4

Construire des récits pour raisonner en mathématiques

Marianne Moulin – Université d'Artois, LML,
et Université de Lille, INSPE Lille HdF

Introduction

Dans le cadre de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, l'activité langagière est souvent pensée au travers des obstacles qu'elle porte : nécessité d'acquérir un vocabulaire spécifique, utilisation de mots dont l'usage courant entre en conflit avec le sens mathématique, exigence de formalisme pour « bien dire » les mathématiques, etc. La ressource *Mathématiques et maîtrise de la langue* (MEN 2016) présente ainsi les « langages des mathématiques » comme des objets d'étude :

> Les mathématiques recourent à des usages complexes de la langue courante et mobilisent des pratiques langagières qui leur sont spécifiques [...] le travail de la langue et de ses usages en cours de mathématiques (à l'écrit ou à l'oral) est indispensable, de même qu'une réflexion [...] sur l'articulation entre les usages courants de la langue naturelle, un symbolisme particulier et certains usages formels de la langue. (*ibid.* : 1)

Cependant, au-delà de ces nécessités, le langage est également présenté dans cette ressource comme un « moyen d'apprentissage » (p. 9) et un « outil pour enseigner » (p. 11).

Dans ce chapitre, nous explorons cette idée de « moyen d'apprentissage » et mettons en évidence le potentiel didactique de l'activité de production de récit comme support à l'activité mathématique. Nous nous appuyons pour cela, dans une première partie, sur les travaux de Bruner (2002, 2008) ainsi que sur le modèle de transformation des connaissances proposé par Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) qui nous permettent de considérer le récit non pas comme un objet à étudier, mais comme un mode de pensée permettant de mobiliser, de structurer et de transformer les connaissances. Dans une seconde partie, nous nous appuyons sur les différentes fonctions du récit pour adapter le modèle proposé afin de proposer des situations où le récit s'intègre au milieu didactique. Enfin, nous illustrons par plusieurs exemples les apports du récit et de l'activité de production de récit dans des situations de résolution de problèmes, d'élaboration de conjectures, de justification et de preuves.

Si elle peut faire penser aux narrations de recherche (IREM de Paris : 2002, Sauter : 1998), notre approche s'en distingue, car elle vise à une co-construction immédiate entre activité de production de récit et activité mathématique. Dans le cadre des narrations de recherche, le récit permet aux élèves de verbaliser leur démarche *a posteriori*. Les apports de cette pratique se font dans un second temps, lors de la résolution de nouveaux problèmes de mathématiques.

1 Élaborer des récits pour mobiliser, structurer et transformer des connaissances

Dans cette première partie, nous nous appuyons sur les travaux de Bruner (2005, 2008) pour caractériser le récit comme un support à l'activité mathématique et nous présentons le modèle de transformation des connaissances de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998). Ce modèle sera adapté en seconde partie et nous permettra d'analyser les différentes situations explorées dans ce chapitre.

1.1 Le récit comme un mode de pensée

Dans le langage courant, il est fréquent de considérer les mots « histoire » et « récit » comme étant synonymes. Histoire et récit s'inscrivent en fait dans un rapport signifié / signifiant (histoire / récit) et s'articulent avec la narration dans une relation triangulaire. Genette (1972) propose le terme de triade narratologique accompagné des définitions suivantes :

(1) l'histoire correspond aux évènements racontés, aux référents des signes textuels ;

(2) le récit correspond à l'énoncé narratif (avec tous ses éléments de structure) et aux signes qui composent le texte ;

(3) la narration est l'empreinte (plus ou moins marquée) de l'acte d'énonciation.

Bruner (2008) fait une différence entre « l'objet récit » (le texte ou le discours) et « le mode de pensée narratif ». Il précise notamment qu'il est possible de « distinguer avec précision ce qui appartient au mode de pensée narratif de ce qui est texte ou discours narratif » (p. 166). Ainsi, produire un récit, ce n'est pas « juste » raconter une histoire. Écrire un récit nécessite de faire des choix et de s'inscrire dans un mode de pensée qui a des contraintes. En effet, « les récits font plus que raconter, ils imposent leur structure, leur réalité contraignante à ce que nous vivons » (p. 79). Le récit est ainsi « une structure pour organiser notre savoir, en tant que véhicule dans le processus de l'éducation, particulièrement dans le domaine des sciences » (p. 149).

Ce positionnement du récit comme un mode de pensée impose de reconsidérer notre vision première du récit. Oui, le récit a une dimension linguistique ; qu'il soit oral ou écrit, le récit est un objet textuel, racontant une histoire et qui a des caractéristiques de formes singulières. Mais dans notre travail, nous le considérons avant tout au travers des processus cognitifs engagés lors de son élaboration. Le récit peut se définir comme une production orale ou écrite, relatant une succession d'événements organisés autour d'une intrigue, un mode de pensé au regard des fonctions heuristiques et structurantes qu'il met en jeu.

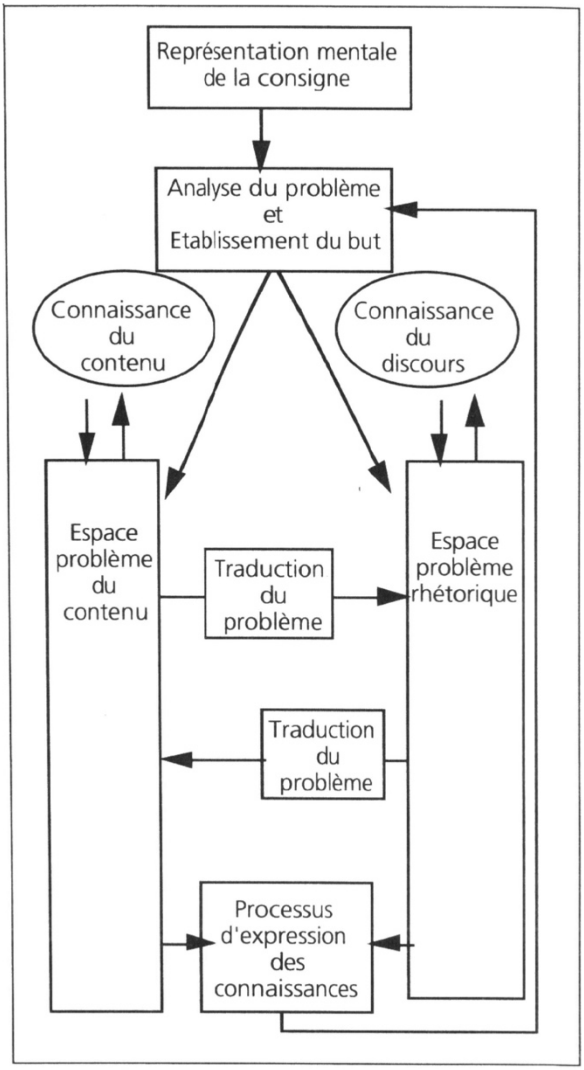
Envisager le récit comme un mode de pensée et le proposer dans le cadre d'une activité mathématique, ce n'est pas ajouter des contraintes, mais au contraire, s'appuyer l'inclinaison naturelle de l'être humain pour le récit. Bruner précise ainsi que « tout indique [...] que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences et nos connaissances prend précisément une forme narrative » (Bruner 2008 : 151). Dès l'âge de six ans, les enfants disposent d'une structure narrative comparable à celle des adultes qui permet la construction d'histoires complexes (Fayol 1985). Notre intention est donc de permettre aux élèves de s'appuyer sur leurs compétences langagières et narratives pour développer des connaissances et des compétences mathématiques.

