Aperçu de l'histoire de l'enseignement des mathématiques

Jean-Luc Dorier

Aperçu de l'histoire de l'enseignement des mathématiques

Jean-Luc Dorier

Ce texte est paru dans un ouvrage collectif publié en juin 2018 :

Dorier, J.-L. ; Gueudet, G. ; Peltier M-L. ; Roditi, E. & Robert A. (2018). ***Enseigner les mathématiques – Didactique et enjeux de l'apprentissage.*** **Paris : Belin. (520p. Préface de C. Villani).**

Comme Belin n'a pas pu publier ni les illustrations, ni la bibliographie, je ne l'ai laissé dans l'ouvrage qu'à la condition de garder mes droits pour pouvoir le diffuser dans sa version complète, que voici.[1]

[1] Pour permettre de faire des citations, j'ai gardé à peu près la même pagination, d'où le fait que le texte commence à la page 22 et quelques sauts de pages étranges !

***Avertissement** : Pour réaliser cette synthèse de vulgarisation, je me suis largement inspiré de nombreux travaux beaucoup plus détaillés de chercheurs spécialistes du domaine. Cependant, pour ne pas alourdir la lecture par des notes et des renvois incessants, j'ai choisi de ne pas chaque fois citer ou me référer aux diverses sources que j'ai utilisées, dont vous trouverez toutefois les indications à la fin du livre. Par ailleurs, je ne prétends à aucune originalité dans le domaine, si ce n'est d'avoir osé ramasser 5 000 ans d'histoire de l'enseignement en 50 pages.*

1. Aux origines des mathématiques

Il est difficile de dater le début des mathématiques, tant elles participent au développement de l'humanité depuis la nuit des temps. Elles sont en effet étroitement liées à la plupart des évolutions humaines au moins depuis le paléolithique. Il faut toutefois se méfier de ne pas sur-interpréter, à l'aune des mathématiques actuelles, les étapes primitives du développement de la pensée mathématique, comme l'explique l'excellent livre de Keller, *L'invention du nombre* (2015).

Les os d'Ishango

Dans les années 1950, le géologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt découvrit ces ossements dans des couches de cendres volcaniques au bord du lac Édouard, dans la région d'Ishango au Congo belge (aujourd'hui République démocratique du Congo), près de la frontière ougandaise. On estima d'abord qu'il s'agissait d'os datant de 9 000 à 6 500 ans avant J.C., mais une datation précise du site où ils furent découverts montra qu'ils étaient âgés d'environ 20 000 ans.

Il s'agit de deux os d'approximativement 10 cm et 14 cm, provenant d'animaux non identifiés (on pense à des os humains, de singe ou de lion). Un fragment de quartz est enchâssé au sommet du plus petit. Ces os portent plusieurs incisions sur chacune de leurs faces.

<table>
<tr>
<td>
Le premier os d'Ishango exposé au Muséum des sciences naturelles de Belgique.</td>
<td>La photo ci-contre représente le plus petit des deux, le premier à avoir été exposé au Muséum des sciences naturelles de Belgique.
Il porte plusieurs incisions, organisées en groupes de trois colonnes, dont plusieurs interprétations tendent à accréditer l'idée que les mathématiques seraient nées il y a quelques 20 000 ans sur les bords des grands lacs africains.
Les Cahiers de Sciences et vie, dans un numéro consacré aux origines des nombres et du calcul (n°112 août-septembre 2009) posent la question : « Les os d'Ishango sont-ils les vestiges d'une activité mathématique ? Certaines interprétations rendent possible cette hypothèse. Pour autant elle ne peut être prouvée. » (Op. cité, p.16).
De fait, aucun fait scientifique ne permet de penser que ces marques ont la moindre signification numérique et donc mathématique et le travail récent de Keller (2015) revisite de façon très différente la question des origines du nombre.</td>
</tr>
</table>

Au-delà de la question de l'origine première du nombre, il est clair que les besoins de recensement dans les premières sociétés humaines en Mésopotamie étaient nombreux et constitutifs de l'organisation de ces sociétés. Par exemple, un berger qui rassemble ses moutons dans un enclos la nuit et les laisse paître la journée doit pouvoir s'assurer que tous les moutons rentrent chaque soir. Les compter le matin et les recompter le soir nous semble une évidence. Pourtant si on y regarde de plus près, quand on dit : « un, deux, trois, … », en pointant un à un les moutons, qu'est-ce qui est en jeu ? La suite des mots-nombres que l'on a mémorisée est en fait une collection intermédiaire de mots dans la même quantité (équipotente) que les moutons. En pointant un à un chaque mouton une seule fois, tout en disant chaque fois le mot suivant de la liste des mots-nombres, on réalise une mise en correspondance terme à terme entre la collection des moutons du troupeau et la collection des mots de la comptine numérique. Enfin, parce que ces mots sont toujours dans le même ordre, le dernier mot de la comptine prononcé suffit à désigner toute la collection des mots et donc la quantité de moutons : c'est ce qu'on appelle le cardinal de la collection. Nul besoin de dire : « j'ai autant que un, deux, trois, quatre, cinq moutons », il suffit de dire : « j'ai cinq moutons ! ». Aujourd'hui, aucun adulte réalisant un tel comptage n'a conscience de tout le bagage culturel qui se cache derrière ce simple geste. À tel point qu'on le confond parfois avec la seule récitation de la suite des mots-nombres apprise par cœur dans un certain ordre (la comptine numérique), comme on le fait si bien faire à notre progéniture dans les réunions de famille, fier de pouvoir dire : « Ma fille sait compter jusqu'à vingt-trois ! ». Pourtant c'est une façon de faire qui ne s'est pas imposée si facilement. Bien avant les nombres, le berger mettait un caillou sur un tas chaque fois qu'un mouton sortait le matin de l'enclos. Il n'avait alors plus qu'à enlever un caillou chaque fois qu'un mouton rentrait le soir. S'il ne restait plus de caillou sur le tas quand le dernier mouton était rentré, il était assuré d'avoir récupéré ses moutons (ou en tout cas au moins autant). Il ne pouvait pourtant jamais dire qu'il en avait vingt-quatre ou cinquante-deux. Dans cette pratique, la collection intermédiaire équipotente est constituée par le tas de cailloux et le berger réalise deux fois une mise en correspondance terme à terme, quand il remplit le tas de cailloux et quand il le vide. Nul besoin d'apprendre par cœur une suite complexe de mots. Par contre, aucun mot ne peut désigner la quantité, le cardinal, qui reste non conceptualisé. Des encoches sur un bout de bois peuvent aussi faire l'affaire. Un bâton est plus facile à transporter, dans le cas des transhumances par exemple. Selon les cas, des conditions particulières ont nécessité la mise en place d'outils de dénombrement de plus en plus performants au cours des âges. À certains endroits de la planète, ces besoins ne se sont jamais fait sentir, ainsi certaines civilisations n'ont développé que des pratiques de comptage très rudimentaires sans aucun réel système de numération. Ces cas très intéressants pour l'anthropologie restent cependant rares et il est au contraire important de noter que des progrès importants de l'humanité ont été rendus possibles grâce à la mise en place de savoirs mathématiques fondamentaux.

Des techniques de dénombrement ainsi qu'un système de numération suffisamment élaboré pour permettre des opérations arithmétiques sont nécessaires pour de nombreuses activités sociales générées par la vie communautaire, d'autant plus si celle-ci est urbaine et hiérarchisée. C'est en particulier le cas pour compter, mais aussi pour partager de façon proportionnelle au rang des protagonistes des richesses, des quantités de grains, du bétail, de l'eau, etc. Autre exemple, déterminer les parts d'héritage avec des lois de répartition proportionnelle au sexe ou au rang de naissance conduit à des problèmes arithmétiques complexes, nécessitant d'utiliser entre autres des fractions.

Au-delà des systèmes de numération, plusieurs activités comptables nécessitent la mise en place de systèmes métrologiques adaptés et de techniques de mesure de longueurs ou de masses, ou encore d'aires et de volumes, ce qui est à l'origine de la géométrie. Les travaux agraires, de terrassement ou de creusement de canaux, la construction de bâtiments publics sont à la base de plusieurs questionnements mathématiques, engageant des calculs et des raisonnements géométriques et arithmétiques, pour la répartition du travail ou la prévision des coûts par exemple. L'organisation des armées, le rationnement et le ravitaillement ou encore la collecte des impôts sont autant de domaines de l'administration de la cité qui nécessitent des compétences mathématiques. Organiser le temps, son décompte et son partage sur la journée, l'année, la vie, etc. débouche sur l'observation des mouvements des planètes et les tentatives de prédiction des évènements récurrents (saisons) ou extraordinaires (éclipses), ce qui constitue les origines de l'astronomie. L'astronomie se double souvent d'une dose de magie et de mysticisme, voire de religion, devenant ainsi l'astrologie, cousine de la cartomancie ou la numérologie, entretenant toutes des rapports plus ou moins proches avec les mathématiques. Les arts ont aussi souvent nécessité des développements mathématiques, en musique bien sûr, mais aussi dans les arts graphiques ou manuels, où les transformations et les invariants géométriques sont au cœur des représentations abstraites (de type frises ou pavages) en peinture, ou dans les tissages et divers artisanats de nombreuses civilisations.

Dans de nombreuses civilisations anciennes, les mathématiques naissent et se développent donc très tôt au cœur même de pratiques sociales dont l'impact politique est fort. En un sens, elles sont un des instruments du pouvoir, que ce soit le pouvoir des puissants qui gouvernent et organisent la vie de la cité, des prêtres et des magiciens qui prédisent les destinées et le futur du monde, ou encore des artistes. Cela pose inéluctablement la question de la transmission de ces savoirs et savoir-faire et donc de leur enseignement.

Dans ce chapitre introductif, nous proposons de parcourir à grands traits l'évolution de l'enseignement des mathématiques depuis son apparition il y a 5 000 ans jusqu'à nos jours, en présentant les étapes essentielles.

Nous nous sommes appuyés sur plusieurs textes et livres couvrant diverses périodes et régions géographiques, dont les principaux sont listés en bibliographie. Nous avons choisi d'écarter de notre investigation ce qui s'est passé dans des civilisations où, même si des mathématiques se sont développées, celles-ci n'ont eu aucune influence directe sur les mathématiques actuelles. Ceci nous a conduits, à l'exception de la Haute Antiquité et du monde musulman au Moyen-Âge, à nous limiter à l'Europe de l'Ouest. À partir des époques récentes, nous nous sommes centrés sur la situation française.

2. La Haute Antiquité (Mésopotamie – Égypte – Babylone)

2.1. La Mésopotamie

Une étape essentielle de l'histoire des mathématiques se situe aux alentours de 4000 à 3000 avant J.-C. quand en Mésopotamie (à l'emplacement actuel de l'Irak, l'Iran et la Syrie) naissent les premières grandes villes de l'histoire de l'humanité. Peu à peu, elles s'organisent en cités et états, engendrant de fait quantité de besoins mathématiques liés à l'organisation sociale et politique. C'est certainement la plus ancienne civilisation connue ayant développé des outils mathématiques d'un tel niveau. C'est aussi la première qui donne à voir une organisation de son enseignement. Il reste bien sûr de nombreux points d'interrogation concernant une période aussi reculée, même si on dispose (relativement) de nombreuses sources sous forme de tablettes d'argile, qui se conservent mieux que le papyrus, le parchemin ou le papier.

Ce système de numération était additif avec un mélange de base 10 et de base 60, et était constitué de petits objets d'argile : des cailloux (*calculi* en latin, qui a donné le mot « calcul ») matérialisant les quantités à dénombrer. L'idée de représenter ces objets par des encoches ou des ronds dans l'argile à l'aide d'un bambou est attestée comme l'une des origines de l'écriture cunéiforme environ 3 300 avant J.-C.

Les systèmes de numération en base 60

Les « cailloux » de la numération mésopotamienne :

petit cône petite bille grand cône grand cône troué grande bille grande bille trouée

= 1 = 10 = 60 = 60×10=600 =60×60=3'600 =60×60×10=36’000

Dans le système de numération de position en base 60 des Babyloniens, il faut 60 symboles différents pour représenter les 60 « chiffres » de 0 à 59, soit un nombre conséquent. En fait, ces « chiffres » sont représentés selon un système additif en base 10, avec seulement deux symboles de base : l’unité est représentée par un clou  et la dizaine par un chevron .

Par exemple le nombre 133 qui vaut $2 \times 60 + 13$ s’écrit : . Mais ce pourrait aussi représenter $2 \times 60^2 + 10 \times 60 + 3 = 3723$. Ce système est donc ambigu, car il ne permet pas toujours de délimiter les groupes de symboles qui constituent chaque chiffre. Au départ, il manquait également le symbole de l’absence de quantité, notre zéro. Les Babyloniens l’inventent vraisemblablement au cours du 3^e siècle avant J.-C. avec le symbole  ou .

Le choix de la base 60 permet d’écrire plus simplement les fractions, parce que 60 a de nombreux diviseurs. $60 = 5 \times 12$, or 12 est divisible par 2, 3, 4 et 6 alors que 10 ne l’est que par 2 et 5. C’est ce qui permet, entre autres, d’avoir des quarts d’heure sur une horloge (ce qui serait impossible en base 10). Le choix de la base 60 est donc très ingénieux pour certains usages, où il doit y avoir des partages. C’est pour cela que nous l’avons gardé jusqu’à aujourd’hui pour découper le temps en 2 fois 12 heures par jour, 60 minutes en une heure et 60 secondes en une minute, ou pour diviser les angles en 360°, c’est à dire $6 \times 60°$.

Environ 2'500 ans avant J.C. les Babyloniens, héritiers des Sumériens, inventent le premier système connu de numération de position en base 60. Ce système ingénieux permettait, avec seulement deux symboles, d'écrire tous les nombres entiers, certaines fractions, et de développer des techniques pour les quatre opérations arithmétiques ainsi que les extractions de racines carrées et cubiques. Ce système de numération cohabitait avec des systèmes métrologiques, c'est-à-dire les systèmes de mesure dans des unités spécifiques de diverses grandeurs physiques : masse de divers grains, longueurs, aires, volumes, etc. Par ailleurs, on a retrouvé des tablettes présentant des problèmes conduisant à des équations du second degré dont les solutions sont présentées sous forme de liste de procédures de calcul semblables à l'algorithme moderne dit du discriminant. On trouve aussi quelques problèmes de plus haut degré qui se ramènent au degré 2, et des problèmes linéaires avec plusieurs inconnues. Il existe aussi des problèmes de géométrie, laissant supposer certaines connaissances théoriques comme les théorèmes de Thalès et Pythagore. Ainsi, on a retrouvé sur une tablette mésopotamienne (dite Plimpton 322) datant d'environ 1 800 avant J.C. une liste de 15 triplets pythagoriciens (triplets de nombres entiers qui vérifient l'égalité de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$ comme (3, 4, 5) puisque $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$).

Les détenteurs du savoir sont les scribes, qui ont tous des connaissances élémentaires de mathématiques. Les scribes spécialistes de mathématiques vont devenir les hauts fonctionnaires de l'État, qui régulent l'organisation administrative de la cité ou du royaume. Dans ce contexte, les mathématiques sont un des piliers du bon fonctionnement de l'État et s'appliquent à une grande variété de situations pratiques. L'éducation des scribes se fait dans un lieu spécifique, l'*édubba*, littéralement la maison des tablettes, dirigé par un *ummia* (un spécialiste) et commence vers 6 ans. L'école est supervisée par le souverain ou l'État et souvent liée au pouvoir religieux. Par ailleurs, l'éducation est coûteuse et ne concerne que quelques garçons des couches sociales élevées.

