose aussi des formations pour les enseignants relatifs à cette catégorie d'élèves.

Par ailleurs, le fait de connaître d'autres langues implique, d'effectuer des transferts vers la langue de scolarisation, et peut renforcer aussi cette représentation de la langue familiale « handicapante ». Par exemple, le système prépositionnel n'existe pas en turc et l'élève turcophone va mettre plus de temps que ses camarades à comprendre et produire des énoncés mathématiques contenant des prépositions. Ce type de situation renforce l'idée que la langue de l'élève est source de difficulté d'apprentissage.

1.2 Les études sur le bienfait des bilinguismes

Le champ de l'acquisition des langues, jusque dans les années 1980 en didactique des langues, s'appuie pour une grande part sur le concept d'interlangue (Selinker 1972) perçue, par simplification, comme un système intermédiaire qui peut se fossiliser et maintenir les apprenants

dans une compétence en deçà des attentes institutionnelles. Cette représentation laisse donc à penser que les langues déjà connues sont un frein à l'apprentissage d'autres langues. Dans les années 1980, de nombreux scientifiques (Bialystock 1988, Hakuta 1986) souhaitent contrer ces représentations et lancent diverses études sur le lien entre bi-plurilinguisme et intelligence.

Ce mouvement contradictoire criant concernant les effets du bi-plurilinguisme sur les apprentissages peut être problématisé dans le cadre des approches complexes proposées par Morin (2000), qui, reprenant les travaux d'Héraclite, prône la reliance des contradictions. Reconnaître la réalité des transferts d'une langue à l'autre (Cummins 1972), et assumer le fait, qui peut apparaître comme contradictoire, que ces transferts permettent parfois de s'appuyer sur les langues familiales, mais parfois non (par exemple, si des éléments du système linguistique n'existent pas ou fonctionnent différemment du français) permet de considérer cet antagonisme comme fécond. La mise en perspective des langues permet toujours une compréhension des phénomènes langagiers. Le curseur de la binarité *bon* ou *mauvais bi-plurilinguisme* se déplace donc ailleurs, vers les compétences méta que les élèves peuvent activer en réfléchissant sur les différences et similarités des systèmes et pratiques langagières pour, dans notre cas, exprimer la symétrie en mathématiques.

1.3 Être ambitieux dans les réflexions méta- : au-delà du lexique, la syntaxe

Le lexique a toujours fait l'objet d'une attention particulière pour permettre l'accès à la compréhension pour les élèves allophones. Prenons par exemple le terme « chances » qui signifie « possibilité » en anglais et « réussite » en français. Il révèle une ambiguïté sémantique car la zone de recouvrement des significations est partielle (« chance » peut signifier que l'on peut réussir en anglais, mais pas dans tous les cas, contrairement au français³). Au lieu de considérer « chance » comme un faux ami dangereux, handicapant pour les apprentissages, mais en réfléchissant plutôt aux différences et similarités en adoptant une posture méta-, en prenant conscience des zones de recouvrement, les élèves pourraient comprendre mieux les spécificités de ce vocable pour chaque langue.

Malgré tout, en termes de compréhension et de production, le lexique ne permet pas d'avoir accès à l'intégralité des contenus disciplinaires, loin s'en faut. La question des relations syntaxiques d'une langue à l'autre est primordiale à étudier, notamment en mathématiques.

Dans notre étude, nous nous intéressons au plan syntaxique, enjeu majeur pour les mathématiques, notamment pour l'expression des relations entre

3. En mathématiques, dans le cadre des probabilités, on peut toutefois trouver des usages du mot « chance » qui se rapprochent de l'usage anglais.

objets. Dans ce cadre, notre objectif est de comprendre comment les langues peuvent devenir des ressources pour l'apprentissage (Auger 2007, 2021) en envisageant des activités méta qui permettent une réflexion à la fois sur la ou les langues et sur les moyens de communiquer et construire dans la discipline sachant que l'on conçoit la langue à la fois comme objet et moyen d'apprentissage (Vigner 2002), y compris en mathématiques (Chesnais 2018). Ainsi, les interférences, les traductions, les interprétations sont de bonnes occasions de réfléchir aux pratiques langagières en mathématiques et à la compréhension des objectifs disciplinaires.

2 Les relations en mathématiques et leur prise en charge langagière

Les travaux qui étudient les pratiques langagières *verbales* en mathématiques, c'est-à-dire les utilisations de la langue dans l'activité mathématique, mettent en évidence des spécificités qui ne se limitent pas à la présence d'un lexique spécifique (avec des mots comme « hypoténuse » ou « logarithme » qui n'apparaissent que dans des énoncés mathématiques ou encore l'existence de nombreuses locutions ayant une signification particulière : « une et une seule », « domaine de définition d'une fonction », « centre du cercle », « cercle de centre O », etc.). Colette Laborde a par exemple montré, en 1982, en comparant statistiquement la fréquence des mots, que le verbe *être* est le mot le plus fréquent dans les usages du français courant, alors que c'est le mot *de* qui est de très loin le plus fréquent dans les énoncés mathématiques⁴ (le verbe *être* venant en deuxième, tandis que le mot *de* arrive en troisième position dans les énoncés de français courant). Il apparaît également que les énoncés mathématiques contiennent nettement plus de substantifs et d'adjectifs que les énoncés de français courant ; enfin, on observe une très faible variété de verbes (essentiellement *être* et *avoir*) dans les énoncés mathématiques.

