

Mathématiques

**cycle terminal de la série littéraire
option facultative**

Première

programme applicable à la rentrée 2001

Terminale

programme applicable à la rentrée 2002

Ministère de l'Éducation nationale
Direction de l'Enseignement scolaire

CE DOCUMENT A ÉTÉ RÉDIGÉ PAR LE GROUPE D'EXPERTS SUR LES PROGRAMMES SCOLAIRES DE MATHÉMATIQUES :

Pierre Arnoux,
professeur des universités, Institut de mathématiques de Luminy (CNRS) et université de la Méditerranée

Antoine Bodin,
professeur, expert de l'OCDE, spécialiste de l'évaluation des compétences en mathématiques

Françoise Cellier,
professeur, lycée Charlemagne de Paris

Philippe Clarou,
professeur, IUFM de Grenoble

Gilles Godefroy,
directeur de recherche, CNRS, université Paris-VI

André Laur,
professeur, lycée Emmanuel-Mounier de Grenoble

Jean-Paul Quelen,
professeur, lycée Jean-Monnet de Strasbourg

Jean Moussa,
inspecteur général de l'Éducation nationale

Claudine Robert,
présidente, professeur des universités, université Joseph-Fourier de Grenoble

Erick Roser,
IA-IPR, académie de Poitiers

Nicolas Rouche,
professeur émérite, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Belgique

Johan Yebbou,
professeur en CPGE, lycée Charlemagne de Paris

Consultante pour les technologies de l'information et de la communication

Anne Hirlimann,
experte auprès de la SDTICE (direction de la Technologie)

Coordination et suivi éditorial

Jérôme Giovendo,
bureau du contenu des enseignements (direction de l'Enseignement scolaire)

Maquette : Fabien Biglione

Maquette de couverture : Catherine Villoutreix

Mise en pages : Catherine Villoutreix/Michel Voillot

Suivi éditorial : Nicolas Gouny

© CNDP, 1^{er} trimestre 2002

ISBN : 2-240-00800-8

ISSN : 1624-5393

Sommaire

Préambule	4
Analyse – Classe de première	5
Choix des problèmes	5
Utilisation de la calculatrice et du tableur	5
Fonctions homographiques	5
Fonction trinôme du second degré	6
Approximation d'un pourcentage	6
Neuf exemples de problèmes	7
Analyse – Classe terminale	15
Suites	15
Fonctions usuelles	16
Fonction logarithme	18
Fonction exponentielle	20
Probabilités, statistique et combinatoire	23
Combinatoire en classe de première	23
Probabilités et statistique	24
Arithmétique – Classe terminale	28
Introduction	28
Cryptographie	29
Clés de contrôle	30
Géométrie – Classe de première	31
Géométrie plane	31
Construction et tracés («à la règle et au compas»)	33
Nombres constructibles	40
Commensurabilité	41
Géométrie dans l'espace	41
Géométrie – Classe terminale	43
Nombre d'or et pentagone régulier	43
Perspective à point de fuite	49

Préambule

Ce document s'adresse en priorité aux professeurs enseignant l'option mathématiques en classes de première et terminale L. Il explicite les intentions du programme à travers de nombreux exemples qui pourront guider chaque enseignant dans la construction de son cours. Il en développe certains points : notions nouvelles (telles celles concernant la vision géométrique des nombres et les problèmes de construction) ou approches nouvelles (telles celles de l'analyse, de la fonction logarithme, de la combinatoire...). Certains exemples invitent à évoquer des problèmes marquants de l'histoire des mathématiques : ce pourra être l'occasion d'une réflexion commune à d'autres disciplines.

Ce document s'adresse aussi à tous les autres professeurs de mathématiques : en effet, les exemples proposés peuvent inspirer des activités dans d'autres séries ; par ailleurs, la lecture comparée des programmes de chaque série et de leurs documents d'accompagnement respectifs permet de mieux cerner la spécificité de chacune d'elles. Il importe que la communauté des enseignants de mathématiques garde une culture commune, quelle que soit la formation initiale de chacun : un tel document participe de cet objectif.

A analyse – Classe de première

L'analyse peut être présentée à partir d'un petit nombre de situations soigneusement choisies : en cherchant à répondre aux questions qu'elles suscitent, on entraînera les élèves à comprendre puis à maîtriser les notions au programme. Certaines situations, ou problèmes, pourront être présentés dès le départ et utilisés tout au long du déroulement du cours.

Choix des problèmes

Neuf exemples sont proposés dans ce document. Chacun introduit une ou plusieurs fonctions d'un des types retenus par le programme ou à une combinaison simple de ces fonctions ; ils ont été développés pour montrer en quoi leur étude permet d'atteindre l'essentiel des objectifs du programme.

On pourra viser l'acquisition de quelques automatismes calculatoires, dans la mesure où ceux-ci libèrent la pensée pour une meilleure compréhension, mais une telle acquisition n'est pas un objectif de cette option. L'essentiel du temps sera consacré à la résolution des problèmes choisis et, à travers cette résolution, à la compréhension du concept fondamental de dérivation et des quelques applications prévues par le programme.

Pour les problèmes que l'enseignant aura choisi de traiter, on n'hésitera pas à confronter plusieurs méthodes, selon l'évolution de la classe et en fonction des concepts disponibles.

Utilisation de la calculatrice et du tableur

Calculatrices et tableurs ont été utilisés dans le cursus antérieur et le sont de façon importante en classe de première dans le programme obligatoire de mathématiques-informatique. Leur usage sera systématique pour représenter graphiquement les fonctions mises en place lors de l'étude d'un problème ou dresser des tableaux de valeurs. Ces représentations et ces tableaux pourront même servir de terrain expérimental pour amener de nouvelles questions ou conjecturer des réponses que le calcul et le raisonnement viendront ensuite justifier.

Calculatrices et tableurs permettent d'aborder des expressions de fonctions qui pourront paraître compliquées à l'élève sortant de la classe de seconde. Selon les questions envisagées, on pourra chercher à simplifier ou modifier l'écriture d'une expression. Cela sera vrai en particulier pour les fonctions polynômes et les fonctions homographiques.

Pour les fonctions polynômes, il pourra s'agir de la recherche guidée d'une forme factorisée mais aucune compétence n'est exigée en la matière. Pour les fonctions homographiques, il sera utile de savoir passer de l'écriture $\frac{ax+b}{cx+d}$ à une écriture du type $k + \frac{k'}{cx+d}$.

Fonctions homographiques

L'écriture $k + \frac{k'}{cx+d}$ donne des informations que les élèves devront savoir utiliser à bon escient. Cette écriture permet entre autres le calcul de la dérivée : la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto 1/(cx+d)$ sera établie une fois pour toutes en revenant à la définition et le résultat sera par la suite utilisé librement par les élèves.

Elle met également en évidence le rôle particulier des droites d'équation ($x = -d/c$) et ($y = k$) dans la représentation graphique de la fonction. Aucun calcul de limite n'est demandé dans le programme (seule une notion intuitive de limite est utilisée pour la définition du nombre dérivé), et ce d'autant plus que lors de la résolution de problèmes, l'intervalle d'étude de la fonction se limite le plus souvent à un segment. Néanmoins, le travail fait en seconde sur la fonction inverse et celui fait ici sur les fonctions homographiques, appuyés par des représentations graphiques et des calculs sur tableur, pourront conduire à compléter les tableaux de variation par les limites mises intuitivement en évidence.

Ainsi, par exemple pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, on aboutira à l'écriture $f(x) = 2 + \frac{-7}{x+3}$, dont on déduira facilement le tableau de variation avec les limites aux bornes :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

On pourra aussi utiliser les mots « asymptotes » et « hyperbole », mais la connaissance de ces termes n'est pas exigible.

Il est à noter que l'étude du sens de variation n'exige pas ici le calcul de la fonction dérivée ; si celui-ci est effectué, ce sera pour répondre à d'autres questions, comme dans l'exemple 1 ci-après.

Fonction trinôme du second degré

Le libellé du programme incite à une démarche particulière sur le trinôme du second degré :

- à l'occasion d'exemples, étude des variations de fonctions du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$; mise en évidence des deux tableaux de variations possibles selon le signe de a et du rôle particulier du réel $x_0 = -b/2a$; représentations graphiques ;
- recherche des zéros de la fonction sous la forme $x_0 + h$ (on est alors ramené à une équation du type $h^2 = A$; les signes de a et de $f(x_0)$ fournissent des conditions d'existence de ces zéros).

La formule utilisant le discriminant n'est pas au programme, même si le rôle de celui-ci peut être mis en évidence à l'occasion de l'étude du signe de A ou de $f(x_0)$.

D'autres démarches sont envisageables et pourront venir plus naturellement au fil du travail de la classe, mais on veillera à limiter le temps consacré à ce type de fonctions. Comme indiqué dans le programme, on travaillera surtout sur des exemples numériques. Si l'étude du signe du trinôme s'avère utile (par exemple pour l'étude des variations d'une fonction polynôme du troisième degré), celle-ci s'appuiera avant tout sur la vision graphique de la parabole.

Approximation d'un pourcentage

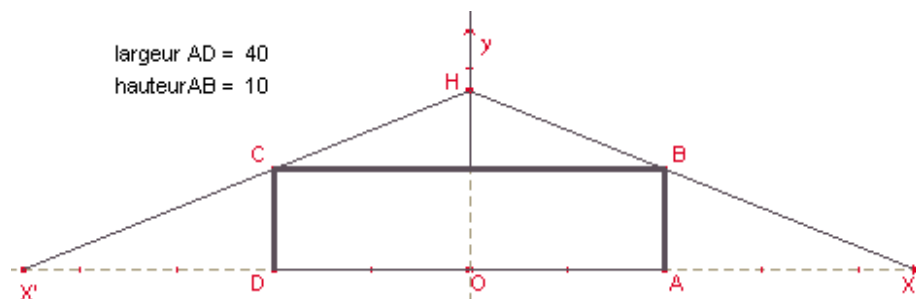
Les exemples proposés et les commentaires du programme donnent de nombreuses pistes concernant l'introduction et les applications usuelles de la dérivation (on pourra aussi se reporter aux éléments fournis dans le document d'accompagnement de la classe de première S).

Le titre « application à l'approximation d'un pourcentage » est à rattacher au titre correspondant du programme de mathématiques-informatique « approximation linéaire dans le cas de faibles pourcentages » ; son traitement dans l'option devra donc être entrepris après l'étude de ce chapitre dans le programme obligatoire.