Les quelques récits connus laissent entrevoir un travail pénible, du lever au coucher du soleil ; répétitif, basé sur l'apprentissage par cœur ; avec un système de punition au fouet par un surveillant. Un travail archéologique et analytique précis a permis de mettre à jour une partie du curriculum de mathématiques. Au niveau le plus élémentaire, celui-ci comprend l'apprentissage des tables de multiplication, des inverses (nécessaires pour faire des divisions), des carrés et des cubes et des racines carrées et cubiques, mais aussi l'apprentissage des divers systèmes métrologiques et des règles de conversion. À un niveau intermédiaire, il concerne l'application des connaissances élémentaires à la mise en place des algorithmes de calcul de multiplication, de division ou de recherches de racines carrés et cubiques. Au niveau le plus élevé apparaissent des problèmes pratiques ou de géométrie permettant de faire travailler ces algorithmes. On dispose de peu de documentation ; on a retrouvé quelques tablettes comportant des problèmes à résoudre qui ont certainement été construits à des fins pédagogiques. Les contextes réels qu'ils mettent en jeu sont plus un prétexte pour inciter les élèves à mobiliser les connaissances des niveaux inférieurs à bon escient, que des problèmes réalistes qu'il serait vital de résoudre. On a donc ici les traces d'un enseignement de mathématiques déjà très organisé avec un niveau élémentaire et une progression, de type professionnel, datant de plus de quatre mille ans. Les techniques d'enseignement restent pour une grande part inconnues, mais il semble que l'apprentissage par cœur et la répétition d'exercices sur des tablettes d'argile que l'on pouvait « effacer », avec un système de punition en sont les éléments essentiels.

Progressivement, sous l'influence grecque, l'enseignement des mathématiques va se déplacer vers les usages en astrologie. L'enseignement ne se fera plus en sumérien ou en akkadien mais en araméen ou en grec et le contenu deviendra certainement moins directement appliqué. L'usage de la base soixante restera toutefois une pratique en astronomie et en astrologie.

2.2. L'Égypte antique

L'Égypte antique est l'autre grande civilisation dont nous sommes les héritiers directs, le deuxième lieu d'invention de l'écriture et aussi du développement des mathématiques. Celles-ci sont plus poussées dans le domaine de la géométrie alors que le système numérique additif en base 10 est moins performant que celui des mésopotamiens. L'usage des mathématiques est également central dans l'administration et la religion et les mathématiques occupent une place importante dans les attributs des scribes. Toutefois, le fait que les supports des écrits, le papyrus ou l'ostracon (tesson de poterie) se sont bien moins bien conservés que les tablettes d'argile mésopotamiennes, ne nous a laissé que très peu d'éléments permettant de documenter l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans l'Égypte ancienne. Sur le contenu, on peut se faire une idée assez fiable en se basant sur ce que l'on sait des mathématiques de cette époque et tout laisse à croire qu'il n'était pas si éloigné de celui des mathématiques babyloniennes, malgré des différences sensibles. Sur la forme, à part le fait que cet enseignement devait être très organisé et hiérarchisé, on a beaucoup de suppositions et de questions, mais presque aucune certitude.

3. Le monde antique gréco-latin

La Grèce Antique est le théâtre d'un profond bouleversement dans la nature des mathématiques. Leur objet s'éloigne des préoccupations utilitaires que nous avons évoquées jusqu'alors, pour embrasser des projets plus théoriques, devenant un des piliers de la pensée philosophique à travers la constitution d'une géométrie hypothético-déductive dont les *Éléments* d'Euclide datant du 3^{e} siècle avant J.-C. sont l'archétype. Nous ne reviendrons pas ici sur l'histoire des mathématiques de cette période, qui a fait l'objet de nombreux écrits.

Dans le monde antique gréco-latin, l'enseignement joue un rôle important et les mathématiques ont une place de choix. Deux systèmes parallèles semblent avoir coexisté avec des nuances. Le premier, plus adapté aux petites villes, dont le réservoir d'enseignants était plus réduit, présente une structure en trois niveaux : primaire, secondaire et supérieur ou tertiaire. Chaque niveau a son type d'enseignants et un curriculum bien spécifique. Les mathématiques ne se trouvent avec certitude qu'au niveau élémentaire qui comprend les bases de l'arithmétique. Dans le second système, plus fréquent dans les grandes villes, l'enseignement élémentaire est une voie séparée qui touche les couches sociales les plus basses, y compris certains esclaves, alors qu'une filière spécifique conduisant aux plus hauts degrés est réservée aux élites. Le terme d'école ne réfère pas à un lieu précis et une séparation en classes, mais plus à un rassemblement d'élèves et de disciples autour d'un maître.

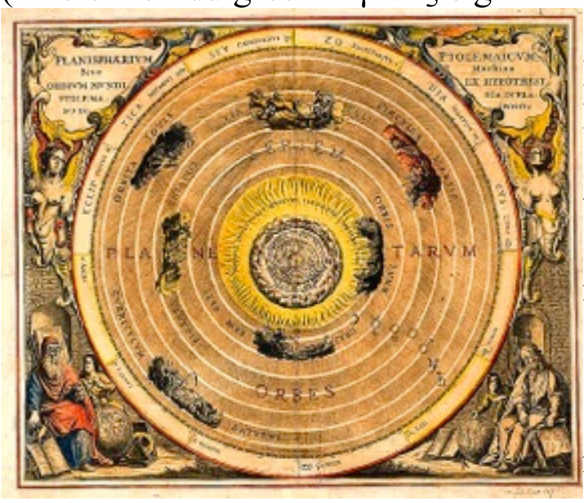
Du point de vue historique, cette période comporte un biais, bien connu des historiens, du fait que depuis l'Antiquité même, l'histoire s'est forgée sur des sources bien identifiées mais partielles, voire partiales, qui fondent la vision idéalisée qui nous a été transmise. Ainsi, concernant les mathématiques, l'image idéale met en avant les grands maîtres de la géométrie et l'apport de ceux-ci à la pensée philosophique. *A contrario*, il n'existe que peu de source documentant l'enseignement élémentaire ou technique de mathématiques pratiques pour former les hommes éduqués ou plus spécifiquement les scribes ou les comptables. On ne sait en particulier rien de ce que celui-ci pouvait ou non devoir à ce qui existait depuis longtemps en Mésopotamie ou en Égypte. C'était sûrement un enseignement réservé à des couches sociales de moindre prestige, mais dont l'utilité dans le fonctionnement de la cité ne fait aucun doute. De même, les *Arithmétiques* de Diophante sont un des traités les plus énigmatiques de l'Antiquité grecque, treize livres écrits probablement au cours du 3^{e} siècle après J.C., dont le lien avec le reste des mathématiques de son époque reste un mystère, alors qu'un lien avec les mathématiques babyloniennes paraît évident.

Au contraire la littérature est abondante et largement connue concernant l'idéal de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation philosophique, même si celui-ci n'a certainement touché qu'une petite partie de l'élite. L'archétype de ce type d'enseignement où le maître devise librement avec des élèves est représenté dans la *République* de Platon.

On distingue habituellement plusieurs courants selon les époques et les objectifs assignés à l'éducation mathématique. Un des courants les plus anciens a pour figure emblématique Isocrate, un autre disciple de Socrate aux côtés de Platon (4^{e} siècle avant J.-C.). Selon lui, les mathématiques sont importantes non pas par leur contenu, mais par leur capacité à entrainer au raisonnement et au discours et donc comme apprentissage préparatoire, une propédeutique à l'art de la *Rhétorique*. Un autre courant est celui des néopythagoriciens, comme Théon de Smyre qui a vécu au 2^{e} siècle après J.-C., auxquels on doit la division des mathématiques en quatre branches : arithmétique, géométrie, astronomie et musique (qui deviendra le *quadrivium* du Moyen-Âge) et pour lesquels les mathématiques représentent un projet philosophique *per se*. Un courant important s'inspire de la philosophie de Ptolémée, ayant vécu lui aussi au 2e siècle après J.-C et dont l'*Almageste* est le traité le plus célèbre. C'est une approche centrée sur une vision cosmique du monde où l'Homme et donc la Terre sont au centre de l'univers et dans lequel le modèle géométrique permet de penser le reste du cosmos. L'*Almageste* est resté le traité d'astronomie le plus influent à travers la Haute Antiquité, le Moyen-Âge et jusqu'à la Renaissance, quand les modèles héliocentriques sont devenus dominants.

L'Almageste de Ptolémée

On ne sait avec certitude que peu de choses sur la vie de Claude Ptolémée. Il serait né vers 90 après J.C. et mort vers 150. S'il est attesté qu'il a vécu et travaillé à Alexandrie, c'est à peu près le seul lieu qu'on lui associe avec certitude. Son œuvre majeure est publiée en grec sous le titre *Composition mathématique* ; les traducteurs arabes du 9e siècle lui donnent le titre *Al Mijisti* (arabisation du grec Μεγιστς signifiant le plus grand) qui donnera *Almageste*.



Dans ce monument en 13 volumes, Ptolémée développe les bases géométriques (dont les fondements de la trigonométrie) qui fondent son approche de l'astronomie, visant à expliquer un nombre important de données d'observations, dont beaucoup semblent dues à Hipparque, mathématicien du 2e siècle avant J.-C., que Ptolémée a réhabilité.

Dans ce système, le Soleil, la Lune et les planètes tournent autour de la Terre, selon des orbites circulaires (le cercle est la figure idéale). L'ouvrage compile une masse importante de données tout aussi bien pratiques que théoriques. Il semble que beaucoup d'entre elles étaient déjà connues à l'époque. On a même accusé Ptolémée d'en avoir falsifié certaines pour qu'elles « collent » avec son modèle. Quels que soient les fondements de ces critiques, l'*Almageste* représente un tournant décisif dans l'histoire de l'astronomie et restera un ouvrage de référence en particulier pour l'enseignement, traduit dans de nombreuses langues, au moins jusqu'au 16e siècle.

Les enseignements les plus poussés de mathématiques n'avaient cependant pas que des visées philosophiques. Ils pouvaient aussi être davantage liés à des formations professionnelles. C'est par exemple le cas de l'astrologie où, aux côtés d'une approche idéale dans la lignée de Ptolémée, on trouve des écoles visant plus directement à la formation des prêtres et des divers astrologues. Les techniques de calculs de positions des planètes y sont pratiquées à l'aide non seulement de savoirs géométriques théoriques mais aussi de tables donnant divers calculs préétablis. Parmi les autres professions comptant une formation mathématique se trouvent celles d'architecte, d'arpenteur ou différents types de ce que nous appellerions aujourd'hui des ingénieurs. Ici aussi, les sources sont partielles et difficiles à décrypter, mais nul doute que ces professions ont bénéficié d'une façon ou d'une autre d'un type d'enseignement spécifique de savoirs d'ordre mathématique. Comme pour l'arithmétique, ce n'est pas un aspect des mathématiques que l'histoire de cette époque a mis en avant et les zones d'ombres sont importantes.

4. Le monde musulman du 8^{e} au 16^{e} siècle

À partir du 8^{e} siècle, partant de Damas et de Bagdad, le califat des Abassides va étendre son pouvoir vers l'est, aux confins de l'Asie, vers le sud, puis progressivement dans tout le bassin méditerranéen, jusqu'en Afrique subsaharienne et en Andalousie. On a coutume de dater l'âge d'or du monde islamique du 8^{e} siècle au 12^{e} siècle. Les scientifiques de cette période ont hérité de traditions des mathématiques mésopotamiennes et babyloniennes et ils lisent, traduisent et commentent les grands classiques grecs. De plus, au contact des Indiens, ils découvrent la numération décimale de position et les algorithmes de calcul associés. Les premiers enseignements se font donc sous la forme de copies, de traductions et de commentaires et participent à créer au sein des différentes cours des foyers intellectuels qui échangent au gré des voyages au sein de l'empire. Durant cette période d'intense activité intellectuelle, les mathématiques occupent une place de choix dans les sciences philosophiques et les savants arabes ne se contentent pas seulement d'assimiler les savoirs d'autres civilisations ou d'autres périodes mais les enrichissent rapidement de leurs propres découvertes, créant entre autres l'algèbre, attribuée au grand mathématicien Al-Khwarizmi.

Algèbre

L'algèbre est souvent associée à l'utilisation de la lettre *x* pour représenter l'inconnue et a laissé de mauvais souvenirs à plusieurs écoliers. Ce formalisme sera l'œuvre de savants de la Renaissance comme Viète et Descartes.

Pourtant, ce qui distingue l'algèbre de l'arithmétique, ce n'est pas tant le formalisme que le fait d'employer une approche systématique de résolution plutôt qu'une solution *ad hoc*. Classifier tous les problèmes et identifier des techniques de résolutions qui marchent, quelles que soient les valeurs numériques, est un pas essentiel vers l'algèbre. C'est ce pas que vont franchir les mathématiciens « arabes » du 9e siècle. Les historiens s'accordent à attribuer la paternité de l'algèbre à Al-Khwarizmi, né vers 780 dans la région de Khwarz (d'où il tire son nom) dans l'actuel Ouzbékistan et mort vers 850 à Bagdad. Son nom latinisé *Algoritmi* a donné le mot « algorithme », qui vient donc du nom d'une province ouzbèke !
On lui attribue la diffusion du système de numération indien et des techniques opératoires, y compris l'extraction de racines, dont nous avons hérité. Dans un traité majeur sans titre, il présente une classification systématique des problèmes dont on dirait aujourd'hui qu'ils conduisent à des équations du second degré. Pour chaque type, il expose un algorithme de résolution qu'il justifie par une démonstration de type géométrique (à la manière euclidienne). Le terme *al-jabr*, qui a donné « algèbre » et peut se traduire par « restauration » désigne l'opération qui consiste à faire passer une expression d'un côté à l'autre de l'égalité. Ce traité est considéré comme l'acte de naissance de l'algèbre.

À cette époque, l'enseignement des mathématiques élémentaires semble être resté de l'ordre de la sphère privée. Cependant, à une époque difficile à déterminer, antérieure au 12e siècle, les madras, écoles vouées essentiellement à l'enseignement de la loi coranique, s'ouvrent à un enseignement des mathématiques élémentaires. Malgré des différences locales, on y dispense un enseignement de mathématiques basé sur un ensemble de textes assez uniformes qui touchent à différents domaines de mathématiques : arithmétique, algèbre, géométrie et astronomie. Parmi les grands classiques des textes pour l'enseignement, les *Éléments* d'Euclide occupent la première place, alors que les autres ouvrages d'astronomie, d'arithmétique ou d'algèbre sont produits localement. Pour ceux qui se destinent aux métiers du droit et de la religion, l'enseignement des mathématiques est systématique mais reste élémentaire. Il existe d'autres lieux où l'on donne des enseignements plus poussés de mathématiques, en particulier suite à un intérêt accru et des avancées importantes en astronomie et à l'utilisation de l'astrologie pour la médecine. Sur la forme, il existe au Maghreb des écrits qui questionnent le mode classique d'enseignement et d'apprentissage par cœur en pointant le fait qu'il est peu adapté à l'apprentissage des mathématiques, qui nécessite que l'on résolve des problèmes.

5. Le Moyen-Âge en Europe

Durant le haut Moyen-Âge, les pratiques utilisant des mathématiques semblent être réduites à quelques techniques calculatoires pour le commerce et la tenue des domaines des plus grands seigneurs ou du clergé. La réalisation des calendriers, avec en particulier la détermination de la date de Pâques qui variait selon les religions, peut avoir aussi été un objet de réflexion mathématique. Néanmoins, il n'existe aucune trace avérée d'un enseignement mathématique organisé, et l'hypothèse la plus probable est que ces connaissances ont dû se transmettre dans le cadre des relations de compagnonnage au sein même des corps de métiers.

Dans son capitulaire de 789, Charlemagne ordonne aux évêques qu'une école soit ouverte dans chaque évêché. C'est le renouveau des écoles épiscopales ou monastiques. Celles-ci avaient survécu au modèle latin, divisées en trois ordres : écoles primaires dont l'enseignant est le *magister*, écoles secondaires par le *grammairien*, écoles supérieures sous la direction du *rhéteur*. Conseillé par Alcuin, Charlemagne perpétue la tradition d'un enseignement structuré autour des sept arts libéraux (quadrivium et trivium) qui avaient été définis au VI^{e} siècle.

Les arts libéraux, le trivium et le quadrivium

Dans le modèle antique les *arts libéraux* désignent depuis le 5^{e} siècle les fondements de tout enseignement. Ce modèle deviendra la norme au Moyen Âge, notamment à travers Alcuin, précepteur de Charlemagne. C'est aussi le découpage qui détermine par années les enseignements des facultés d'arts des premières universités, qui se transformeront en collèges, origines de l'enseignement secondaire.