Plusieurs didacticiens des mathématiques, en s'appuyant sur l'analyse logique du langage (Vergnaud 1990, 1991, Durand-Guerrier 2013, Barrier *et alii* 2019 ; Hache 2015), ont contribué à identifier les spécificités syntaxiques des énoncés mathématiques français. Ils identifient ainsi notamment des usages particuliers des conjonctions de coordination et certaines prépositions telles que « si... alors... », « et » / « ou », « avec » et des déterminants, en lien avec la quantification notamment⁵. On trouve

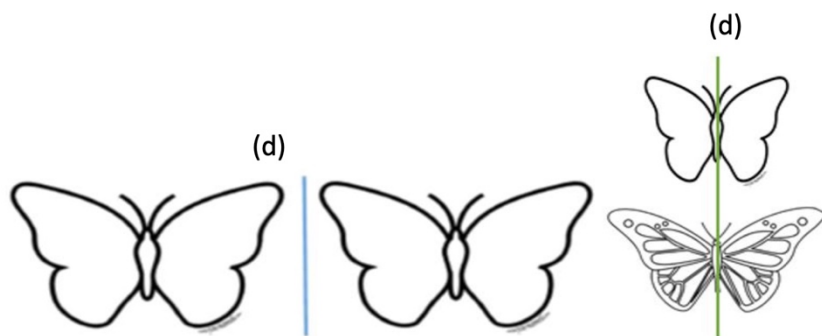
4. Elle s'est appuyée pour cela sur une étude de manuels.

5. Par exemple, dans l'expression « un carré est un rectangle », l'article 'un' doit être entendu dans le sens d'une quantification universelle (au sens mathématique : « tout carré est un rectangle »). Or cela ne correspond pas nécessairement à la manière de l'interpréter dans les usages quotidiens du français. On pourra

également dans les énoncés mathématiques l'usage de nombreuses formes passives, des énoncés dépersonnalisés (usage généralisé du pronom « on ») et détemporalisés, des usages particuliers des temps des verbes ou de la négation (Durand-Guerrier 2013). Enfin, on y note également des énoncés avec de nombreux compléments de noms en cascade, de nombreuses propositions subordonnées, des appositions et des nominalisations (Vergnaud 1990), y compris pour les relations. Ces spécificités sont essentiellement liées à une recherche de concision et de « rigueur »⁶ avec des formes fortement normalisées.

Ces formes langagières spécifiques des mathématiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique et constituent donc un enjeu d'apprentissage essentiel qui ne peut, de fait, relever que du cours de mathématiques. Toutefois, de nombreuses études montrent que ces enjeux sont très peu pris en charge en classe comme dans les manuels, probablement du fait que ces pratiques « reposent sur de nombreux implicites qui sont parfois naturalisés au point d'être difficilement identifiables par les locuteurs/trices, y compris (ou en particulier) par les locuteurs/trices compétent·e·s. » (Barrier *et alii* 2020).

Par exemple, si l'on considère les deux figures suivantes (doc.1), un mathématicien peut dire que « les deux papillons sont symétriques par rapport à la droite (d) » dans les deux cas et pourtant, il s'agit de deux cas bien différents. Dans le premier cas, la phrase désigne la *relation* qui existe entre les deux papillons et la droite. Dans le second cas, elle désigne une *propriété* de chacun des papillons.



Doc. 1 : Les deux papillons sont symétriques par rapport à la droite (d).

_____ consulter Barrier, Durand-Guerrier et Mesnil (2013) pour davantage de détails sur cette question, déjà mentionnée par Vergnaud (1990).

6. On entend souvent dire, y compris dans les classes de mathématiques, que le langage mathématique est « rigoureux ». On peut penser que cela fait référence à la très forte standardisation des formulations verbales, mais il peut s'agir aussi d'attribuer à tort au langage verbal une propriété du langage formel, seul à même de garantir l'absence d'approximation ou d'équivocité (Vergnaud 2001).

Mais l'apparente polysémie de l'adjectif *symétrique* résulte en réalité d'une omission par abus de langage, qui correspond en fait à un point de vue expert, dans lequel le contexte suffit à déterminer le sens. Dans le premier cas, l'un des papillons est symétrique *de l'autre* par rapport à la droite, tandis que dans le second, chaque papillon est symétrique *de lui-même* par rapport à la droite. Du point de vue mathématique, la *propriété* pour une figure d'être symétrique (on dit aussi « admettre un axe de symétrie ») correspond au cas particulier de la *relation* de symétrie où la figure de départ et la figure d'arrivée sont la même figure. Pour clarifier la distinction entre les deux situations, il faut donc expliciter l'ensemble des éléments de la relation (figure initiale, figure finale et axe). Le souci de concision, associé probablement au fait que la formulation pointe la réflexivité de la relation, amène les experts à préférer la phrase « les deux papillons sont symétriques » pour décrire la première situation, à la phrase « le papillon de gauche est symétrique du papillon de droite », même si la première est de fait ambiguë, le contexte permettant d'interpréter correctement l'énoncé – lorsqu'on maîtrise suffisamment les concepts.

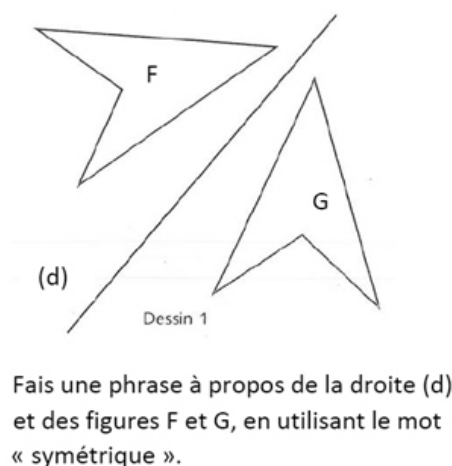
On peut de fait facilement concevoir la complexité de l'appropriation de ces formes langagières, en particulier si ces formes sont introduites précocement dans l'apprentissage (notamment lorsque le fait qu'il s'agit d'une relation entre trois objets n'est pas encore clairement identifié). Cela s'ajoute au fait que le mot « symétrique » peut être utilisé tantôt comme adjectif, tantôt comme adjectif substantivé (avec élision du terme « figure »), au masculin ou au féminin : par exemple, « la figure G est la/le symétrique de la figure F par rapport à la droite d ». Enfin, on peut noter la complexité de la structure de la phrase pour rendre compte de la relation entre les trois objets : la préposition « de » introduit le deuxième objet (qui est de même nature que le premier), tandis que la locution « par rapport à » est conventionnellement utilisée pour mentionner le troisième objet (la droite). Notons que la mention du troisième objet est souvent omise par les experts, lorsque le contexte ne laisse pas de doute.

