Les mathématiques par les jeux
United Square

Au départ, ce n'est qu'un jeu récemment commercialisé aux jolies pièces colorées et aux règles fort simples. Après quelques parties, il est évident qu'une indéniable profondeur stratégique est présente. À chaque nouveau placement de pièce, un choix est à faire. Pour cela, il faut réfléchir à ses conséquences, évaluer son intérêt en termes de points gagnés et anticiper les réactions adverses. En un mot, des raisonnements sont constamment à développer et de multiples compétences sont à mobiliser.

Il est dès lors intéressant de voir si ce jeu ne pourrait pas trouver sa place dans des séquences d'apprentissages de cycle 3 ou de cycle 4.

Pour cela, quelques activités sont proposées et sont regroupées autour de trois thèmes mathématiques : **rechercher, assembler** et **jouer**. Elles peuvent être employées à divers moments que ce soit dans le cadre d'un cours, d'une phase d'accompagnement personnalisé ou d'un travail personnel en autonomie. Dans tous les cas, aucun pré-requis n'est nécessaire et une séance d'une heure peut suffire mais est extensible en fonction des questionnements générés ou des besoins du public auquel on s'adresse. Enfin, les problèmes abordés, bien que tous issus du jeu, peuvent être traités indépendamment les uns des autres et donc aussi partiellement. Des fiches «élèves», supports de ces activités, sont regroupées en annexe et directement utilisables.

Le jeu *United Square* est gratuitement disponible en version en ligne ou sous forme d'applications à l'adresse : united-square.com.

Objectifs et liens avec les programmes

Prérequis

Aucun, sauf pour la partie « jouer » : connaître et avoir intégré les règles du jeu United Square.

Compétences travaillées

Chercher	S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. Simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
Modéliser	Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).
Représenter	Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures (cycle 3).
Raisonner	Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui (cycle 3). Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose (cycle 3). Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation (cycle 4).
Communiquer	Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation. Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange (cycle 3). Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme).

Attendus de fin de cycle, compétences et connaissances associées

Utiliser des notions de géométrie plane pour démontrer
- Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.
- Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.

Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple
- Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas.

Rechercher

Organisation matérielle

- Matériel de jeu issu de la boîte « United Square »
- Feuilles d'accompagnement et de recherche :
  - Quadrichromie
  - Arborescences
  - Floraison
  - Eliminations ?
  - Identifications
  - Farandole

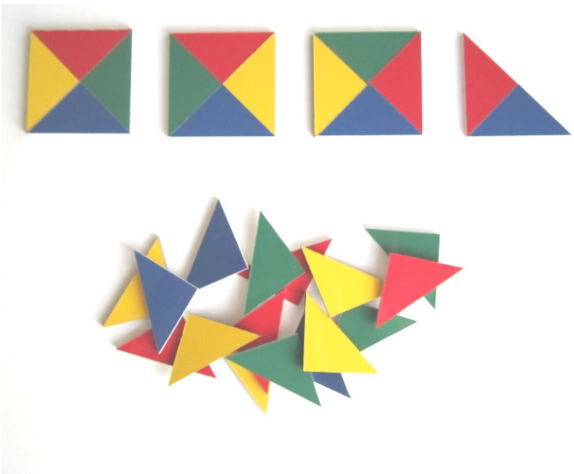
Déroulé

Bien avant la découverte des règles, la prise en main du jeu et même l'ouverture de la boîte, une activité toute trouvée va consister à comprendre la logique de construction des pièces. On en observe une, celle marquée du logo par exemple, et on constate qu'elle comporte un carré partagé, grâce au tracé de ses diagonales, en quatre zones triangulaires, chacune d'une couleur différente parmi bleu, jaune, rouge et vert.

Une question se pose naturellement, combien existe-t-il de telles configurations ?

Par quoi commencer ?

En fournissant des supports manipulables, des lots de triangles rectangles isocèles découpés dans du papier coloré, rapidement des premières solutions sont trouvées par manipulation et assemblage. Nous permettons ainsi au plus large public, notamment de jeunes enfants y compris de cycle 2 si on le souhaite ou des élèves en difficulté, de débuter une telle recherche sans être confrontés à un trop haut degré d'abstraction.



Produire des solutions est donc aisé mais deux de mes propositions ne sont-elles pas en fait identiques ? Suis-je certain par ailleurs de les avoir toutes obtenues ?

Les compétences employées et donc développées ou encouragées sont alors nombreuses : de l'argumentation nécessaire pour convaincre que deux coloriages sont en fait identiques à la discussion quant à l'exhaustivité ou non des solutions trouvées. En fait, un travail relativement complet autour des thèmes : chercher, raisonner, représenter et communiquer.

Ayons aussi à l'esprit qu'à cela peuvent aussi s'ajouter bien d'autres compétences en fonction du protocole de mise au travail choisi, activité en groupes, mise en commun orale des résultats, voire découverte de l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique pour présenter les pièces trouvées. Pour tous, une fiche de carrés vierges prête à être mise en couleurs servira à lister les configurations trouvées.

Concevoir un algorithme de recherche

Bien évidemment, pour ce travail, la mise en place d'une méthodologie sera nécessaire. Une recherche aléatoire et désordonnée risquerait de conduire à l'obtention de coloriages similaires mais non disposés identiquement et par conséquent difficiles à reconnaître et à éliminer. À cela s'ajoutera le risque d'oublier quelques possibilités. Encourageons donc à faire preuve de méthode, d'organisation et à noter chaque solution obtenue si ces dernières sont le fruit d'une manipulation d'assemblages de triangles cartonnés. Outre l'activité de recherche, l'objectif final visé sera par conséquent la formulation d'un protocole méthodologique, un algorithme en somme, permettant de déterminer la liste exhaustive des pièces existantes.

La stratégie précédente, certes lente et peu efficace, correspond néanmoins à un algorithme qu'il est intéressant de formaliser : j'assemble quatre triangles colorés, je vérifie si je possède déjà cette configuration sinon je reprends l'étape précédente.

De cette phase de travail par laquelle quasiment chacun passe, une première possibilité mise par écrit de ces découvertes est envisageable. Lors de l'élimination des pièces obtenues en doublon, l'occasion est offerte de découvrir et d'illustrer l'effet sur ces configurations colorées des translations, rotations et symétries centrales. Des situations d'entraînement à la reconnaissance de ces transformations, employant ou non les pièces du jeu, sont alors à proposer en compléments.

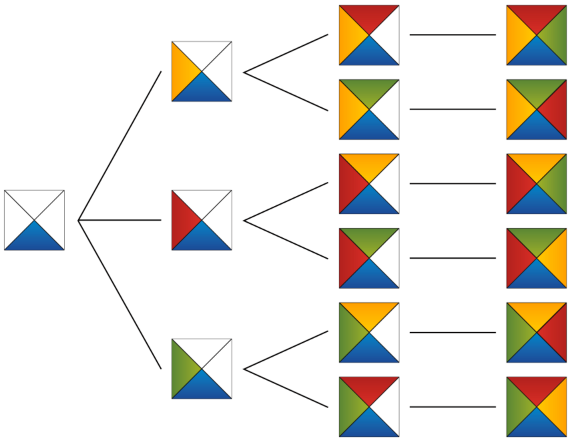
Afin d'améliorer cette stratégie quelque peu anarchique, qui risque de conduire à l'oubli de certaines solutions, une méthode exhaustive est à rechercher, à verbaliser et à communiquer par le moyen de représentation le plus adapté. De nouveaux algorithmes de recherche vont donc émerger. Ils seront à confronter pour comparer leur efficacité mais aussi à réemployer lors de situations similaires de dénombrement éventuellement issue de problèmes numériques. Des occasions d'évaluer leur compréhension et leur degré de transfert seront donc à provoquer.

Tout d'abord, le plus naturel, le plus intuitif, est de choisir l'un des quatre triangles rectangles isocèles et de fixer sa couleur. Nous débuterons donc en colorant en bleu le triangle du bas.

Ensuite, en choisissant un sens de parcours, par exemple celui des aiguilles d'une montre, il nous faut choisir la couleur du triangle voisin. Trois possibilités s'offrent à nous : jaune, rouge ou vert.