Les **sept** arts libéraux dans l'*Hortus deliciarum* d'Herrade de Landsberg, 1180.

Les sept *arts libéraux* sont organisés en deux groupes hiérarchisés :

- le *Trivium* (trois chemins en latin) qui concerne le « pouvoir de la langue » et se divise en grammaire, dialectique et rhétorique,
- le *Quadrivium* qui se rapporte au « pouvoir des nombres » et se compose de l'arithmétique, de la musique, de la géométrie et de l'astronomie.

Ils sont définis l'un et l'autre dans ces deux vers mnémotechniques

Gramm loquitur, Dia verba docet, Rhet verba colorat,

Mus canit, Ar numerat, Geo ponderat, Ast colit astra.

« La Grammaire parle, la Dialectique enseigne, la Rhétorique colore les mots,

La Musique chante, l'Arithmétique compte, la Géométrie pèse, l'Astronomie s'occupe des astres. »

Les *arts libéraux* visent la connaissance du vrai à travers des objets intellectuels intangibles, contrairement aux *beaux-arts* qui s'occupent de la contemplation du beau, aux *arts serviles* (menuiserie, poterie) qui impliquent la transformation d'une matière tangible, ou aux *arts mécaniques* à visée technique.

Il promulgue ainsi un enseignement gratuit dispensé par des moines pour la formation d'une élite noble de garçons à qui l'on enseigne les hymnes religieux, les notes, le chant, le calcul et la grammaire. Malgré la chute de Charlemagne et un certain déclin, le système scolaire mis en place se perpétue jusqu'au 11e siècle à travers le système des écoles de cathédrale. Dans ce contexte, on redécouvre par des traductions latines des versions aménagées, c'est-à-dire réduites avec peu de preuves, des *Éléments* d'Euclide ainsi que deux livres de Anicius Manlius Severinus Boethius, communément appelé Boèce, philosophe latin du début du 6e siècle : *Arithmetica* et *De Musica*, connus en français sous les noms de *Institution Arithmétique* et *Institution Musicale*. Avec les traités d'arpentages latins (*agrimensor*), ces trois ouvrages constituent les piliers du *Quadrivium* pour l'ensemble du Moyen-Âge, voire au-delà. L'arithmétique boétienne présente une approche philosophique du nombre plus qu'un traité pratique de calcul. On y définit les notions de nombres pairs et impairs, premiers et composés, figurés et leurs propriétés. On y trouve aussi une classification particulièrement élaborée de divers types de proportions ainsi que de nombreuses définitions de diverses moyennes. La géométrie qui dérive des traités d'*agrimensor* et des fragments des *Éléments* d'Euclide se concentre sur les propositions essentielles des livres I à III avec très peu de démonstrations, plus quelques formules de calcul d'aires, plus ou moins correctes. L'utilisation d'un nouvel abaque introduit les chiffres indo-arabes, inconnus alors en dehors du cercle de l'école, en géométrie mais pas en arithmétique. Lié à cet abaque apparaît au début du 11e siècle un jeu de plateau appelé *rithmomachia*, resté populaire jusqu'au 16e siècle, qui permet de travailler l'arithmétique boétienne. L'une des figures de cette époque est Gerbert d'Aurillac, né vers 950 en Auvergne, célèbre pour ses enseignements de géométrie, mécanique et astronomie (sans dérive astrologique). Il deviendra pape en 999 (jusqu'en 1003) sous le nom de Sylvestre II. C'est d'un séjour en Espagne qu'il semble avoir ramené les chiffres indo-arabes qu'il a contribué à diffuser.

Progressivement l'étude des traités arabes de médecine provoque un intérêt accru pour l'astrologie et par conséquent pour l'astronomie, qui permet de faire les calculs. En effet, l'astrologie, très présente dans le monde islamique, est très liée à la médecine. Elle sert à déterminer les cycles des maladies et les jours favorables pour observer les patients. Cette tradition qui unit médecine et astrologie perdurera durant tout le Moyen-Âge en Occident. C'est ainsi que l'astronomie sera enseignée dans toutes les facultés de médecine. C'est aussi l'époque où apparaît l'astrolabe, cet instrument qui permet de calculer la position des astres et dont le maniement complexe fait usage de mathématiques.

À partir du 11e siècle, les traités arabes sont traduits en latin, phénomène qui culminera au 12e siècle. Parallèlement, l'accroissement des villes, et donc du commerce, de l'artisanat et de la bourgeoisie conduit à un accroissement des écoles, qui se détachent des institutions religieuses. On voit apparaître des maîtres d'un nouveau genre, toujours religieux mais qui ne sont plus attachés à un monastère ou à un diocèse. Peu à peu des regroupements d'élèves se constituent autour de maîtres plus ou moins indépendants. Souvent, plusieurs élèves voire le maître lui-même ne sont pas des citoyens des villes où ils apprennent ou enseignent et ne bénéficient donc pas de protection.

Un regroupement de type corporatif pour assurer une forme de sécurité associative devient alors nécessaire. C'est ainsi que naissent les premières universités à Paris, Bologne ou Oxford (du latin *universitas* : groupe d'éléments). Ces universités accueillent des garçons des classes aisées vers l'âge de 14-15 ans, voire parfois dès 10 ans. L'organisation relève du mode de fonctionnement antique, selon les principes de la scholastique. La première étape est la faculté des arts libéraux, qui deviendra plus tard la faculté de philosophie, pour marquer un attachement à la tradition aristotélicienne. Elle délivre le baccalauréat puis la licence en 6 ans environ. Les études se poursuivent dans des facultés « professionnelles » de droit, de médecine ou de théologie. Mais beaucoup d'étudiants arrêtent au bout de 4 ou 6 ans, et ne reçoivent donc aucun enseignement de mathématiques.

De plus, l'enseignement de mathématiques est souvent facultatif et se limite à quelques éléments d'arithmétique dans la tradition boétienne. Dans certains cas, on trouve cependant des enseignements de géométrie, avec entre autres des traductions commentées des *Éléments* d'Euclide. La première traduction latine (à partir d'une traduction arabe de l'original) est réalisée par Adélard de Bath, moine bénédictin anglais ayant vécu au début du 12^{e} siècle. Une autre traduction est l'œuvre de Campanus de Novare en 1259 ; elle restera la plus usitée, jusqu'à ce qu'elle soit détrônée par la traduction de Clavius, jésuite du Collège Romain, en 1574.

De nombreuses traductions, comme celles de Gérard de Crémone de l'Almageste de Ptolémée, des coniques d'Apollonius ou celles de nombreux savants arabes comme Al-Khwarizmi, mais aussi des travaux originaux comme ceux de Nicole Oresme attestent d'une activité mathématique non négligeable entre les 12^{e} et 15^{e} siècles. Cependant dans les universités, pour l'immense majorité, les enseignements de mathématiques restent la plupart du temps limités aux rudiments du calcul (les quatre opérations), ou à quelques éléments de géométrie pour l'astronomie pour pouvoir mettre en œuvre des calculs dans le cadre de l'astrologie, en particulier pour la pratique de la médecine.

Un frein réel à un enseignement des mathématiques plus approfondi réside certainement dans le mode de transmission des connaissances de l'époque et ce, jusqu'au moins au 18^{e} siècle. En effet, les cours consistent le plus souvent en des lectures magistrales des grands classiques, généralement en latin, voire des dictées pour réaliser des copies. Ces lectures sont ensuite commentées lors de débats. Peu de place est donc faite pour la pratique des mathématiques au sens de la résolution de problèmes. On ne sait pas ce qui était enseigné dans le cadre des leçons par des précepteurs privés, ou lors de tutorat avec des étudiants plus avancés. On ne dispose que de bribes d'informations, issues de récits disparates. On sait également peu de choses sur les enseignements les plus élémentaires durant cette période. Ceux-ci restent limités à la sphère familiale, qu'ils soient le fruit de l'enseignement d'un précepteur ou des parents. De même, les connaissances mathématiques des professions qui en avaient l'utilité se transmettent *in situ* dans une forme plus ou moins organisée de compagnonnage. Toutefois, dans le nord de l'Italie et ses environs, un des berceaux des débuts du capitalisme médiéval, on trouve des traces d'un enseignement organisé d'une arithmétique marchande, utilisant la numération indo-arabe et les techniques algorithmiques de calculs. C'est une organisation mise en place par la bourgeoisie marchande locale. On retrouve un phénomène assez semblable bien que plus limité, vers la même époque en Flandres, autre grande région marchande.

6. Du 16e au 18e siècle : de la Renaissance à la Révolution française

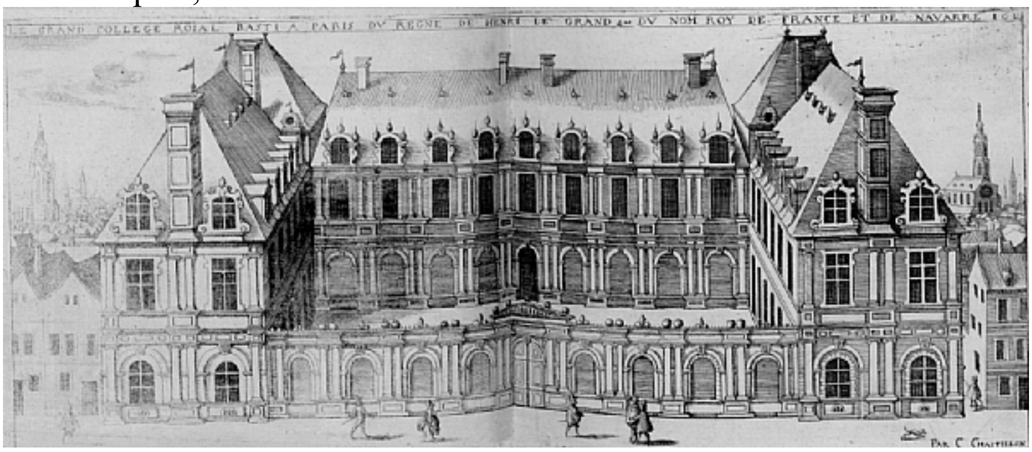
Ces trois siècles hétérogènes forment une transition foisonnante qui, au sortir du Moyen-Âge, va déboucher sur la période moderne à l'aube du 19e siècle. Elle est marquée d'abord par la Renaissance et l'esprit humaniste, qui va provoquer des modifications du système éducatif de différentes manières à travers l'Europe. La Réforme, puis la Contre-Réforme vont conduire à une nouvelle division de l'Europe avec des choix d'organisation de l'éducation également bien différenciés. En parallèle, un renforcement progressif des états nations va entraîner l'affirmation d'identités culturelles qui touchent l'éducation. Au 18e siècle, l'esprit des Lumières va également amener des modifications profondes, en particulier dans l'enseignement des sciences, tout comme les avancées technologiques et scientifiques, les grandes découvertes et la première industrialisation.

6.1. Premiers changements à la fin du Moyen Âge

La première mutation qui marque cette période est l'apparition d'un enseignement secondaire qui va peu à peu s'imposer à travers toutes les villes d'Europe. La création des universités et leur développement à la fin du Moyen-Âge ont rendu caduque le modèle des écoles épiscopales et monastiques. Dans le même temps, l'accroissement des villes et le développement de la bourgeoisie créent des besoins éducatifs plus nombreux. C'est dans le sillage de cette double évolution qu'apparaissent peu à peu dans les grandes villes marchandes d'Europe des écoles secondaires permettant d'enseigner aux fils des bourgeois les bases de la lecture, de l'écriture et du latin, avec éventuellement quelques rudiments de calcul. Cet enseignement organisé par les magistrats des villes en lien avec les églises se substitue ainsi aux précepteurs privés et prépare à l'entrée à la faculté des arts des universités. Dans le même temps, les universités se réforment pour adopter le modèle collégial, qui se répand rapidement à toute l'Europe. En effet, l'accroissement des effectifs et l'âge de plus en plus bas des nouveaux étudiants rendent inadapté le modèle des cours magistraux selon le mode scholastique, où tous les âges sont mélangés, parfois dans un joyeux brouhaha. Les plus jeunes étudiants s'adaptent mal à ce mode très libre d'enseignement et provoquent un désordre qui nécessite de prendre des mesures de discipline. La solution va consister, dans les facultés des arts, à progressivement supprimer les cours magistraux au profit d'un enseignement en petits groupes, selon une division annuelle de la progression. C'est le début des collèges et de la division en classes. C'est une modification importante du système, qui se généralise et qui conduit à ce que l'on pourrait qualifier de « secondarisation » de l'enseignement du début de l'université. Parallèlement, les contenus enseignés et leurs subdivisions subissent les effets des courants humanistes. Ainsi, de nouveaux enseignements prennent le devant, favorisant entre autres des cours dans les langues vernaculaires alors que la plupart des cours se faisaient en latin, mais aussi des enseignements d'histoire ou de géographie. Ceci marque une remise en cause du modèle aristotélicien des sciences, au profit de sciences plus sociales et plus modernes. Les effets de ces changements sont toutefois très différenciés ; par exemple l'université de Paris résiste à ce vent nouveau, affirmant son attachement au modèle d'Aristote. Ceci conduit le roi François 1er à créer en 1530 le Collège royal, où fut instituée une des premières chaires de mathématiques, dont le premier bénéficiaire est Oronce Fine.

Le Collège royal

C'est Guillaume Budé, grand traducteur d'œuvres antiques, qui suggère à François 1er d'instituer un collège de « lecteurs royaux ». La devise du nouveau Collège fondé en 1530 devient *Docet omnia* (on enseigne tout) et de fait, l'idée est de permettre la diffusion des disciplines que l'université de Paris rejette. Ainsi les premières chaires concernent l'hébreu, le grec, le droit français, les mathématiques, etc.



Henri IV est à l'origine de l'édifice actuel, dont la construction ne commencera cependant qu'après son assassinat, et dont les dernières modifications remontent au milieu du 19e siècle.

Le lecteur royal de mathématiques occupa dans toute la deuxième moitié du 18e siècle la fonction d'examinateur pour les concours d'entrée des écoles d'artillerie, de la marine ou du génie (ancêtres des grandes écoles) ce qui lui conférait un rôle important.

Un temps appelé Collège Impérial, cette institution prend son nom actuel de Collège de France en 1870. Il reste encore aujourd'hui un haut lieu de l'excellence du savoir dans des domaines variés.

6.2. L'influence de la Réforme

La Réforme Protestante initiée en 1517 par Luther, puis la Contre-réforme, avec en particulier la création de l'ordre des Jésuites en 1539, vont orienter la restructuration de l'enseignement dans les différents pays d'Europe occidentale. Dans le courant du 16e siècle se structure un enseignement secondaire (collège jésuite, gymnase luthérien, collège et académie calvinistes, collège anglican…) qui conduit progressivement à la disparition des facultés des arts. Les universités se concentrent sur les trois « facultés professionnelles », en priorité la faculté de théologie, puis celle de médecine et celle de droit, avec parfois deux années propédeutiques de faculté de philosophie.

Philipp Melanchton obtient en 1518 un poste de professeur de Grec à l'université de Wittemberg, créée en 1502 par le prince électeur Frédéric II de Saxe. Martin Luther, qui y avait étudié quelques années plus tôt, choisit Melanchton comme principal conseiller en matière d'éducation. Ce dernier est l'artisan de la réforme des gymnases luthériens, dont un exemple fameux est la création en 1538 du gymnase de Strasbourg par Johannes Sturm. Ce gymnase devint un modèle de l'enseignement humaniste et préfigure la création de l'académie protestante en 1566 qui deviendra l'université de Strasbourg en 1621. Johannes Bugenhagen est un autre collaborateur de Luther qui établit plusieurs règles pour le fonctionnement des collèges luthériens, principalement en Allemagne. Les enseignements y sont inspirés des courants humanistes, mais restent assez classiques et surtout axés sur la préparation théologique. Ainsi les enseignements de mathématiques restent-ils marginaux, limités le plus souvent aux rudiments de l'arithmétique, voire à quelques connaissances d'astronomie. Faute d'un système centralisé, l'épanouissement des gymnases est conditionné par l'état financier des villes ou des états qui les abritent et donc sujet à plusieurs fluctuations.