Une première étude sur la symétrie avait permis de mettre en évidence des difficultés d'élèves à prendre en charge langagièrement la symétrie comme relation entre objets ou comme propriété, difficultés d'autant plus marquées en éducation prioritaire (parmi lesquels on trouve souvent un pourcentage relativement élevé d'élèves dont la langue familiale n'est pas le français) (Chesnais *et alii* 2013). Dans le but de mieux identifier les difficultés spécifiques d'élèves dont le français n'est pas la langue maternelle, ainsi que des ressources potentielles, issues d'autres langues, pour prendre en charge langagièrement les relations, nous avons fait passer des tests à des élèves de début de sixième.

3 Des tests dans des classes

Les tests ont été proposés dans une classe de sixième de 18 élèves d'un établissement relevant de l'éducation prioritaire (EP), accueillant de nombreux élèves arabophones (4 élèves) et turcophones (9 élèves), et une classe de sixième de 24 élèves d'un établissement situé dans une zone socialement favorisée (EF). Une partie du test porte sur la symétrie, l'autre sur le cercle et sa relation avec son centre et son rayon. Ne pouvant détailler ici l'intégralité des tests, nous nous concentrons sur deux exercices.

3.1 La symétrie orthogonale : propriété et relation



Doc. 2 : Question 1 du test.

Dans la question 1 du test (doc. 2), les formes attendues correspondant aux usages experts sont « La figure G est symétrique de la figure F par rapport à la droite (d) » ou « Les figures F et G sont symétriques par rapport à la droite (d) ». Certaines variantes pourraient être considérées comme conformes aux usages experts : par exemple l'omission de « la (les) figure(s) », l'ajout de la précision « l'une de l'autre » dans la deuxième version, le fait d'utiliser « Le / la (figure) symétrique », le fait d'inverser F et G dans la phrase, et enfin, le fait de mentionner la droite par d'autres moyens comme « par la symétrie (axiale/orthogonale) d'axe d », « dans la symétrie (axiale/orthogonale) d'axe d » ou encore « par rapport à d ».

Les réponses des élèves pour la question 1 ont été catégorisées de la façon suivante, qui permet de hiérarchiser d'une part leur capacité à rendre compte d'une relation (entre 2, voire 3 objets) par une construction syntaxique, d'autre part à mobiliser les formes conventionnelles pour ce faire :

Catégorie 1 : mise en relation des 3 objets dans une seule phrase grammaticalement acceptable, en utilisant « symétrique » et qui correspond aux conventions mathématiques.

Catégorie 2 : mise en relation des 3 objets dans une seule phrase en utilisant correctement « symétrique », mais avec des incorrections mathématiques, grammaticales ou en décalage par rapport aux conventions.

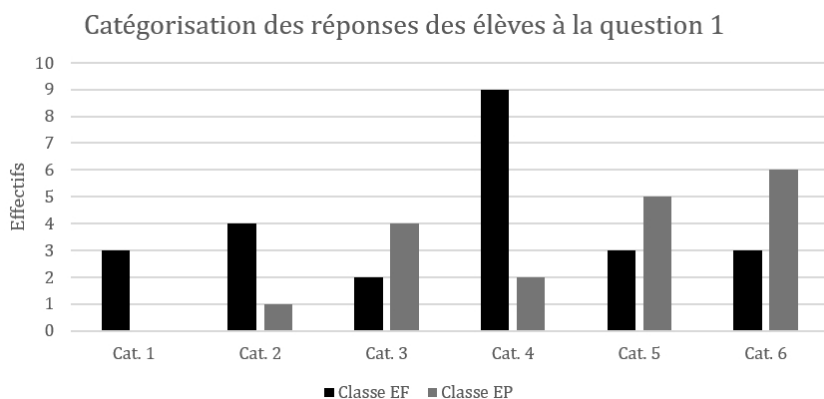
Catégorie 3 : mise en relation des 3 objets dans une seule phrase, mais sans utiliser « symétrique » ou seulement avec des incorrections grammaticales ou en décalage par rapport aux conventions.

Catégorie 4 : mention des 3 objets, mais en juxtaposant 2 propositions : ces élèves ne produisent pas une proposition qui expose la relation en utilisant l'adjectif symétrique, ou alors de façon très vague ou incomplète.

Catégorie 5 : une phrase utilisant éventuellement le mot « symétrique », mais ne mentionnant pas les trois objets et/ou sans mentionner une relation, avec éventuellement des incorrections grammaticales ou mathématiques.

Catégorie 6 : réponse incohérente ou absence de réponse.

Le graphique suivant (doc. 3) présente les effectifs pour chaque catégorie dans les deux classes.



Doc. 3 : Catégorisation des élèves à la question 1 en fonction de la classe.

Seul un tiers des élèves (38 % dans la classe EF, 28 % dans la classe EP) produit une réponse mettant en relation les trois objets. Parmi eux, seuls 7 % produisent une phrase attendue (13 % dans la classe EF, 0 % dans la classe EP). Par ailleurs, on peut noter la répartition « en décalage » entre les deux classes : trois quarts des élèves de la classe EF se situent dans les catégories 1 à 4, c'est-à-dire qu'ils produisent tous une réponse mentionnant les trois objets, quand environ trois quarts des élèves de la classe EP se répartissent dans les catégories 4 à 6, c'est-à-dire qu'au mieux, s'ils mentionnent les 3 objets, ils le font dans deux propositions juxtaposées.

Du point de vue qualitatif, on peut noter essentiellement, dans la manière de formuler les relations, le fait que les élèves emploient préférentiellement la préposition « à » plutôt que « de » pour signifier la relation entre les deux figures et que la locution « par rapport à » est très souvent remplacée par « à » seul. La conjonction de ces deux faits aboutit à ce que les deuxième et troisième objets de la relation ne sont pas distingués par la préposition employée (puisque « à » est employé dans les deux cas), contrairement à la forme conventionnelle (F est symétrique *de* G *par rapport à* d) qui permet d'identifier quel est l'objet symétrique (introduit par « de ») et quel est l'axe (introduit par « par rapport à »). On observe également une surreprésentation très importante des formulations du type « F et G sont symétriques » par rapport aux formulations du type « F est symétrique de G », comme chez les experts, mais sans que l'on puisse déterminer si les élèves l'emploient par simple imitation (n'ayant été confrontés qu'à cette forme) ou, comme les experts, comme un raccourci de la forme explicitant la relation. Enfin, on peut noter la prégnance de l'idée d'axe de symétrie, avec souvent des expressions non conventionnelles : « la droite (d) est *l'axe symétrique* de F et G qui sont symétrique l'un à l'autre » (EF, cat. 3) ; « la droite (d) est au milieu des figures F et G. » (EP, cat. 3). Deux éléments peuvent contribuer à expliquer ce fait : d'une part, « axe de symétrie » est la première expression incluant un mot ayant la même racine que « symétrique » rencontrée à l'école élémentaire, d'autre part, la droite d est le premier objet mentionné dans la question.