C'est le seul endroit où il est demandé d'évoquer la notion d'approximation affine liée à la dérivée ; celle-ci aura déjà pu être observée graphiquement avec la notion de tangente pour d'autres fonctions. Ce sera fait systématiquement ici pour les fonctions

2. L'ombre d'un gyrophare

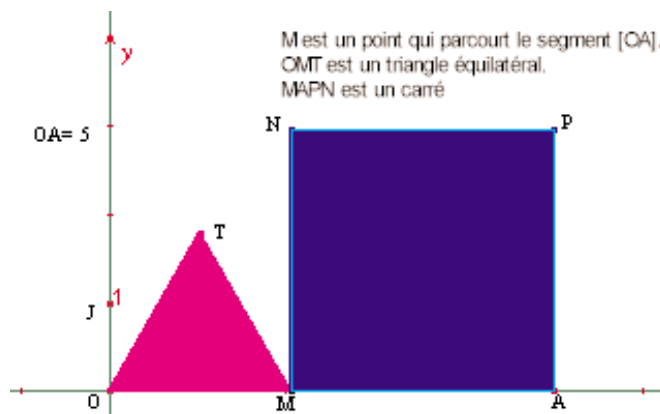
Dans un aéroport, un gyrophare est placé au-dessus d'un hangar cylindrique de 10 m de haut et de base circulaire de 40 m de diamètre. Le cône d'ombre est un cercle de rayon x et on veut déterminer la hauteur h du gyrophare (au-dessus du sol) en fonction de ce rayon.



- Faire le lien entre la situation décrite et le schéma ci-dessus.
- En considérant les deux triangles semblables XAB et XOH , montrer que
$$h(x) = \frac{10x}{x - 20}.$$
- En considérant les triangles semblables BIH et XAB , montrer que
$$h(x) = \frac{200}{x - 20} + 10.$$
- Vérifier par le calcul que les deux expressions sont égales, pour tout $x > 20$.
- Établir le tableau de variation de h en fonction de x .

3. La plus petite aire

Soit un segment $[OA]$ de longueur donnée (par exemple 10) et M un point de ce segment. Du même côté de $[OA]$, on construit le triangle équilatéral OTM et le carré $AMNP$. On pose $OM = x$.



- Donner l'expression et la représentation graphique de l'aire du triangle OTM en fonction de x .
- Donner l'expression et la représentation graphique de l'aire du carré $AMNP$ en fonction de x .
- Étudier les variations de la somme des aires du triangle et du carré en fonction de x . Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimum ?

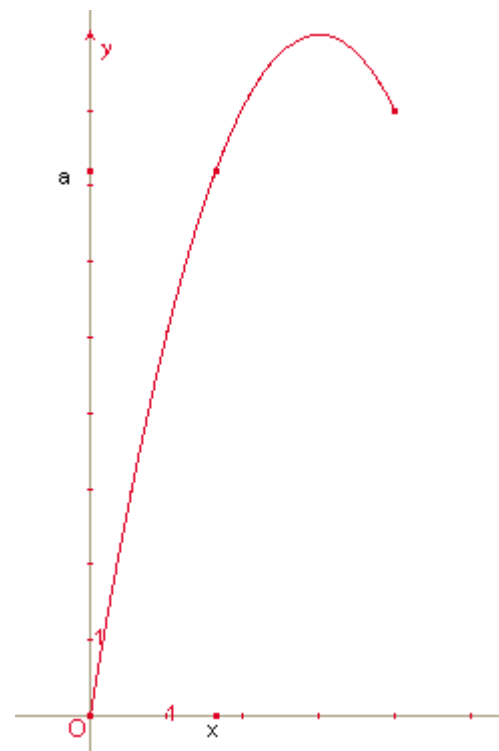
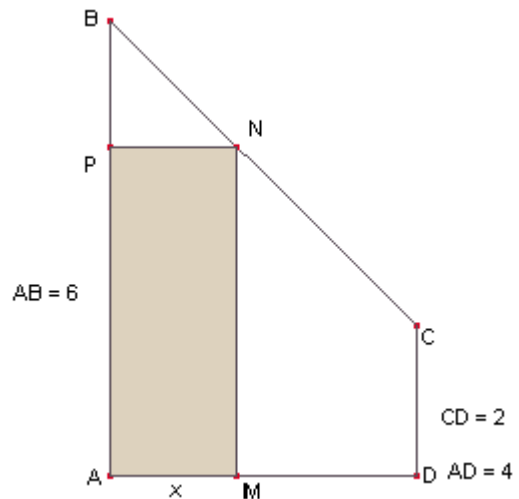
Remarque – On peut envisager un triangle OTM rectangle isocèle, ou bien un deuxième carré $OMTU$. Cette situation conduit à étudier d'abord deux fonctions trinômes avec des coefficients de x^2 de signes différents, puis la somme de ces deux fonctions.

4. Aire maximum

Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $CD = 2$ cm. Un point N parcourt le segment [BC]; on construit le rectangle AMNP avec P sur [AB] et M sur [AD]. Exprimer l'aire du rectangle AMNP en fonction de AM et représenter graphiquement cette aire en fonction de AM. Pour quelle valeur de AM cette aire est-elle maximum ?

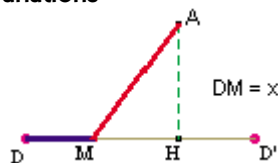
On représente ci-contre la courbe obtenue.

Remarque – On peut séparer la classe en groupes et faire cet exercice avec différentes valeurs de a et b , ($b > a$), avec $CD = a$, $AD = b$, $AB = a + b$, et vérifier alors que le maximum est toujours atteint quand P est au milieu de [AB], puis le démontrer.



5. Temps de parcours

Variations



Un point A se situe à 3 km d'un segment $[DD']$ de longueur 6 km et sa projection orthogonale sur $[DD']$ se situe en H à 4 km de D (et à 2 km de D').

- Sans aucun calcul, dresser le tableau donnant les variations de la longueur AM en fonction de la longueur DM.
- Exprimer analytiquement AM en fonction de DM et représenter graphiquement cette fonction sur la calculatrice.

Parcours à VTT

Un vététiste part de D pour arriver en A situé au milieu d'une grande prairie. Il peut emprunter un chemin carrossable $[DD']$ rectiligne de 6 km de long. Le point A est distant de 3 km de $[DD']$ et $DH = 4$ km et $HD' = 2$ km. Quel itinéraire doit-il choisir pour aller le plus rapidement possible de D à A dans les cas suivants ?

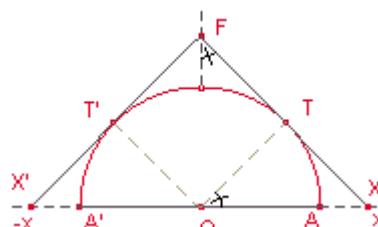
- il se déplace à la même vitesse v (par exemple 15 km.h^{-1}) sur le chemin et dans la prairie;
- il se déplace à la vitesse v_1 sur le chemin, à la vitesse v_2 dans la prairie, et $v_1 = 2v_2$ (avec par exemple $v_2 = 10 \text{ km.h}^{-1}$).

Indications : si les vitesses v_1 et v_2 sont exprimées en km.h^{-1} et si on pose $DM = x$, le temps t (en heure) mis par le vététiste pour aller de D à A vérifie $t = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(4-x)^2 + 9}}{v_2}$.

Le problème est difficile : une approche calculatoire (avec tableur) pourra être proposée ; sa résolution exacte exige l'outil « dérivée » et une relative aisance dans les calculs.

6. Histoires de toit

I. Un toit s'appuie sur une voûte en demi-cercle de rayon r , comme l'indique la figure ci-contre. Quelle doit être la hauteur du faîte pour que les deux pans du toit forment un angle droit ? Situer le point de contact de chaque pan avec la voûte.

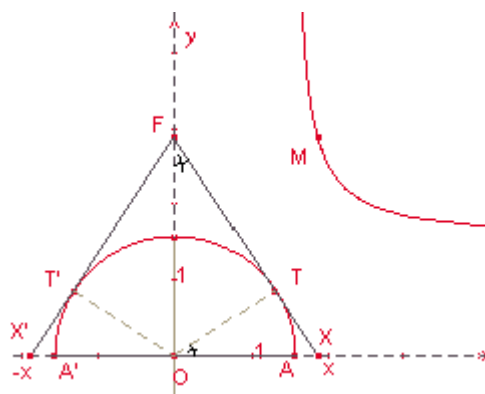


Par de simples considérations géométriques on trouve $h = x = r\sqrt{2}$ et les coordonnées de T sont $(r\sqrt{2}/2; r\sqrt{2}/2)$.

Remarque – On peut reprendre ces questions dans le cas d'un toit formant un angle de 60° ou de 120° .

II. Plus généralement, déterminer l'expression donnant la hauteur h en fonction de la longueur OX notée x . Construire une représentation graphique de la fonction $x \mapsto h$.

L'expression de h en fonction de x s'obtient assez simplement en considérant les triangles rectangles semblables FTO et OTX. On trouve $h = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$. Bien que l'étude de ce



type de fonction soit en

dehors du programme, la calculatrice permet une représentation graphique aisée ; celle-ci peut aussi se construire point par point à partir du dessin ; l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique sera alors bienvenue (le dessin met en évidence deux droites asymptotes dont l'interprétation géométrique est évidente).

III. (*Approche géométrique de la tangente.*) La courbe ($\mathcal{C}$) d'équation $y = ax^2$ (a désignant un réel non nul, par exemple $a = 0,5$) est appelée parabole. Soit T un point de l'axe des ordonnées ayant une ordonnée t de signe contraire à celui de a (par exemple $t = -4$). On fait pivoter une droite Δ autour du point T et on observe l'intersection de Δ et ($\mathcal{C}$) : faire des essais (l'équation de Δ étant de la forme $y = mx - 4$, on essaiera avec des valeurs entières de m : 0, 1, 2, 3...).

On met ainsi en évidence deux cas où la droite Δ est « tangente » à ($\mathcal{C}$). Le milieu T' des points de contact C et C' des deux tangentes à la parabole semble alors lié au point T. L'objectif est alors de prouver la propriété conjecturée. Après généralisation, on en déduit un moyen simple pour construire les tangentes à une parabole passant par un point donné de son axe de symétrie.

Indications : on pourra d'abord chercher les abscisses des points d'intersection de ($\mathcal{C}$) et Δ dans les cas $m = 3$ (on aboutit à une équation de la forme $(x - 3)^2 = 1$), puis $m = 4$... Pour m quelconque, ces calculs préliminaires amènent à l'équation $(x - m)^2 = m^2 - 8$. Il y a tangence quand il y a une seule solution, donc quand $m^2 = 8$. On peut séparer la classe en groupes et faire cet exercice avec différentes valeurs de t (voire de a). Chaque groupe aboutit au même résultat : le point T' est symétrique de T par rapport à O.

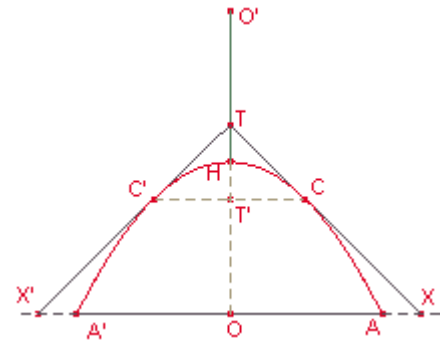
Remarque – On ne manquera pas par la suite de vérifier que l'on obtient bien la même tangente en utilisant la dérivée.

IV. Un toit, dont les deux pans sont symétriques par rapport à la verticale issue du faîte du toit est soutenu par une voûte parabolique (voir la figure page suivante). La distance AA' et la hauteur OH sont fixées (par exemple AA' = 4 et OH = 2). Déterminer

la hauteur du faîte OT ainsi que le surplomb OX et la longueur des poutres pour que l'angle formé par les deux pans du toit soit droit.