À Genève (alors République indépendante), le peuple adhère à la Réforme en 1536 et décide que l'enseignement sera gratuit et obligatoire pour tous, y compris pour les couches sociales les plus basses. Les Ordonnances ecclésiastiques de 1541 proclament : « Il faudra dresser un Collège pour instruire les enfants aux langues et sciences humaines afin de les préparer tant au ministère qu'au gouvernement civil. ». Un nouveau collège est créé sur les restes d'un collège franciscain. Bientôt pris en main par Calvin et Théodore de Bèze, il occupe l'emplacement de l'actuel Collège Calvin dans la vieille ville de Genève. L'enseignement y est divisé en années avec un système d'examen pour passer d'une année à la suivante. En 1559, les deux réformateurs créent une Académie, qui prolonge le Collège essentiellement pour l'étude de la théologie. Ici aussi toutefois, l'enseignement des mathématiques est marginal. La première chaire de mathématique sera créée à Genève en 1700 et l'Académie ne deviendra véritablement une université qu'en 1873.

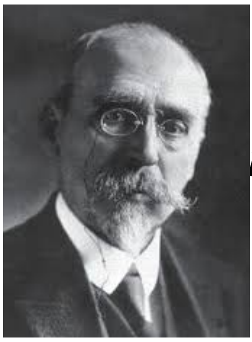
Dans les grandes villes luthériennes, les facultés des arts ne disparaissent pas, mais deviennent des Facultés de Philosophie et se concentrent sur l'enseignement du *Quadrivium* (les deux dernières années des anciennes facultés des arts), revu par le filtre humaniste. Elles acquièrent donc ainsi un statut

d'enseignement supérieur propédeutique aux facultés professionnelles. Si elles ont souvent une chaire de mathématiques, c'est l'enseignement scholastique qui domine, essentiellement basé sur les *Éléments* d'Euclide et l'astronomie sans visée professionnelle ou pratique.

Ainsi dans les pays protestants, l'enseignement des mathématiques est très rudimentaire au niveau secondaire, mais jouit d'une niche assez stable à visée théorique dans les facultés de philosophie.

Le 18^{e} siècle est appelé le siècle pédagogique en Allemagne. En effet, sous l'influence des idées de philosophes tels que John Locke ou Jean-Jacques Rousseau, apparaissent plusieurs courants pédagogiques qui vont amener de profonds changements dans les écoles secondaires.

Le Piétisme et le Philantropinisme et la création des Realschule



Extrait de l'article « Réalisme et humanisme »
Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire
publié sous la direction de Ferdinand Buisson
(édition de 1911)

« L'enseignement, tel que l'avaient organisé les humanistes du seizième siècle, était un enseignement purement verbal et philologique. On ne lisait les auteurs anciens que pour y apprendre le latin et le grec ; on se figurait que la connaissance des langues anciennes était l'alpha et l'oméga du savoir humain. Bacon le premier réagit contre cet aveuglement ; il voulut substituer la science des choses à celle des mots, il demanda qu'on étudiât la nature au lieu d'étudier les livres. Ce réalisme trouva bientôt des champions plus ou moins hardis, plus ou moins éclairés, dans Ratichius, dans Coménius, dans Reyher, dans Locke. Chose remarquable, c'est le fondateur des institutions piétistes de Halle, Francke, qui devait se faire en Allemagne le défenseur le plus décidé du réalisme en éducation : il fit, dans son collège latin et dans son *Paedagogium*, une large part à ces connaissances dites « réelles » (*Realien*), que les humanistes, dans leur gymnases, persistaient à vouloir ignorer : la géographie, l'histoire naturelle/la physique, la chimie, l'astronomie, et même les notions pratiques relatives aux arts et métiers. C'est le piétisme allemand qui fonda les premières *Realschulen*. Bientôt, il est vrai, des éducateurs se rattachant à une école philosophique bien différente, à celle de l'Encyclopédie, entrèrent à leur tour en lice pour défendre la même cause : ce furent, en Allemagne, les philanthropinistes ; en France, Condorcet et les savants de la Révolution, les fondateurs des écoles centrales. À la fin du dix-huitième siècle, la tendance réaliste semblait victorieuse sur toute la ligne, tant en France qu'en Allemagne ; et Pestalozzi, le grand rénovateur de l'école élémentaire, plaçait l'intuition sensible à la base même de tout enseignement. Mais l'humanisme n'était point vaincu : en Allemagne, il avait réussi à garder, dans les gymnases, sa position prépondérante ; en France, il opéra un retour offensif lorsque les lycées furent substitués aux écoles centrales. »

http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson

Malgré des variantes, ces divers courants conduisent tous à la constitution dans la plupart des régions protestantes d'Europe centrale et du nord d'écoles secondaires à vocation professionnelle détachées du système des universités, dont le modèle va devenir les *Realschulen*, système alternatif au traditionnel Gymnase. L'interprétation protestante de la lecture des philosophes des Lumières conduit en effet à développer un modèle d'enseignement plus en lien avec la réalité socio-culturelle de l'époque en prônant les valeurs humanitaires. On n'y ambitionne pas de préparer la jeunesse à l'université, mais à l'apprentissage d'un métier et donc à des disciplines plus appliquées, avec des méthodes pédagogiques favorisant le jeu et la participation des élèves. Ce mouvement qui s'instaure à large échelle conduit vers le milieu du 18^{e} siècle à une réforme du Gymnase dont les premières années vont épouser certains principes des *Realschule*, alors que les dernières années préservent leur structure classique comme lieu de préparation à l'université.

La Grande-Bretagne suit au début du 16^{e} siècle une évolution semblable à celle du continent. En 1570, la reine Élizabeth 1ère revient à la religion anglicane, après l'intermède de Marie Tudor, et impose cette religion aux deux universités d'Oxford et de Cambridge, qui deviennent plus orientées vers la théologie et le droit avec un enseignement des mathématiques marginal. Contrairement au continent, les collèges anglicans restent rattachés aux universités et s'entendent plus au sens actuel du terme anglais de *undergraduate college*. Au début du 18^{e} siècle, une réforme du concours d'entrée à Cambridge fait des mathématiques une discipline de sélection au détriment de la logique aristotélicienne, alors tombée en désuétude et ce sont les *Éléments* d'Euclide qui sont alors au programme. Ainsi cette réforme structurelle met certes les mathématiques au centre des enseignements de Cambridge, mais selon un modèle ancien hérité de la Scholastique, plus que dans un mouvement de renouveau.

6.3. La Contre-réforme et le modèle jésuite

Dans les pays catholiques, le modèle qui domine est le collège jésuite. Ignace de Loyola, fondateur de l'ordre avait étudié à l'Université de Paris et s'inspira du modèle des collèges parisiens pour organiser l'enseignement jésuite. Au début, les premiers collèges jésuites s'ouvrent de façon relativement indépendante et on trouve dans certains, comme en Sicile, un enseignement des mathématiques ambitieux. Toutefois, entre 1580 et 1599, un système fortement centralisé et normatif se met en place, régi par le *Ratio Studiorum*. Ce règlement organise de façon extrêmement détaillée toute la vie d'un collège jésuite. Il détermine ainsi la division des enseignements par années et trimestres, les emplois du temps quotidiens – y compris les heures de lever et de coucher selon l'âge - et une description précise du curriculum voire des ouvrages à employer. Rapidement, l'enseignement jésuite devient très uniformisé dans toute l'Europe catholique, et bientôt leurs colonies. Cette norme influencera tout l'enseignement secondaire, y compris hors des établissements jésuites et au-delà de leur seule période d'existence.

Un collège jésuite est financé par les Magistrats des grandes villes qui font appel à l'Ordre pour prendre en charge l'enseignement secondaire de leurs administrés. De fait, le collège fonctionne comme un pensionnat formant les futurs prêtres et moines jésuites et qui accueille en sus des élèves séculiers (des garçons issus de la noblesse et la haute bourgeoisie), en internat ou en externat. L'enseignement de base en écriture, lecture et arithmétique doit être acquis avant l'entrée au collège et donc avoir été dispensé dans le cercle familial ou par précepteur privé. L'enseignement est divisé en 7 années : 3 pour la grammaire, 2 pour la poésie et la rhétorique et 2 pour la philosophie. Selon la doxa jésuite, il ne faut pas mélanger les disciplines dans une même année. Les deux années de philosophie sont régies par l'interprétation jésuite d'Aristote. Ainsi la première année est destinée à la dialectique, la logique et l'éthique et la seconde à la physique (au sens d'Aristote c'est-à-dire comprenant les mathématiques). On voit que cette organisation reprend celles des facultés des arts, qui disparurent progressivement au profit des collèges jésuites.

Cependant, contrairement à une idée souvent répandue, la place occupée par les mathématiques dans cet enseignement reste assez marginale, même si plusieurs jésuites tentèrent dans les premières années d'imposer un enseignement ambitieux des mathématiques. Parmi eux figure Christoph Clavius à qui l'on doit une des plus influentes traductions commentées des *Éléments* d'Euclide.

Les éléments d'Euclide de Clavius et leur traduction chinoise

Si Christoph Clavius est connu pour être le créateur du calendrier grégorien, sa traduction de 1574 des *Éléments* d'Euclide est restée pendant plusieurs siècles un des piliers de l'enseignement des mathématiques. Elle comporte de nombreux commentaires de différentes époques et des appendices à visées didactiques, en particulier dans le livre V un développement original sur les progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques.

Matteo Ricci et Xu Guangqi

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectāgulis triāgulis, quadratū, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.

In triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, describāturq; super AB, AC, BC quadrata ABFG, ACHI BCDE: Dico quadratū BCDE, descriptū super latus BC, quod angulo recto opponit, æquale esse duob' quadratis ABFG, ACHI, quę sup alia duo latera sunt descripta, siue hęc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia du anguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodēq; modo IA, AB, vna recta linea erunt.

46. primi. 31. primi. 14. primi.

Le théorème de Pythagore dans l'édition de Clavius

Au début du 17e siècle, les Jésuites qui veulent évangéliser la Chine, en convertissant les Mandarins décident de traduire les six premiers livres des *Éléments* d'Euclide, à partir de la version de Clavius. C'est le premier ouvrage occidental qui sera traduit en chinois. Cette traduction est l'œuvre conjointe d'un jésuite, Matteo Ricci, et d'un lettré chinois, Xi Guangqi. Cette collaboration exceptionnelle conduisit à la création de nombreux néologismes dont beaucoup sont encore utilisés en chinois pour les mathématiques. La première édition du *Jihe yuanben* 几何原本 (traduction d'éléments de géométrie) paraît en 1607 et sera souvent rééditée et commentée.

Clavius a enseigné à Rome de 1565 à 1612 dans le plus prestigieux des collèges jésuites, le *Collegio Romano*, qui avait entre autres comme fonction de former à l'enseignement les jésuites les plus doués. Il tenta d'imposer un enseignement des mathématiques ambitieux et moderne, mais ne put s'opposer aux réticences de la majorité des membres de l'ordre qui trouvaient cette discipline difficile, aride et stérile.

Dans la version finale du *Ratio Studiorum,* l'enseignement des mathématiques occupe une classe quotidienne de trois quarts d'heure dans la dernière des deux années de philosophie. Ce cours est essentiellement basé sur la lecture de la traduction latine de Clavius des *Éléments* d'Euclide, avec éventuellement quelques suppléments sur la sphère d'après Ptolémée, ou de géographie. L'enseignement des mathématiques est donc très localisé et pratiqué selon le modèle latin antique. De plus, les parents retirent souvent leurs enfants des collèges à la fin des 5 premières années. Même pour ceux qui poursuivent dans les classes de philosophie, les cours de mathématiques ne sont obligatoires que pour les novices. On trouve par ailleurs des indices dans divers écrits qui sous-entendent que les enseignements de mathématiques des collèges jésuites ne sont pas souvent plébiscités par les élèves, qui les trouvent difficiles et ennuyeux. Enfin, le peu d'heures d'enseignement de mathématiques ne permet pas d'affirmer qu'il existe à proprement parler de professeur de mathématiques en titre. On trouve ainsi des lettres de pères supérieurs se plaignant de la difficulté dans certains collèges à trouver des personnes compétentes pour enseigner cette discipline.

6.4. Les alternatives dans les pays catholiques

En concurrence au modèle jésuite, en 1611 est créé à Paris l'ordre de l'Oratoire, qui 20 ans plus tard compte 71 collèges. Cet ordre est connu pour avoir promulgué l'enseignement des sciences d'une façon plus moderne que celui des Jésuites. En mathématiques en particulier, les oratoriens étaient acquis à la critique des Anciens en vogue à la fin du 17^{e} siècle, caractérisée par le slogan « il faut éclairer plutôt que convaincre ». Les membres de cet Ordre ont ainsi promu des enseignements d'algèbre et de géométrie cartésienne, qui s'opposaient au modèle euclidien. Plusieurs ouvrages de mathématiques des membres de cet ordre ont eu un large succès et sont restés dans la postérité, comme ceux de Jean Prestet, Bernard Lamy ou Charles-René Reynaud.

En 1773, le pape Clément XIV dissout l'ordre des Jésuites, alors que plusieurs pays avaient déjà chassé les Jésuites de leurs collèges. On assiste ainsi en cette fin du 18^{e} siècle à de profondes réformes de l'enseignement un peu

partout en Europe. Si elles sont avant tout structurelles, ces réformes vont conduire à un renouveau des contenus mathématiques enseignés, voire à une plus large place de ceux-ci dans les enseignements. En France, Louis XV ferme par décret tous les collèges jésuites en 1764. Comme dans d'autres pays, l'enseignement s'en trouve désorganisé et n'aura pas trouvé de nouvelle structure stable quand la révolution vient tout remettre en cause.

A côté de ce modèle classique de l'enseignement, apparaît dès la deuxième moitié du 17^{e} siècle, la formation des métiers du génie, en artillerie ou en construction navale ou hydrographie, va nécessiter des enseignements de mathématiques plus appliquées, souvent appelées mathématiques mixtes. Ce mouvement touche toute l'Europe. En France, la formation des ingénieurs civils et militaires va devenir une véritable préoccupation de l'État, qui prend en charge la formation militaire des nobles. Ainsi, soucieux de faire de la France une puissance maritime, Colbert, ministre de Louis XIV, ordonne par décret en 1669 la création de Chaires royales d'hydrographie dans toutes les grandes villes côtières du Royaume, suivie rapidement par la mise en place d'écoles d'hydrographie en marge des collèges, pour les élèves de 15-16 ans. En 1720, sous la régence de Philippe d'Orléans sont créées les Écoles Régimentaires d'Artillerie et en 1748, Louis XV créé l'École du Génie de Mézières. Le cœur des enseignements théoriques de ces écoles est constitué de mathématiques théoriques, mais surtout appliquées. À partir de 1755 un système de concours d'entrée est mis en place, où les mathématiques tiennent le haut du pavé. Pour évaluer les candidats la fonction d'examinateur permanent est créée, tenue par un membre du Collège royal. Ces exemples sont le départ du réseau sur lequel vont se constituer les nombreuses écoles d'ingénieurs françaises qui s'organiseront progressivement pour former le système actuel des classes préparatoires et grandes écoles.

Dans la seconde moitié du 18^{e} siècle, la profession de professeur de mathématiques se met progressivement en place. Dans les 12 collèges jésuites où existe une chaire royale d'hydrographie, le père en charge de cet enseignement a une certaine notoriété et occupe souvent une fonction sociale en lien avec la cité, comme arpenteur et/ou conseiller en génie civil. Une situation assez semblable prévaut pour les professeurs de mathématiques des écoles d'artillerie. De plus, ces nouveaux enseignements génèrent de nouveaux manuels. Les cours de mathématiques les plus célèbres de cette époque sont ceux d'Étienne Camus, de l'abbé Bossut, d'Étienne Bézout ou de Gaspard Monge. Plusieurs des manuels ainsi publiés ont eu un succès important au-delà des frontières et du temps, comptant de nombreuses rééditions. On y trouve en particulier les premiers enseignements des calculs différentiel et intégral. Les cours de Bézout et Bossut par exemple seront la source principale d'inspiration pour le concours d'entrée de la toute nouvelle École Polytechnique. Cette évolution qui faisait la part belle aux applications des mathématiques dans un esprit de nouveauté sera reprise et amplifiée dans les premiers temps de la Révolution. Cependant les débuts de l'ère napoléonienne, tout en maintenant une haute idée de l'enseignement des mathématiques, seront marqués par un retour à un plus grand classicisme de forme.