On peut par ailleurs noter la créativité des élèves pour la mise en relation des objets entre eux, qui correspondent à une recomposition originale des mots ou locutions conventionnelles avec celle mentionnée ci-dessus (« l'axe symétrique ») mais aussi : « la symétrie F et G sont une symétrie axiale en rapport à la droite (d) » (EF) « la droite est symétrique aux figures F et G » (EP), « F, G et (d) font un arc symétrique » (EP), « (d) est l'axe de symétrie des figures F et G » (EP).

On observe notamment, dans la classe EP, que les créations sont souvent le fait d'élèves dont la langue familiale n'est pas le français et révèlent des écarts aux formes conventionnelles du point de vue syntaxique autant qu'orthographique, graphique ou phonétique (on peut ainsi interpréter « arc symétrique » ou « ace symétrique »), écarts dont on peut parfois faire l'hypothèse (même si des recherches complémentaires seraient nécessaires pour la valider) qu'ils sont liés à des transferts d'une langue à l'autre. Par exemple, la production ci-dessous de Riem, élève de la classe EP pour lequel l'arabe est la langue familiale, montre qu'il a bien compris qu'il y a une relation à trois éléments, mais il confond les fonctions du nom et de l'adjectif, d'ailleurs il oublie également le -s, obligatoire, dans la seconde occurrence du mot. Pour lui, « l'un à l'autre » exprime la relation entre objets :

Riem : « la droite (d) est l'axe symétrique de F et G qui sont symétrique l'un à l'autre »

On peut noter qu'en arabe « l'un à l'autre » et « l'un de l'autre » sont deux formes possibles :

لبعضهم البعض

lbaedihim albaed (« l'un à l'autre »)

vs *wahid min alakhar* (« l'un de l'autre »)

واحد من الآخر

Dans la production d'Ilyasse, élève de la classe EP pour lequel l'arabe est la langue familiale, les trois éléments sont bien mis en discours, mais « avec » supplante « par rapport à ». Ces deux prépositions existent bien distinctement en arabe. Cependant, un terme comme une préposition peut être utilisé de façon générique, pour remplacer, de façon hyperonymique, dans le langage courant, toute préposition dans le nouveau système en acquisition de l'élève.

Ilyasse : « Les deux figures sont symétriques *avec* la droite (d) donc c'est une symétrie axiale. »

مقارنة ب

muqaranatan b (« par rapport » en arabe)

مع

mae (« avec » en arabe)

Nous nous intéresserons maintenant à la partie du test qui concernait la notion de cercle, associée à d'autres formes syntaxiques de prise en compte des relations.

3.2 Le cercle ou quand le diable se cache dans les « petits mots »

Le mot « de » (y compris les formes élidées ou contractées comme « d' » ou « du »⁷) est le mot le plus fréquent dans les énoncés mathématiques (Laborde 1982). Cela correspond en français à des usages très variés dont la plupart peuvent être employés en mathématiques⁸. Nous avons identifié au moins quatre usages différents de la préposition « de » dans des locutions très spécifiquement mathématiques, même si elles sont liées à des usages du français courant, quoique plus ou moins usités :

Usage 1 : « distance *de*... à... » : l'idée de point de départ ; est utilisé aussi fréquemment dans le langage courant.

Usage 2 : « le centre *de* ce (du) cercle » : idée d'appartenance comme dans « le chapeau de Pierre », très usité dans le langage courant.

Usage 3 : « le cercle *de* centre O » : permet d'exprimer de façon concise

7. Nous faisons référence ici à l'usage du mot « du » quand il remplace « de le ».

8. Notamment le « de » dans une négation, comme dans l'exemple : une équation qui n'admet pas *de* solution.

une propriété de l'objet ; pourrait être remplacé par une proposition relative, ici introduite par le pronom relatif « dont » : « dont le centre est O » ; s'emploie également dans le langage courant « le chapeau de couleur rouge », mais est peu usité. Un autre exemple en mathématique d'une locution relevant de cette catégorie est « domaine *de* définition (d'une fonction) » (le domaine dans lequel la fonction est définie).

Usage 4 : « équation de droite » : il s'agit ici d'un usage de type 2, mais avec ici une dimension générique quand on parle de la notion d'équation de droite. En français courant, on pourrait de la même façon distinguer la langue d'un bœuf donné du plat « langue de bœuf ».

Ces quatre usages sont évidemment naturalisés pour des individus maîtrisant les concepts mathématiques associés, et ce d'autant plus que le mot « de » passe inaperçu. On peut raisonnablement penser que l'appropriation de ces différents usages par les élèves représente une difficulté, probablement encore plus importante pour les élèves qui ne peuvent s'appuyer sur leur maîtrise du français courant et d'autant plus que les constructions syntaxiques ne prennent pas la même forme dans les autres langues de leur répertoire.

En effet, une étude de traductions possibles de ces quelques exemples dans d'autres langues (voir annexe) nous a permis de constater que ces trois usages ne sont pas pris en charge de la même façon qu'en français. Par exemple, en anglais, dans l'usage 1, « de » est traduit par « *from* », l'usage 2 est traduit par « *of* » et l'usage 3 est traduit par « *with* ». On retrouve un phénomène similaire en allemand. En italien et en espagnol, les usages 1 et 2 sont traduits par « *de / da / di / del* », d'une façon assez proche du français, mais l'usage 3 est traduit par « *con* ». En turc, comme mentionné plus haut, la construction prépositionnelle française est prise en charge par l'ajout de terminaisons. En arabe littéraire, enfin, on trouve des mots traduisant littéralement « de... à... » : « *min... illa...* », mais l'usage 2 et l'usage 3 sont pris en charge par des constructions avec des affixes ajoutés aux mots pour préciser les cas engendrant des déclinaisons.