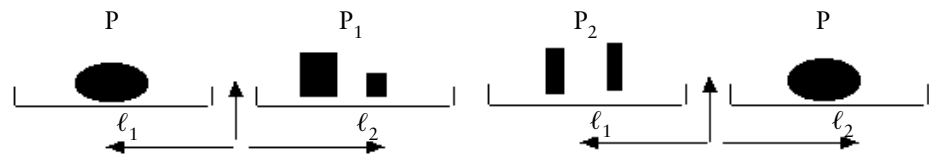
L'équation de la parabole est de la forme $y = -ax^2 + 2$ et en écrivant que les coordonnées de A vérifient cette équation, on obtient $y = 2 - x^2/2$.

Soit $T(0; t)$ et $T'(0; t')$. On a, d'après l'exercice III précédent, $(t + t')/2 = 2$, soit $t' = 4 - t$. Or, les triangles $TT'C$ et TOX sont rectangles isocèles, donc $T'C = T'T = 2t - 4$. Le point C étant un point de la parabole, son ordonnée est donc $y_c = 2 - (2t - 4)^2/2$. Par ailleurs, $y_c = t' = 4 - t$. On a donc l'équation $4 - t = 2 - (2t - 4)^2/2$ (où l'on peut mettre $(2 - t)$ en facteur). On trouve $t = 2,5$ (la solution $t = 2$ étant à écarter).



7. Fausses factures

Il arrive encore que sur certains marchés, les ventes de produits se fassent à l'aide de balances (voir figure ci-dessous). Pour pallier la dissymétrie des bras de la balance, un marchand propose de peser la marchandise une fois à gauche puis une fois à droite et de faire ensuite la moyenne des deux pesées.



Le défaut est-il ainsi corrigé? Sinon, à qui profite la manœuvre? Quel calcul permettrait une opération honnête?

Indications: en posant $\frac{l_1}{l_2} = x$, on essaiera de répondre aux deux questions précédentes suivant les valeurs de x .

Le poids facturé est égal à $\frac{P}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

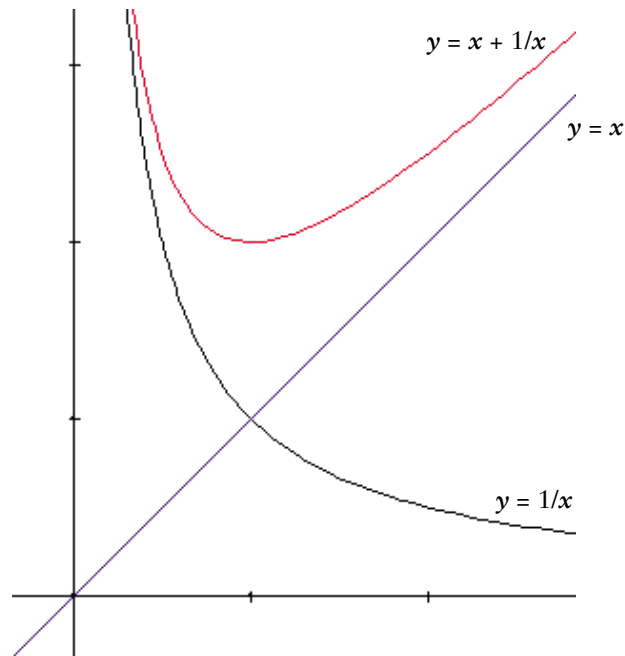
Pour répondre à la question, on est donc ramené à chercher les valeurs de x pour lesquelles on a $x + \frac{1}{x} > 2$; pour répondre, il est intéressant d'étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$. En établissant que l'on a toujours $x + \frac{1}{x} \geq 2$, on obtient que le poids facturé est toujours supérieur au poids réel.

Sur ce graphique, on a aussi représenté $x \mapsto 1/x$ (en noir) et $x \mapsto x$ (en bleu).

Pour obtenir une pesée honnête, il suffit d'éliminer $\frac{l_1}{l_2}$ entre les deux équations $P_1 = P \frac{l_1}{l_2}$ et $P_2 = P \frac{l_2}{l_1}$. On obtient $P = \sqrt{P_1 P_2}$.

Le marchand peut utiliser honnêtement sa balance à condition d'effectuer la moyenne géométrique des deux pesées (on pourra remarquer à ce propos que la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique).

Voir le graphique page suivante.



8. Grand volume, petite surface

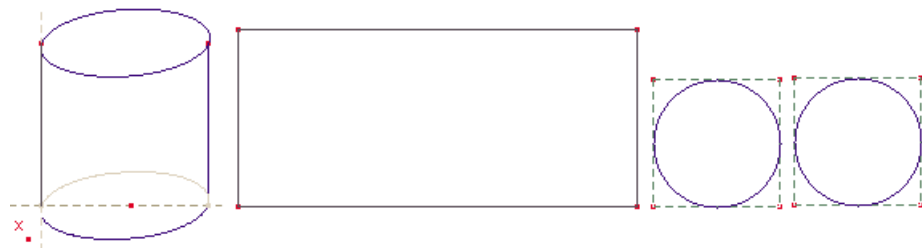
I. Rangement

On veut fabriquer une boîte parallélépipédique de base carrée et de volume donné. Quelles dimensions lui donner pour utiliser le moins de bois possible ?

Indications : on pourra démarrer avec un volume de $1\,000\text{ dm}^3$. En notant x le côté du carré de base, on exprime la hauteur h en fonction de x , puis l'aire totale de la surface de la boîte en fonction de x . Le minimum de cette aire est atteint quand la boîte est cubique.

On pourra proposer de nouveaux calculs à partir de volumes différents, voire travailler dans le cas général, et parler à cette occasion de racine cubique.

II. Boîte de conserve

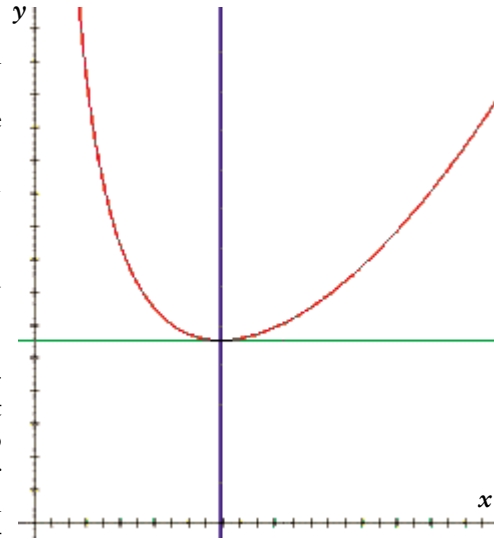


Une boîte de conserve de $1\,000\text{ cm}^3$ est un cylindre de révolution de diamètre d et de hauteur h . On veut minimiser le prix de revient de la tôle servant à la fabrication de cette boîte. Pour cela on va minimiser la surface de tôle utilisée, à savoir la surface latérale et celle des deux carrés dans lesquels on découpe les deux disques constituant le fond et le dessus de la boîte.

Indications :

- Exprimer la hauteur h en fonction du diamètre d .
- Exprimer l'aire A de la surface de tôle en fonction du diamètre d .
- Représenter graphiquement l'aire A en fonction de d .
- Conjecturer un minimum.
- Déterminer le minimum à l'aide de la dérivée.

Remarque – On peut chercher à minimiser la surface de tôle effectivement utilisée; les calculs sont alors beaucoup plus délicats (ils obligent en particulier à l'emploi d'une racine cubique); on remarquera que, dans ce cas-là, le coût minimum est atteint quand la hauteur de la boîte est égale à son diamètre.



L'axe des y est gradué de 100 en 100.

Sur l'axe des x , une graduation correspond à 1 unité.

9. Variations de vitesse

(D'après Vers l'infini pas à pas, *Approche heuristique de l'analyse*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1999.)

Un monte-charge s'élève d'une hauteur de 3 m en accélérant pendant 3 secondes puis en décélérant pendant 3 secondes. Il part du repos et il s'arrête donc à 3 m de haut au bout de 6 secondes.

Représenter graphiquement la hauteur atteinte par le monte-charge en fonction du temps dans les deux cas suivants :

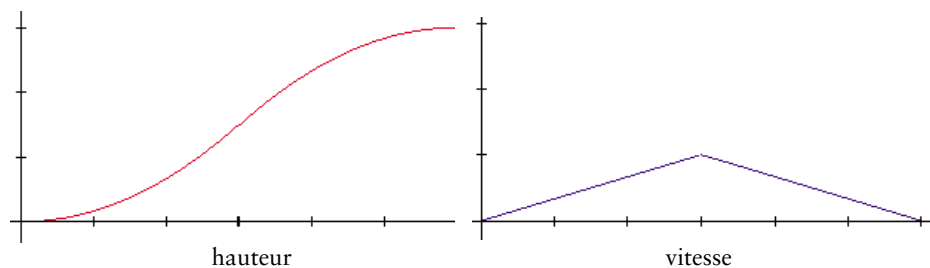
- Son accélération et sa décélération sont égales à une même constante.
- La hauteur $h(t)$ atteinte au bout du temps t s'exprime par un polynôme du troisième degré $h(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Dans chacun des cas, calculer la vitesse au bout de 3 secondes, au bout de t secondes; préciser si le monte-charge s'arrête en douceur et si le mouvement change brusquement après 3 secondes.

Indications : ce type de problème est difficile; il serait néanmoins regrettable de l'exclure *a priori* en raison de sa complexité. Il permet l'introduction des notions d'accélération et de décélération (à présenter de façon intuitive comme la « vitesse » de la vitesse). Il permet également de mettre en œuvre les formules de dérivation sous un angle nouveau (inutile pour autant d'utiliser le terme de primitive).

On obtient les résultats suivants.

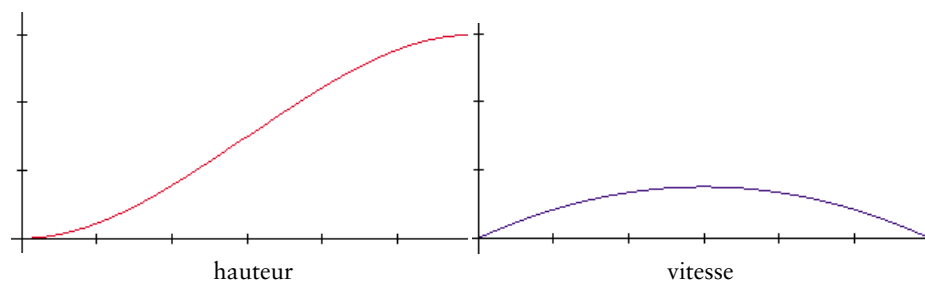
1^{er} cas: $h(t) = \frac{1}{6}t^2$ pour $0 \leq t \leq 3$ et $h(t) = 3 - \frac{1}{6}(t-6)^2$ pour $3 \leq t \leq 6$.