Le récit n'est pas un simple outil de communication. Raconter ce n'est pas seulement exprimer des connaissances mais bien, comme nous allons le voir, une potentialité de construire, structurer et transformer des connaissances.

1.2 Modèle de transformation des connaissances

En observant la pratique de lecture et d'écriture de différents publics, Scardamalia et Bereiter (1998) ont développé plusieurs modèles afin de décrire les processus mis en jeu. Celui qui nous intéresse est celui de la « transformation des connaissances » (doc. 1). Ce modèle met en évidence une « interaction dialectique » entre deux espaces problèmes lors de la rédaction d'un texte : l'espace problème du contenu en lien avec les connaissances du domaine et l'espace problème rhétorique auquel est soumise la personne qui rédige.

Ainsi, lorsqu'une personne est dans une situation de rédaction (à l'oral ou à l'écrit), elle s'inscrit dans une démarche (doc. 1 : case analyse du problème et établissement du but) qui doit prendre en charge les éléments de contenu et les éléments rhétoriques. Dans une telle situation, il est assez naturel de penser que plus l'expertise du contenu est grande, mieux la personne pourra l'exprimer (doc. 2 : flèche de gauche à droite). Nous avons souvent tendance à dire que le fait d'être capable d'expliquer quelque chose est la preuve que le sujet est maîtrisé et à l'inverse que l'impossibilité d'expliquer à un tiers met en évidence une maîtrise insuffisante du contenu. Ce qui est intéressant dans cette idée d'interaction dialectique proposée par Scardamalia et Bereiter, c'est qu'il existe également une relation dans l'autre sens (doc. 2 : flèche de droite à gauche).



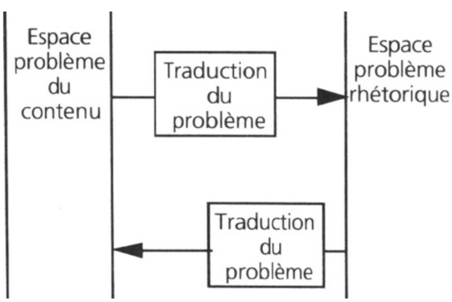
Structure du modèle de transformation des connaissances.

Doc. 1 : Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia et Bereiter 1998).

En rédigeant en texte, en présentant quelque chose, nous mettons nos connaissances en perspective, nous les reconsidérons et cela nous conduit à mieux comprendre. Les processus de rédaction inhérents à l'espace problème rhétorique agissent sur les processus de traitement de connaissances de l'espace problème du contenu : « L'implicite dans ce processus consiste en une relation synergique entre l'expertise en lecture-rédaction et l'expertise concernant le thème du discours » (Scardamalia et Bereiter 1998 : 34).

Doc. 2 : Modèle simplifié.

Ainsi, vouloir « bien » parler de quelque chose, le « bien » étant à définir, améliore nos connaissances sur ce quelque chose. Scardamalia et Bereiter parlent de « transferts » de problèmes et de résultats : « En général, les résultats obtenus à partir de l'espace du contenu sont transférés en tant que buts rhétoriques » (*ibid.* : 31). Pour effectivement expliquer ou persuader à propos d'un contenu (mathématique ou non), nous nous confrontons à des problèmes rhétoriques (doc. 3 : flèche du haut) : défendre une position, résumer des informations, construire une transition, rendre intéressant ou plus clair, choisir ses mots, etc.



Doc. 3 : Transferts (extrait du doc. 1).

Ces problèmes rhétoriques nous obligent à questionner l'espace du contenu. Ces problèmes rhétoriques sont « transférés de l'espace rhétorique à l'espace du contenu sous forme de problèmes et de questions (doc. 3 : flèche du bas). Ceux-ci peuvent influencer la connaissance du domaine de diverses façons » (Scardamalia et Bereiter 1998 : 34) : étayage et vérification d'informations, analyse critique, hiérarchisation, découverte de relations, sélection d'informations, construction de nouvelles idées, analyse approfondie et conceptualisation, etc.

Ce modèle de transformation des connaissances nous conduit à formuler une première hypothèse : le placement des élèves dans une situation de production langagière (orale ou écrite) permet, sous certaines conditions, la mobilisation, la construction et la structuration de connaissances. Nous la mettons à l'épreuve dans la suite de ce chapitre.

2 Construire des récits pour structurer, problématiser, expliquer en mathématiques

Dans cette seconde partie, nous proposons une adaptation du modèle de transformation des connaissances. L'élaboration de ce modèle théorique nous permet de concevoir et d'analyser des tâches mathématiques associées à la production d'un récit.