Lors du travail sur le cercle, dès le cycle 2⁹, les élèves ont été confrontés aux usages 2 et 3 dans les expressions « centre du cercle » et « cercle de centre O » et à l'usage 1 dans les questions liées à la distance.

Par ailleurs, caractériser un cercle (ce qui, du point de vue mathématique, signifie le désigner sans équivoque) suppose de préciser l'un des ensembles d'éléments suivants : son centre et la longueur de son rayon / son centre et un segment qui en est un rayon¹⁰ / son centre et un point lui

9. Élèves de 6 à 8 ans.

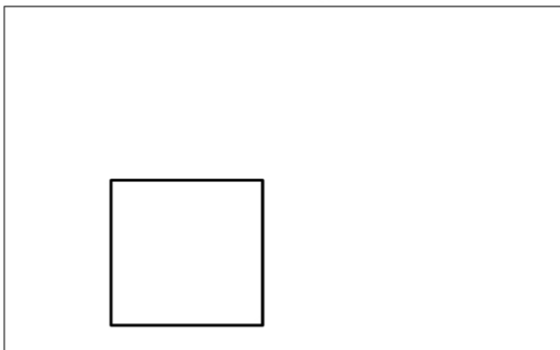
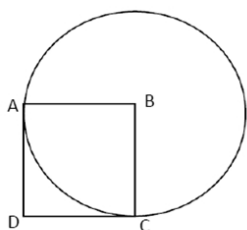
10. Rappelons le double sens des mots *rayon* et *diamètre* qui désignent à la fois chacun des segments (joignant le centre à un point du cercle / joignant deux points du cercle et passant par le centre) et la longueur commune aux segments de chacune de ces catégories. Nous reprenons le choix de Mathé et alii (à paraître) de désigner le premier sens par « rayon-segment » et le second par « rayon-nombre ».

appartenant / un segment qui en est un diamètre / son centre et la longueur de son diamètre, ou encore trois points. Plusieurs travaux ont par ailleurs montré la complexité de ce concept et des formulations associées (Bulf et Celi 2016, Beaugrand *et alii* 2021, Mathé *et alii* à paraître).

La formulation experte pour désigner un cercle repose sur l'usage de type 3 de la préposition « de » avec des locutions commençant par « le cercle de » étant ensuite complétées par la mention du centre et du rayon-nombre ou diamètre-nombre / du centre et d'un rayon-segment / du centre et d'un point / d'un diamètre-segment. Une formulation de la définition du cercle proposée en sixième (que l'on trouve parfois dès le CM2 voire le CM1) inclut ainsi les usages 1 et 3 : « le cercle *de* centre O et *de* rayon r est l'ensemble *des* points situés à la distance r *du* point O ».

L'exercice 1 du test visait à identifier les formulations disponibles chez les élèves.

Exercice 1 : On a commencé à reproduire la figure ci-dessous dans le cadre, en l'agrandissant. Termine la reproduction.



Une camarade est absente, elle n'a pas vu pas la figure de départ mais elle a le cadre avec le quadrilatère dessiné. Quelle consigne peux-tu lui donner, par téléphone, pour construire correctement le cercle ? Trouve deux formulations possibles.

Première formulation possible :

.....

.....

Autre formulation possible :

.....

Doc. 4 : Exercice 1 du test.

Les formulations normalisées possibles attendues sont : « Trace le cercle de centre B et de rayon [AB] » ; « trace le cercle de centre B et de rayon 2,8 cm » (après avoir mesuré ¹¹) ; « trace le cercle de centre B et passant par A » (ou passant par C).

11. On peut aussi imaginer que des élèves aient mesuré sur la figure initiale, ils indiqueraient alors 1,3 cm.

En termes d'appropriation des pratiques langagières mathématiques, le test permet d'identifier le degré de maîtrise par les élèves du langage mathématique (sachant qu'ils sont confrontés aux formulations expertes depuis au moins 2 années).

Nous avons donc analysé les productions des élèves selon les critères suivants :

- La mention de deux informations pertinentes pour tracer le cercle (centre et rayon ou centre et point)
- Le terme employé pour désigner le centre du cercle (« centre » ou « milieu »)
- La désignation de la relation entre le cercle d'une part et son centre et son rayon d'autre part (utilisation de « de » ou d'un autre moyen syntaxique).

3.3 Résultats

Les tableaux suivants résument les résultats des analyses.

%	EF	EP
Non traité	37	26
mentionnent deux informations (centre et rayon OU centre et point)	59	30
désignation du centre : « centre » / « mil(l)ieu »	30/11	9/4
Pointe du compas	19	22
Effectifs	EF	EP
de centre B	2	1
dont le centre/milieu/milieu est (et) (le point) B	3	1
cercle qui a pour centre (/milieu/milieu) le point B	1	
B sera/est le centre du cercle	3	
prend B pour centre / prend pour centre B	1	1
pose la pointe/mine/pique du compas sur (le point) B	5	
au centre du cercle place le point B	1	

Doc. 5 : Résultats des réponses des élèves à l'exercice 1.

On peut noter tout d'abord la très faible utilisation de la forme attendue (3 élèves en tout). Par ailleurs, 41 % des élèves en EF et seulement 13 % des élèves en EP utilisent un mot pour désigner le centre du cercle (les autres faisant plutôt référence à une action, comme piquer le compas) : 30 % utilisent le mot « centre » (11 %, le mot « milieu ») dans la classe EF contre 9 % (4 %, le mot « milieu ») en EP. Enfin, seules 59 % des productions en classe EF et 30 % en EP mentionnent un couple d'éléments permettant de caractériser le cercle.