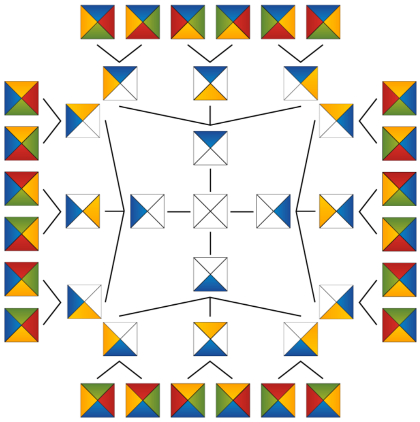
Pour la troisième zone, nous n'avons plus que deux choix à envisager puisque seules deux couleurs sont encore non utilisées. Par conséquent, chacune des dispositions, « bleu-jaune », « bleu-rouge » et « bleu-vert » va générer deux nouvelles situations. Au total, en respectant les conditions imposées, six pièces distinctes existent. La totalité des pièces du jeu sera alors composée de quatre séries de ces six colorations de carrés. Point que l'on peut vérifier en ouvrant une boîte et en triant les pièces.

En reprenant les différentes étapes de la démarche précédente, c'est-à-dire en choisissant de fixer la couleur du triangle inférieur, ici bleu, il est possible de représenter ce raisonnement sous forme d'un arbre. Nous retrouvons ainsi une forme classique de représentation de situations de dénombrement ou de probabilités.

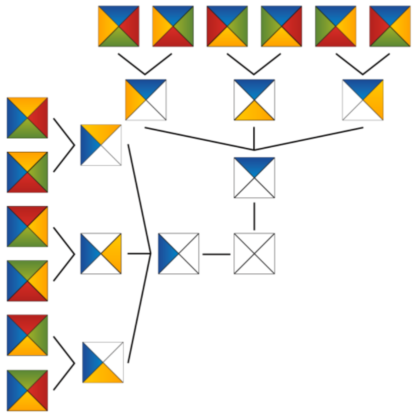


Une autre option aurait pu être envisagée : choisir comme critère, non de fixer la position d'une couleur, bleu en bas, mais plutôt un type de couleur et ensuite de s'intéresser à toutes ses positions possibles. La recherche porte alors sur le dénombrement de toutes les répartitions de couleurs envisageables. Si l'on représente ce travail, une nouvelle fois, sous forme d'arbre, nous avons quatre positions possibles pour le triangle bleu puis, à chaque fois, trois pour le jaune et enfin deux pour le rouge. La dernière zone ne peut bien évidemment être que verte. L'arbre complet comprend donc 24 branches dont il nous reste à éliminer les pièces identiques mais disposées différemment. Quelle stratégie alors adopter dans ce travail d'identification et d'élimination des doublons ?

Si au lieu de présenter ce travail de recherche sous forme d'arbre, on opte plutôt pour une sorte de « corolle », quatre directions pour chacune des quatre zones triangulaires pouvant être teintées de bleu, des éléments de symétrie apparaissent. Deux côtés opposés, par exemple, sont symétriques par rapport à la pièce centrale. Nous aboutissons donc à des solutions identiques puisque superposables après un demi-tour. Seuls deux côtés consécutifs de ce carré sont donc à conserver soit douze dispositions.



Colorier un premier triangle d'une couleur, quatre points de départ, quatre directions

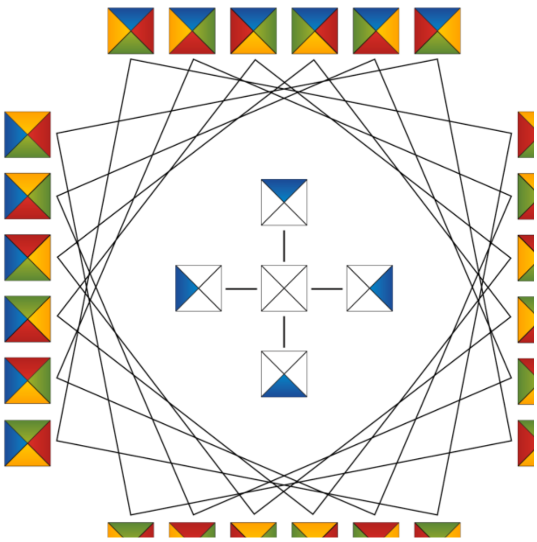


Éliminer certaines possibilités puisque identiques après un demi-tour

Il est aussi possible de considérer qu'une même configuration colorée a en fait quatre positions possibles. On passe de l'une à l'autre par un quart de tour soit une rotation de 90° dont le centre est celui du carré. C'est l'occasion d'évoquer ou de présenter cette notion de rotation, désormais présente dans le programme de cycle 4. Ainsi, de la corolle précédente et des 24 propositions, nous n'en conserverons que 6 puisque pour passer d'une branche à l'autre, seule une rotation des pièces est effectuée.

L'arbre complet avec ses 24 branches dont il faut éliminer les éléments surnuméraires (cf. annexe « Floraisons ») peut permettre à des élèves éventuellement bloqués après un certain temps de travail d'obtenir quelques succès. Une forme d'aide donc pour surmonter les trop grandes possibilités de la recherche ou un éventuel manque d'organisation dans celle ci ou l'occasion d'évoquer ou d'introduire symétrie axiale, symétrie centrale et rotation.

Des compétences de vision dans l'espace, mentalement être capable de tourner les pièces, se substituent à l'objectif initial de recherche. Toutefois, point positif, la réussite de tous, aboutir aux six pièces différentes qui composent le jeu, est au rendez-vous.



Les pièces identiques sont reliées par un segment

Une façon originale de s'assurer que la logique de construction des pièces tout comme les différents algorithmes précédents sont bien acquis pourrait être de procéder à un petit jeu. La totalité des 24 pièces d'une boîte de United square sont placées en vrac dans un sac opaque. L'une d'entre elles, tirée au sort, est retirée sans être révélée. Par observation et éventuelle manipulation des 23 pièces restantes, il faut redessiner la pièce mise de côté. Une occasion de laisser des élèves pratiquer ce travail en groupe et de les laisser échanger et argumenter quant à leurs stratégies, leurs choix.

Si l'activité en groupe n'est pas possible, la fiche « Éliminations ? » reprend le principe suggéré pour deux tirages au sort successifs d'une pièce. L'aspect dynamique et la richesse des échanges sont alors perdus au profit d'une activité individuelle plus classique.

Prolonger

Pour obtenir plus rapidement le nombre de pièces existantes, un simple raisonnement numérique aurait suffi. Il est d'ailleurs très proche de la démarche « constructiviste » que nous venons de voir. Une fois un premier triangle mis en couleur, nous n'avons plus pour son voisin, par exemple celui situé à sa gauche, que trois choix de coloration possibles. Puis deux autres pour la zone voisine et un seul et unique pour le dernier triangle. Au final, ne peuvent donc exister que $3\times2\times1$, soit $3!$ pièces différentes. Une démarche rapide et intéressante de dénombrement des situations mais qui malheureusement ne nous permet pas de les construire effectivement. Cependant ce type de raisonnement trouve pleinement son intérêt dans des situations de recherche certes proches mais nettement plus complexes. Lorsque le nombre de cas à envisager augmente fortement, construire effectivement les pièces devient long, voire fastidieux. Le dénombrement des possibilités peut par conséquent dans une première phase de recherche largement suffire.

Modifions donc quelque peu les conditions initiales de la recherche et interrogeons-nous alors sur les conséquences : pourquoi ne pas autoriser aux couleurs de se répéter sur un même carré ou encore autoriser les couleurs à se répéter tout en limitant à trois couleurs le nombre de choix possibles.

Nous avons ainsi un moyen simple de fournir une nouvelle tâche à des élèves rapides, les maintenant ainsi en activité pendant la poursuite du travail des plus lents ou encore de s'assurer que les stratégies proposées précédemment sont en mesure d'être réinvesties.