La vitesse est donnée par $v(t) = \frac{1}{3}t$ pour $0 \leq t \leq 3$ et par $v(t) = -\frac{1}{3}(t-6)$ pour $3 \leq t \leq 6$.



L'accélération passe brusquement de $1/3$ à $-1/3$.

2^e cas : la hauteur est nulle pour $t = 0$ donc $d = 0$; elle vaut 3 pour $t = 6$ d'où $3 = 216a + 36b + 6c$; la vitesse (qui s'obtient en dérivant) $v(t) = 3at^2 + 2bt + c$ est nulle pour $t = 0$ et pour $t = 6$. On obtient donc $h(t) = -\frac{1}{36}t^3 + \frac{1}{4}t^2$ et $v(t) = -\frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{2}t$.



L'accélération passe linéairement de $1/2$ à $-1/2$.

Suites

On pourra s'inspirer des exemples fournis dans le document d'accompagnement de la classe de première S (on y trouvera en particulier des exemples de suites provenant de la géométrie).

On donnera des exemples de suites définies par récurrence : ceux-ci compléteront ceux qui auront déjà été présentés en classe de première (programme obligatoire) ; pour le calcul des premiers termes, on entretiendra l'habitude du tableur. En dehors du cas des suites arithmétiques ou géométriques et des sommes de k de leurs termes consécutifs, aucune recherche de l'expression explicite du n -ième terme en fonction de n n'est demandée. La question de l'identification entre deux suites (l'une définie par récurrence, l'autre par son terme de rang n en fonction de n) pourra néanmoins être posée ; on admettra pour ce faire que deux suites ayant même premier terme et même relation de récurrence sont identiques (il s'agit là d'une application du principe du raisonnement par récurrence, mais aucune difficulté théorique ne sera soulevée).

On en restera le plus souvent à des récurrences d'ordre 1. À titre d'exemple, on pourra présenter une relation de récurrence d'ordre 2, telle celle intervenant dans les suites de Fibonacci ; le cas échéant, on fera expérimentalement le lien avec le nombre d'or (en cherchant une suite géométrique qui soit aussi de Fibonacci, ou en observant les quotients de deux termes successifs d'une suite de Fibonacci).

On introduira quelques exemples de suites finies, à prolonger « logiquement », c'est-à-dire en définissant une relation soit du type $u_{n+1} = f(u_n)$, soit du type $u_n = f(n)$ permettant sa reconstruction ; outre un aspect ludique, le problème mathématique sous-jacent (à savoir, étant donnée une suite, existe-t-il un moyen de la programmer) a donné lieu à des résultats nombreux et profonds. Ici, on soulignera plutôt l'entraînement au raisonnement inductif et la mise en jeu des capacités d'invention que la recherche de tels exemples implique. Ce type d'exemples pourrait s'inscrire dans des exercices analogues à celui qui suit.

Transmission de suites

Un élève A dispose des suites de nombres suivantes :

- (a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49,
- (b) 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64,
- (c) 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5,
- (d) 1, 2, 6, 24, 120, 720,
- (e) 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
- (f) -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256,
- (g) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
- (h) 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
- (i) 3, 9, 81, 65, 61, 37,
- (j) 1, 7, 3, 2, 0, 5, 0, 8, 0, 7, 5, 7
- (k) 1, 11, 21, 1211, 11 12 21, 31 21 11

L'élève A doit transmettre chacune d'elles à un élève B par un procédé autre que la recopie (par exemple : la première suite est la suite des vingt-cinq premiers nombres impairs écrite par ordre croissant). Est-ce possible ?

Indications : il est difficile de détecter une régularité dans la suite (e). Une transmission possible pourrait être : une suite de vingt-neuf 0 ou 1, les 1 étant placés aux positions 2, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 23 et 26. On peut aussi calculer le nombre entier dont la suite donnée est l'écriture en base 2.

Pour la suite (j), l'existence d'un moyen autre que la recopie est difficile, sauf à remarquer qu'il s'agit des premiers chiffres du développement décimal de $\sqrt{3}$.

Pour la suite (i), on pourra découvrir que chaque terme est la somme des carrés des « chiffres » du terme qui précède.

On s'appuiera sur l'expérimentation calculatoire et géométrique et sur l'intuition pour aborder la notion de limite d'une suite (cf. exemples de suites dans l'annexe 3 du document d'accompagnement de la classe de première S). On utilisera la notation usuelle $\lim u_n$.

On pourra en rester aux limites des suites arithmétiques ou géométriques et à celles qui s'en déduisent immédiatement par le calcul (par exemple, limite de la somme des termes d'une suite géométrique convergente). Le calcul permet ainsi de confirmer le résultat éventuellement perçu de façon intuitive (cf. exemples dans l'annexe 3 du document de première S ; suites présentes dans les paradoxes de Zénon d'Élée ; valeur d'un développement décimal périodique ; aire sous la parabole ci-dessous...).

Pour les suites géométriques à raison positive, l'expérimentation sur tableur pourra être motivée par la recherche de l'entier n tel que $u_n < u_0/2$ ou $u_n > 2u_0$ ($u_0 > 0$) et la comparaison de plusieurs suites à ce propos.

Fonctions usuelles

On entretiendra les acquis de la classe de première sur les fonctions polynômes de degré au plus 3, homographiques ou du type $\sqrt{u}$, avec u polynôme de degré au plus 2, à travers l'étude de nouveaux problèmes.

Pour motiver l'introduction du logarithme, on pourra envisager un problème simple de quadrature, tel celui qui est exposé dans l'encadré ci-dessous.

Aire sous la parabole

La parabole ci-dessous représente la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$. L'objectif est de calculer l'aire sous l'arche de parabole hachurée ci-contre.

1^{re} méthode (méthode d'Archimède, par triangulations successives)

1^{re} étape : on calcule d'abord l'aire cumulée des deux triangles AOS et A'OS (égale à $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh = 8$ avec $b = OS = 4$ et $h = 2OA = 4$).

2^e étape : on ajoute ensuite les 4 triangles A'T'm', l'm'S, Slm, ImA (obtenus en coupant en deux chacun des segments [OA] et [OA'] ; ces 4 triangles ont une hauteur commune égale à $\frac{1}{4}AA'$ et une même base Im de longueur égale

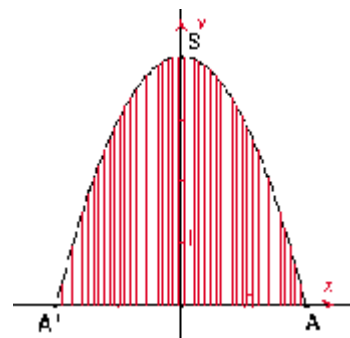
à $\frac{1}{4}OS$; leur aire cumulée est celle d'un triangle de hauteur AA' et de base $\frac{1}{4}OS$; elle est donc égale à $\frac{1}{4}\mathcal{A}$.

3^e étape : à l'étape suivante (à droite ci-après), on ajoute des triangles dont l'aire cumulée équivaut à celle d'un triangle de hauteur AA' et de base $\frac{1}{16}OS$; elle est donc égale à $\left(\frac{1}{4}\right)\mathcal{A}$.

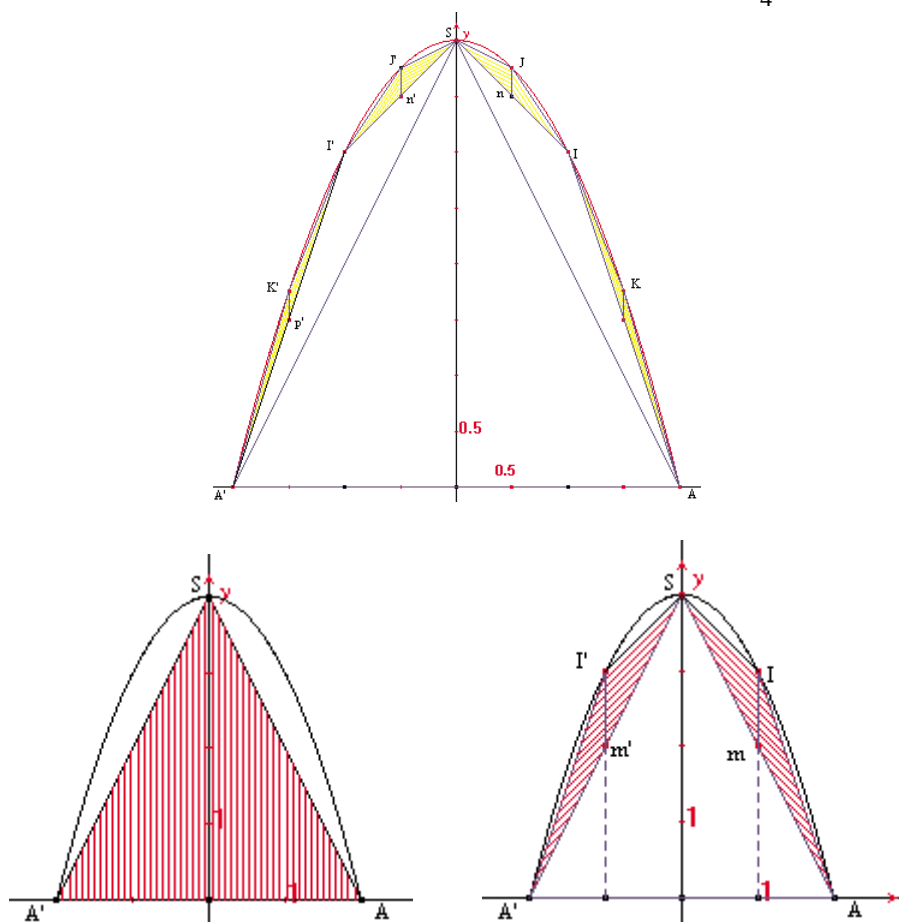
À chaque étape, on rajoute ainsi des triangles dont l'aire totale est le quart de l'aire totale des triangles rajoutés à l'étape précédente.

Pourquoi la base est-elle ainsi à chaque fois divisée par 4 ?

À la première étape, la base vaut OS. À l'étape suivante, en posant $a = 0$ et $b = 2$, la base vaut $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{1}{4}(a-b)^2$. Et ainsi de suite...



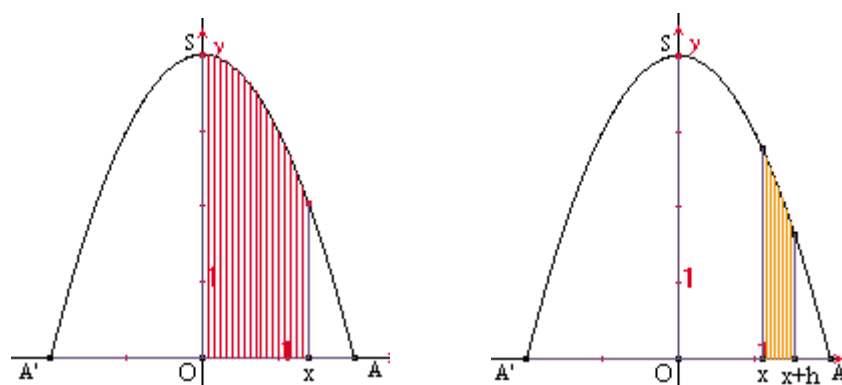
L'aire totale de l'arche de la parabole vaut donc $\mathcal{A} \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots \right) = \mathcal{A} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$.