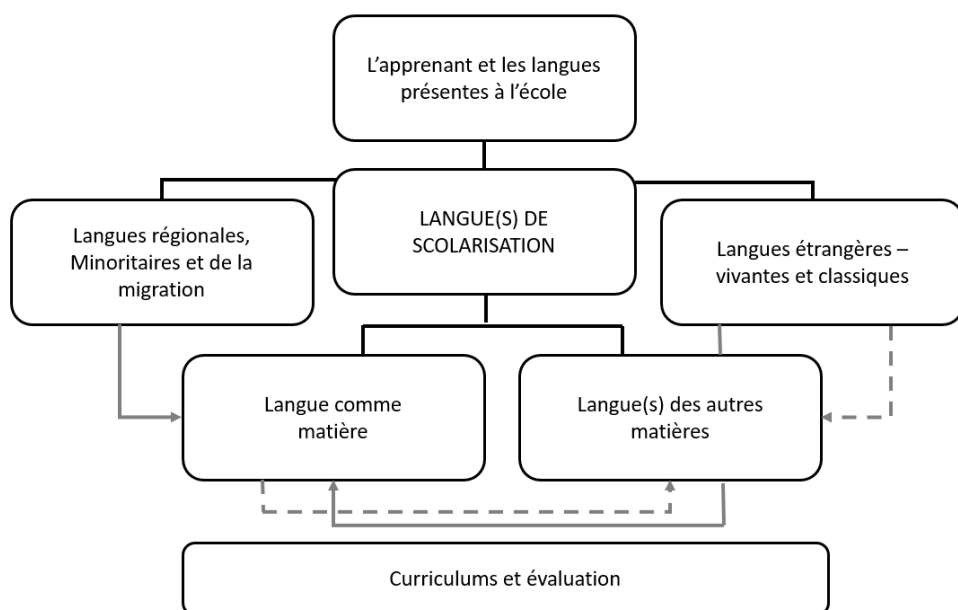
Un résultat intéressant réside dans la créativité dont les élèves font preuve pour mentionner la relation entre le centre et le cercle avec des formes très variées, pour la plupart tout à fait correctes grammaticalement (« dont le centre est », « qui a pour centre ») même si la plupart des solutions trouvées par les élèves ne consistent pas à exprimer la relation caractéristique du cercle avec son centre ou un/son rayon en une seule phrase. Toutefois, on observe ces éléments essentiellement dans la classe EF. Tout se passe comme si ces élèves ne maîtrisent pas encore les moyens des mathématiciens qui permettent d'exprimer ces relations de façon optimalement concise et conventionnellement reconnue, mais qu'ils puisent dans leurs ressources linguistiques en français pour exprimer la relation. Les élèves de la classe EP, quant à eux, produisent des énoncés tout aussi éloignés des formes expertes, mais moins correctes grammaticalement au regard des usages courants du français. Ces productions sont assez semblables à ce que, en acquisition du langage, on nomme interlangue (Selinker 1972). L'interlangue est un stade intermédiaire dans l'apprentissage ou l'utilisation d'une nouvelle langue. Elle est caractérisée par des processus de structuration successifs : le système construit par l'apprenant évolue selon les hypothèses conscientes ou non à propos des pratiques langagières attendues et des ressources.

4 Discussion

La présente discussion nous amène à réinterroger les pratiques langagières à la fois comme objet d'apprentissage et comme moyen d'apprentissage, les enjeux de l'un et de l'autre étant souvent largement sous-estimés dans les classes (de mathématiques). Plusieurs études de pratiques enseignantes concernant la symétrie orthogonale en sixième (Chesnaïs 2014, 2020, Chesnaïs *et alii* 2017) ont ainsi montré globalement la faible prise en charge des enjeux langagiers associés à cette notion. Certains modes de prise en charge apparaissent toutefois contribuer davantage aux apprentissages que d'autres : la mise en relation des enjeux langagiers avec les autres dimensions de l'activité mathématique (gestuelle-matérielle et conceptuelle) ou encore le fait d'introduire les formes langagières conventionnelles en lien avec l'activité réelle des élèves sur des tâches nécessitant la maîtrise des éléments langagiers visés.

Nos données montrent que proposer des temps de réflexion aux élèves pour désolidariser la fonction objet de la fonction moyen, y compris en s'appuyant sur des formulations autres qu'en français, pourrait présenter une certaine richesse et être un levier à la fois pour favoriser l'appropriation des formes langagières et, de façon dialectique, soutenir le processus de conceptualisation. En effet, si l'enseignant propose des activités qui montrent aux élèves qu'une réflexion sur les pratiques comme moyen d'apprentissage leur permet de mieux comprendre et produire en mathématiques, ceux-ci auront davantage conscience que la discipline mathématique n'est pas uniquement constituée d'objets mathématiques et qu'elle se transmet, se travaille au travers de pratiques langagières spécifiques. Ainsi, apprendre les mathématiques, c'est aussi apprendre à parler comme les mathématiciens pour pouvoir comprendre les textes mathématiques, mais aussi parce que ces pratiques langagières sont pour une large part nécessaires à l'activité mathématique (en réception et en production).

La réflexion méta sur les pratiques langagières permettrait également de dépasser la représentation « élève en situation de handicap linguistique » générée par le fait que l'élève est allophone, migrant nouvellement arrivé en classe de mathématiques, ou parce qu'il parle une ou d'autres langues que le français à la maison, ou bien encore parce qu'il évolue dans une catégorie socio-professionnelle familiale de faible revenu et n'a que peu accès aux pratiques langagières scolaires en dehors du temps passé au collège (Lahire 2019). Par ailleurs, des enfants évoluant dans des milieux familiaux de catégorie socioprofessionnelle supérieure peuvent aussi avoir des difficultés en mathématiques parce que les pratiques langagières mathématiques leur sont « étrangères ». Nous considérons donc l'étymologie « d'étranger » au sens latin *extraneus*, « du dehors, extérieur » ; c'est-à-dire qui n'est pas de la famille ou du pays. Cette prise de conscience est intéressante car les pratiques proposées ici ne sont donc pas seulement valables pour la catégorie des élèves les plus « étrangers » aux cours de mathématiques : tout élève a des degrés de xénité relatifs par rapport aux pratiques langagières mathématiques. Ainsi, si l'on reprend le schéma de la plateforme du Conseil de l'Europe concernant l'éducation plurilingue et interculturelle (voir document 6), la langue de scolarisation (pour nous le français), les pratiques langagières spécifiques à la discipline mathématique – langue ou langues de la ou des autres matières – peuvent être mises en perspectives avec « les langues présentes à l'école » (langues régionales, familiales, de la migration, langues vivantes étrangères, langues anciennes).