Différents parcours

Pour s'adapter aux différents profils et besoins des élèves et en vue de la réussite de tous, différents supports et compléments peuvent être employés ou envisagés.

QUESTIONNER	DIFFÉRENCIER	PROLONGER / ÉVALUER
Si un carré est partagé, grâce au tracé de ses diagonales, en quatre zones triangulaires, et que chacune d'elles est colorée d'une couleur différente parmi bleu, jaune, rouge et vert, combien existe-t-il de coloriages différents possibles ?	Un support de recensement des configurations : • fiche « Quadrichromie » Un support suggérant une organisation de la recherche : • fiche « Arborescences » Un support donnant les solutions mais dont le tri est à réaliser : • fiche « Floraisons »	Organiser, trier un ensemble de configurations en repérant celles qui sont identiques mais disposées différemment. Argumenter. • fiche « Identifications » • fiche « Farandole » • fiche « Éliminations ? »

Différentes compétences et connaissances

	CHERCHER	MODÉLISER	REPRÉSENTER	RAISONNER	COMMUNIQUER	CYCLE 3	CYCLE 4
« Quadrichromie »	●		●	●	●	Vocabulaire permettant de définir des positions, des déplacements. Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter des figures simples ou complexes.	Développer sa vision de l'espace. Comprendre l'effet d'une symétrie axiale, d'une rotation. Écrire, mettre au point et exécuter un programme en réponse à un problème donné.
« Arborescences »		●		●	●		Organiser, des données. Développer sa vision de l'espace. Comprendre l'effet d'une symétrie axiale, d'une rotation. Décomposer un problème en sous-problèmes.
« Floraisons »			●	●		Vocabulaire permettant de définir des positions, des déplacements.	Développer sa vision de l'espace. Comprendre l'effet d'une symétrie axiale ou centrale, d'une rotation.
« Eliminations ? »	●	●		●	●	Vocabulaire permettant de définir des positions, des déplacements.	Comprendre l'effet d'une symétrie axiale ou centrale, d'une rotation. Écrire, mettre au point et exécuter un programme en réponse à un problème donné.
« Identifications »		●		●	●	Vocabulaire permettant de définir des positions, des déplacements.	Développer sa vision de l'espace. Comprendre l'effet d'une symétrie axiale ou centrale, d'une rotation.
« Farandole »		●		●		Vocabulaire permettant de définir des positions, des déplacements.	Développer sa vision de l'espace. Comprendre l'effet d'une symétrie axiale ou centrale, d'une rotation.

Assembler

Organisation matérielle

- Matériel de jeu issu de la boîte « United Square »
  - Feuilles d'accompagnement et de recherche :
  - Rectangles et carrés
  - Symétriques
  - Bordures
  - Bien coloriés

Déroulé

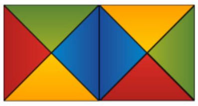
Ayant à disposition les six pièces différentes du jeu United Square, très naturellement et sans avoir besoin de donner la moindre consigne, instinctivement même, l'envie est forte de vouloir créer de jolis motifs colorés et pour cela de mettre en contact des triangles de même teinte pour former des carrés. On applique alors la stricte règle du jeu de placement des pièces. C'est donc un moyen basique de découvrir cette principale règle mais, aussi et surtout, de s'entrainer à pouvoir répondre, lors d'une partie de United Square à la question : « À cet emplacement, quelle pièce vais-je pouvoir placer ? ».

Cette forme d'activité proche des puzzles, aura pour objectif d'entraîner et de développer des capacités visuelles d'anticipation. À cette partie visible de l'activité s'ajoutera toute une gamme de questionnements annexes nécessitant la mobilisation de compétences purement mathématiques, notamment autour de la symétrie axiale, et de la mise en œuvre de multiples raisonnements différents.

En termes de démarche et à l'image de ce qui a été fait précédemment lors de la recherche des pièces, chacun des travaux débutera par une interrogation, une question ouverte : **quels rectangles ou carrés peuvent être obtenus en juxtaposant certaines des six pièces différentes du jeu ?**

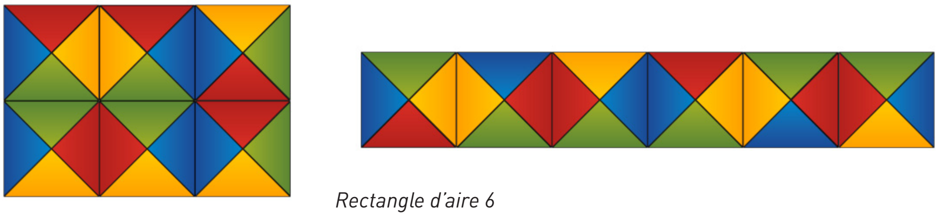
Des rectangles ou des carrés

Rectangle d'aire 1



Rectangle d'aire 2

- Avec un lot de six pièces différentes, quels sont les rectangles qu'il est possible d'obtenir ? Il s'agit d'une question simple à laquelle, même sans être formellement posée, beaucoup vont intuitivement tenter de répondre. Après avoir très rapidement obtenu un premier succès, de nouvelles questions émergent. Y aurait-il d'autres rectangles ? Que sont des rectangles différents ? Une forme dans laquelle les couleurs sont disposées différemment ? Non, plutôt un rectangle qui va nécessiter pour l'obtenir d'employer plus ou moins de pièces du jeu. La question initiale est alors reformulée collectivement, nous cherchons à créer des rectangles d'aires différentes à partir de toutes ou certaines des pièces d'un lot de six pièces de base. Aisé d'obtenir un rectangle d'aire 1, d'ailleurs ce n'est que simplement une pièce de base, puis tout aussi facilement nous aboutissons à des rectangles d'aire 2 puis 3, 4, 5 ou 6.
  Un point qu'il est intéressant de mettre en lumière est qu'il est possible de former deux rectangles différents d'aire 4 et d'aire 6. En effet 4 peut être décomposé en 1×4 ou 2×2 et 6 quant à lui en 1×6 ou 2×3. C'est l'occasion de faire le lien entre propriétés géométriques et arithmétiques, de parler de diviseurs et de multiples ou encore de rappeler la méthode de calcul de l'aire d'un rectangle.



Rectangle d'aire 6

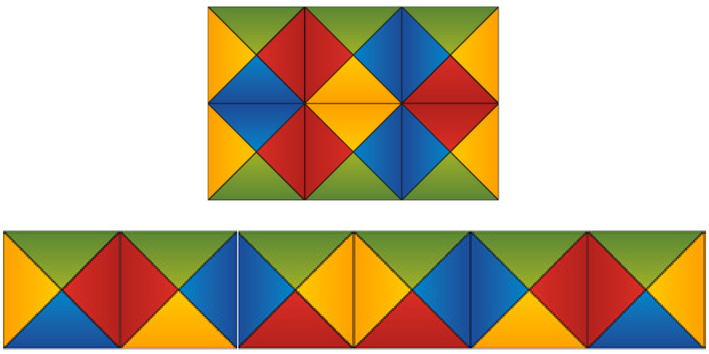
- Pour consolider ces notions et ce type de raisonnement (partant de l'aire, être capable de retrouver les dimensions entières de tous les rectangles possibles ayant cette aire), un nouveau questionnement peut être proposé : **avec les 24 pièces du jeu, quels sont tous les rectangles différents qu'il est possible de former ?**
  Après un rapide raisonnement numérique, logiquement quatre rectangles sont à envisager : 1×24, 2×12, 3×8 et 4×6. Le premier est trivial à obtenir. Les autres nécessiteront davantage de réflexion quant aux placements des différentes pièces. Le plus souvent d'ailleurs, ce sera le placement de l'ultime pièce qui nécessitera des retours en arrière pour corriger le mauvais choix effectué, une tâche qu'il est possible de proposer en travail de groupe afin d'en réduire la durée.