2^e méthode : en utilisant la fonction aire

Définir la fonction aire $A(x)$ pour la demi-arche de droite; observer la tranche d'aire entre a et $a + b$ et montrer que $A'(a) = f(a)$.

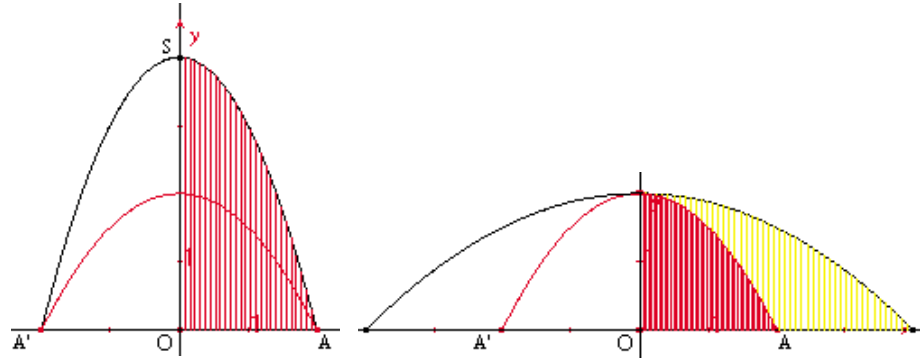
On cherche la fonction A dont la dérivée soit f et telle que $A(0) = 0$. Soit $A(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$.
 $A(2) = 16/3$, d'où l'aire cherchée: $32/3$.



Prolongement

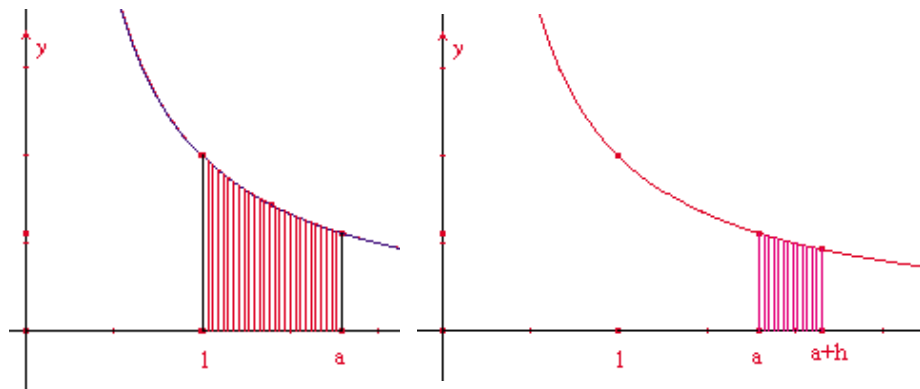
Que devient l'aire si on déforme l'arche de parabole en modifiant une seule dimension ? Dans le dessin ci-dessous, on « écrase » d'abord la parabole : les ordonnées sont toutes divisées par 2 ; la nouvelle aire (sous la courbe rouge) est donc divisée par 2 ; le résultat pourra être calculé dans le cas d'un rectangle puis admis dans le cas de la parabole. On « tire » ensuite la parabole vers la droite et la gauche : les abscisses sont multipliées par 2 ; l'aire sous la parabole rouge est donc multipliée par 2 ; l'aire finale (en jaune) est alors égale à l'aire initiale.

(Cette méthode sera réutilisée pour obtenir la relation fonctionnelle des logarithmes.)



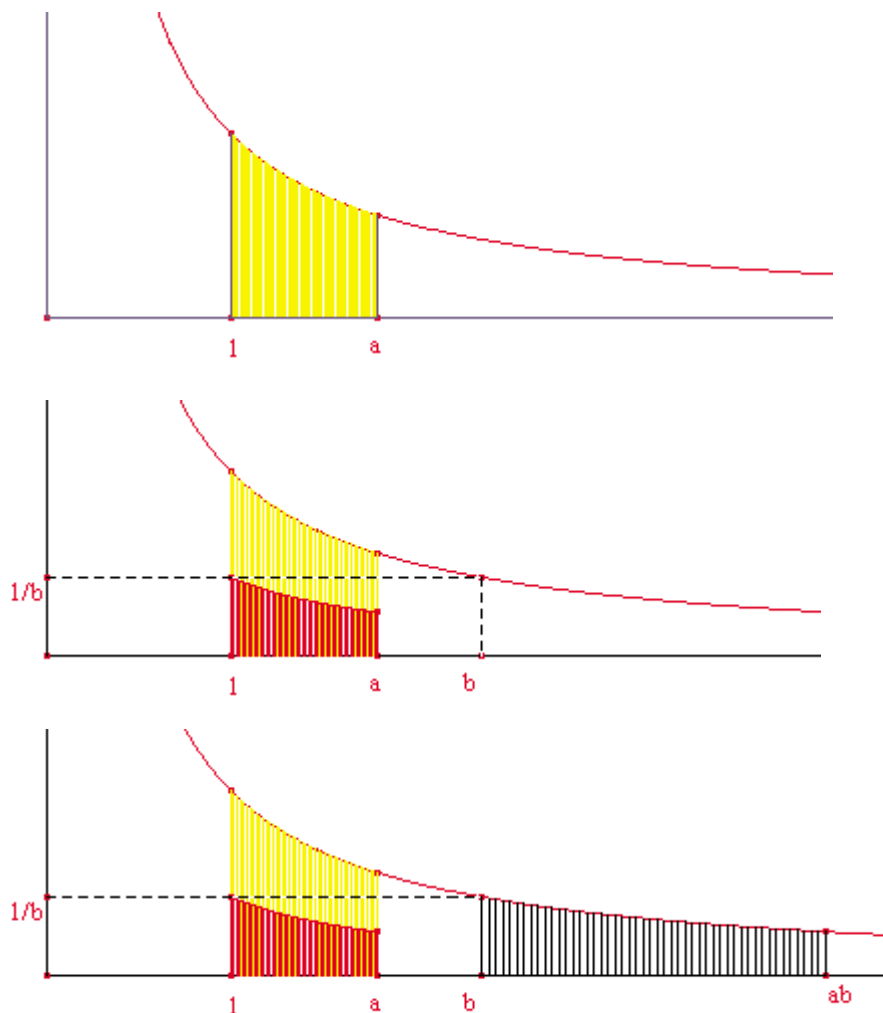
Fonction logarithme

Le programme suggère d'introduire la fonction logarithme par quadrature de l'hyperbole. On s'intéresse donc à l'aire sous l'hyperbole représentative de la fonction $x \mapsto 1/x$ à partir de la droite ($x = 1$) : l'aire sera comptée positivement vers la droite et négativement vers la gauche. La fonction aire ainsi définie est évidemment croissante. On montre (ou on admet en se référant au cas de la parabole si celui-ci a été traité) que cette fonction aire a pour dérivée $x \mapsto 1/x$.



On pourra chercher une méthode de calcul approché de valeurs de $\ln$ (pour $\ln 2$ par exemple), mais on privilégiera ici l'utilisation de la calculatrice. Cette dernière donnera une représentation graphique de $\ln$; on pourra lui associer la recherche de tangentes aux points d'abscisse 1, 2... On sera ainsi amené à s'intéresser à l'allure de la courbe de $\ln$ quand x devient très grand (ceci pourra préparer la question de la limite de $\ln$ en $+\infty$). La calculatrice permettra aussi une première approche de la valeur pour laquelle l'aire vaut 1.

Pour la mise en place de la relation fondamentale $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, on pourra s'appuyer sur la définition géométrique précédente en montrant que l'aire sous l'hyperbole entre les droites ($x = 1$) et ($x = a$) (en jaune sur la première figure ci-après) est égale à l'aire sous l'hyperbole entre les droites ($x = b$) et ($x = ab$) (en vert sur la troisième figure), en choisissant $b > a > 1$. La deuxième figure montre l'étape intermédiaire – division des ordonnées et donc aussi de l'aire par b – avant la multiplication des abscisses et donc aussi de l'aire par b .



On en tire $\ln(ab) - \ln(b) = \ln(a)$. Cette nouvelle fonction transforme donc les produits en sommes, puis les quotients en différences, les puissances n -ièmes en multiplications par n , les racines n -ièmes en divisions par n , etc. Elle transforme aussi les suites géométriques en suites arithmétiques. On pourra souligner l'importance historique de cette relation.

Cette relation (avec $\ln(2^n)$) permettra aussi de conclure sur la limite de $\ln$ en $+\infty$ et donc aussi en 0.

Des fonctions du type $k \cdot \ln$ ou du type $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ seront aussi présentées. La définition graphique adoptée pour $\ln$ (aire sous la courbe de $x \mapsto 1/x$) s'étend immédiatement à la fonction $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ (aire sous la courbe de $x \mapsto 1/(x - \alpha)$) et donne, si besoin est, la dérivée de cette nouvelle fonction.

Mention sera faite de la fonction logarithme décimal, qu'on pourra illustrer par les exemples qui suivent (voir aussi la loi de Benford dans le paragraphe concernant les probabilités).

Exemple 1 : pH d'une solution aqueuse

On mesure l'acidité d'une solution en évaluant sa concentration en ions H_3O^+ ; les variations de cette concentration étant grandes, on utilise le logarithme de cette concentration.

De façon plus précise, on définit le pH par la formule $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}_3\text{O}^+]$, où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ est le nombre de moles d'ions H_3O^+ par litre de solution.

Si la solution est neutre, le pH vaut 7.

Si la solution est acide, $\text{pH} < 7$; par contre si la solution est basique, $\text{pH} > 7$.

**Exemple 2 : La loi de Weber-Fechner,
la sensation croît comme le logarithme de l'excitation**

Exemple : le cas des décibels

Le niveau sonore S (c'est la *sensation*) d'un son d'intensité I (c'est l'*excitation*) est donné (en *décibels*) par $S = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$, où I_0 est l'intensité de seuil d'audibilité pour l'oreille humaine :

- une musique douce correspond à 50 décibels (et donc à une intensité I cent mille fois plus grande que l'intensité I_0 du seuil d'audition) ;
- une rue bruyante à 80 décibels ;
- un réacteur d'avion à 10 m à 120 décibels ;
- pour faire tomber un niveau sonore de 90 décibels (seuil à partir duquel il y a danger pour l'oreille humaine) à 50 décibels, il faut diviser l'intensité par dix mille !

Exemple 3 : Échelle de Richter

La magnitude M d'un séisme est souvent mesurée par le logarithme décimal de l'amplitude maximale d'une onde dite onde de surface L , mesurée en micromètres, à 100 km de l'épicentre : $M = \log_{10} (L/I_0)$. Ainsi, une amplitude de 1 mm à 100 km de l'épicentre est mesurée par l'indice 3 sur l'échelle de Richter (ce qui signifie que $M = 3$). Cette magnitude caractérise l'énergie libérée à l'épicentre du séisme (un écart de 3 sur l'échelle de Richter correspond à un facteur multiplicatif d'environ 32 000 de cette énergie exprimée en joules). Les plus puissants séismes observés à ce jour et qu'on a pu mesurer ne dépassaient pas 9 sur l'échelle de Richter.