2.1 Fonctions heuristiques et structurantes du récit

Bruner (2008) met en avant trois fonctions du récit : (1) la structuration, (2) la problématisation et (3) l'explication. Le récit permet de structurer notre pensée :

> Tout indique [...] que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences et nos connaissances prend précisément une forme narrative. (p. 151)

Pour Ricœur (1983, 1984), c'est la mise en intrigue qui permet cette organisation et procure au récit une fonction structurante. Il la définit comme une action qui permet le passage d'une séquence linéaire d'évènements ou de phénomènes dissociés (plus ou moins contingents) à un agencement cohérent au niveau des relations spatiales, temporelles et causales. Il permet la construction de ce que Ricœur appelle le *holos*, qui est l'assemblage cohérent d'éléments qui pouvaient sembler disparates au départ. Le récit est support qui « propose des moyens simples et souples pour traiter les résultats incertains de nos projets et de nos anticipations » (Bruner 2008 : 40). En élaborant ou en modifiant un récit, il est possible d'entrer dans une démarche de problématisation, de tester des hypothèses, de se remettre en question et de recommencer. Nous sommes d'ailleurs plus à même d'y accepter l'erreur que dans un espace mathématique :

> Nous prenons facilement les versions concurrentes d'une même histoire avec un grain de perspective, bien plus que nous ne le ferions avec des arguments ou des preuves. (*ibid.* : 178)

Les fonctions du récit font ainsi écho au modèle de transformation des connaissances. Produire un récit, ce n'est pas juste exprimer des connaissances, c'est aussi les structurer et en construire de nouvelles. Même s'il relève de la fiction le récit est ainsi un support pertinent pour faire des mathématiques :

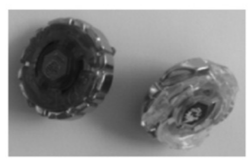
> Véritable expérience de pensée, la littérature peut effectivement permettre aux enfants de mieux comprendre le monde, de le rendre

> plus intelligible. La fiction littéraire n'est pas seulement de l'ordre de l'imaginaire, elle dispose d'une fonction référentielle qui dévoile des dimensions insoupçonnées de la réalité. Cette fonction référentielle semble d'ailleurs évidente pour les enfants, tant leur rapport à la fiction et à l'imaginaire est constitutif de leur condition. (Chirouter 2010 : 10)

2.2 Exemple de circulation entre espace rhétorique et espace mathématique

Dans le cadre d'une séquence plus complète sur laquelle nous reviendrons, nous avons donné le problème suivant à des élèves de cycle 3 : « Laura joue aux toupies. Pendant le début de la partie, elle gagne cinq points. En tout elle a gagné trois points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ? ». Ce problème est agrémenté d'un système de gains et de pertes de points connu des élèves (doc. 4) mais qu'il n'est pas nécessaire de le connaître pour déterminer le nombre de points perdus pendant la fin de la partie. La question aurait d'ailleurs pu être : « Combien Laura a-t-elle gagné ou perdu de points pendant la fin de la partie ? ».

- 1 pour le joueur qui lance sa toupie en dehors du stadium ;
- 3 pour le joueur qui touche le stadium durant la manche ;
+3 pour le joueur qui envoie la toupie de son adversaire hors du stadium ;
+2 pour le joueur qui coince la toupie de son adversaire en zone de pénalité ;
+1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire tout en restant dans le stadium.



Doc. 4 : Système de points.

Cependant, dans la question posée, l'accent n'est pas mis sur les scores et les données numériques mais sur les événements : « que s'est-il passé ? ». Analysons la réponse de Théo (doc. 5) ainsi que l'explication orale qui l'accompagne (doc. 6).

pendant 2 manche elle a
tiren à côte du stadium
car 5 - 1 - 1 = 3 et il n'y a pas
de -2 point

Doc. 5 : Réponse de Théo.

Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être fait …
puisque en tout on disait qu'elle gagnait trois points.
Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc.
Et puis que y a pas dans la règle moins deux points, y a que moins un ou moins trois (…)
Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches,
deux fois en tirant à côté du stadium comme ça, ça fait moins deux.

Doc. 6 : Transcription de l'explication.

Le raisonnement décrit ici débute par une réflexion centrée sur des aspects relatifs aux événements du récit : l'énoncé « en tout elle a gagné 3 points » suggère à l'élève une fin de partie en une étape. L'expression « en tout » est interprétée dans l'espace rhétorique comme une limitation du nombre de manches sur l'ensemble de la partie et le conduit à penser que « la fin de la partie » est composée d'une seule manche. Il s'engage ensuite dans le calcul de la valeur de la transformation. Il s'éloigne des évènements et du récit et entre dans un travail mathématique et détermine la transformation : « Elle perd deux points donc ». Il revient ensuite au récit en s'attachant à déterminer les évènements permettant cette perte de deux points et se rend compte qu'il n'est pas possible de la réaliser en une seule étape : « Et puisque que y a pas dans la règle moins deux points […] moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches ». Ce travail de justification qui s'intéresse aux événements et non directement aux scores et conduit Théo à modifier son idée initiale et à envisager deux manches pour la fin de la partie. Enfin, il réinvestit le domaine mathématique pour valider « comme ça, ça fait moins deux » et conclure. Dans sa réponse écrite, l'élève propose un calcul qui prend en compte l'obligation de faire deux manches pour perdre deux points et non son calcul initial.

Cet exemple met en évidence la circulation du travail de l'élève entre deux espaces de travail : un espace rhétorique au travers des évènements du récit et un espace mathématique au travers du travail sur les scores. Les enjeux de l'espace problème rhétorique sont questionnés au regard des contraintes mathématiques et remis en cause. La solution au problème rhétorique est explorée et validée dans l'espace de contenu mathématique. Les connaissances, les enjeux, les problèmes et les raisonnements circulent facilement d'un espace à l'autre ce qui permet aux élèves, comme nous le verrons dans la suite, de conduire des raisonnements complexes et de s'engager dans l'élaboration de preuves.

Il s'agit à présent de se demander à quelles conditions cette synergie pourra opérer et de déterminer les situations qui peuvent permettre une interaction entre les processus langagiers et mathématiques.