- Enfin, troisième situation de recherche possible, avec deux lots de pièces de base soit 12 pièces, il faut chercher tous les carrés qu'il est possible de former. L'occasion est offerte de parler de classification des quadrilatères et de rappeler que le carré n'est qu'un type particulier de rectangle.
  12 pièces donc trois carrés à envisager, l'évident 1×1 à ne pas oublier, le 2×2 déjà trouvé précédemment et le 3×3. Ce travail de base, adapté à un jeune public, peut bien évidemment être étendu à la recherche, plus riche, de tous les carrés qu'il est possible de former en utilisant toutes les pièces du jeu, la 25ème marquée d'une croix blanche comprise. Ainsi s'ajoutent deux cas de figure à envisager, les carrés 4×4 et 5×5. On comprend alors pourquoi cette étrange et inattendue 25ème pièce a été ajoutée au jeu United Square : offrir la possibilité d'un plateau de jeu à la parfaite forme carrée.

Des éléments de symétrie

Dans un second temps, en ajoutant quelques conditions supplémentaires, nous pouvons nous diriger vers un travail davantage en adéquation avec des thèmes développés au cycle 4. **Si nous cherchions par exemple à produire des assemblages symétriques ?**

Il est rapidement acquis que des rectangles 1×6 ou 2×3 ne peuvent posséder deux axes de symétrie. Il faudrait évidemment pour cela que, sur une même pièce, une couleur soit présente deux fois en position opposée. Ce point étant exclu, pas de rectangle formé avec un lot de six pièces différentes et ayant deux axes de symétrie. Un rectangle ne peut donc avoir au maximum qu'un seul axe de symétrie et celui-ci ne peut partager une pièce en deux.



Exemples de rectangles d'aire 6 ayant un axe de symétrie

Peut-être un centre de symétrie alors ? Non, pas plus ! Pour cela, il faudrait disposer de deux pièces identiques pour les « coins » du rectangle. Impossible si on se limite à un lot de six pièces différentes.

Il nous reste la possibilité d'augmenter le nombre de pièces disponibles avec éventuellement des doublons présents ou de changer l'aire, c'est-à-dire le nombre de pièces à assembler, ou encore la forme à créer. Tout un panel d'activités complémentaires est donc envisageable pour maîtriser les notions de symétries et développer des argumentations variées.

Des côtés bien colorés

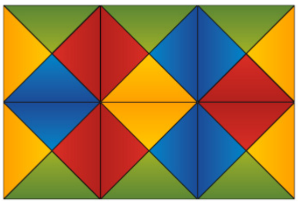
En dernier lieu, il est possible de chercher à imposer aux rectangles à former des conditions quant aux couleurs des côtés. **Peut-on obtenir des rectangles possédant les côtés d'une seule et même couleur ? De deux couleurs différentes ? De trois couleurs ?**

De nouvelles formes de raisonnements ou d'arguments vont alors être nécessaires. En effet, il est aisé de prouver qu'un problème possède une solution, il suffit de l'exhiber. Par contre, comment convaincre qu'une situation ne peut aboutir ? Il faut alors prouver que le problème est impossible et ici, la richesse et la variété des arguments, des raisonnements à employer offrent l'occasion de travailler l'argumentation de manière tout à la fois profonde et simple.

Par exemple, une seule couleur de bordure est impossible. 10 triangles d'une même couleur, dans le cas du rectangle 2×3, ou 14, pour le rectangle 1×6, sont nécessaires afin d'obtenir un bord d'une unique couleur. Malheureusement avec six pièces différentes, seuls six triangles identiques sont disponibles.

Il reste alors les autres cas à étudier : deux couleurs sur les bords puis trois couleurs et enfin, éventuellement, quatre.

La première situation se résout rapidement.



Seules deux couleurs sont présentes sur les bords

Dans les autres cas, ce seul argument ne peut suffire et il va falloir distinguer et traiter les différents cas de figure possibles… Éliminons déjà la recherche d'éventuels rectangles 1×6. Pour disposer sur les bords de trois ou quatre couleurs, les deux longueurs, soit deux fois six triangles d'une même couleur sont nécessaires. Il faut donc disposer de six pièces dont les deux mêmes couleurs sont en opposition. Impossible, seules deux tels carrés existent pour chaque couple de couleurs. Qu'en est-il maintenant des rectangles 2×3 ?

Il est clair que pour trois ou quatre couleurs sur les bords, au moins une longueur va être concernée et nécessiter trois triangles d'une même couleur. Il en restera alors trois à employer pour les contacts « intérieurs ». Comme ceux-ci vont forcément par paire puisque seuls des triangles d'une même couleur peuvent se correspondre, l'un d'entre eux va se retrouver esseulé. Impossible ! Des rectangles constitués d'un lot de six pièces différentes et à bords de trois ou quatre couleurs différentes n'existent donc pas.

Ce double raisonnement, à la fois sur le nombre de triangles disponibles d'une même couleur et sur la parité du nombre de ceux nécessaires pour les contacts « intérieurs », peut se généraliser à toutes les tailles de rectangles. Pourquoi se limiter au seul emploi d'un seul lot de six pièces différentes ? Impossible par exemple de former des rectangles aux côtés de quatre couleurs différentes si longueur et largeur ne sont pas de même parité. Cette condition nécessaire mais aussi suffisante d'existence de tels rectangles peut être l'objectif d'un raisonnement de fin de cycle 4.

Enfin, si l'on affaiblit légèrement la condition imposée, avoir certes trois côtés de couleurs uniformes et différentes, mais sans rien exiger du dernier côté, le problème admet une solution.

Différents parcours

<table>
<tr><th>QUESTIONNER</th><th>DIFFÉRENCIER</th><th>PROLONGER / ÉVALUER</th></tr>
<tr><td>Quels rectangles ou carrés peuvent être obtenus en juxtaposant un certain nombre des six pièces différentes du jeu?</td><td>Un support de recensement des configurations et de suggestion de réflexion sur les dimensions des formes à obtenir :
• fiche « Rectangles & carrés »</td><td></td></tr>
<tr><td>En employant les six pièces différentes du jeu, peut on obtenir un rectangle ayant un axe de symétrie ?
Deux axes de symétrie ?
Un centre de symétrie ?</td><td colspan="2">En préparation au questionnement spécifique proposé ou en évaluation de la maitrise des notions d'axe et de centre de symétrie, une tâche plus libre pour laquelle la forme à obtenir n'est pas imposée :
• fiche « Symétriques »</td></tr>
<tr><td>En employant les six pièces différentes du jeu, peut on obtenir un rectangle ayant ses côtés d'une seule et même couleur ? Les côtés opposés de même couleur ?
Les côtés de quatre couleurs différentes ?</td><td>Un travail préparatoire aux conditions moins fortes car aboutissant à moins de «régularités» dans les figures à obtenir :
• fiche « Bordures »</td><td></td></tr>
<tr><td>En employant certaines des 24 pièces d'une boîte de jeu, peut-on obtenir un carré de 9 pièces dont chacun des cotés est d'une couleur différente ?
Un carré de 16 pièces vérifiant la même condition?
Un rectangle de 12 pièces ?</td><td colspan="2">Une limitation du nombre de pièces disponibles, seulement 12, et donc du nombre de solutions possibles tout en les limitant à des carrés :
• fiche « Bien colorés »</td></tr>
</table>

Différentes compétences et connaissances

	CHERCHER	MODÉLISER	REPRÉSENTER	RAISONNER	COMMUNIQUER	CYCLE 3	CYCLE 4
« Rectangles & carrés »	●		●	●	●	Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule. Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme.
« Symétriques »	●		●	●	●	Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes. Axe de symétrie d'une figure, figures symétriques par rapport à un axe.	Comprendre l'effet des symétries axiales et centrales. Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.
« Bordures »	●		●	●		Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.
« Bien colorés »	●		●	●	●	Reconnaître et représenter des figures simples ou complexes.	Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.

Jouer

Organisation matérielle

Pour chaque groupe d'élèves (2 ou 4), fournir un jeu complet de United Square, ainsi qu'une feuille présentant et regroupant les diverses situations arrêtées à étudier ou celles proposées :

- Victoire
- 2 coups

Un vidéoprojecteur permet d'utiliser comme support la version en ligne du jeu ou les situations arrêtées qui seront étudiées.