7. 19e et 20e siècles – Les temps modernes

7.1. La Révolution française et les ambitions de la Convention

Dans la foulée de la Révolution française, la Convention établit un ambitieux programme de réforme de tout l'enseignement français.

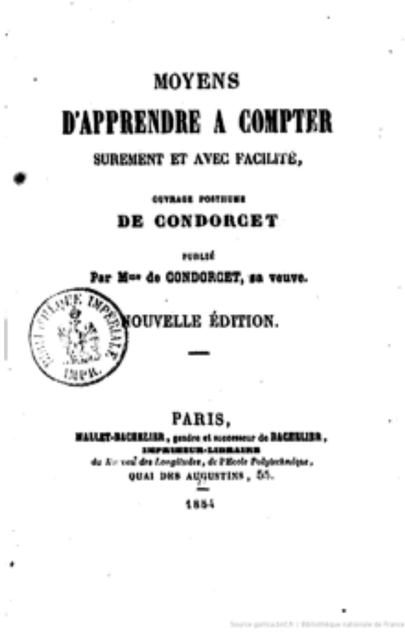
L'influence de Condorcet

Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat, marquis de Condorcet est né en 1743 d'ancienne noblesse. Il publie plusieurs travaux de mathématiques et entre à 26 ans à l'Académie royale des sciences. Engagé dans la révolution, il est élu député à l'assemblée de Paris en 1791. La même année il publie cinq mémoires sur l'instruction publique, dans lesquels il présente une vision philosophique et un plan d'action complet pour la mise en place d'un système éducatif comprenant tous les niveaux, de l'école primaire à la formation professionnelle, y compris celle des enseignants, avec un plaidoyer pour l'éducation permanente.

Il met entre autres en avant l'importance de la qualité des manuels, de la formation des enseignants, l'égalité des sexes, la gratuité, l'importance de l'enseignement scientifique, etc. Il affirme que l'instruction, qui ne peut se soumettre à aucun pouvoir politique et d'où découle l'éducation, est le vecteur essentiel de la liberté et de l'égalité des droits. Il est donc essentiel que « chacun soit assez instruit pour exercer par lui-même et sans se soumettre aveuglément à la raison d'autrui, [les droits] dont la loi lui a garanti la jouissance. ».

Nommé rapporteur du projet de décret sur l'organisation générale de l'Instruction Publique, Condorcet rédige un projet, basé sur ses écrits de 1791, qui est approuvé par le comité le 18 avril 1792 et présenté à l'Assemblée Nationale les 20 et 21 avril 1792. Mais la déclaration de guerre à la Hongrie reporte les débats et finalement, la Convention préférera le plan de Lepeletier de Saint-Fargeau, présenté par Robespierre lui-même, le 13 juillet 1793. Ce plan, qui ne sera que partiellement appliqué, s'oppose d'emblée sur le fond aux idées de Condorcet, par l'importance qu'il accorde à l'éducation et à la morale civique. Il s'agit de former des citoyens dévoués à la nation et de se méfier d'une formation intellectuelle qui engendre l'individualisme.

Condorcet, tombé en disgrâce, vit dans la clandestinité, où il rédige son manuel d'arithmétique, que l'on peut considérer comme le premier ouvrage de didactique des mathématiques, publié à titre posthume. Arrêté, il meurt en prison le 29 mars 1794.



Inspiré des idées de Condorcet, cette refonte totale de l'Instruction Publique veut appliquer les idées révolutionnaires sur l'accès pour tous à l'éducation. La place faite aux sciences et aux mathématiques est très importante. C'est à cette époque, à la fin du 18e siècle, que les termes d'« instituteur » et d' « institutrice » voient le jour[2]. Le corps des instituteurs est créé en décembre 1792, officialisant l'emploi de ce terme, particularité de la langue française. De plus, ce plan prévoit un système de formation des enseignants, qui préfigure l'instauration des Écoles Normales. En fait, seule l'École Normale de Paris voit le jour et pour seulement quatre mois, début 1795. Elle est toutefois restée dans l'histoire sous le nom d'École Normale de l'an III. Sur les 14 professeurs de cette école, il y en avait deux pour les mathématiques (Joseph-Louis Lagrange et Pierre Simon de Laplace donnèrent à eux deux 16 des 100 leçons totales données dans les 4 mois) et un pour la géométrie descriptive, (Gaspard Monge donna 12 leçons). Les mathématiques étaient donc numériquement très présentes, à la pointe de recherches novatrices en rupture avec le vieux modèle euclidien, marquant l'importance de l'analyse et des applications au génie, à la marine ou à l'artillerie. Malheureusement ce projet avorta et après la création de classes normales dans les lycées sous Napoléon, il faudra attendre la loi Guizot sous la Restauration pour voir se créer en 1833 d'abord les écoles normales de garçons, puis en 1838 celles de filles. Celles-ci seront finalement généralisées pendant la Troisième République par une loi de 1879.

La mise en place de l'enseignement primaire pour tous s'avère plus complexe que prévu et c'est finalement l'enseignement secondaire, concernant les élèves de 11 à 18 ans, qui est d'abord réformé. Sont ainsi créées en 1794 dans tout le pays environ 90 écoles centrales, pour lesquelles les textes prévoient une liste de professeurs dans 14 disciplines, qui débute avec celui de mathématiques. Lagrange et Laplace comptent parmi les trois membres en charge de la nomination de tous les enseignants de Paris. La même année est créée l'École Centrale des Travaux Publics qui devient l'année suivante l'École Polytechnique. La Révolution Française a donc une ambition affichée de mettre en avant un enseignement des mathématiques de premier plan, tant par la place accordée dans le curriculum que par la qualité des contenus en rupture avec le modèle classique. Notons que bien que cet enseignement se veuille démocratique, il ne concerne que les garçons.

---

[2] En vieux français éduquer se disait instituer, mais le terme d'instituteur n'existait pas. Il apparaît à la fin du 18e siècle, et on le trouve au masculin et au féminin sous la plume de Condorcet, qui est le premier à en généraliser l'emploi.

7.2. Les réformes napoléoniennes : le lycée et l'université impériale

En 1802, Napoléon réforme les écoles centrales qui prennent le nom de Lycées. La place centrale des mathématiques à côté du latin est réaffirmée. En avril 1803, une commission composée de Laplace, Monge et Sylvestre-François Lacroix publie le programme de sciences, inaugurant une tradition encore vivace des commissions spécialisées. Quelques années plus tôt, Laplace avait demandé à Lacroix d'écrire plusieurs manuels de mathématiques pour remplacer ceux de Bézout et de Bossut pour les concours d'entrée aux écoles militaires et navales. Ce sont ces manuels qui vont modeler le nouveau curriculum de mathématiques pour les lycées napoléoniens. Or, Lacroix a sciemment fait le choix de ne donner dans ses manuels aucune application, ni exemple. Il entend donner une image des mathématiques élémentaires coupées des applications. En ce sens, ses manuels reproduisent, en les renouvelant par des contenus plus modernes, les principes des *Éléments* d'Euclide. L'idée est de donner un exposé cohérent des mathématiques avant tout destinées à former l'esprit. On assiste ainsi à une professionnalisation du professeur de mathématiques, qui délimite un champ disciplinaire, bien distinct des applications possibles, qui a pour objet la formation au raisonnement. C'est une rupture nette avec le vent de nouveauté qui soufflait depuis le milieu du 18e siècle sur l'enseignement des mathématiques. Ainsi, même si de nouveaux contenus, en particulier d'algèbre, sont enseignés, la forme revient à un standard plus classique, coupé des applications, plaçant les mathématiques au-dessus des autres sciences comme modèle de la formation de l'esprit. En juillet 1810, un professeur du Lycée de Nîmes, Joseph-Diaz Gergonne, publie le premier numéro des *Annales de mathématiques pures et appliquées* (connues sous le nom *d'Annales de Gergonne*). Ce périodique qui parut jusqu'en 1832 publia en 22 ans plus de 900 articles de près de 140 auteurs de nombreux pays couvrant une grande diversité de domaines. Même si certains articles dépassaient le niveau d'enseignement des lycées, ce journal contribua à la formation d'une identité mathématique et par là à la formation des enseignants et à une certaine normalisation des contenus et des notations mathématiques enseignés à divers niveaux. En 1826, August Leopold Crelle fonde le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, lui aussi plus connu sous le nom de *Journal de Crelle*. Ce journal avait les mêmes ambitions que celui de Gergonne avec lequel il entretient des liens forts. D'une plus grande longévité (il existe encore), ce journal devint peu à peu le lieu de débat des chercheurs et contribua à la diffusion des mathématiques en Allemagne.

La place centrale des mathématiques dans les lycées napoléoniens ne résistera pas au poids des conservateurs. Ainsi, lors d'une première réforme en 1809, les mathématiques n'occupent plus que les deux dernières années du lycée (celles des Humanités) comme discipline théorique pour former l'esprit et coupées des applications, à l'image des manuels de Lacroix. Par contre, des mathématiques d'un autre genre sont enseignées dans les cours spéciaux qui préparent aux Écoles spéciales (nom donné après la révolution à toutes les écoles militaires et d'ingénieurs) où les mathématiques appliquées tenaient une place prépondérante.

Ces cours abordent un enseignement de géométrie et d'algèbre avec des applications ; ils sont donnés parallèlement au lycée, par des institutions ou des précepteurs privés. Tout ce qui touche à l'analyse reste par contre limité aux enseignements post-lycée dans les Écoles spéciales.

Les classes préparatoires

L'origine des classes préparatoires aux Grandes Écoles remonte à la création des concours de recrutement des officiers des armes savantes, d'abord institué par Vauban en 1692 pour le Génie, puis en 1756 pour l'Artillerie, et en 1764 pour la Marine. Ce concours ouvert aux seuls nobles consistait en un oral de mathématiques passé devant l'examinateur royal, représentant du roi. Il se basait sur la connaissance du manuel, souvent écrit par l'examinateur lui-même, et se préparait avec l'aide d'un précepteur privé, mais le plus souvent dans un pensionnat privé spécialisé sous protection de l'examinateur. La création des chaires d'hydrographie puis des écoles militaires va permettre de préparer ces concours au sein des collèges qui possèdent de tels enseignants et qui accueillent les boursiers du roi.

Avec la Révolution, tout ce système s'effondre pour donner naissance aux prémisses du système actuel. Avec la création de l'École Polytechnique, le recrutement par concours dans des Grandes Écoles s'élargit à toute l'administration technique. Ces concours ouverts désormais à tout citoyen âgé de 16 à 20 ans reposent toujours de façon centrale sur un examen des connaissances de mathématiques.

La préparation est assurée d'abord par les professeurs de mathématiques dans les écoles centrales, puis dans les classes de mathématiques transcendantes, rebaptisées classes de mathématiques spéciales en 1809 dans les nouveaux lycées napoléoniens. C'est la naissance du système actuel. Dans la deuxième moitié du 19e siècle, les épreuves écrites aux concours font leur apparition. Les élèves des grands lycées parisiens (Louis-le-Grand, Saint-Louis et Charlemagne) sont souvent pensionnaires dans des institutions privées où ils préparent réellement les concours et où s'instaurent les premiers systèmes de préparation à l'oral, qui prennent dès lors le nom de « colles ». C'est sous la IIIe république, au tournant du 20e siècle, que le système qui perdurera presque inchangé jusqu'aux années 1970 se met en place. Se créent ainsi dans les grands lycées parisiens et de province des classes préparatoires, qui passent à deux ans en 1905, avec un accroissement des enseignements de sciences physiques. Accessibles à l'issue du bac scientifique, ce système de préparation allie écrit et oral, et recrute dans ses enseignants « l'aristocratie » des agrégés de mathématiques, diplômés de l'École Normale Supérieure. Particularité bien française, ce système concurrence directement les universités scientifiques, d'autant que le nombre d'écoles auxquelles elles permettent l'accès s'est largement accru. Si ce modèle a suscité l'admiration du monde entier au cours du 19e siècle, on peut toutefois s'interroger sur sa pertinence en ce début de 21e siècle.

Il est important de noter que l'enseignement des lycées reste élitiste et masculin. Il ne concerne à cette époque qu'environ 3% d'une classe d'âge de garçons. Les élèves entraient dès l'âge de 7 ans et poursuivaient leurs études sur une dizaine d'années, comprenant l'équivalent de l'enseignement primaire, où les rudiments du calcul et de la géométrie étaient enseignés. En 1806, Napoléon crée l'Université Impériale, qui instaure une situation de monopole sur toute l'éducation dans l'Empire. En 1808, il créé l'agrégation des lycées, alors divisée en trois branches : Lettres, Grammaire et Sciences (plus tard scindées en mathématiques et sciences physiques, en 1841). La même année il crée le Pensionnat Normal pour « former à l'art d'enseigner les lettres et les sciences » les enseignants du lycée. C'est l'ancêtre de l'École Normale Supérieure de garçons, qui occupera les locaux de la rue d'Ulm (qui lui a donné son nom le plus courant) à partir de 1847.

7.3. Le double système des enseignements primaire et secondaire

En 1833, sous la Monarchie de Juillet, la loi Guizot libéralise l'enseignement, brisant le monopole impérial. Elle instaure l'obligation pour chaque commune de plus de 800 habitants d'entretenir une école primaire de garçons, qui doit dispenser un enseignement gratuit, contrairement au Lycée qui est payant. Il faudra attendre le Second Empire, pour qu'en 1850, la loi Falloux instaure l'obligation d'entretenir une école primaire pour les filles. On voit dès lors se créer deux systèmes parallèles, celui d'un enseignement pour l'élite masculine, qui entre dès le départ dans la filière du lycée et celui pour la plus grande masse, des écoles primaires de garçons et bientôt de filles. Dans cet enseignement primaire, pour le peuple, le terme de mathématiques n'apparaît pas en tant que tel : on y parle de calcul, de système métrique ou d'arithmétique. C'est un enseignement pratique ancré dans une réalité sociale, où on aborde des problèmes relevant de divers corps de métiers (dont beaucoup ont aujourd'hui disparu). Ce n'est que dans l'enseignement primaire supérieur, réservé à l'élite du peuple, qu'on trouve un enseignement de géométrie. Celui-ci est toutefois bien différent de celui des classes des Lycées, tourné vers la pratique et la mesure des terrains, sans approche théorique. Dans les institutions pour filles, les mathématiques tiennent une place encore plus réduite et sont reliées à des contextes spécifiques jugés féminins. Selon les lieux et les époques, l'enseignement primaire supérieur durait 2 ou 3 ans et restait très marginal jusqu'à la fin du 19^{e} siècle. Avec les lois Ferry de 1881 et 1882 qui rendent l'école gratuite et obligatoire de 6 à 13 ans, un effort est aussi mené pour favoriser l'accès aux cours supérieurs. Les Écoles Normales Supérieures de l'Enseignement Primaire, de Fontenay pour les filles et de Saint-Cloud pour les garçons sont créées sous les lois Ferry respectivement en 1880 et 1882. Elles ont comme mission de former les professeurs des écoles normales d'institutrices et d'instituteurs et des écoles primaires supérieures, ainsi que les inspecteurs de l'enseignement primaire. l'École Normale Supérieure de jeunes filles de Sèvres, pour former les enseignantes des Lycées, est créée en 1881, soit plus de soixante-dix ans après les prémisses de son équivalent masculin de la rue d'Ulm.