2.3 Quels récits construire en mathématiques ?

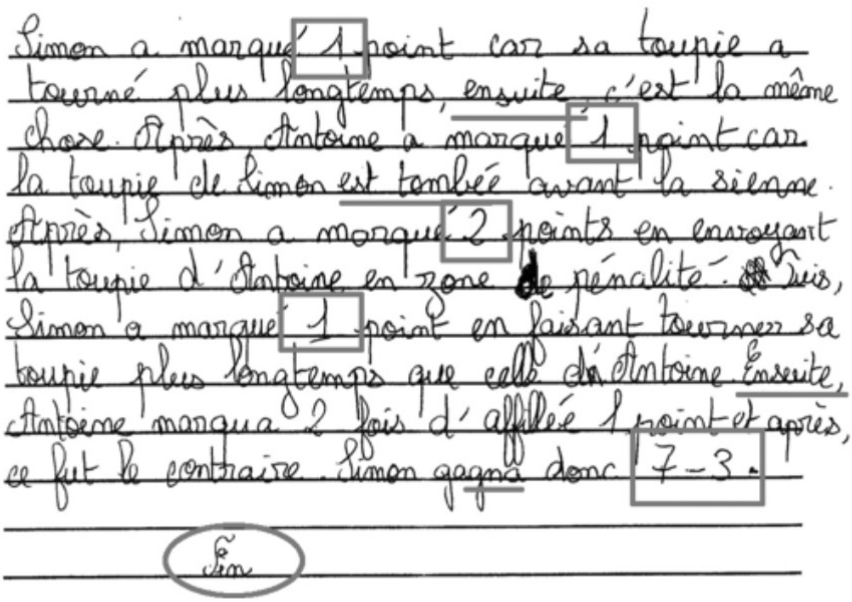
Les situations présentées dans ce chapitre sont construites autour du jeu de toupies[1] décrit dans notre premier exemple. À partir de ce jeu, il est possible de construire deux types de récits : des récits descriptifs de parties réalisées ou des récits d'anticipation de parties qui n'ont pas eu lieu.

Dans le cas de récits descriptifs :

– le déroulement des manches peut devenir des événements du récit ;

– les points, les scores sont inclus dans le récit comme des informations ;

– les règles du jeu, parce qu'elles ont été suivies durant la partie, sont prises en charge automatiquement.


Simon a marqué 1 point car sa toupie a tourné plus longtemps, ensuite, c'est la même chose. Après Antoine a marqué 1 point car la toupie de Simon est tombée avant la sienne. Après, Simon a marqué 2 points en envoyant la toupie d'Antoine en zone de pénalité. Puis, Simon a marqué 1 point en faisant tourner sa toupie plus longtemps que celle d'Antoine. Ensuite, Antoine marqua 2 fois d'affilée 1 point et après, ce fut le contraire. Simon gagna donc 7-3.

Fin

Doc. 7 : Récit descriptif de partie jouée.

Sur cet exemple (doc. 7), l'élève raconte une partie jouée. Nous repérerons dans le texte des marqueurs de récit (transitions, concordance des temps, le mot « fin »). La succession des scores est organisée chronologiquement, étape par étape puis par regroupements. Même dans ce récit descriptif, le temps du récit n'est pas celui de l'histoire et l'élève a fait des choix pour raconter. Nous ne le développons pas ici, mais il parait important de pointer que dans ce type de situation, l'activité mathématique peut être au

1. La partie oppose deux joueurs et se termine quand un joueur ou une joueuse atteint au moins sept points. Au signal, chacun lance sa toupie dans un stadium. La manche se termine quand une des toupies ne tourne plus, est coincée dans une zone de pénalité, sort du stadium ou si une personne touche le stadium. Les points sont attribués à chaque manche (document 4).

service d'un travail sur la langue.

En construisant le récit d'une partie imaginaire, l'élève n'est plus dans la description mais dans l'anticipation :

– le déroulement de la partie est toujours rapporté au travers des événements du récit ;

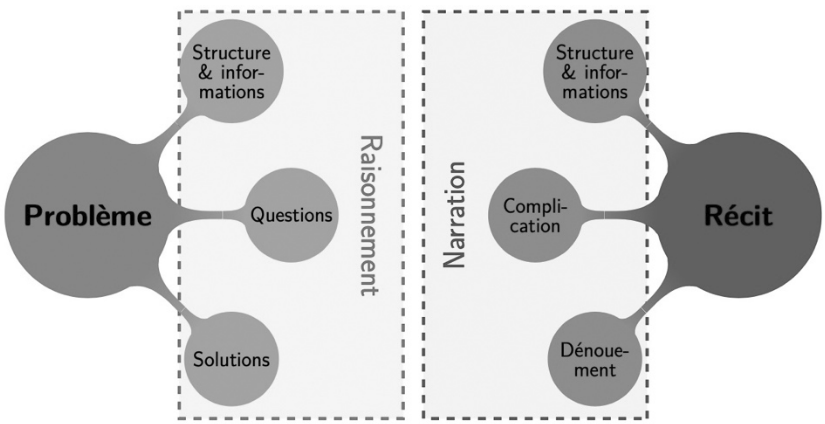
– mais les points, les scores ne sont plus pris en charge automatiquement comme des informations. Ils ont le statut d'objet mathématique et évoluent au fil des événements selon les règles du jeu ;

– les règles du jeu deviennent une « axiomatique locale » (Tarsky 1969), un ensemble de règles qui fixe ce qu'il est possible ou non de faire.

L'élève n'est plus dans une situation de communication, où il ou elle raconte ce qu'il s'est passé, mais dans un travail d'anticipation, de formulation et de validation. En racontant une partie imaginaire, l'élève doit prendre en compte l'ensemble des règles rhétoriques et mathématiques.

2.4 Espace problème rhétorique et espace problème du contenu

En conclusion de cette partie, nous proposons de caractériser plus précisément nos deux espaces problèmes (document 8).

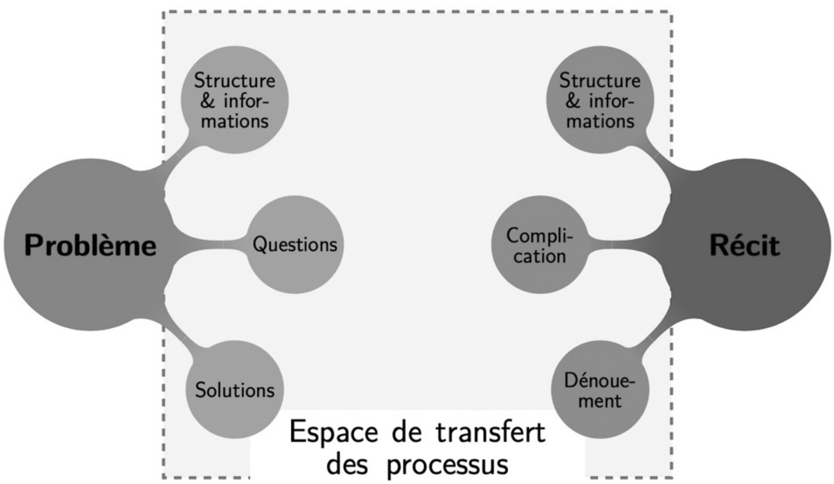


Doc. 8 : Mise en regard de deux espaces problèmes.