Déroulé

Découvrir les règles

United Square est un jeu. Assembler les pièces est une chose mais encore faut-il le faire judicieusement et avec le score et la victoire en ligne de mire. Tout d'abord, il est nécessaire de présenter rapidement les quelques règles.

- Chaque joueur dispose de 12 pièces et marquera des points avec deux des quatre couleurs qu'il faut choisir conjointement avant la partie.
- La zone de jeu est limitée à un carré 5×5 dont la pièce marquée d'une croix blanche, déjà placée, en sera le centre.
- À son tour, chacun place une pièce en contact avec une autre déjà présente sur le plateau de façon à ce que des couleurs identiques se correspondent.

Ainsi, par juxtaposition de triangles rectangles isocèles, des carrés sont formés.

- La partie s'achève dès qu'aucune pièce ne peut plus être disposée sur le plateau par aucun des joueurs.
- Le score obtenu par chaque joueur est alors le nombre de carrés visibles sur le plateau des deux couleurs fixées au départ.

Après une présentation rapide de ces quelques règles avec en support la version en ligne du jeu vidéo-projetée, un temps de jeu en un contre un est nécessaire pour que chacun puisse pleinement se les approprier. Une quinzaine de minutes tout au plus et deux parties suffisent.

Seul contre tous

Que dois-je faire ? Marquer des points ? Empêcher mon adversaire de faire de même ? Conquérir des zones particulièrement stratégiques du plateau ? Face à ces multiples choix, il est nécessaire tout d'abord de raisonner, d'envisager les multiples éventualités et d'en tirer certaines lignes de conduite. L'expérience acquise en quelques parties est déjà mesurable et les stratégies développées par chacun à mutualiser et à formaliser.

Pour rendre cette phase la plus dynamique et la plus riche possible, un bon moyen est d'engager une partie commune, l'enseignant contre toute la classe. Le support du vidéo-projecteur est bien évidemment indispensable pour suivre les échanges et visualiser au mieux les placements suggérés.

À chaque coup joué par la classe, les élèves doivent présenter leur choix et l'étayer d'arguments stratégiques pour convaincre. L'enseignant lui aussi lors de son tour de jeu expliquera le pourquoi du coup joué. Inutile de mener à son terme la partie engagée. Après au maximum une quinzaine de minutes et une dizaine de coups au total, l'essentiel des stratégies de base a été évoqué et un nouveau travail personnel devient nécessaire.

Équipes ou phases arrêtées ?

Dans cette optique, il est alors possible de proposer des situations de jeu arrêtées sur lesquelles la question sera de repérer le meilleur coup à jouer en fonction des pièces disponibles. L'argumentation accompagnant le choix réalisé est alors désormais à écrire. L'occasion est offerte de travailler le raisonnement déductif tout en présentant clairement les diverses formulations et connecteurs logiques dont l'emploi s'avère nécessaire. Une autre option pourra être de relancer une phase de jeu mais cette fois par équipe de deux. Chaque membre de l'équipe disposant de ses propres pièces, la communication entre les partenaires est indispensable. À nouveau argumentation orale et détermination du meilleur coup possible.

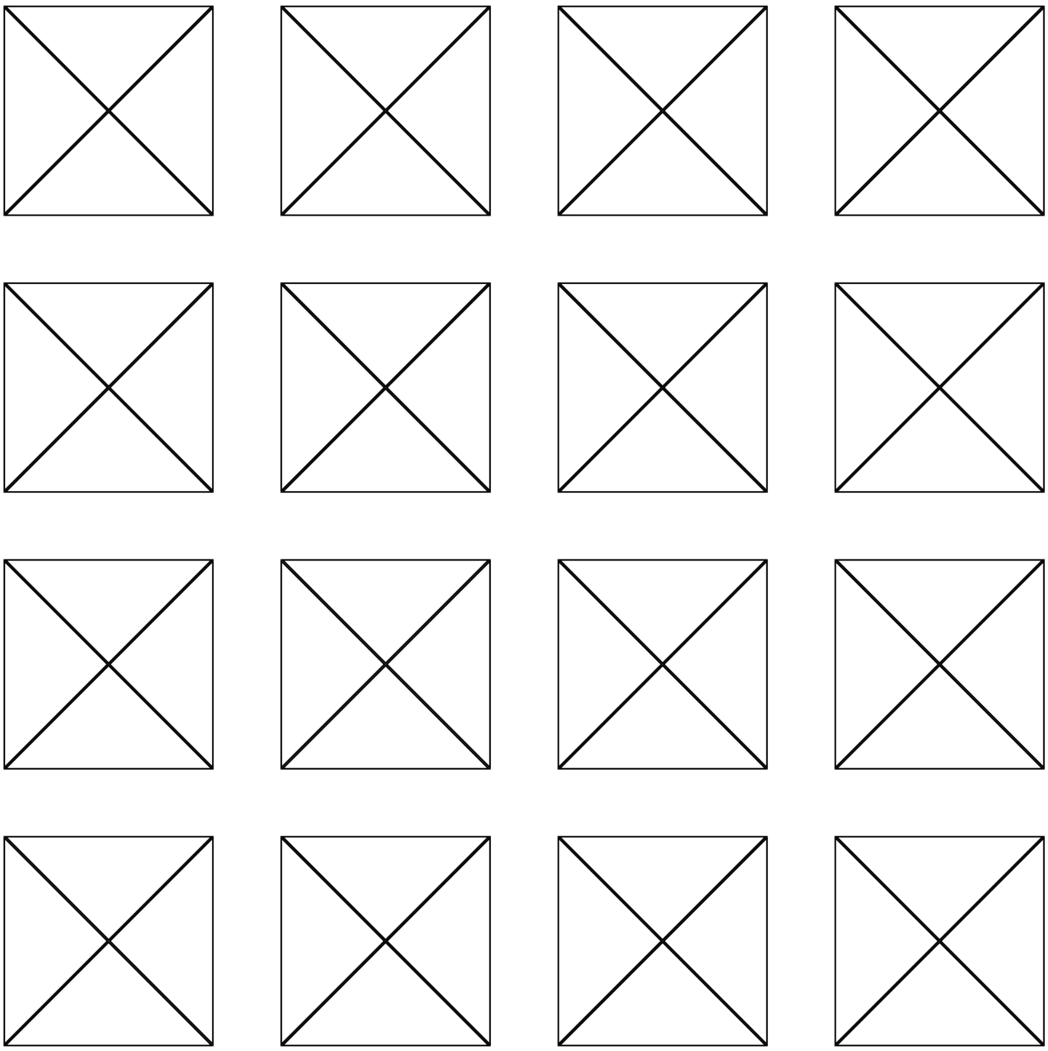
UNITED SQUARE®

Quadrichromie

Nous allons partir d'un carré et tracer ses diagonales. Quatre triangles rectangles isocèles sont ainsi créés, triangles que nous allons colorer de quatre couleurs toutes présentes et différentes, bleu, jaune, rouge et vert.Nous pouvons par exemple obtenir cette première disposition :

En procédant ainsi, combien de pièces différentes pouvons-nous obtenir ?

Chacune de vos propositions sera représentée ci-dessous à l'aide des carrés fournis.