Par ailleurs, certains cours complémentaires à vocation professionnelle s'instaurent. Ils sont placés en 1892 sous la tutelle du Ministère du Commerce et de l'Industrie sous le nom d'Écoles pratiques du commerce et de l'industrie (EPCI) offrant des débouchés professionnels intéressants pour les couches sociales les plus basses. Les écoles normales représentent aussi un débouché de choix pour les meilleurs élèves des couches sociales les moins favorisées, surtout pour les filles. De fait, au tournant du 20e siècle, l'école primaire supérieure concurrence en effectifs les lycées, surtout pour les filles, pour lesquelles c'est le seul moyen d'accéder à un réel statut social. Pour les garçons, c'est le seul lieu qui permet d'acquérir à ce niveau d'étude une pratique des mathématiques quelque peu appliquée. Le système des examens se met en place dans la deuxième moitié du 19e siècle : Certificat d'Étude Primaire pour la fin du primaire, Brevet Élémentaire et Brevet Supérieur pour l'école primaire supérieure, les Écoles Normales Primaires et pour les lycées de jeunes filles. Ces dernières n'auront le droit officiel de passer le baccalauréat qu'en 1924. Le baccalauréat reste jusqu'à la fin du 19e siècle attaché au système universitaire, délivré par les facultés et ne deviendra le diplôme de la fin du secondaire qu'au début du 20e siècle.

Le certificat d'études

Si le certificat d'études primaires est officiellement institué comme examen national par les lois Ferry de 1880, on en trouve l'origine dans les lois Guizot de 1834. En effet, le ministre de Louis-Philippe demande que soit dressée dans toutes les communes une liste des élèves qui terminent leurs études primaires et que leur soit délivré un certificat qui indiquera pour chaque objet d'enseignement un des quatre mentions, *très bien, bien, assez bien* ou *mal*. Il ne s'agit donc pas d'un examen, mais d'une attestation commentée de fin d'étude, qui peut même en attester l'échec. Dans les cinquante ans qui suivent plusieurs initiatives locales variées, vont mettre en place divers changements que les lois Ferry vont entériner de façon plus globale et radicale. Le certificat d'études est alors un examen accessible à tous les élèves à partir de 11 ans, qui se passe en une journée dans l'école du chef-lieu de canton, devant un jury supervisé par l'inspecteur primaire. Le matin est consacré aux épreuves écrites qui comprennent (avec des variantes selon les époques) : dictée, composition française, calcul et système métrique, sciences, travaux manuels. Puis pour les élèves ayant obtenu un total suffisant à ces épreuves corrigées sur place, l'après-midi est consacré à des épreuves orales, comprenant une lecture expliquée, une poésie, une question d'histoire-géographie et du calcul pratique et mental, voire du dessin linéaire.

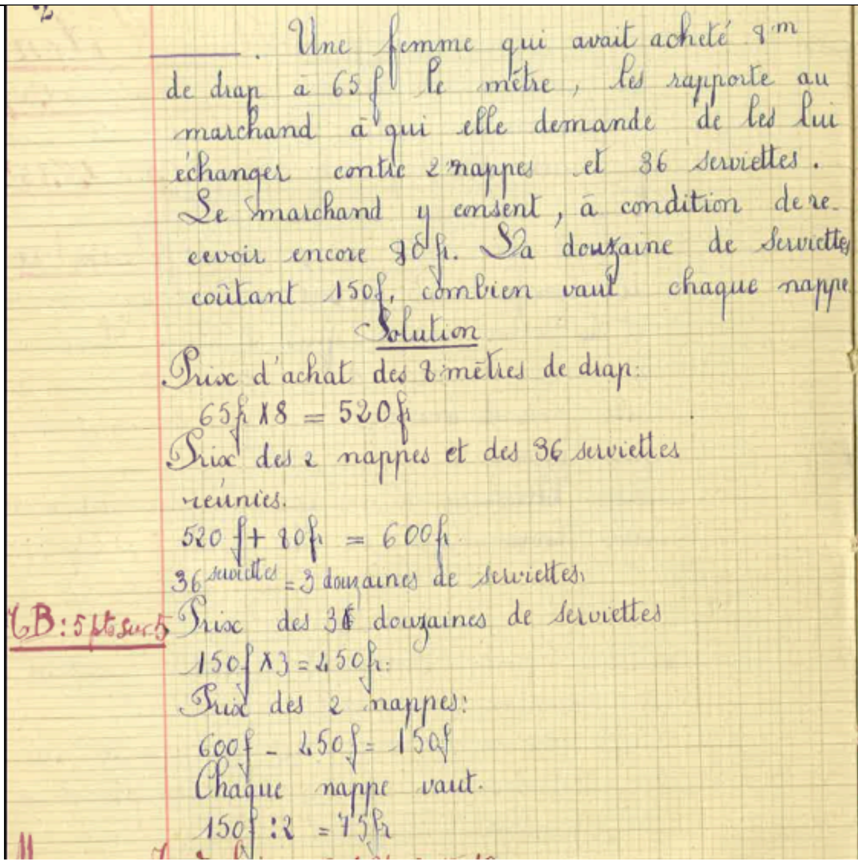
Véritable rite initiatique qui marquait l'entrée dans l'âge adulte, ce diplôme de l'enseignement laïc vient concurrencer la Communion catholique. Le pourcentage d'une classe d'âge obtenant le fameux

diplôme a rapidement atteint les 30% quelques années après sa création, puis les 50% dans les années 50, où le nouveau Brevet d'études du premier cycle d'étude du secondaire (le BEPC) va le concurrencer et finalement le faire disparaître.

Cela veut dire que sur les 100 ans du certificat d'études, même avec un taux de réussite de l'ordre de 80%, moins de la moitié des français âgés de 11 à 14 ans a passé ce diplôme, et donc au moins la moitié quittait l'école sans diplôme. Les problèmes de calcul du certificat d'études sont restés gravés dans la mémoire collective : bassin qui se remplissent avec divers robinets ou pompes aux débits ajustés avec le temps, trains qui se croisent, problème d'épargne ou de commerces quotidiens. Ils sont le reflet d'une époque et racontent des histoires ancrées dans une réalité, qui n'est pas toujours celles de tous les élèves. Ainsi, les choix des valeurs numériques conduisent toujours, malgré certaines circonvolutions, à des calculs qui « tombent justes », rendant le déchiffrage de l'histoire finalement plus important que la dextérité calculatoire. Les mathématiques modernes vont ranger au placard de l'histoire ces problèmes, qui ne reviendront plus dans les cahiers d'écoliers. Pourtant ceux-ci alimentent toujours chez certains la nostalgie d'une époque, où tout le monde « savait compter et se débrouiller dans la vie avec les quatre opérations ». Non seulement cette affirmation est discutable, mais surtout la vie des élèves du 21^{e} siècle est très différente, tant par l'environnement général, que par les outils technologiques à disposition, ce qui rend la comparaison bien complexe. Le mythe du niveau qui baisse a encore de beaux jours devant lui, mais c'est surtout un problème mal posé.

Les deux systèmes, enseignement primaire (éventuellement supérieur) et lycée, coexistent en parallèle jusque dans les filières de formation de leurs enseignants. En effet, les professeurs des écoles primaires, y compris supérieures, sont issus de l'enseignement primaire, puis des écoles normales de l'enseignement primaires dont les professeurs sont formés dans des écoles normales supérieures spécifiques (Fontenay et Saint-Cloud, comme évoqué plus haut). Les professeurs de tous les cycles du lycée sont issus du lycée, et deviennent agrégés formés à l'École Normale Supérieure (Ulm ou Sèvres) ou à l'Université. De fait, ce sont bien deux types de culture, y compris pour les mathématiques, qui coexistent, sans jamais se croiser. Dans l'une, pour la masse, on enseigne des mathématiques élémentaires à visée pratique, qui ne doivent pas dépasser les rudiments du calcul (numération, algorithmes des 4 opérations, systèmes métrologiques, problèmes numériques en lien avec des contextes concrets) et de quelques éléments de géométrie pratique (mesures d'aires classiques essentiellement), pas d'algèbre ou de logarithme.

Les problèmes de mathématiques au primaire



Une femme qui avait acheté 8 m de drap à 65 f le mètre, les rapporte au marchand à qui elle demande de les lui échanger contre 2 nappes et 36 serviettes. Le marchand y consent, à condition de recevoir encore 80 fr. La douzaine de serviettes coûtant 150 f, combien vaut chaque nappe

Solution

Prix d'achat des 8 mètres de drap:
65 fr x 8 = 520 fr
Prix des 2 nappes et des 36 serviettes réunies.
520 f + 80 fr = 600 fr
36 serviettes = 3 douzaines de serviettes
Prix des 3 douzaines de serviettes
150 f x 3 = 450 fr.
Prix des 2 nappes:
600 f - 450 f = 150 f
Chaque nappe vaut.
150 f : 2 = 75 fr

Extrait du cahier de composition d'une élève de 10 ans en cours moyen en 1935 dans une école rurale de la Drôme

Dans l'autre, qui ne touche qu'une élite de plus masculine jusque dans les années 1920, on enseigne des mathématiques pour la formation de l'esprit dans la lignée scholastique (avec le modèle des *Éléments* d'Euclide, malgré un renouvellement certain des contenus), loin des mathématiques mixtes ou appliquées. Ce n'est que dans le créneau très réduit des cours spéciaux parallèles à l'enseignement officiel des lycées, en préparation pour les écoles d'ingénieurs, que des mathématiques plus modernes avec des applications peuvent être enseignées.

7.4. Au début du 20e siècle : un renouveau pour les sciences

Le modèle des Humanités classiques est toutefois de plus en plus décrié. Cela conduit en France, en 1891 à la création d'une filière dite moderne qui réorganise ainsi les cours spéciaux avec un enseignement plus tourné vers les sciences et les langues vivantes. Ces évolutions sont en fait le reflet des modifications socio-économiques de la fin du 19e siècle. En effet, l'industrialisation croissante non seulement nécessite plus d'ingénieurs et de techniciens divers mais conduit aussi à la poussée d'une classe moyenne d'industriels, de commerçants et cadres techniques qui font concurrence à l'ancienne classe dirigeante constituée de notables, de professions libérales ou de hauts fonctionnaires. On assiste donc à un changement dans la structure même des élites, qui se réclament d'une autre culture, dont l'école doit se faire le reflet. En contre coup, le succès grandissant de la filière moderne à la fin du 19e va conduire à une crise des Humanités et à une redéfinition de la culture de la classe dirigeante.

Depuis la fin du 19e siècle, les sciences pénètrent de plus en plus la vie économique et sociale. Le début du 20e siècle va voir se créer un mouvement d'ampleur internationale pour un renouveau de l'enseignement des sciences et en particulier des mathématiques au secondaire. En Allemagne il est porté par le mathématicien Félix Klein, qui deviendra le premier président de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) créée lors du 4e Congrès international des mathématiciens, en 1908 à Rome et qui a joué un rôle important dans ce mouvement.

La CIEM

En 1908, lors du 4e Congrès International des Mathématiciens à Rome, la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM), regroupant 19 pays a été instituée sous la présidence du mathématicien allemand Felix Klein. L'histoire de cette commission montre qu'à l'échelle internationale, depuis plus d'un siècle, des questions relatives à l'enseignement des mathématiques, mais aussi à la formation des enseignants se sont posées au sein de la communauté mathématique.
La commission se donne comme organe de diffusion la revue *L'Enseignement Mathématique* fondée en 1899 par Henri Fehr (Genève) et Charles Ange Laisant

(Paris), sous le patronage d'un comité comprenant les mathématiciens les plus éminents des principaux pays.

La revue publie les rapports des experts nationaux et les débats de la commission. À la réunion en 1910, lors de l'Exposition Universelle de Bruxelles, Carlo Bourlet lance : « Classons l'antique édifice d'Euclide, admirable d'harmonie et de perfection, au rang des monuments historiques, et bâtissons, suivant un plan nouveau, une œuvre homogène conforme aux nécessités du jour ». (Enseignement Mathématique n°12, 1910, p. 384).

C'est dans cet état d'esprit que les premiers travaux de la CIEM visaient à une réforme des mathématiques portant sur la rénovation des contenus, mais qui touchaient déjà à la formation des enseignants de mathématiques. Malheureusement, la guerre a coupé ces élans et cette commission, bien que jamais dissoute, ne ressurgira vraiment que dans la fin des années 50, où elle devient plus connue sous son acronyme anglais de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Elle jouera alors un rôle important, avec un remarquable consensus international, dans ce qui va déboucher dans la fin des années 60 sur la réforme des mathématiques modernes.

De fait, la réforme des mathématiques modernes, et peut-être plus encore son échec rapide, ont joué un rôle important dans la dynamique qui va voir émerger à l'échelle internationale un champ académique de *mathematics education* de plus en plus autonome des mathématiciens.

Dans ce mouvement, la CIEM continue de jouer un rôle central fédérateur, qui a permis de maintenir un lien fort avec les mathématiciens. En 1969 a ainsi lieu à Lyon le premier *International Congress on Mathematics Education* (ICME). Celui-ci continue à être organisé tous les 4 ans. En 1986, la CIEM lance aussi les études qui visent à produire par l'intermédiaire d'un congrès sur invitation, un ouvrage de référence sur un thème d'éducation mathématique, environ tous les deux ans. Elle est aussi à l'origine de la création du groupe *Psychology of Mathematics Education* (PME), en 1976 lors du congrès ICME3 à Karlsruhe. Ce groupe organise un congrès international annuel.

C'est de l'université que dans plusieurs pays, notamment l'Allemagne et la France, vient la volonté d'une réforme de l'enseignement des sciences dans le supérieur et le secondaire. De nouveaux paradigmes pour les sciences voient le jour, comme le positivisme d'Auguste Comte qui affirme le rôle central joué par les mathématiques dans les fondements des autres sciences et l'importance de l'expérience et de l'observation dans la démarche scientifique. On revendique ainsi l'accessibilité de la classe dirigeante à une véritable culture scientifique et non plus seulement aux Humanités classiques. L'université avait jusque-là ignoré les sciences, qu'elle ne considérait que sous un angle utilitariste pour les métiers techniques. En France, une commission est mise en place en 1901 pour rédiger les nouveaux programmes de mathématiques des lycées, présidée par le mathématicien Gaston Darboux. En 1902, on crée deux cycles dans la scolarité du lycée avec une séparation du premier cycle en deux sections : A avec latin et B sans latin, puis une séparation en 4 sections au second cycle, dont deux avec des sciences : la C, latin – sciences, et la D, langues vivantes – sciences. Ce compromis permet d'instaurer un enseignement proprement scientifique sans sacrifier les Humanités classiques. Dans ces filières, l'enseignement des sciences est très nettement augmenté, avec une séparation nette entre sciences physiques et biologie. Par ailleurs, la méthode inductive est mise en avant, y compris en mathématiques. On affirme la volonté de s'appuyer sur le réel. L'enseignement de la géométrie se base sur l'observation et l'expérience sensible. La géométrie analytique est introduite et la géométrie dans l'espace prend de l'importance. Enfin sous l'impulsion d'Henri Poincaré, on introduit en géométrie la notion de mouvement. L'analyse fait aussi son entrée officielle dans les programmes du secondaire, avec les notions de dérivées et de primitives, dans une approche très algébrique. C'est donc un enseignement de mathématiques entièrement rénové qui est instauré et qui met en avant les aspects pratiques et les applications.

Les tenants des Humanités classiques, qui disposent de points d'appui dans les milieux conservateurs, continuent de lutter contre cette réforme. Quelques mathématiciens de renom font partie du lot, comme Poincaré (qui avait pourtant inspiré une part de la réforme) et Émile Picard. La toute jeune Association des Professeurs de Mathématiques (APM devenu ensuite APMEP, EP pour l'enseignement public), créée en 1910 est partagée sur le sujet. Certains de ses membres se méfient de l'enseignement des mathématiques basé sur le réel et craignent que celui-ci ne soit pas assez rigoureux. Après la première guerre mondiale, la proximité avec la réforme allemande menée conjointement (en particulier par le relais de la CIEM) est montrée du doigt et le regain de nationalisme met aussi en avant l'enseignement traditionnel. Ceci aboutit finalement à une contre-réforme en 1923, qui fait disparaître la division en deux cycles et en filières. Les Humanités classiques reprennent alors le dessus et on applique le principe de « l'égalité scientifique », qui prône l'idée que tous les lycéens doivent recevoir une même formation à la fois littéraire et scientifique. Si les élèves des anciennes sections classiques y gagnent plus de sciences, c'est bien sûr le contraire pour les deux filières scientifiques. Ceci est renforcé par une réforme dite du « surmenage » en 1931 qui voit l'ensemble des contenus enseignés régresser en volume. Ainsi jusqu'aux années 60, l'enseignement du lycée reste quasiment inchangé et campe sur des positions conservatrices, même si en 1924, l'enseignement féminin des lycées est assimilé à l'enseignement masculin.