– Espace de contenu. Un problème de mathématique, pensé dans son entièreté, en y associant l'activité de résolution. Composé d'une structure contenant des informations (mathématiques ou non), un problème pose une ou plusieurs questions auxquelles il est possible de trouver une solution après l'élaboration d'un raisonnement qui prend en charge des objets mathématiques.

– Espace rhétorique. Le récit est une production structurée relatant une succession d'événements organisés autour d'un élément problématique. Il met traditionnellement en jeu des personnages engagés dans des actions dans un cadre spatiotemporel déterminé. La construction et la résolution de l'intrigue, et donc l'activité de narration sont des leviers dans une activité de problématisation (Orange-Ravachol et Triquet 2007, Triquet 2007).

Dans l'espace de contenu, l'établissement d'un raisonnement met en jeu un ensemble de processus visant à établir de nouveaux résultats ou à vérifier un fait proposé à la discussion. Il s'inscrit dans un domaine particulier et en respecte les contraintes. Cette caractérisation du raisonnement fait écho aux fonctions du récit et aux processus qui interviennent dans la narration. En accord avec le modèle de transformation des connaissances, nous pouvons faire l'hypothèse que ces deux modes de pensées, raisonnement et narration, peuvent interagir et que des processus relatifs à un espace peuvent se transférer dans l'autre. Il est ainsi possible d'envisager une co-construction entre l'activité de raisonnement et de narration (document 9).



Doc. 9 : Espace de transfert des processus.

Nous pouvons reformuler notre hypothèse : Dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes, la construction d'un récit visant à répondre à la situation problématique peut participer à la structuration, la production et la justification du raisonnement. Nous proposons dans la section suivante des illustrations de cette co-construction.

3 S'appuyer sur le récit pour raisonner en mathématiques

Dans cette partie, nous proposons différents exemples permettant d'illustrer le potentiel de la production de récits dans l'élaboration et la justification de raisonnements en mathématiques. Nous nous appuyons sur une expérimentation qui a été conduite dans six classes de cycle 3, réparties dans trois écoles élémentaires et regroupant cent treize élèves qui n'ont pas l'habitude de produire de récits ailleurs qu'en production écrite (Moulin 2014). Sur quatre séances, nous avons placé les élèves dans des situations de résolution de problèmes, d'émission et de justification de conjectures en convoquant ou non le récit dans la consigne.

3.1 Écrire un récit pour émettre et justifier des conjectures

Après avoir joué et raconté quelques parties, nous avons demandé aux élèves d'émettre des conjectures sur deux aspects du jeu : « À ton avis quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une partie ? » et « À ton avis, combien de manches sont nécessaires pour terminer une partie ? ». Le récit n'est pas convoqué par la consigne, cependant, nous avons retrouvé dans les productions des élèves la tendance naturelle au récit évoquée par Bruner. Quantitativement, plus de moitié des élèves s'engage dans la production d'un possible explicatif, c'est-à-dire d'un récit décrivant une partie correspondant à leur proposition (document 10). Seulement quinze élèves ont utilisé des arguments mathématiques basés directement ou uniquement sur les règles du jeu.

Élève 1	9 points c'est le maximum *car si on éjecte de l'arène la toupie adverse 3 fois cela fait 9 points car 3 x 3 = 9.*
Élève 2	*Si le gagnant fait 3 + 3 + 3 + 3 = 12 donc il peut avoir 12 points.*
Élève 3	*À la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant donc j'ai +1. À la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3. À la quatrième manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant la ...*
Élève 4	*Le vainqueur peut avoir 9 points car s'il a 6 points et s'il éjecte l'autre toupie du stadium il gagne + 3 points donc il a 9 points. Le joueur peut avoir 8 points car s'il a 6 points et qu'il envoie la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité il a gagné 8 points. Et enfin si le joueur a 6 points et qu'il gagne une manche il a 7 points.*

Doc. 10 : Exemples de justification de conjectures.

L'élève 1 propose une description des événements et un calcul des points obtenus. Même si sa proposition ne prouve pas que neuf est le maximum de points possible, l'élève produit un exemple valide de partie en neuf points. L'élève 2 propose, sous la forme d'une opération, une suite de scores qui pourrait valoir douze points mais qu'il n'est pas possible de réaliser en suivant les règles du jeu. L'appui sur l'opération ne lui permet pas de mettre en évidence la limite maximale du score. À l'image de l'élève 3, beaucoup s'engagent dans la production de petits récits, qui conduisent à des scores atteignables ou non. Dans ces propositions, le respect des règles est plus fort qu'avec une suite de scores. Dans le quatrième exemple, nous voyons que l'élève a repéré, peut-être par hasard, un nœud de la situation et construit trois récits à partir d'une même base qu'il ne détaille pas : « S'il a six points et que … ». C'est bien en s'engageant dans la construction d'un récit que les élèves parviennent à émettre les conjectures les plus complètes et les plus correctes. Qualitativement, l'appui sur un récit amène 85 % des trente-deux conjectures complètes, 60 % des 46 conjectures incomplètes et moins de 50 % des conjectures fausses.

3.2 Écrire un récit pour analyser une situation

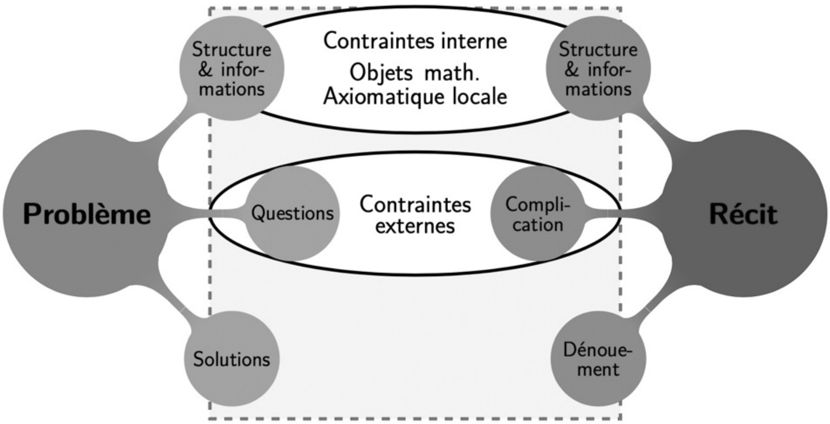
Nous avons également proposé aux élèves de résoudre des problèmes en les inscrivant dans un récit (document 11). Le récit propose une situation, contenant des objets mathématiques et régulée par des contraintes internes liées aux règles du jeu. La contrainte externe sur le score à atteindre crée le problème mathématique et est également une complication dans le déroulement du récit (document 12).

Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. À la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.

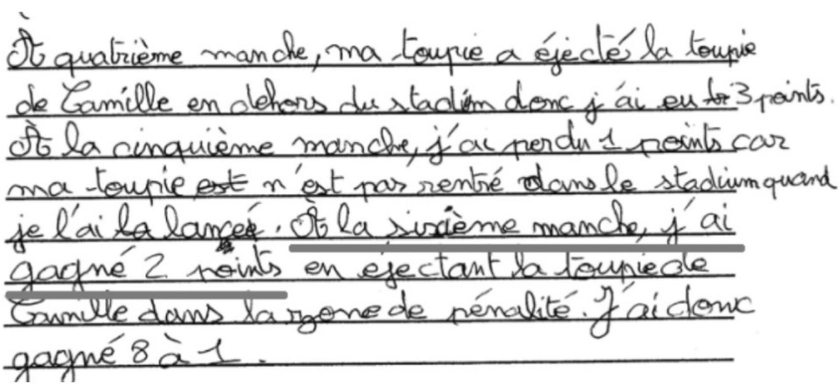
Complète le récit pour que …

Doc. 11 : Énoncé inscrit dans un récit.

Nous avons ainsi demandé aux élèves de produire quatre récits de parties qui se terminent à sept, huit, neuf et dix points. Les règles du jeu s'appliquent à la situation proposée en créant une axiomatique locale (Tarski 1969). Comme il est possible de gagner un, deux ou trois points et que la partie se termine dès qu'un joueur ou une joueuse atteint au moins sept points, atteindre un score de huit points nécessite de gagner au moins deux points d'un coup à la dernière manche. C'est ce que l'élève propose (document 13) en décrivant les manches dans le détail.



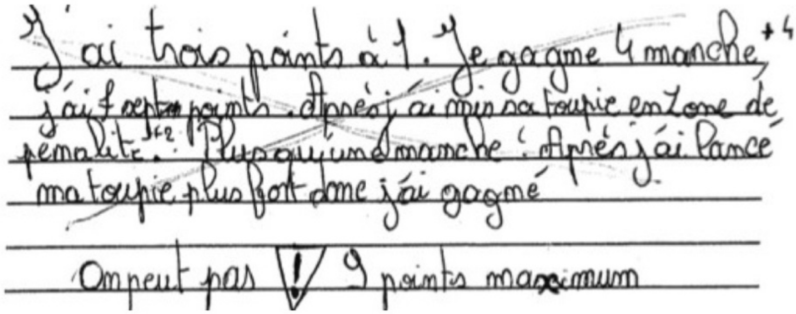
Doc. 12 : Analyse du milieu.


À quatrième manche, ma toupie a éjecté la toupie de Camille en dehors du stadium donc j'ai eu ~~to~~ 3 points. À la cinquième manche, j'ai perdu 1 points car ma toupie ~~est~~ n'est pas rentré ~~dans~~ dans le stadium quand je l'ai ~~la~~ lancée. À la sixième manche, j'ai gagné 2 points en éjectant la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai donc gagné 8 à 1.

Doc. 13 : Récit de partie en huit points.

En suivant les règles, la réalisation d'une partie qui se terminerait sur un score de dix points est impossible, même dans le cadre d'un récit de fiction. Certains élèves s'engagent dans la production d'un récit (document 14) mais se rendent compte que les règles du jeu ne sont pas respectées. Ce qui est intéressant, c'est que lors du travail de conjectures, cet élève n'avait pas perçu de limite de score maximale et avait proposé un score infini. Devoir raconter ce qu'il se passe conduit l'élève à explorer les contraintes mathématiques de la situation de manière plus approfondie.

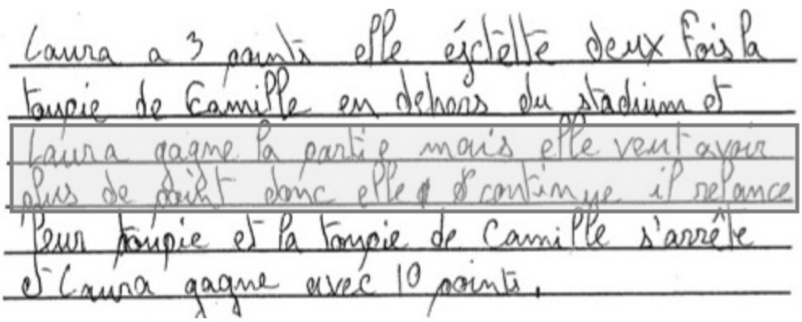
Certains élèves font le choix délibéré de contourner les règles (doc. 15). L'élève a conscience que la partie est terminée mais elle veut avoir plus de points. Ce possible explicatif met en évidence que l'élève a appréhendé la structure mathématique de la situation.



J'ai trois points à 1. Je gagne 4 manche +4
j'ai fait sept points. Après j'ai mis sa toupie en zone de
pénalité +2 Plus qu'une manche. Après j'ai lancé
ma toupie plus fort donc j'ai gagné

On peut pas ! 9 points maximum

Doc. 14 : Proposition (abandonnée) de partie en dix points.