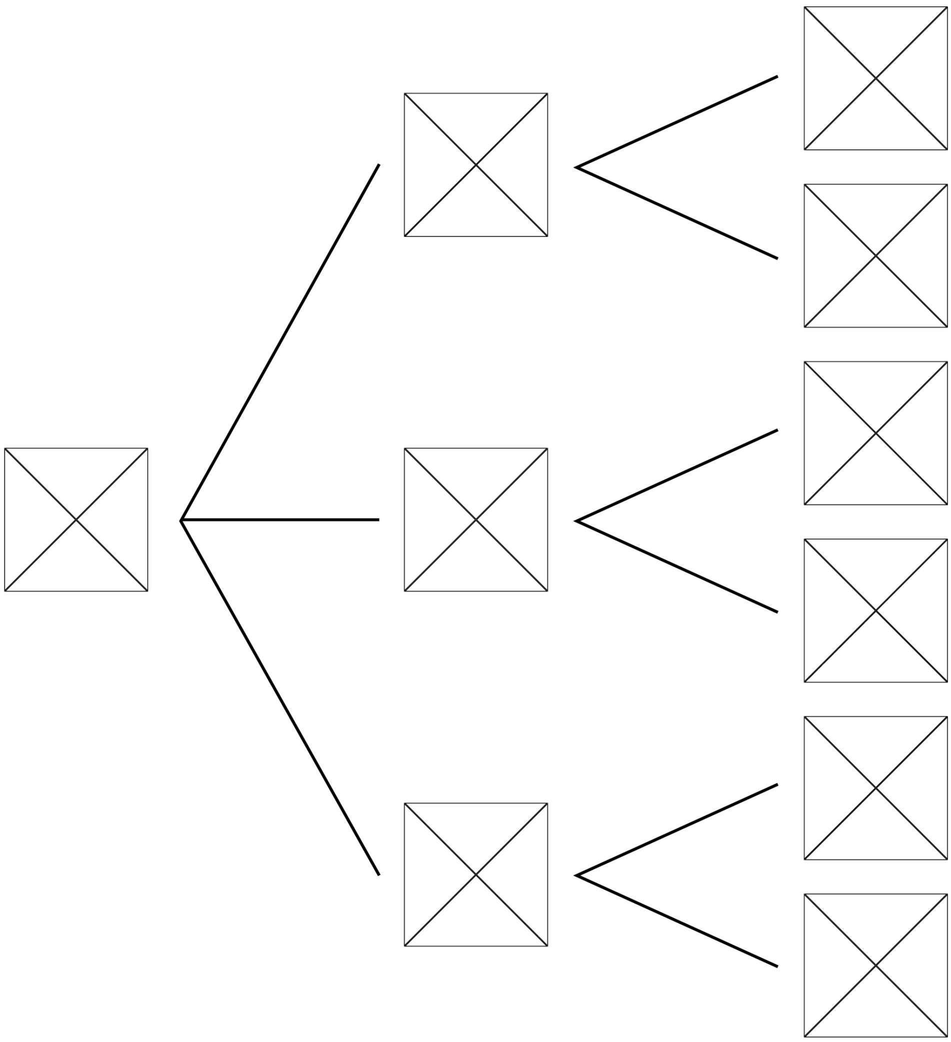


UNITED SQUARE

Arborescences

Nous allons partir d'un carré et tracer ses diagonales. Quatre triangles rectangles isocèles sont ainsi créés, triangles que nous allons colorer de quatre couleurs toutes présentes et différentes, bleu, jaune, rouge et vert. Nous pouvons par exemple obtenir cette première disposition ci-contre. En suivant cette règle, nous souhaitons savoir combien de pièces différentes il est possible d'obtenir et n'oublier aucune disposition. Pour cela, nous allons procéder logiquement : fixer un premier triangle et toujours le colorier d'une même couleur puis de toutes les autres possibilités son voisin de gauche et ainsi de suite...

En suivant cette démarche, mettez en couleurs l'arbre des possibilités ci-dessous pour obtenir toutes les pièces différentes correspondant aux conditions initiales fixées.

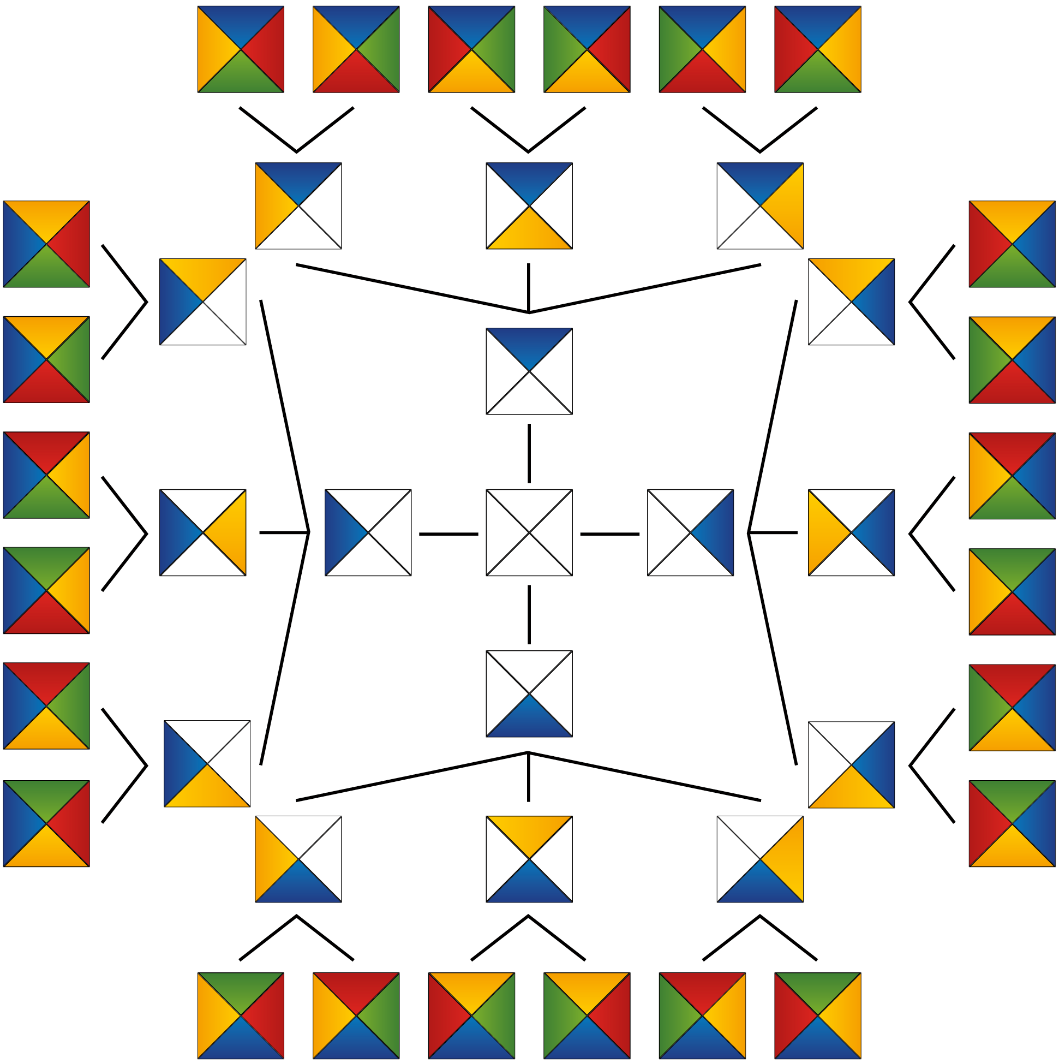


Floraisons

Nous allons partir d'un carré et tracer ses diagonales. Quatre triangles rectangles isocèles sont ainsi créés, triangles que nous allons colorer de quatre couleurs toutes présentes et différentes, bleu, jaune, rouge et vert. Nous pouvons par exemple obtenir cette première disposition ci-contre. En suivant cette règle, nous souhaitons savoir combien de pièces différentes il est possible d'obtenir et n'en oublier aucune. Pour cela, nous allons procéder logiquement : fixer une première couleur, le bleu, et chercher toutes les dispositions possibles de ce triangle. Puis, colorier le triangle voisin d'une autre couleur parmi les trois possibilités restantes et poursuivre ainsi.

Il vous reste maintenant à éliminer les dispositions identiques pour que ne reste que les pièces différentes correspondant aux conditions initiales fixées.

Entourez d'une même couleur les pièces identiques.