La terre est sujette environ tous les trois jours à des tremblements violents, de magnitude supérieure à 6, dont les épicentres sont le plus souvent dans des régions complètement inhabitées.

En région habitée, un séisme de magnitude inférieure à 3,5 n'est pas détecté. Au-delà de 6, des dégâts très importants peuvent se produire dans un rayon de 100 km autour de l'épicentre (pour 6, on peut observer la destruction des constructions non parasismiques).

Exemple 4 : Écritures décimale ou scientifique d'un nombre et logarithme décimal de ce nombre.

Le logarithme décimal d'un nombre réel positif x , noté $\log_{10} x$ est défini par $\ln x / \ln 10$. Quelles sont les parties entières de $\log_{10} x$ pour les nombres x suivants :

100 ; 1000 ; 145678 ; 5674321890,789 ; $2,3 \cdot 10^{12}$; $5,2 \cdot 10^{-7}$?

Fonction exponentielle

La fonction exponentielle pourra être présentée comme la fonction réciproque (on ne soulèvera aucune difficulté à propos de cette notion) de la fonction logarithme népérien. Représentation graphique, limites en $+\infty$ ou $-\infty$, relation fonctionnelle s'en déduiront directement ; on adoptera dès le départ la notation e^x , dont on vérifiera la cohérence avec l'exponentiation entière.

Avec e^x , pour des valeurs entières de x , on retrouve une suite géométrique ; mais à la différence des suites géométriques, on peut directement considérer ce qui se passe pour n'importe quel réel t entre deux entiers consécutifs.

La dérivée de e^x pourra se déduire de considérations graphiques : symétrie des courbes des fonctions logarithme et exponentielle par rapport à la première bissectrice du repère et donc aussi des tangentes (on passe du point (a, b) avec $b = e^a$ au point (b, a) avec $a = \ln b$), puis à la tangente de coefficient directeur $1/b$, enfin à la tangente de coefficient directeur b , d'où l'on sort $(e^x)' = e^x$. Pour une telle fonction, on a donc la relation fondamentale $y' = y$.

Voici deux exemples où interviennent les fonctions exponentielles.

Exemple 1 : Désintégration atomique

Si à l'instant 0, un minéral contient $N(0)$ atomes d'une substance radioactive, on peut montrer qu'à l'instant t il n'en reste plus que $N(t) = e^{-at} N(0)$.

- a) On appelle temps de demi-vie le temps τ tel que pour tout $t > 0$: $N(t + \tau) = N(t)/2$. Calculer τ en fonction de a .
- b) On voit parfois la loi de désintégration écrite sous la forme $N(n\tau) = 2^{-n}N(0)$. Qu'en pensez-vous ?
- Estimer, en fonction de τ , le temps qu'il faudra pour que le nombre d'atomes soit divisé par 1000, par 10^6 . (On pourra utiliser le fait que $2^{10} = 1024$, voisin de 1000.)

Application numérique

Quelques temps de demi-vie
 Uranium-238 : $4,5 \times 10^9$ ans
 Plutonium-239 : $2,4 \times 10^4$ ans
 Carbone-14 : 5 730 ans
 Iode-131 : 8 jours
 Polonium-213 : 4×10^{-6} s
 Beryllium-8 : 1×10^{-16} s

Exemple 2 : Courbes en cloche – Fonctions $\exp(-kx^2)$

On considère la plus petite valeur positive x_n telle que pour tout $x \in]x_n; +\infty[$, $\exp(-x^2) < 10^{-n}$.

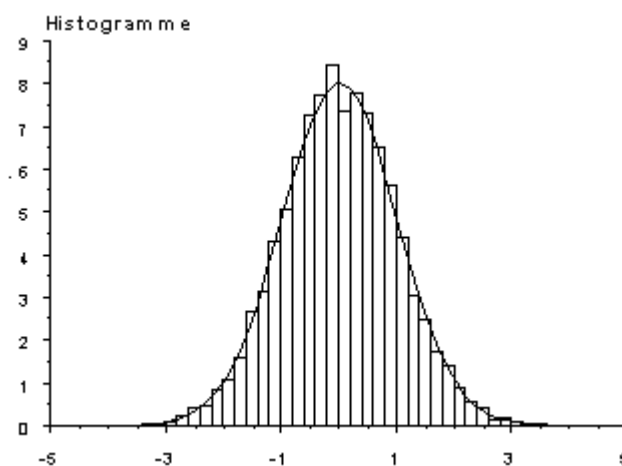
n	1	2	3	4	5	10
x_n , à 10^{-2} près	1,52	2,14	2,63	3,03	3,39	4,80

- a) Construire un tableau analogue pour les fonctions $\exp(-0,5x^2)$ et $\exp(-2x^2)$.
- b) Tracer à l'aide d'un grapheur les courbes représentatives des trois fonctions.
- c) Si on prend 10 cm comme unité de longueur sur les axes et que la précision du dessin est de 1 mm, à partir de quand la représentation de la courbe se confond-elle avec l'axe des x ?

Le programme de première parle de données gaussiennes ; quand on a de très nombreuses données de ce type, l'histogramme « colle » à une courbe dont l'équation est du type $y = a \exp(-kx^2)$ (on parle parfois de courbes en « cloches »), l'origine étant placée à la moyenne des données.

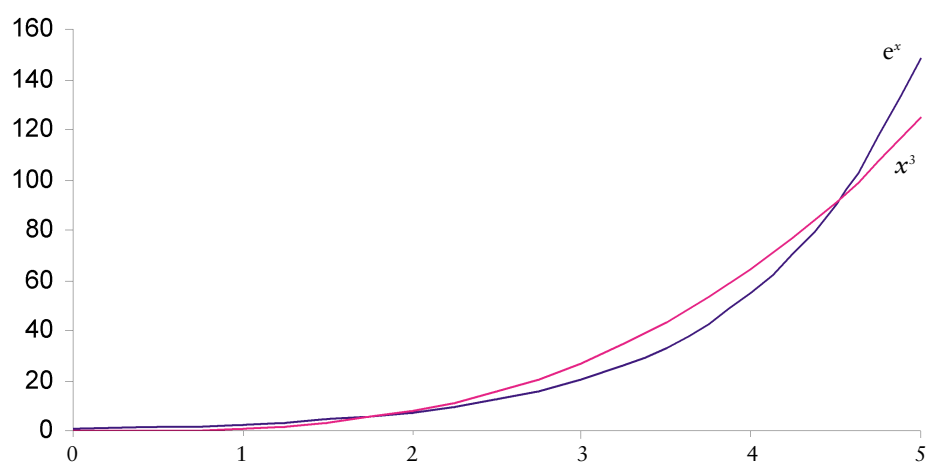
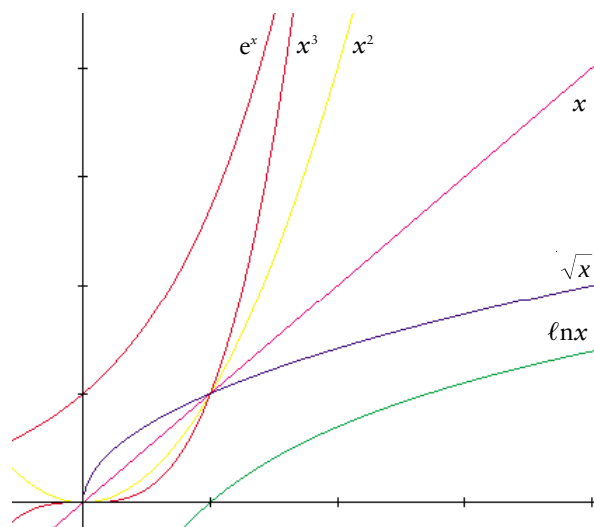
On a représenté ci-contre 10 000 données gaussiennes de moyenne 0.

La courbe a pour équation : $y = \sqrt{1/2\pi} \exp(-x^2/2)$.



Qui est le plus rapide ?

On trouvera ci-contre et ci-dessous les courbes représentatives des fonctions x , x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, e^x et $\ln x$; le premier dessin est fait en repère orthonormal; dans le deuxième, on a modifié les graduations de l'axe des y pour montrer que l'exponentielle finit par l'emporter sur x^3 .



Ces graphiques illustrent le résultat indiqué dans le programme sur les croissances comparées : ces résultats seront admis. On les étendra à la comparaison entre les suites arithmétiques et géométriques.

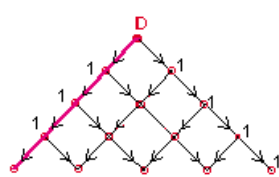
P

robabilités, statistique et combinatoire

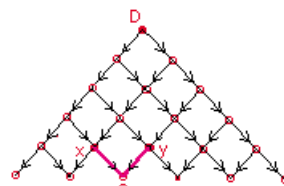
Combinatoire en classe de première

La notion de combinaison peut par exemple être introduite à partir d'une ou de plusieurs situations parmi les suivantes, les autres étant traitées une fois que la notion de combinaison est mise en place.

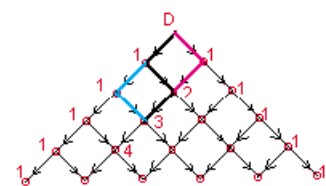
a) Recherche du nombre de chemins :



Il n'y a qu'un seul chemin possible pour arriver à chacun des points du bord gauche ou du bord droit.

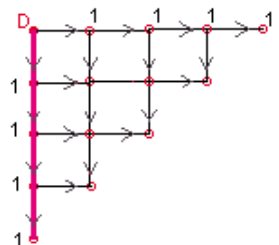


Combien y a-t-il de chemins possibles pour parvenir au point marqué « ? », sachant qu'il y a x et y chemins différents pour parvenir aux deux points situés juste au-dessus ?

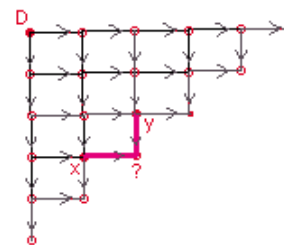


Compléter pour chaque point avec le nombre de chemins possibles depuis D.

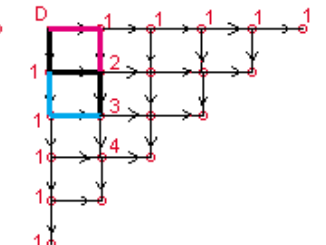
Ou alors, la même chose avec cette disposition :



Il n'y a qu'un seul chemin possible pour arriver à chacun des points du bord vertical à gauche ou du bord horizontal en haut.



Combien y a-t-il de chemins possibles pour parvenir au point marqué « ? », sachant qu'il y a x et y chemins différents pour parvenir aux deux points situés juste avant ?



Compléter pour chaque point avec le nombre de chemins possibles depuis D.