7.5. L'entre-deux guerres : montée en puissance de l'enseignement primaire supérieur

Dans l'entre-deux guerres, si le lycée stagne, l'enseignement primaire et surtout l'enseignement primaire supérieur et les divers cours complémentaires sont eux en pleine expansion. C'est avec l'avènement du Front Populaire et le ministre Jean Zay en 1936, que l'enseignement primaire supérieur fusionne avec l'enseignement secondaire (devenu gratuit), dont le premier cycle se scinde en collèges classiques et modernes. Même si la fusion est avant tout symbolique, dans la section moderne le volume d'enseignement de sciences est plus important qu'auparavant. Sous l'occupation, le gouvernement de Vichy est hostile à tout le système de l'enseignement primaire, perçu comme un repère de gauche opposé à la politique de collaboration. Paradoxalement, cette position conduit à renforcer le collège moderne. En 1941, une troisième section proprement scientifique est créée, conduisant au baccalauréat dit « Math-élém », et l'année suivante le nouveau baccalauréat « philo-sciences » comportant moins de mathématiques, sans latin. Dans cette fusion l'esprit des anciens lycées continue cependant à dominer, prônant un enseignement qui vise avant tout la formation de l'esprit contre l'utilitarisme pratique. L'idéal humaniste reste donc de mise. De plus, Vichy supprime les écoles normales, qui seront remises sur pied à la libération. De même les méthodes pédagogiques dites « actives » prônées par le Front Populaire et écartée sous l'occupation seront remises au goût du jour à la libération.

Jusqu'aux années 60, la part des élèves suivant les sections modernes des collèges et des lycées augmente sensiblement et dépasse les 50%. Mais cet enseignement reste un enseignement élitiste qui ne concerne toujours qu'une faible part de la population, surtout pour le second cycle (5% d'une classe d'âge de bacheliers en 1950, 11% en 1960) et dans lequel l'enseignement des mathématiques, même s'il est plus important, reste assez marginal. De plus, cet enseignement, qui n'a pas vraiment su se débarrasser de l'ancien modèle humaniste, est devenu incohérent et dépassé au fil de réformes contradictoires. C'est toutefois un phénomène bien plus large qui va lui porter le coup de grâce.

7.6. 6.6. La réforme des mathématiques modernes

Dans les années 50, le modèle « néo scientiste » s'impose dans les pays industrialisés. Ce courant de pensée met directement en rapport le développement scientifique avec le développement économique et social, ce qui pousse les États à développer l'enseignement scientifique, dont les mathématiques sont le fondement. Dans le même temps, en mathématiques, à la fin des années trente, un groupe de jeunes normaliens décide de réformer l'enseignement du certificat supérieur de mathématiques (l'équivalent actuel de la licence de mathématiques). C'est le début du groupe Bourbaki, qui va totalement réécrire les mathématiques savantes, imposant dans le monde entier une approche très formelle basée sur les structures définies par un choix d'axiomes et la méthode hypothético-déductive, les fameuses mathématiques modernes. Tout d'abord s'opère une refonte complète de l'enseignement universitaire français, non seulement avec le développement des facultés de sciences, mais aussi avec la prédominance des méthodes et des fondements mathématiques dans toutes les sciences humaines, dans le mouvement que l'on nomme le structuralisme. Les programmes des facultés de sciences et des grandes écoles se trouvent ainsi modernisés, et des enseignements de mathématiques apparaissent dans toutes les facultés de médecine et de sciences humaines. Une telle refonte ne pouvait perdurer sans une réforme en profondeur de l'enseignement secondaire, puis du primaire. Mais là encore les enjeux vont être encore plus larges.

Bourbaki

À l'origine du groupe Bourbaki se trouvent 9 mathématiciens, dont 8 anciens élèves de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm : André Weil et Jean Delsarte (promotion 1922), Henri Cartan, Jean Coulomb et René de Possel (promotion 1923), Jean Dieudonné et Charles Ehresmann (promotion 1924), Claude Chevalley (promotion 1926) et Szolem Mandelbrojt.

A Besse, près de Clermont –Ferrand en 1935, de gauche à droite, en haut : Cartan, De Possel, Dieudonné, Weil et le mécanicien ; en bas : le cobaye, Chevalley et Mandelbrojt.

Leur objectif initial est de rénover le cours de calcul différentiel et intégral, qu'ils devaient enseigner et qui à l'époque était basé sur le traité d'analyse d'Edouard Goursat. Dans un esprit potache, ils décident en 1935 de prendre pour nom Bourbaki (plusieurs hypothèses courent sur l'origine de ce choix), auquel ils accolent bientôt le prénom de Nicolas et dont ils situent l'origine dans le pays imaginaire de Poldévie. C'est donc d'un canular que naît ce groupe. Ils établissent comme règles la cooptation, le secret et la limite d'âge (pas plus de 50 ans).

Avec la complicité du père d'Henri Cartan, Elie Cartan, mathématicien célèbre, membre de l'Académie, ils publient des notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences. En 1939-40, l'université de Strasbourg où enseignent Cartan et Dieudonné se replie à Clermont-Ferrand, où seuls les jeunes enseignants suivent. C'est l'occasion pour Cartan d'enseigner le premier cours moderne d'analyse basé sur les structures algébriques et topologiques. Il faudra attendre les années 50 pour que, sous l'impulsion de Gustave Choquet (qui n'a jamais fait partie de Bourbaki), ce type de cours se généralise à toutes les universités françaises. Bourbaki est avant tout la grande histoire d'un travail collectif dont le monument est constitué des 10 tomes des *Éléments de Mathématique*. Le premier intitulé « Théorie des ensembles » paraît en 1939 et le dernier sur les théories spectrales en 1998. Le séminaire Bourbaki créé en 1948 est encore actif. Les plus grands mathématiciens français ont fait partie de ce groupe, dont 5 médaillés Fields et un prix Abel. Bourbaki a également inspiré le groupe littéraire de l'Oulipo et différentes formes de structuralisme.

En 1959, en même temps que l'âge de la scolarité obligatoire est porté de 14 à 16 ans (réforme Berthoin), l'enseignement professionnel devient le Collège d'enseignement technique (CET), tandis que les anciens collèges modernes deviennent des Collèges d'enseignement général (CEG).Les collèges classiques, les « petits lycées », ne sont pas touchés. Dès 1963 apparaît le Collège unique, le Collège d'enseignement secondaire (CES) : c'est à la fois le point de départ d'une volonté de démocratisation sans précédent de l'enseignement et la mort du modèle des Humanités, qu'elles soient classiques ou modernes. De plus, cette réforme, qui marque le début de l'enseignement prolongé de masse, précède de peu une réforme des contenus qui pour les mathématiques prendra le nom de « réforme des mathématiques modernes ». Les travaux de psychologie cognitive, en particulier l'épistémologie génétique de Piaget, mettent en avant la similitude entre les stades du développement des enfants et les structures mathématiques telles que dégagées par Bourbaki. Le structuralisme trouve ici un de ses aboutissements extrêmes et la réforme des mathématiques modernes son modèle pédagogique. Plusieurs mathématiciens (bourbakistes ou non) appuient l'idée d'une réforme complète des contenus mathématiques enseignés au secondaire, idée soutenue également par l'APMEP, devenue une puissante association des professeurs de mathématiques. Le mouvement est international, appuyé par ce qui va devenir l'OCDE et relayé par la CIEM. Cette commission internationale est présidée par le mathématicien français André Lichnérovicz de 1964 à 1966, futur président de la commission qui porte son nom, chargée par le gouvernement français en 1966 de mettre en place la réforme, puis par le néerlandais Hans Freudenthal entre 1967 et 1969, qui sera un des précurseurs internationaux de la recherche sur l'enseignement des mathématiques, fondateur de la revue *Educational Studies in Mathematics.* La même année, sous l'impulsion de l'APMEP et des mathématiciens de plusieurs universités sont créés en France les premiers Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM). Il y en aura rapidement un par académie, dans chaque université de sciences. Regroupant des enseignants de la maternelle à l'université, c'est dans les IREM que se pense et s'expérimente la réforme, et que bientôt s'organise dans l'urgence une formation continue des enseignants de mathématiques. La conjonction de ces différents facteurs socio-économiques, pédagogiques et scientifiques dans un contexte international favorable, va permettre une adhésion de toutes les couches de la société et donner carte blanche aux réformateurs les plus radicaux, qui désirent aller vite. Pourtant, dès le début des années 70 apparaissent des dissensions à l'intérieur de la commission, dont certains claquent la porte. Plusieurs voix s'élèvent pour dénoncer certains excès, mais la machine est lancée. En quelques années la réforme va toucher tous les degrés d'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université. Plus qu'un changement de contenus, c'est bien un renouvellement de la nature même de la discipline enseignée qui s'opère. Dans ce climat de structuralisme radical, les mathématiques sont vues comme un nouveau langage, propre à démocratiser l'accès au savoir et à donner au citoyen de la fin du 20e siècle les armes pour affronter la société moderne. Le langage ensembliste, envahit les cours de mathématiques dès l'école primaire sus des formes édulcorées visant à le rendre plus concret.

Exemple d'activité de mathématiques modernes

1 - Relations générales

1 - Une enquête du professeur de musique

RAOUL DUFY, MUSICIENS MEXICAINS.

Collection Madame Raoul Dufy © S.P.A.D.E.M.

4 - Codage et décodage

a) Observation d'une peinture : codage

Sur le tableau reproduit en tête du chapitre, Raoul Dufy a saisi des musiciens mexicains.
Peut-on sur ce tableau définir une relation ?
Nous avons huit musiciens disposés en deux rangées.
Ils forment un ensemble M (fig. 4)

$$M = \{l, m, n, o, p, q, r, s\}$$

Nous avons six types d'instruments :
contrebasse, clarinette, guitare, grosse caisse, tambour, violon
Nous les noterons respectivement :

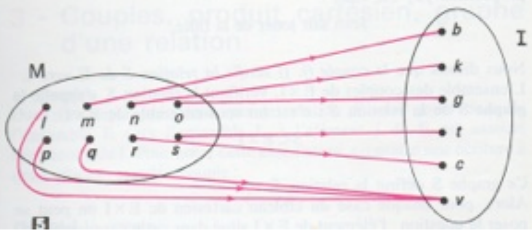
$\{b, c, g, k, t, v\}$ et nous appellerons leur ensemble I.

Quel que soit le musicien x et le type d'instrument y, on sait dire, sur le tableau, si la proposition

x joue de y

est vraie ou fausse.

On a donc défini une relation $\mathfrak{J}$ de M vers I. $\mathfrak{J}$ relation de M vers I peut-être représentée par le schéma sagittal de la figure 5, ou par le schéma cartésien de la figure 6.



5

Extrait du manuel de mathématiques de 5e de la Collection Queysanne-Revuz
Auteurs : Michel Rouquairol et Marie-Cécile Fort – 1978 . Paris : Nathan

On doit apprendre à compter et opérer en base 3 ou 5 avant de savoir réciter la comptine des nombres en base 10. Au colloque de Royaumont organisé en 1959 par l'Organisation européenne de coopération économique (future OCDE), Jean Dieudonné, un des fondateurs de Bourbaki, avait lancé son fameux « À bas Euclide ! ». De fait, l'enseignement de la géométrie est totalement bouleversé, c'est le modèle de l'espace affine normé qui domine, précurseur des espaces vectoriels généraux enseignés au lycée et de l'analyse fonctionnelle enseignée à l'université. Les structures algébriques prennent le dessus et l'arithmétique disparaît. L'analyse est renforcée dès les premières classes des lycées dans une approche très formelle. Une profusion de nouvelles définitions et de nouveaux termes envahissent les mathématiques essentiellement abstraites, qui se départissent du réel pour mieux le modéliser.

Avec l'allongement de la scolarité et le collège unique sans examen d'entrée en 6^{e}, l'école primaire perd la fonction qu'elle avait toujours eu de former la masse de la population pour la vie active. Elle devient alors le lieu pour préparer tous les jeunes aux études du collège, qui pour la première fois de l'histoire va dispenser un enseignement de masse. Le baby-boom provoque un accroissement de la population scolaire, alors que dans le même temps, on manque cruellement d'enseignants. Cette réforme qui demande d'enseigner des mathématiques que personne n'a encore jamais apprises à l'école va donc être mise en place par un corps enseignant qui comprend de nombreux maîtres auxiliaires ou d'anciens instituteurs de l'enseignement primaire supérieur et des cours complémentaires devenus PEGC (professeur d'enseignement général de collège), dont la formation initiale en mathématiques est limitée. De plus, malgré une grande mobilisation de la communauté mathématique et une opinion *a priori* favorable, la réforme va se heurter à la réalité du terrain, par manque de réflexion sur la nature et la faisabilité du changement et de ses implications sur les missions de l'école. De fait, la vision du haut vers le bas, d'une réforme pilotée par des universitaires, a conduit à certains excès. La création de nouvelles filières dans les lycées généraux et techniques créé la voie royale de la section scientifique C (et dans une moindre mesure de la section technique E). Les mathématiques deviennent alors l'outil de sélection dans une école en mutation, où la gestion des flux va devenir un enjeu politique. Cette sélection par les mathématiques comporte certes une part de fantasme. En effet, les études sociologiques ont montré une forte corrélation entre les résultats en mathématiques et dans les disciplines littéraires, et, contrairement aux attentes des réformateurs, l'effet de démocratisation espéré par les mathématiques modernes est quasi nul, le niveau socio-économique restant en France le facteur largement dominant dans la sélection scolaire.

La démocratisation de l'enseignement secondaire et la réforme des mathématiques modernes ont touché, à des degrés divers, tous les pays dans la deuxième moitié du 20e siècle. La France est toutefois l'un de ceux où les mathématiques ont joué un rôle central tout au long du 20e siècle. Le système des Grandes écoles d'ingénieurs et de leurs classes préparatoires, associé à un développement de la physique théorique très proche des mathématiques, est une particularité française, qui a rejailli sur « l'excellence par les mathématiques » dans l'enseignement secondaire. Ce modèle, mis à mal après l'abandon des mathématiques modernes, a pourtant résisté.

8.7. Conclusion – L'époque contemporaine

Avant d'aborder ce qui s'est passé après l'abandon des mathématiques modernes, mettons en perspective l'époque contemporaine et ses enjeux.

Le panorama précédent montre que l'enseignement des mathématiques a été depuis la Haute Antiquité un enjeu à la fois social et intellectuel. On peut de façon schématique distinguer trois orientations bien différentes de l'enseignement des mathématiques qui, selon les lieux et les périodes, ont entretenu des rapports de force distincts.

La première orientation peut être qualifiée de professionnelle. Ainsi la maîtrise des outils de calculs a d'abord concerné les scribes, les commerçants, les banquiers, etc. De même, au Moyen-Âge, les bases de l'astronomie et de l'astrologie faisaient partie des enseignements de médecine. À partir du 17e siècle, la géométrie, la balistique et la mécanique constituaient les bases de l'enseignement des écoles d'Artillerie, de Marine ou du Génie. Les mathématiques en jeu ont constitué un savoir professionnel spécifique conférant un certain pouvoir. L'enseignement représentait aussi un enjeu social dans la mesure où ces professions et les savoirs mathématiques qui leur étaient associés étaient importants pour le développement économique et social des sociétés qui les promouvaient.