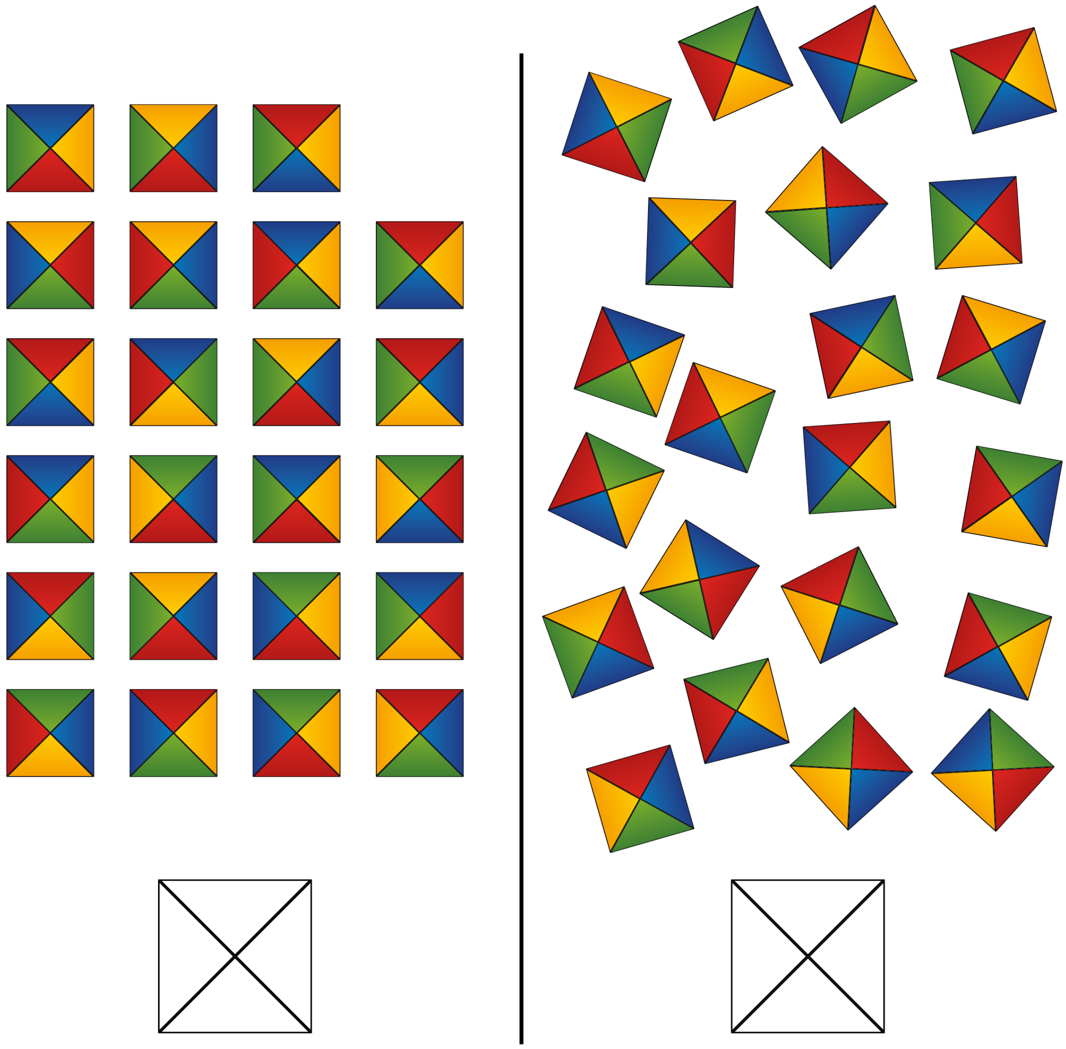


Éliminations ?

Lors du rangement des 24 pièces du jeu, nous en avons perdu une.

Souhaitant pouvoir continuer à jouer, il nous faut retrouver quelle carré coloré a été perdu.

> Pouvez-vous déterminer quelle pièce a été égarée ?
> Vous dessinerez votre proposition à l'emplacement laissé libre.



UNITED SQUARE

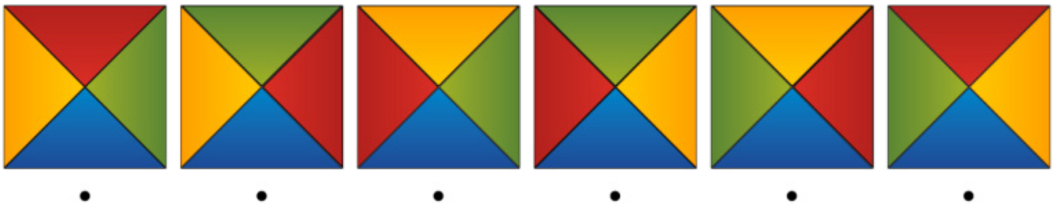
Identifications

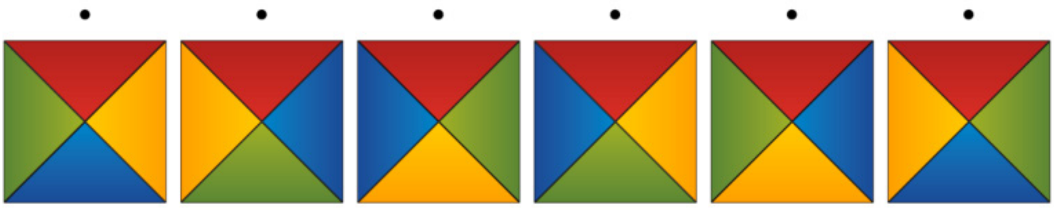
Nous disposons désormais de six pièces carrées différentes. Sauriez-vous rapidement les reconnaître ?

Un lot de six pièces a été trouvé par une autre équipe de recherche. Quelques doutes demeurent sur l'exactitude de leur travail.

Pour lever ces doutes, reliez chacune des pièces à son double dans le lot de référence.

Lot de référence

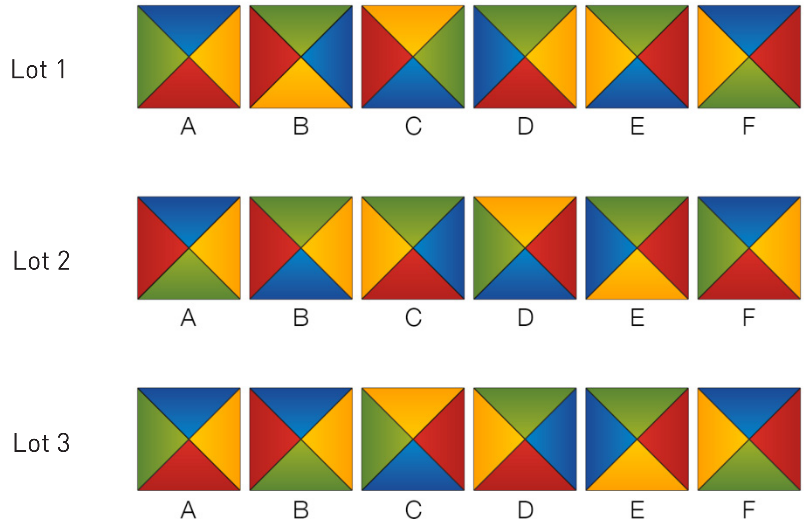




Lot douteux

D'autres lots ont été mélangés lors de divers rangements. Il est donc fortement possible que ces six pièces ne soient pas toujours différentes.

Vous devez par conséquent repérer les intrus, c'est-à-dire les pièces présentes en plusieurs exemplaires.