Doc. 6 : D'après la plateforme de ressources et références pour une éducation plurilingue et interculturelle (Conseil de l'Europe 2016, en ligne).

Par exemple, si Riem et Ilyasse, dont nous avons parlé plus haut, avaient l'occasion de revenir sur l'arabe, pour prendre conscience, de façon méta-, que des locutions distinctes existent bien en arabe et en français, ils pourraient peut-être mieux comprendre et mémoriser les formes attendues (Cummins 2005) dans ce type de réponse mathématique.

Enfin, si l'on reprend le tableau comparatif figurant en annexe, il est intéressant de constater que les élèves francophones peuvent tirer parti des langues vivantes étrangères apprises dans leur établissement. Par exemple, si on considère l'anglais, l'espagnol, l'italien et l'allemand, que nous avons sélectionnées car ces langues sont parmi les plus enseignées dans le système scolaire, les élèves pourraient distinguer plus facilement les différents usages du mot « de ». Ainsi pour « Distance d'un point à une droite » les traductions *from* et *von* permettent de mieux appréhender la notion de distance difficilement identifiable dans « de », hautement polysémique. Autre exemple, « le cercle de centre O » est traduit dans ces différents idiomes par « avec » : *Circle with center O* ; *cerchio con centro O* ; *círculo con centro O* ; *Kreis mit Mittelpunkt O*¹². Encore une fois, cette comparaison permettrait de mieux saisir la polysémie du « de » dans les pratiques langagières mathématiques tout en offrant la possibilité d'approfondir aussi les langues vivantes apprises et, en quelque sorte,

12. Un travail sur les traductions en turc et en arabe pourrait également être intéressant.

d'offrir des réflexions et apprentissages aux élèves qui ne soient plus le seul apanage des sections européennes qui ont la possibilité de faire des sciences ou d'autres disciplines en langue vivante.

De même, la façon de prendre en charge « symétrique » dans d'autres langues permettrait de faire la distinction entre la propriété et la relation, par exemple en montrant que les mots *symmetric* en anglais et *symmetrisch* en allemand sont réservés à l'expression de la propriété d'une figure, la relation étant exprimée par l'usage de *mirror-image* et *spiegelbild* ¹³.

Pour tous les élèves, ces expériences permettraient aussi des considérations générales sur les langues et leurs fonctionnements en matière de lexique (par exemple, dans notre cas, les mots en turc sont les mêmes qu'en arabe) et de syntaxe (le turc a un système de déclinaison que l'on ne retrouve pas en arabe ni dans les langues romanes et l'ordre des mots n'est pas le même). Ces observations seraient potentiellement bénéfiques pour tous les élèves : arabophones, turcophones et francophones. Elles le seraient également pour les professeurs de mathématiques qui prennent davantage conscience que les pratiques langagières en mathématiques ne vont pas de soi et nécessitent un travail de relativisation et de construction, rendu possible grâce aux autres langues en présence. *In fine*, une meilleure appropriation de ces pratiques est ainsi visée.

Conclusion

Il semble nécessaire de penser de (nouvelles) pratiques d'enseignement (et des formations d'enseignants associées) qui permettraient un travail sur la langue et une véritable attention au langage et aux langues. Cette logique est largement partagée dans la recherche en didactique des mathématiques en France ou en *Mathematics Education* à l'international et s'inscrit dans les questions liées à la construction de pratiques d'enseignement intégrant une sensibilité pour le langage (l'idée de *language and mathematics integrated practices*, Erath et alii 2021). Certains principes en sont bien établis, comme le fait que le travail langagier doit être pris en charge pour lui-même, avec une attention à leur construction progressive, veillant notamment à ce que l'introduction des formes conventionnelles ne soit pas trop précoce, mais en s'inscrivant dans le cadre d'une activité mathématique suffisamment riche, sur des tâches qui donnent du sens aux concepts et aux pratiques mathématiques (notamment la résolution de problème). Les situations de formulation au sens de la théorie des situations (Brousseau 1998) constituent une ressource intéressante pour ce type de travail (voir par exemple Bulf et alii 2015 ou Mathé et alii à paraître, pour des propositions de situations de formulation concernant le cercle aux cycles 2 et 3).

13. La difficulté pour les élèves travaillant dans ces langues étant alors, à l'inverse du français, de faire le lien entre la propriété et la relation.

Il s'agit également de promouvoir une attention au langage et aux langues avec la nécessité d'une vigilance, à la fois dans la production et la réception, en particulier pour des élèves allophones qui ont encore des besoins de développement de compétence en français (mais les élèves n'en ont-ils pas tous besoin, à différents niveaux ?). Il semble également intéressant de penser des pratiques de travail du langage qui favorisent la créativité des élèves dans un contexte de construction de sens des notions mathématiques, et de s'appuyer sur cette créativité dans le processus d'apprentissage. C'est une occasion pour tous d'atteindre les objectifs de ce que les programmes nomment la maîtrise de la langue.

Travaux cités

Auger Nathalie, 2007, « Enseignement des langues d'origine et apprentissage du français : vers une pédagogie de l'inclusion », dans M.-M. Bertucci et C. Corblin (dir.), *Enseigner les langues d'origine, Le français aujourd'hui*, septembre 2007, n° 158, p. 79-88.

Auger Nathalie, 2021, « Que faire en formation de la pluralité des langues ? », dans F. Lorcerie (dir.), *Éducation et diversité. Les fondamentaux de l'action*, Presses universitaires de Rennes, p. 235-249.

Barrier Thomas, Durand-Guerrier Viviane, Mesnil Zoé, 2019, « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique*, 13-1. Disponible en ligne.