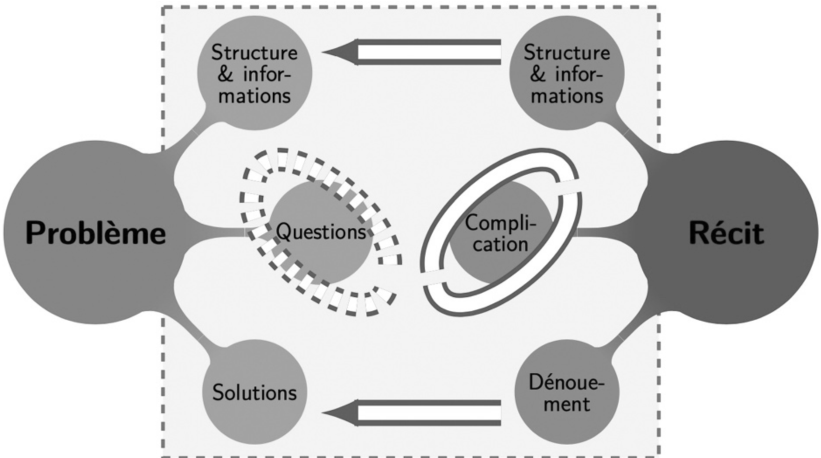
Laura a 3 points elle éjectète deux fois la
toupie de Camille en dehors du stadium et
Laura gagne la partie mais elle veut avoir
plus de point donc elle continue il relance
leur toupie et la toupie de Camille s'arrête
et Laura gagne avec 10 points.

Doc. 15 : Contournement délibéré des règles.

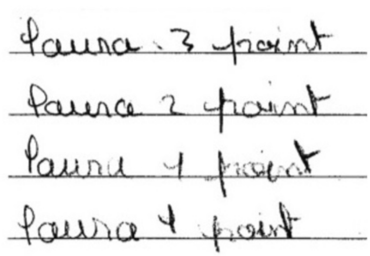
La formulation du problème au travers d'un récit ouvre un espace de travail. Au travers du prisme du récit, les élèves explorent, produisent des possibles et entrent dans une analyse approfondie de la situation L'explication proposée, même si elle est fictionnelle et construite dans l'espace rhétorique, est soumise aux contraintes mathématiques de la situation et est donc de fait une solution valable au problème mathématique (doc. 16).

Ce sont avant tout les fonctions d'explication et de structuration qui entrent en jeu. Le récit permet de construire des explications mais aussi de les questionner, sans doute plus facilement qu'une démarche mathématique comme nous le rappelle Bruner (2008). Dans le cadre du récit, sans doute parce qu'il parait moins contraignant, les élèves osent. Cependant, et c'est ce qui est intéressant, les possibles créés prennent en charge toutes les contraintes portées par la situation de référence. Même dans le cadre d'un récit de fiction, l'élève est soumis aux contraintes mathématiques de la situation.

Dans une des classes, l'enseignant a proposé aux élèves de n'écrire que les scores pour aller plus vite. Il avait peur que ses élèves mettent trop de temps pour répondre en se perdant dans les détails. Dans cette classe, sans la dimension récit, l'appréhension de la structure de la situation ne s’est pas faite. Les élèves ont produit des suites de scores qui permettaient d’atteindre les scores demandés (document 17), mais sans se rendre compte que pour huit et neuf points, il faut marquer plusieurs points d’un coup sur la dernière manche et qu’il n’est pas possible d’atteindre les dix points.



Doc. 16 : Modèle de transfert des processus.



Doc. 17 : Suite de scores.

Le travail d’analyse mathématique est renforcé par la fonction structurante du récit. L’acte narratif, l’action de raconter les choses, facilite la mise en relation des objets, permet à l’élève de structurer les informations dont il ou elle dispose, ses connaissances et de les articuler en un tout cohérent et de produire de nouvelles connaissances. Ici, c’est très certainement le fait d’exprimer les scores intermédiaires qui fait découvrir aux élèves la limite de scores.

3.3 Le récit pour enrichir le milieu didactique

En fin de séquence, nous avons à nouveau placé les élèves dans une situation d’émission et de justification de conjectures sur les scores possibles, le nombre de manches minimum et maximum de manches qu’il est nécessaire et possible de jouer. Les propositions, qui devaient être justifiées, ont fait l'objet d'un débat à l'oral.

Lors du débat, la référence aux parties réelles (jouées et racontées) a été à l'origine d'une partie des arguments. Les élèves les convoquent en tant qu'exemple ou contre-exemple (document 18).

Exemple	Contre-exemple
P6 : Est-ce que c'est possible [de marquer trois points d'un coup] ? *E6 : Y a Hugo qui m'a éjecté.*	*P6 : Au bout de sept manches la partie est forcément terminée ?* *E7 : Valentin et Clément ont fait quatorze manches.*

Doc. 18 : Exemple et contre-exemple.

Les récits de parties, qu'ils soient réels ou fictionnels, sont modifiés pour répondre à des contraintes :

– Diminution du nombre de manches pour construire une partie qui comporte le moins de manches possibles : Dans la première manche au lieu de marquer un point, elle en marque deux.

– En augmentant le nombre de manches pour obtenir une partie qui soit la plus longue possible : S'il avait fait moins un [à une manche] ils auraient dû faire quinze manches [au lieu de quatorze].

Lorsqu'on leur demande le nombre maximum de manches qu'il est possible de jouer, l'attachement au milieu matériel est fort. Les élèves indiquent qu'il « n'y a pas assez de temps » ou encore qu'« au bout d'un moment [...] c'est obligé qu'il y ait une toupie qui gagne des points ». Cependant, petit à petit, les élèves construisent des récits qui leur permettent de s'affranchir de la réalité et proposent des récits avec un nombre de manches infini sous différentes formes :

– Perte infinie : Parce qu'à chaque fois on fait moins trois.

– Annulation : Si on gagne un point et si on en perd un ; ça fait plus un moins un.

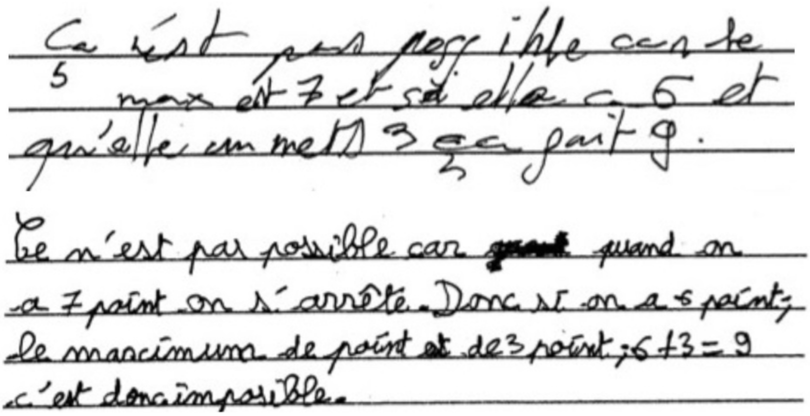
– Cycle : Plus trois, moins un, plus deux [...] il a quatre, moins trois et moins un et il se retrouve à zéro.