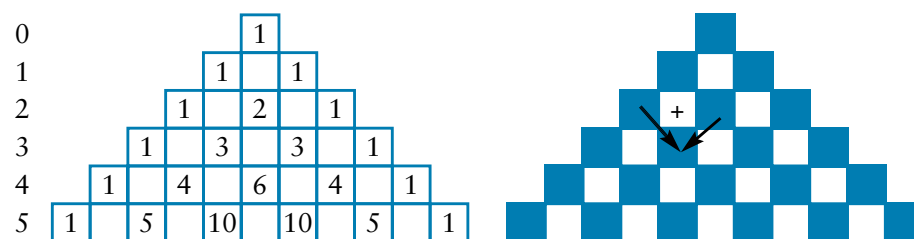
b) calcul du coefficient du terme a^k dans $(1 + a)^{10}$;

c) calcul du nombre d'équipes de 5 personnes choisies dans un club de 10 membres ;

d) calcul des « chances » de trouver du premier coup un code à 7 chiffres dont 4 valent 1 et les autres 0 ;

e) calcul des « chances » d'obtenir n piles dans un lancer de $2n$ pièces, $n = 1 \dots 5$.

On se ramène dans tous ces cas à l'étude de la famille des nombres qui se calculent en cascade selon le schéma ci-après (la première et la dernière cases de chaque ligne sont occupées par un 1).



Comme indiqué dans le programme, ces nombres seront désignés $\binom{n}{p}$ (on lira « p parmi n »), n correspondant au numéro de ligne sur le schéma ci-dessus (en commençant la numérotation à 0) et p au numéro d'ordre (en commençant la numérotation à 0) sur la ligne n ; les décomptes de parties à p éléments dans un ensemble de n éléments aident à comprendre ce choix et illustreront si besoin est la formule $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Ces nombres seront utilisés pour la résolution de problèmes élémentaires de dénombrement. Leur calcul effectif obligera au départ à reconstruire le « triangle de Pascal » ci-dessus. La recherche d'une formule de calcul plus rapide pourra amener à l'introduction de la notation factorielle et à la mise en place de la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou de la formule, $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots}{p(p-1)\dots}$,

(p facteurs au numérateur comme au dénominateur), mais on évitera toute complication lors de l'utilisation de ces formules.

On pourra aussi introduire et manipuler le nombre et la notation $n!$ à travers les situations suivantes :

- calculs de dénombrements d'anagrammes d'un mot court composé de lettres distinctes; on pourra s'appuyer sur des schémas d'arbres (schémas introduits dans le programme de mathématiques-informatique au paragraphe « Outils graphiques de dénombrement »);
- calcul de « chances », par exemple celle de trouver du premier coup un code d'immeuble à 4 chiffres en connaissant dans le désordre ses chiffres, supposés distincts;
- étude de la suite définie par: $u_{n+1} = (n+1) u_n$; $u_0 = 1$.

On pourra observer sur calculatrice ou sur tableur, puis démontrer (à l'aide des combinaisons) que le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$.

Probabilités et statistique

Le chapitre probabilités-statistique s'appuie sur le programme de seconde (fluctuations d'échantillonnage) et de première (étude de tableaux à double entrée, combinatoire). On peut choisir l'approche décrite dans le document d'accompagnement de la classe de première ES; une autre approche est proposée ci-dessous.

Équiprobabilité, modélisation d'expériences de référence

On part d'un problème posé en termes de chances (« quelles chances a-t-on d'observer 0 pile, 1 pile, 2 piles pour deux lancers de pièces équilibrées ? »). On pourra reprendre, qu'il ait été traité ou non par des élèves de la classe, le contenu de la fiche de statistique de seconde intitulée « Des chances inégales » et introduire en premier lieu la notion d'équiprobabilité; on modélisera les expériences de référence telles que le choix d'une boule dans une urne, les lancers de pièces ou de dés, les choix de lettres. Le choix au hasard d'un élément parmi N signifie qu'on se place dans un modèle avec équiprobabilité.

La notion de k expériences identiques et indépendantes signifie que chaque expérience relève du même modèle (ici, équiprobabilité sur $\{1, \dots, N\}$) et que la probabilité d'une liste de résultats est le produit de la probabilité de chacun d'eux, soit $1/N^k$. On indiquera que la touche *random* d'une calculatrice fournit des tirages indépendants de chiffres au hasard; on simulera la loi de probabilité de la somme des faces de deux dés

équilibrés ; cette loi devra ensuite être calculée. On pourra aussi calculer, lors du lancer de deux dés, un rouge et un vert, la probabilité d'avoir deux six sachant que le dé vert est tombé sur 6 (on trouve $1/6$) puis sachant que l'un des deux dés est tombé sur 6 (on trouve $1/11$), ou travailler à partir des situations ci-dessous.

Composition musicale et lancers de dés

Un an après la mort de W. A. Mozart (1756-1791), fut publiée à Berlin une œuvre de jeunesse intitulée *Musikalisches Würfelspiel* (*Jeu de dés musical*). Elle se compose de deux feuilles, ayant chacune 11 lignes et 8 colonnes, soit un tableau de 16 colonnes et 11 lignes ; dans chaque case du tableau figure une mesure. Pour écrire un morceau de 16 mesures, on choisit successivement, en lançant à chaque fois deux dés, une mesure dans chaque colonne : si s est la somme des dés lancés pour une certaine colonne, la mesure pour cette colonne sera celle de la ligne $s - 1$. Les mélodies ainsi obtenues satisfont aux règles de composition des menuets de cette époque. Mais Mozart savait-il que les mélodies ne sont pas équiprobables ?

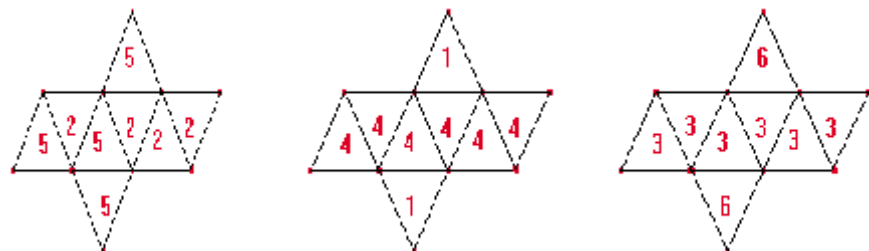
Au moins une douzaine de compositeurs classiques, dont Bach et Haydn, se sont essayés à ce type d'exercice ludique. Plus récemment, Scott Joplin a repris l'idée de composition aléatoire de ragtimes dans *Melody Dicer*.

- Les mesures de chaque colonne sont distinctes, sauf pour les colonnes 8 et 16, où il n'y a que deux mesures différentes, soit environ $1,52 \times 10^{15}$ menuets. Comment a été calculé ce nombre ?
- Si 10 000 ordinateurs éditent chacun un menuet toutes les deux secondes, 24 heures par jour, combien de temps faut-il pour les éditer tous ?
- Dans la colonne 8, Mozart pouvait-il faire en sorte que les deux mesures aient une égale probabilité de se trouver choisies ?

Dés octaédriques

D'après M. Fletcher, *Canterbury, Angleterre*.

Trois dés octaédriques A, B et C ont leurs faces marquées comme indiqué ci-dessous :



Lorsqu'on lance un tel dé, on s'intéresse au nombre inscrit sur la face cachée, *i.e.* celle sur laquelle il tombe.

- Modéliser le lancer de A par une loi de probabilité sur $\{2, 5\}$.
- Modéliser le lancer de B par une loi de probabilité sur $\{1, 4\}$.
- Modéliser le lancer de C par une loi de probabilité sur $\{6, 3\}$.
- On lance les dés deux par deux. Montrer que la probabilité, notée $P(A > B)$, pour que A gagne lorsqu'on lance A et B, est supérieure à 0,5 et que $P(B > C)$ est aussi supérieure à 0,5.
- La probabilité $P(A > C)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

Loi de probabilité sur un ensemble fini

On introduira le concept de probabilité en vue de modéliser des situations particulières pour lesquelles aucune propriété de symétrie ne permet de parler « d'égalité des chances ».

Exemple

On dispose du tableau suivant donnant les occurrences de différents groupes sanguins sur une série de 10 000 naissances dans des maternités de France.

A	B	AB	O
4546	863	449	4142

Modéliser cette situation, c'est définir une loi de probabilité sur $E = \{A, B, AB, O\}$, c'est-à-dire affecter à chaque élément de E un nombre (sa probabilité) positif ou nul, la somme de ces nombres valant 1.

On admettra la loi des grands nombres ; c'est un théorème de mathématiques qui peut être énoncé sous une forme vulgarisée : « Si on choisit n éléments selon une loi de probabilité P , indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de P lorsque n est grand. »

Les élèves ont observé en seconde la diminution de l'ampleur de la fluctuation d'échantillonnage avec la taille de la série de données : il s'agissait de l'observation d'une loi empirique. La correspondance entre loi empirique et théorème mathématique est un des fondements de la modélisation par des modèles probabilistes.

En vertu de la loi des grands nombres, on choisira le modèle défini par $P = (4546/10000, 863/10000, 449/10000, 4142/10000)$ ou la loi $P' = (0,45 ; 0,09 ; 0,05 ; 0,41)$. Dans le modèle défini par P' , on dira qu'un bébé qui va naître a une probabilité 0,41 d'être du groupe O. On indiquera qu'une validation d'un modèle consisterait par exemple à prendre de nouvelles données expérimentales et à comparer ce qu'on obtient et ce que prévoit le modèle (compte tenu de la fluctuation d'échantillonnage, les modalités de cette comparaison ne sont pas simples et sont hors programme).

La liste des groupes sanguins de 10 bébés (en excluant les naissances multiples !) sera alors modélisée comme la liste des résultats de 10 expériences « identiques et indépendantes » : la probabilité de la liste obtenue est égale au produit des probabilités de chacun de ses termes.

On veut maintenant faire un modèle tenant compte du facteur rhésus ; le tableau des données est le suivant :

	A	B	AB	O
RH+	3968	753	385	3566
RH-	578	110	64	576

La loi considérée ici sera une loi de probabilité sur $\{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}$. On pourra alors calculer la probabilité de chaque groupe, celle d'être rhésus positif, la probabilité de l'être sachant O, etc.

Remarque – Plus le nombre n d'individus ayant permis le choix d'un modèle est grand, plus ce modèle est précis au sens suivant : pour n petit, de nombreux modèles sont déclarés par les statisticiens « compatibles » avec les n données ; pour n grand, les modèles compatibles seront presque identiques. La fluctuation d'échantillonnage est en effet d'autant plus faible que n est grand.

Voici les pourcentages de facteur rhésus positif pour 5 séries de taille 100 et 5 séries de taille 1000 : si à chaque série, on associe un modèle pour lequel la probabilité est égale à la fréquence observée, les 5 probabilités ainsi construites ont des étendues respectives de 0,09 et 0,02 :

Séries de 100	87	86	84	81	96
Séries de 1000	86,4	86,7	88,4	86,5	88,1

On propose ici quelques exemples d'activités.