Beaugrand Céline, Mendonça Dias Catherine, Bulf Caroline, Celi Valentina, Millon-Fauré Karine, 2021, « Tracé du cercle et circulation des discours (deuxième partie). Approche linguistique des interactions verbales », *Petit x*, n° 114, p. 5-32.

Bialystok Ellen, 1988, 'Levels of bilingualism and levels of linguistic awareness', *Developmental Psychology*, 24(4), p. 560-567.

Brousseau Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bulf Caroline, Céli Valentina, 2016, « Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas », *Grand N*, n° 97, p. 21-58.

Bulf Caroline, Mathé Anne-Cécile, Mithalal Joris, 2015, « Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 35, p. 7-36.

Chesnais Aurélie, 2014, « Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs » *Revue française de pédagogie*, n° 188, p. 63-73.

Chesnais Aurélie, 2018, *Un point de vue de didactique des mathématiques sur*

les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement, Note de synthèse en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches. Université de Montpellier.

Chesnais Aurélie, 2020, L'apport d'un point de vue de didactique des mathématiques sur la question des inégalités scolaires, *Éducation et didactique*, n° 14, p. 49-79.

Chesnais Aurélie, Durand-Guerrier Viviane, Perrin-Glorian, Marie-Jeanne, 2017, « Regards croisés sur quelques enjeux didactiques de l'enseignement de la symétrie orthogonale à la transition école-collège », *Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques*, Paris, 20-26 août 2017.

Chesnais Aurélie, Munier Valérie, Molvinger Karine, 2013, « Difficultés langagières spécifiques des élèves de milieu social défavorisé en mathématiques et en sciences à la transition école-collège en France (élèves de 10 à 12 ans) », *Colloque de l'Association de recherches en éducation française (AREF)*, Montpellier, 27-30 août 2013.

Cummins Jim, 2005, "Teaching for cross-language transfer in dual language education: Possibilities and pitfalls", dans *Teachers of English to Speakers of Other Languages (TESOL) Symposium on dual language education: Teaching and learning two languages in the EFL setting*, p. 1-17. Disponible en ligne.

Durand-Guerrier Viviane, 2013, « Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques », dans A. Bronner et alii (dir.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 233-265.

Erath Kristin, Ingram Jenni, Moschkovich Judit, and Prediger Susanne, 2021, "Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: a review of the state of development and research", *ZDM Mathematics Education*, n° 53, p. 245-262. Disponible en ligne.

Hache Christophe, 2015, « Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec "avec" », *Petit x*, n° 97, p. 27-43.

Hakuta Kenji, 1986, *Mirror of Language : The Debate on Bilingualism*, New York, Basic Books.

Laborde Colette, 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'État, Grenoble, Université Joseph Fourier.

Lahire Bernard, dir., 2019, *Enfances de classe. De l'inégalité parmi les enfants*, Paris, Seuil.

Mathé Anne-Cécile, Maillot Valérie et Ribennes Julien, 2020, « Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2 », *Grand N*, n° 108, p. 27-58.

Morin Edgar, 2000, *Les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur*, Paris, Seuil.

Perrin-Glorian Marie-Jeanne, Mathé Anne-Cécile et Leclercq Régis, 2013, « Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments », *Repères-IREM*, n° 90, p. 5-41.

Selinker Larry, 1972, "Interlanguage", *International Review of Applied Linguistics*, vol. 10, issue 3, p. 209-231.

Vergnaud Gérard, 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Berne, Peter Lang.

Vergnaud Gérard, 1990, « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, tome 10, fasc. 2-3, p. 133-170.

Vergnaud Gérard, 1991, « Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques ». *Revue française de pédagogie*, t. 96, p. 79-86.

Vergnaud Gérard, 2001, « Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance », dans J. Portugais (dir.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, Actes du colloque GDM-2001.

Annexe

(ci-contre : Traductions possibles des exemples en 6 langues)

Français	Arabe littéral	Turc	Allemand	Anglais	Italien	Espagnol
Distance entre un point et un autre	Massaafa байна ноқта wa okhra distance entre (<i>un</i>) point et (<i>un</i>) autre	Bir nokta ile bir başka nokta <i>ara</i> sindaki <i>mesafe</i> <i>literal.</i> Un point avec un autre point intervalle iki nokta arasındaki <i>mesafe</i> <i>literal.</i> Deux point intervalle	Abstand zwischen einem Punkt und einem anderen	Distance between a point and another	Distanza tra un punto e un altro	Distancia entre un punto y otro
Distance entre 2 points	Massaafa байна ноқтагын		Abstand zwischen einem Punkt und einem anderen	Distance between two points	Distanza tra due punti	Distancia entre dos puntos
Distance d'un point à une droite	Massafa min ноқта илла mustaqim	« - (n)den... - (y) » aynen « bir noktadan bir çizgiye olan mesafe » deki gibi. <i>literal.</i> comme un point (+ ablatif), une ligne droite (<i>idée de mesure</i>)	Entfernung von einem Punkt zu einer Linie	Distance from a point to a line	Distanza da un punto a una retta/linea	Distancia de un punto a una recta/linea
« de ... à ... » au sens « à partir de »	min ... илла ...		Von ... zu ...	From ... to ...	Da ... a ...	De ... a ...
Centre du cercle (du = de le)	Markaz addayira Centre (<i>de</i>) le cercle	dairenin merkezi	Center of the circle	Center of the circle; circle's center	Centro del cerchio	Centro del círculo
Centre d'un cercle	Markaz dayira Centre (<i>d' un</i>) cercle		Mittelpunkt eines Kreises	Center of a circle	Centro di un cerchio	Centro de un círculo
Cercle de centre O	Dayiera thata markaz O (thata : de, caractéristique)	O merkezi daire O centre-AVEC cercle	Kreis mit Mittelpunkt O	Circle with center O	Cerchio con centro O ; cerchio di centro O	Círculo con centro O
Dont le centre est O	Dayiera markazouha O cercle <i>dont</i> son centre <i>est</i> O (ha possessif)		Kreis mit dem Mittelpunkt O	Circle whose center is O	Il cui centro è O Centro avente centro O (<i>literal.</i> Centre ayant un centre O)	Con centro es O