Que ce soit à l'oral ou à l'écrit, les élèves s'engagent dans des processus de problématisation et de preuve. Ce n'est plus directement ce qui est raconté qui compte, mais la structure du récit qui est confrontée à celle de la situation. Pour déterminer le nombre minimal de manches nécessaires pour terminer une partie, un élève essaye de créer une partie en deux manches (document 19). Il se rend compte que pour cela, il a besoin d'un événement qui rapporterait quatre points d'un coup. Comme ce n'est pas possible et qu'il a déjà construit une partie en trois manches, il arrive à conclure que trois est le nombre minimum de manches.

Trois minimum, parce que c'est ... on ne peut pas faire deux parce que ... Pour faire en deux manches il faudra ... y a quoi qui fait trois, quatre y a pas [...] il faudrait quelque chose qui fait [...] 4 points et y a pas.

Doc. 19 : Construction d'une preuve à l'oral.

C'est également ce qu'il se passe, à l'écrit, pour ces deux élèves (doc. 20), qui se lancent dans la production d'une preuve.


Ça n'est pas possible car le max est 7 et si elle a 6 et qu'elle en mett 3 ça fait 9.

Ce n'est pas possible car quand on a 7 point on s'arrête. Donc si on a 6 points le maximum de point et de 3 point ; 6+3=9 c'est donc impossible.

Doc. 20 : Début de preuves.

Ces exemples mettent en évidence, en accord avec le modèle proposé, que le récit participe à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique : milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence (Margolinas 1998). D'une part, le registre empirique (porté au départ par l'expérience des parties jouées) s'enrichit de tous les possibles construits ou envisageables par le biais du récit permettant à l'élève de construire une relation plus objective avec le milieu. D'autre part, les contraintes portées par le récit enrichissement le registre des nécessités (Hersant 2010a 2010b) et conduisent à déterminer ce qui est possible, impossible et les conditions sous lesquelles cela fonctionne ou non.

Conclusion

Nous voyons ainsi que le récit constitue un support privilégié pour traiter l'incertitude et la projection dans ce qui est possible. Privilégié dans le sens où les élèves se tournent naturellement vers le récit, mais surtout que cette inscription dans le récit semble être un outil efficace pour répondre aux différentes activités proposées. Il permet aux élèves de se projeter, d'imaginer, de tester, etc. Les élèves produisent des explications, les mettent à l'épreuve et entrent dans une démarche de preuve. La production langagière et le récit peuvent ainsi s'envisager comme des outils et des supports pour l'activité mathématique.

Via des productions de possibles et d'impossibles, d'exemples et de contre-exemples dans l'espace proposé par le récit, l'élève s'affranchit de la réalité et s'éloigne du milieu matériel. La structuration du récit, sa logique narrative est mise en regard avec la situation mathématique. Elle permet de mettre en évidence des relations, des successions, des contradictions qui conduisent à analyser la situation. La justification du raisonnement s'appuie ou se construit au travers de la mobilisation ou de la construction de différents possibles et impossibles explicatifs. En offrant un espace de travail à la fois heuristique et structurant, la construction d'un récit peut ainsi permettre de s'engager dans un raisonnement, de structurer et de le justifier.

Ce travail n'a pas été pensé dans le cadre d'un questionnement autour du plurilinguisme. Cependant, il nous semble que les résultats obtenus mettent en évidence le rôle de langage dit naturel et nous conduisent à nous questionner sur le potentiel didactique du langage dit naturel dans la langue première et seconde dans le cadre d'un enseignement plurilingue.

Travaux cités

Bruner Jerome Seymour, 2005, *Pourquoi nous racontons-nous des histoires? : Le récit, au fondement de la culture et de l'identité* (rééd.). Retz.

Bruner Jerome Seymour, 2008, *L'éducation, entrée dans la culture : Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* (rééd.). Retz.

Chirouter Edwige, 2010, « À quoi pense la littérature de jeunesse ? » *Sciences humaines*, n° 218, p. 18-18.

Fayol Michel, 1985, *Le récit et sa construction : Une approche de la psychologie cognitive,* Delachaux & Niestlé.

Genette Gérard, 1972, *Figures III*, Éditions du Seuil.

Hersant Magali, 2010a, *Empirisme et rationalité au cycle 3 : Vers la preuve en mathématiques* [Mémoire complémentaire HDR]. Université de Nantes.

Hersant Magali, 2010b, *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. [Note de synthèse HDR]. Université de Nantes.

IREM de Paris, 2002, *Expériences de narration de recherche en mathématiques : Les petites Zep... qui montent... qui montent... et qui démontrent*, ACL, les Éditions Kangourou.

Margolinas Claire, 1998, « Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement », dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, conférence, Actes de l'université d'été, La Rochelle, Juillet 1998, IREM Clermont-Ferrand, p. 3-16.

Ministère de l'Éducation nationale, 2016, *Mathématiques et maîtrise de la langue*, Eduscol.

Moulin Marianne, 2014, *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement*, Université Claude Bernard Lyon 1.

Orange-Ravachol Denise et Triquet Eric, 2007, *Sciences et récits,* CRDP.

Sauter Mireille, 1998, « Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique », *Repères IREM*, n° 30, p. 9-21.

Scardamalia Marlene et Bereiter Carl, 1987, "Knowledge telling and knowledge transforming in written composition", in Rosenberg R. (Ed.), *Reading, writing, and language learning*, Cambridge University Press, p. 142-175.

Scardamalia Marlene et Bereiter Carl, 1998, « L'expertise en lecture-rédaction », dans *La rédaction de textes : Approche cognitive*, Delachaux et Niestlé, 13-59.

Tarski Alfred, 1969, *Introduction à la logique*, 2^e^ édition revue et augmentée. traduit de *Introduction to logic and to the methodology of deductive science* par Jacques Tremblay, Gauthier-Villars.

Triquet Eric, 2007, « Élaboration d'un récit de fiction et questionnement scientifique au musée », *Aster*, n° 44, p. 107-134.