La deuxième orientation est apparue dans l'Antiquité grecque, et vise l'éducation des élites. C'est ce qui va constituer au Moyen-Âge le contenu des facultés des arts libéraux, selon le modèle scholastique (du grec *scholê* au sens d'oisiveté, de temps libre, d'inactivité, …) avec le *Trivium* et le *Quadrivium* (voir encadré plus haut). Les mathématiques en jeu ici ont l'ambition de développer l'esprit et la capacité à raisonner sans aucune vocation pratique à caractère professionnel. On a vu que le corpus de ces mathématiques comprend jusqu'au 19^{e} siècle les *Éléments* d'Euclide, l'*Arithmétique* (voire la musique) boétienne et l'astronomie, avec l'emblématique *Almageste* de Ptolémée. Cet enseignement ne touche qu'une très faible part des garçons et intervient dans les deux dernières années du cursus, jouissant d'une réputation de discipline aride et difficile d'accès. La transformation des facultés des arts en collèges, puis lycées et gymnases secondarise cet enseignement mais n'en modifie pas fondamentalement les caractéristiques. Il reste un enseignement dépourvu de visée pratique ou professionnelle, et ambitionne exclusivement la formation de l'esprit.

Enfin la troisième orientation est celle de l'enseignement primaire qui depuis le Moyen-Âge et les écoles des cathédrales a pour vocation d'assurer l'éducation minimale des masses. Pour les mathématiques, cet enseignement consiste au plus en la maîtrise des outils de calculs, pour résoudre des problèmes numériques concrets, les systèmes de poids et mesures et les formules de calculs d'aires et de volumes classiques. C'est un enseignement qui est resté longtemps à la charge de l'Église. Très limité jusqu'au début du 19^{e} siècle, il prend son essor, à partir du second Empire, avec les lois Guizot, et surtout sous la 3^{e} République avec les lois Ferry, qui le rende obligatoire jusqu'à 14 ans, gratuit et laïc.

L'orientation professionnelle de l'enseignement des mathématiques en France a trouvé à partir de la fin du 18^{e} siècle une niche dans le cadre de la préparation aux métiers du génie militaire et civil, qui deviendront les classes préparatoires aux grandes écoles. D'autres modèles existent, comme les *Realschule* allemandes, ou les tentatives avortées en France d'un enseignement de mathématiques plus pratique dans les écoles centrales de la Convention ou au début du 20^{e} siècle dans les lycées. Par ailleurs, le développement de l'enseignement primaire supérieur et des écoles normales va conduire à une concurrence de la filière primaire sur la filière du lycée, puis à un rapprochement au milieu du 20^{e} siècle qui aboutit à une fusion. Enfin, l'importance croissante des sciences et technologies et l'avènement des mathématiques modernes sont à l'origine d'une modification sans précédent à la fois de structure et des contenus de l'enseignement en général et de celui des mathématiques, plus spécifiquement de la maternelle à l'université. Pour la première fois à partir des années 60, l'enseignement des mathématiques est censé toucher l'ensemble de la population, selon un modèle qui ne fait plus vraiment de distinction entre les mathématiques pour l'esprit et les mathématiques pratiques.

Si dès les années 80 s'opère un mouvement de contre-réforme, parfois revendiqué par des nostalgiques de la situation antérieure, ce mouvement ne sera en aucun cas un retour en arrière. Le mouvement de la démocratisation étant lancé, il ne pouvait en effet plus être arrêté. Le collège unique, la volonté d'une plus grande accessibilité au bac resteront des fondamentaux. De plus, la séparation entre enseignement primaire et enseignement des lycées, entre mathématiques pratiques et mathématiques pour former l'esprit ne peut plus être le marqueur d'un clivage social. De fait, un nouveau modèle reste à inventer, d'autant que l'utilité des mathématiques dans la formation professionnelle se voit bouleversée par les avancées technologiques, dont la percée de l'informatique.

On assiste ainsi à une revalorisation de l'enseignement technique et professionnel avec la réforme Chevènement de 1985 qui crée les Lycées Professionnels et le Baccalauréat du même nom.

Aux mathématiques modernes succède un enseignement de mathématiques voulu plus en prise avec le réel, où la résolution de problèmes doit devenir le moteur des apprentissages. C'est en particulier l'apparition des activités d'introduction au collège.

Activité d'introduction au collège

8 Fractions et pourcentages Exercices 18 à 20 p.85

a. Cette année, Rémi et Robin ont chacun 10 livres scolaires en Sixième.
Aujourd'hui ils comparent le nombre de livres que chacun a dans son cartable.
Rémi dit : « J'ai 20 % de mes livres dans mon cartable. »
Robin répond : « Moi, j'ai un cinquième de mes livres. »
Qui a apporté le plus de livres, Rémi ou Robin ?

b. Comparer 60 % et $\frac{3}{5}$.

c. (1) Dessiner un carré de 10 cm de côté et colorer 75 % de ce carré.

(2) Dessiner un carré de 10 cm de côté et colorer $\frac{3}{4}$ de ce carré.

Extrait de la partie « Activités » du chapitre « Proportionnalité et pourcentages ». Chapiron, G. ; Mante, M. ; Mulet-Marquis, R. & Perotin, C. (2005). Triangle – Mathématiques 6°. Paris Hatier.

Avec la réforme des mathématiques modernes, un réseau national et international de recherche sur l'enseignement des mathématiques s'est constitué. Les échecs de la réforme conduisent à repenser l'idée d'innovation, pour produire des travaux plus scientifiques, fondés sur un nouveau rapport à l'expérimentation comme outil de théorisation, plutôt que comme moyen direct de changement. C'est le début en France de la constitution du champ de recherche autonome de la didactique des mathématiques (que nous examinerons plus loin dans cet ouvrage). Cependant, les mathématiques, même modifiées restent, au moins dans l'imaginaire collectif, la discipline de sélection, celle que l'on craint et dont la difficulté d'accès fait peur. La réforme des sections des lycées conduit en 1994 à une redistribution des filières dans lesquelles les programmes de mathématiques sont repensés selon les spécificités de chacune, et plus seulement par suppression dans le programme de la voie royale. Ainsi dans la section ES, sciences économiques et sociales, des mathématiques en lien direct avec des concepts de microéconomie ou de mathématiques financières font leur apparition dans les programmes.

Enfin, le développement important des outils technologiques et informatiques a profondément bouleversé les usages des mathématiques dans la vie quotidienne, aussi bien que dans de nombreuses professions. Plusieurs travaux de recherche (dont la première étude de la CIEM en 1985 et une plus récente en 2006) ont analysé les implications de ce phénomène pour l'enseignement des mathématiques, conduisant à des propositions visant à introduire de plus en plus de technologies à l'appui de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La disparition des mathématiques élémentaires de la vie quotidienne (plus de calculs chez l'épicier, possibilité de faire toutes les opérations arithmétiques avec son téléphone…) contraste avec la dépendance toujours plus grande à des technologies utilisant de façon cachée des mathématiques de plus en plus perfectionnées. La désaffection des jeunes pour les études scientifiques touche tous les pays et cela devient une priorité politique de premier ordre pour de nombreux gouvernements qui commencent à s'inquiéter du manque de scientifiques. Les évaluations internationales font également réagir les politiques et ont de plus en plus d'influence sur les choix éducatifs en matière de contenus et de modalités d'enseignement. La crise au niveau international amène aussi, dans la sphère éducative, des restrictions et des choix, de fait, économiques. La formation des enseignants est un exemple frappant de tensions entre nécessité et coût. Dans ce faisceau de changements et ce contexte complexe, l'enseignement des mathématiques tente de changer son image d'une discipline austère et aride. Parmi les pistes de renouvellement, un mouvement international se dessine pour promouvoir la modélisation, les problèmes ouverts, et la démarche d'investigation. On tente ainsi de rapprocher l'enseignement des mathématiques de la pratique et la démarche scientifique. Mais toutes ces innovations peinent à rentrer dans les pratiques quotidiennes des enseignants.

Malgré le développement des recherches internationales sur l'enseignement des mathématiques, où la didactique des mathématiques française tient une place de choix et malgré l'excellence française de la recherche en mathématiques, l'enseignement des mathématiques en France est un des plus inégalitaires socialement selon les études internationales comme PISA. En ce début de 21^{e} siècle, l'enseignement des mathématiques français est donc face à des défis importants. Dans cet ouvrage, nous voudrions de façon modeste apporter notre pierre à la réflexion collective. Cette première partie, qui nous aura permis de revisiter quelques jalons de l'histoire de l'enseignement des mathématiques, nous a semblé un bon préambule pour ouvrir la réflexion et les débats.

Bibliographie

Bataillon, M. (1951). Les lecteurs royaux et le nouveau monde. *Bibliothèque d'Humanisme et Renaissance, 13*, 231–240.

Belhoste, B. (1989). Les origines de l'École polytechnique. Des anciennes écoles d'ingénieurs à l'École centrale des Travaux publics. *Histoire de l'Éducation*, *42*, 13–53.

Belhoste, B. (2001). La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées. *Histoire de l'éducation*, *90*, 101–130.

Belhoste, B. (2002a). Anatomie d'un concours : l'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours. *Histoire de l'éducation*, *94*, 141–175.

Belhoste, B. (2002b). L'examen : une institution sociale. *Histoire de l'éducation*, *94*, 5–16.

Belhoste, B. (2003). *La Formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*. Paris : Belin.

Belhoste, B. ; Dahan-Dalmedico, A. & Picon, A. (Eds.) (1994). *La Formation polytechnicienne, 1794–1994*. Paris : Dunod

Belhoste, B. ; Gispert, H. & Hulin, N. (Eds.) (1996). *Les sciences au lycée – Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : INRP/Vuibert.

Belhoste, B. ; Masson, F & Picon, A. (Eds.) (1994). *Le Paris des polytechniciens. Des ingénieurs dans la ville*. Paris : Délégation à l'action artistique de la ville de Paris, coll. "Paris et son patrimoine".

Bottazzini, U. & Dahan-Dalmedico, A. (Eds.) (2001). *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the new Millenium*. London : Harwood, Acad. Publ.

Bourlet, C. (1910). La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. *L'enseignement mathématique*, *12*, 372-387.

Buisson, F. (Ed.) (1911). Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Paris : Hachette. http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/, consulté le 1/3/15.

Cabanel, P. (2002). *La république du certificat d'études – Histoire et anthropologie d'un examen (XIX^e – XX^e siècles)*. Paris : Belin.

Charlot, B. (1984). Le Virage des mathématiques modernes – Histoire d'une réforme : idées directrices et contraintes. *Bulletin de l'APMEP 352*, 15-31.

Chouchan, M. (1995). *Nicolas Bourbaki – Faits et légendes*. Argentueil : éditions du Choix.

Compère, M.-M. (200). Les cadres institutionnels de l'enseignement des mathématiques au XVI^e siècle. *Revue d'histoire des mathématiques,* 6, 271–292.

Condordet (marquis de) (1792). Rapport et projet de décret relatifs à l'organisation générale de l'instruction publique. Présentation à l'Assemblée législative : 20 et 21 avril 1792. http://www.assemblee-nationale.fr/histoire/7ed.asp, consulté le 1/3/15.

Condorcet (marquis de) (1994). Cinq mémoires sur l'instruction publique (1791). Présentation, notes, bibliographie et chronologie part C. Coutel et C. Kintzler. Paris : Garnier-Flammarion.

Coray, D. ; Furinghetti, F. ; Gispert, H. ; Hodgson, B. & Schubring, G. (Eds.) (2003). *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique* – Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century – Proceedings of the EM–ICMI Symposium – Geneva, 20–22 October 2000. Geneva : L'enseignement Mathématique. http://www.unige.ch/math/EnsMath/EM-ICMI/ACTGE.pdf, consulté le 1/3/15.

Cousquer, E. (1998). *La fabuleuse histoire des nombres*. Paris : Diderot Éditeur.

Dainville (de), F. (1954). L'enseignement des mathématiques dans les Collèges Jésuites de France au XVIII^e siècle. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 7(1),* 6–21 et *7(2),* 109–123.

D'enfert, R. & Gispert, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités. Le cas des « mathématiques modernes » au tournant des années 1960-1970. *Histoire de l'éducation, 131,* 27–49.

Dhombres, J. (Ed.) (1992). *L'École normale de l'an III, Leçons de mathématiques*. Paris : Dunod.

Dhombres, J. (2006). La modélisation doit-elle être la partie vive de l'enseignement des mathématiques ? Les Leçons d'une histoire du professeur de mathématiques en tant que metteur en scène. In IREM de Limoges (Ed.) *Quelles mathématiques au lycée – Actes du colloque de Limoges des 11 et 12 juin 2004*. (pp. 26–65). Limoges : IREM.

Dhombres, J. (2007). L'avenir de l'enseignement des mathématiques n'est pas un long fleuve tranquille. *Bulletin de l'APMEP, 471*, 462–482.

Fehr, H. (1910). Compte rendu des séances de la commission et des conférences sur l'enseignement scientifique et sur l'enseignement technique moyen. *L'enseignement mathématique, 12*, 353–415.

Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques. *L'enseignement mathématique, 2° série 9(1-2),* 28-44.

Furinghetti, F. (2003). Mathematical instruction in an international perspective : the contribution of the journal « L'enseignement mathématiques ». *Monographie de l'enseignement mathématique, 39*, 19–46.

Gispert, H. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XXème siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(4)*, 158-163.

Gispert, H. ; Hulin, N. et Robic, M.-C. (Eds.) (2007). *Science et enseignement, l'exemple de la grande réforme des programmes du Lycée au début du XX^e^ siècle*. Paris : INRP/Vuibert.

Günther, S. (1900). Le développement historique de l'enseignement des mathématiques en Allemagne. *L'enseignement mathématique, 2*, 237–265.

Hamon, G. (2005). *Mathématiques, sciences, éducation autour de 1789 en Bretagne*. Rennes : IREM.

Ifrah, G. (1985). *Les Chiffres ou l'histoire d'une grande invention*. Paris : Robert Laffont.

Julia, D. (1983). Une réforme impossible – Le changement de cursus dans la France du 18ème siècle. *Éducation et philosophie*, *47-48*, 53-76.

Karp, A. & Schubring, G. (2014). *Handbook on the history of mathematics education*. New-York : Springer.

Keller, O. (2015). *L'invention du nombre*. Bruxelles: De Boeck.

Kemeny, J. (1964). Which subject in modern mathematics and which applications in modern mathematics can find in programs of secondary school instruction? *L'enseignement mathématique, 2° série 10*, 152–176.

Krop, J. (2014). *La méritocratie républicaine – Élitisme et scolarisation de masse sous la IIIe République*. Rennes : Presses universitaires.

Magnan, O. (2014). *La vraie histoire des instits.* Paris : Chronique.

Massot, A. (2002). *Condorcet : le fondateur des systèmes scolaires modernes*. http://classiques.uqac.ca/contemporains/massot_alain/condorcet/condorcet.html, consulté le 1/3/15.

Menghini, M. ; Furinghetti, F. ; Giacardi, L. & Arzarello, F. (Eds.) (2008) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics éducation*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/AnnProc10.pdf, consulté le 1/3/15.

Otto, S. (1902). L'enseignement des mathématiques au gymnase autrichien. *L'enseignement mathématique, 4,* 157–166.

Piaget, J. (1973). Remarques sur l'éducation mathématique. *Math Ecole, 58*, 1–7.

Pietzker, F. (1901). L'enseignement mathématique en Allemagne pendant le XIX^e^ siècle, *L'enseignement mathématique, 3*, 77–97.

Prost, A. (2013). *Du changement dans l'école – Les réformes de l'éducation de 1936 à nos jours*. Paris : Seuil.

Proust, C. (2014). Mathématiques en Mésopotamie. Site image des maths. http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html, consulté le 1/3/15.

Robinet, A. (1960). Jean Prestet ou la bonne foi cartésienne (1648-1691). *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 13(2),* 95–104.

Rose, P. L. (1978). The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo. *Revue d'histoire des sciences, 31(1),* 82-86.

Smith, D. E. (1901). L'enseignement des mathématiques aux États-Unis. *L'enseignement mathématique, 3*, 158–171.

Zazzo, R. (1989). Projets de Condorcet et de Le Peletier pour l'école de la République. *Enfance 42(4),* 3–6.