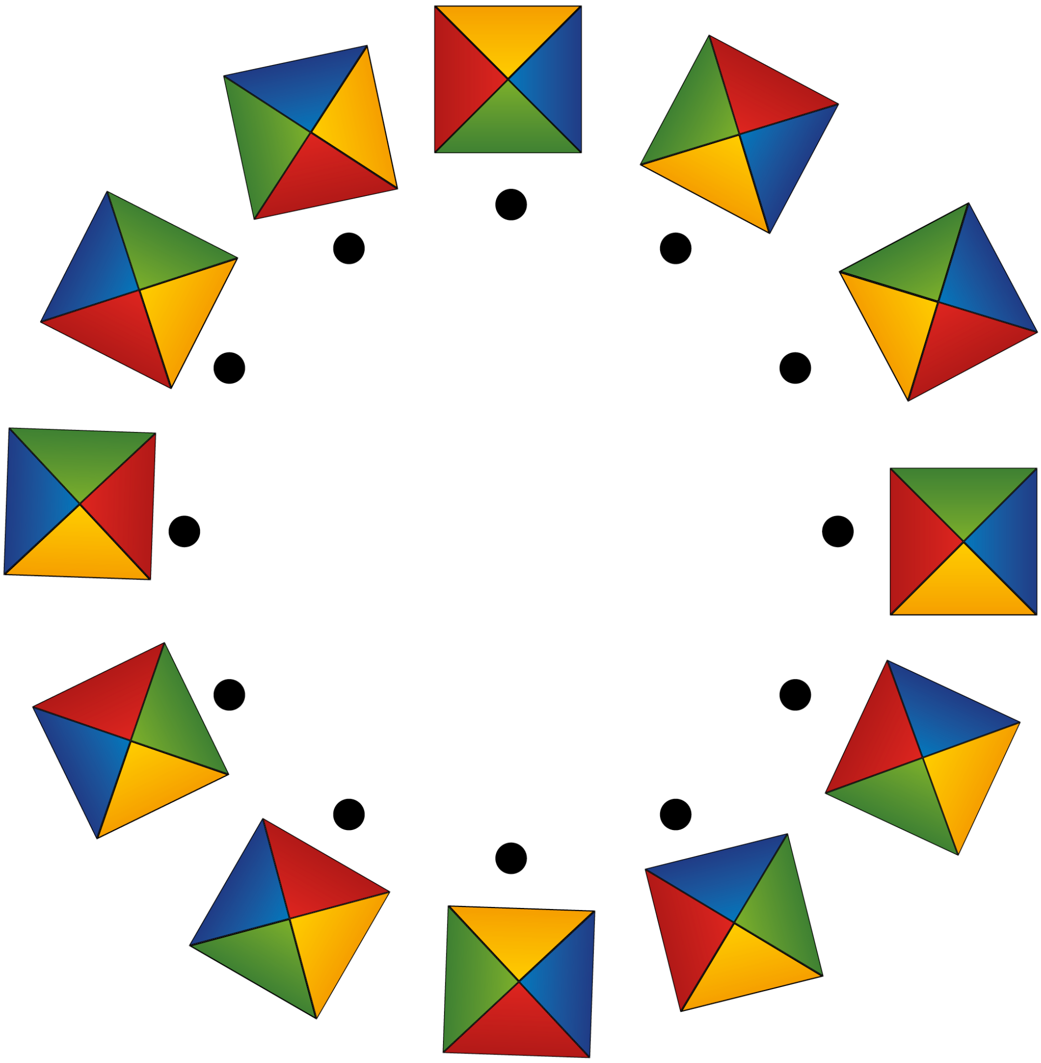
UNITED SQUARE

Farandole

Deux lots de pièces ont été malheureusement mélangés.

Sachant que chaque lot contient six pièces différentes, nous voudrions pouvoir isoler ces deux groupements de pièces.

En observant attentivement ces douze carrés colorés, reliez les couples de carrés identiques.



Rectangles & Carrés

En employant certaines des six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à recenser tous les rectangles, éventuellement carrés, de dimensions différentes qu'il est possible de former.

Une seule condition est à respecter : **Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.**

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage suivant et complèterez le tableau récapitulatif indiquant les dimensions des rectangles obtenus.

NOMBRE DE PIÈCES UTILISÉES	LONGUEUR DU RECTANGLE	LARGEUR DU RECTANGLE

NOMBRE DE PIÈCES UTILISÉES	LONGUEUR DU RECTANGLE	LARGEUR DU RECTANGLE

UNITED SQUARE

Symétriques

Vous allez employer totalement un lot de six pièces de base et les juxtaposer de façon à ce que les couleurs en contact soient identiques.

En respectant ces conditions, formez un assemblage ayant un axe de symétrie.

Peut-on obtenir un assemblage ayant deux axes de symétrie ? Pourquoi ?

Ayant un centre de symétrie ? Pourquoi ?

Désormais , vous disposez de deux lots de pièces de base et vous pouvez vous limiter à ne les utiliser que partiellement.

En respectant ces conditions, tentez de former un assemblage ayant un axe de symétrie, puis un centre de symétrie.

UNITED SQUARE

Bordures

En employant la totalité des six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à obtenir des rectangles dont les côtés respecteront les conditions de couleurs fixées.

En outre, une autre condition sera à respecter :

Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage fourni.

Un rectangle tel que les quatre couleurs sont présentes sur les côtés et dont aucun côté n'est d'une unique couleur.

Un rectangle tel que les quatre couleurs sont présentes sur les côtés et dont trois côtés sont d'une unique couleur.

Un rectangle tel que trois couleurs exactement sont présentes sur les côtés.

Un rectangle tel que deux couleurs exactement sont présentes sur les côtés.

UNITED SQUARE

Bien Coloriés

En employant certaines pièces de deux lots de six pièces différentes à votre disposition, vous allez chercher à obtenir des rectangles.

Trois conditions sont à respecter :

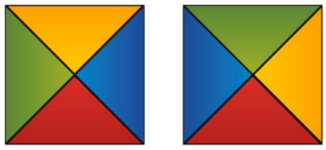
- Seuls des triangles de même couleur peuvent être mis en contact.
- Chaque côté sera d'une unique couleur.
- Les quatre côtés seront de couleurs différentes.

Vous reproduirez chacune de vos solutions dans le quadrillage fourni ou vous tenterez d'expliquer pourquoi la solution ne peut exister.

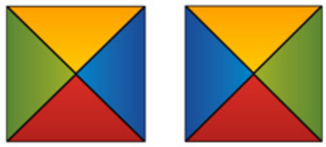
Victoire

Une partie de United square est quasiment terminée.

Vous jouez avec les couleurs et voilà les deux pièces qu'il vous reste :

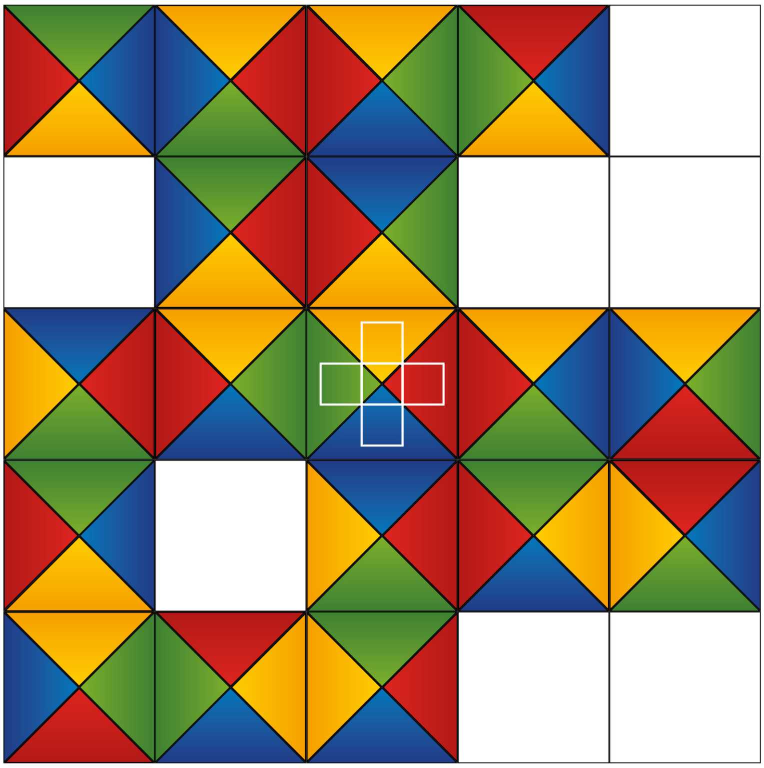


Quant à votre adversaire, il lui reste :



À ce stade, il y a égalité des scores, 11 points pour chacun.

> Que devez-vous jouer pour remporter la partie ?



2 Coups

Une partie de *United square* est quasiment terminée.

Vous jouez avec les couleurs et voilà les deux pièces qu'il vous reste :

Quant à votre adversaire, il lui reste :

À ce stade, quel est le score obtenu pour chacune des couleurs ?

: .... : ....

Que devez-vous jouer pour remporter la partie ?