La loi du premier chiffre

On raconte qu'en considérant les premiers chiffres à gauche (2 pour 2374, 1 pour 0,16), des nombres de la page « Finances et Marchés » du journal *Le Monde*, on trouve à peu près chaque jour la même distribution de fréquences. On peut alors définir une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

a) Si une telle loi existe, est-ce l'équiprobabilité ? Expérimenter...

b) Les nombres $\log_{10}(1+1/1)$, $\log_{10}(1+1/2)$, $\log_{10}(1+1/3)$, ..., $\log_{10}(1+1/9)$ définissent-ils une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$?

c) Comparer les résultats obtenus en 1 et en 2.

S'il existe une loi de probabilité pour les nombres de la page « Finances et Marchés », alors cette loi doit être conservée si les quantités, exprimées dans une certaine monnaie, le sont dans d'autres monnaies... On peut montrer que la loi décrite en 2 est la seule qui vérifie cette propriété (pour plus de détails, voir l'article « Le premier chiffre à gauche » dans le logiciel *SEL* sur le cédérom fourni avec le document d'accompagnement *Mathématiques – Classe de première des séries générales*).

Erreurs de saisie

Dans un centre spécialisé, 22 000 numéros de sécurité sociale (13 chiffres) ont été saisis et ont donné lieu à 1 004 mauvais numéros dus à 1 273 erreurs de retranscription réparties selon trois types :

A : un seul chiffre faux (765 cas)

B : mauvais nombre de chiffres (360 cas)

C : inversion de deux chiffres voisins (148 cas)

Aucun numéro ne contenait plus de deux erreurs.

On admet que la répartition entre les erreurs simples A, B et C ne dépend pas du nombre d'erreurs faites dans une recopie.

Définir une loi sur $\{0, A, B, C, 2\}$ qui modélise les erreurs, où :

0 signifie qu'il n'y a pas d'erreurs et 2 qu'il y a deux erreurs.

Lettres

À partir de divers textes récents écrits en langue française, on estime qu'en tirant au hasard une lettre dans un texte, les probabilités d'apparition sont données ci-dessous, multipliées par 100 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
9,42	1,02	2,64	3,39	15,87	0,95	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,34	3,24
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7,15	5,14	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Tableau extrait de *Histoire des codes secrets de Simon Singh* (Édition J.-C. Lattès, 1999).

Un texte comporte 10 000 voyelles ; estimer le nombre de lettres du texte et le nombre de e (on exclut que ce texte soit *La Disparition* ou *Les Revenentes* de G. Perec).

A

arithmétique – Classe terminale

Introduction

Cette partie fait suite au travail des classes de troisième et seconde sur les nombres entiers et introduit des outils efficaces pour résoudre des problèmes liés aux congruences : critères de divisibilité, problèmes de calendrier, de clés de contrôle, etc. Pour la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, il suffira de donner la définition suivante : *dans $\mathbb{Z}$, a est divisible par b si dans $\mathbb{N}$, la est divisible par lb* . On rappellera à cette occasion les notions de nombre premier et de décomposition des entiers naturels en facteurs premiers vues en classe de seconde. On pourra revoir le crible d'Ératosthène.

La congruence modulo n , où n est un entier naturel, se définit pour les entiers relatifs ; on définira la relation de congruence de la façon suivante : $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si $(a - b)$ est divisible par n . La compatibilité avec l'addition et la multiplication en résulte immédiatement et permet d'expliquer certains critères de divisibilité. On établira aussi, pour a et b entiers naturels, l'équivalence « $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n ».

La preuve par 9 pourra être justifiée en exploitant les propriétés de compatibilité de la relation de congruences modulo 9 ; on invitera les élèves à proposer des cas où la preuve ne détecte pas un résultat faux.

On pourra consulter des textes sur différents calendriers et résoudre des problèmes simples : par exemple, rechercher le jour de la semaine associé à une date donnée ou retrouver une correspondance entre deux dates de deux calendriers différents (par exemple en prenant une date du calendrier grégorien et en cherchant sa correspondance dans le calendrier républicain). On pourra consulter avec profit le site <http://an2000.univ-lille1.fr/an2000/Fond/CalendrierGregorien.htm>.

On propose ci-après quelques exemples d'activité.

Un problème pour l'instruction des changeurs

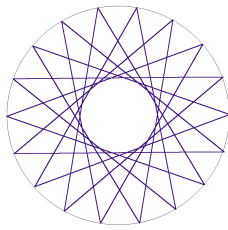
xv^e siècle. Extrait d'un document de la bibliothèque municipale de Rouen (ms. I 58, f.83-89).

« Une bonne dame portoit au marchié panier de œufs ; un jeune chevalier qui chevauchoit son chemin monté sur ung cheval et par le desroy du cheval hurte la bonne dame tellement que tous ses œufs furent cassés ; elle commença à plourer et l'esquier lui dist quel nombre d'eufs elle avoit et il lui paieroit volentiers ; la bonne dame lui respondit ces mos par maniere : je ne scay quans j'en avoye, mais, quant je me partis de mon hostel, je les compte II et II et j'en trouvay ung par dessus ; et après je les compte III et III et j'en trouvay ung par dessus ; et après je les compte IIII et IIII et j'en trouvay ung par dessus ; et après je les compte V et V et j'en trouvay ung par dessus ; et après je les compte VI et VI et j'en trouvay ung par dessus ; et après je les compte VII et VII et je ne trouvay rien par dessus ; veez quantes ce sont. »

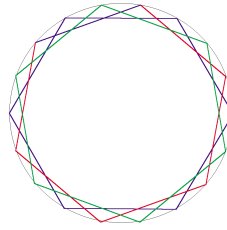
Plusieurs démarches sont possibles pour déterminer le nombre minimal n d'œufs compatible avec ces informations redondantes. On obtient facilement que $n - 1$ est un multiple de 60. Comme n est aussi un multiple de 7, on est amené à résoudre l'équation diophantienne $7a - 60b = 1$. La congruence modulo 7 de cette égalité donne $3b \equiv 1[7]$, d'où, par essais, $b = 5 + 7k$ et enfin $n = 301 + 420k$. La plus petite valeur qui convienne est donc 301.

Polygones

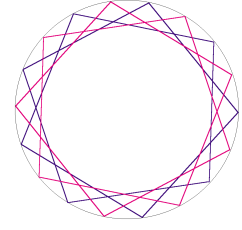
On dispose de N points (illustration ci-dessous pour $N = 18$) régulièrement répartis sur un cercle; on les parcourt de n en n jusqu'à revenir au point de départ; combien y a-t-il de polygones ainsi définis?



1 polygone pour $n = 7$



3 polygones pour $n = 3$



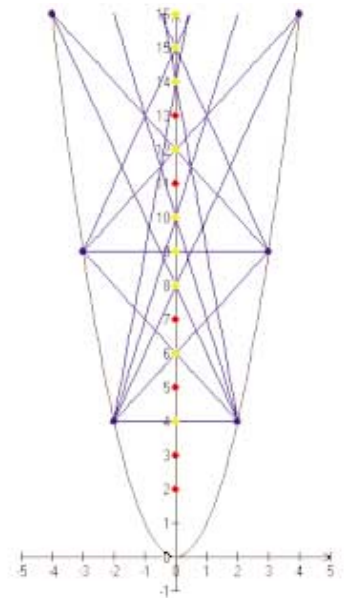
2 polygones pour $n = 4$

Un crible géométrique pour les nombres premiers : le crible de Matijasevitch

L'activité proposée ici peut être mise en relation avec le paragraphe « Aire sous la parabole ».

Sur la parabole d'équation $y = x^2$, on considère les points M et N d'abscisses respectives m et $-n$ ($m > 1, n > 1$).

Le segment $[MN]$ coupe l'axe (Oy) à l'ordonnée mn . Ainsi, en traçant tous les segments $[MN]$ « possibles », pour m et n donnés, on peut lire sur l'axe des ordonnées tous les nombres premiers inférieurs à mn : ce sont les nombres entiers qui ne sont traversés par aucun segment $[MN]$.



Cryptographie

On peut lire dans *Histoire des codes secrets* de Simon Singh (Édition J.-C. Lattès, 1999):

« Une des premières descriptions de codage ou cryptage de message par substitution apparaît dans le Kama-sutra écrit au v^e siècle après J.-C., à partir d'un manuscrit du iv^e siècle avant J.-C. On y recommande que les femmes apprennent soixante-quatre arts, entre autres la cuisine, l'habillement, le massage, l'élaboration de parfums, la prestidigitation, la reliure, la tapisserie et l'écriture secrète. L'une des techniques conseillées consiste à appairer au hasard les lettres de l'alphabet et à substituer ensuite dans le message original la nouvelle lettre de la paire à celle d'origine. »

La technique conseillée est donc de choisir une permutation des lettres. Deux femmes choisissent un code au hasard; quelle chance ont-elles d'avoir le même?

Réponse: $0,25 \times 10^{-26}$.

Les congruences modulo 26 permettent de proposer des chiffrements fondés sur des calculs après avoir associé bijectivement à chaque lettre de l'alphabet un nombre de l'ensemble $\{0; 1; 2; \dots; 25\}$. Si on se limite aux codes définis par une translation b (si n est le numéro d'une lettre du texte en clair, cette lettre sera remplacée par la lettre dont le numéro est le reste de la division par 26 de $n + b$), combien y a-t-il de tels codes?

Les codes par substitution se « cassent » facilement dès qu'on dispose de textes cryptés suffisamment longs (quelques centaines de lettres) en opérant une analyse de fréquences (voir les probabilités des lettres en langue française dans le paragraphe « probabilités »): on pourra visiter à ce sujet le site <http://perso.wanadoo.fr/jpq>.

Le système de Vigenère (1586) représente un progrès considérable dans l'histoire des codes secrets. L'idée est d'employer plusieurs codes de substitution par translation pour crypter (ou chiffrer) un texte; ceci à l'aide d'un mot secret, la clé du codage.

La méthode est décrite ci-dessous avec un exemple de clé, ici « philosophie » (les lettres sont numérotées de 0 à 25).

Texte clair	O	P	T	I	O	N	M	A	T	H	E	M	A	T	I	Q	U	E
Ligne 1	14	15	19	8	14	13	12	0	19	7	4	12	0	19	8	16	20	4
Clé secrète	P	H	I	L	O	S	O	P	H	I	E	P	H	I	L	O	S	O
Ligne 2	15	7	8	11	14	18	14	15	7	8	4	15	7	8	11	14	18	14
Ligne 3	3	22	1	19	2	5	0	15	0	15	8	1	7	1	19	4	12	18
Texte chiffré	d	w	b	t	c	f	a	p	a	p	i	b	h	b	t	e	m	s

Comme on le voit, dans un même texte, une même lettre peut être codée par des lettres différentes (le premier O de OPTION est codé *d* tandis que le second est codé *c*) et deux lettres distinctes peuvent avoir le même code (ainsi en est-il du M et du T de MATH). Le décodage par fréquence est plus difficile.

Clés de contrôle

Lors de la saisie de grands nombres N , les erreurs sont fréquentes. Le principe d'une clé de contrôle est d'associer au nombre N un autre nombre K calculé à partir de N et le plus souvent inférieur à 100 (donc peu susceptible d'être l'objet d'erreurs de saisie). On saisit les couples (N, K) et le calcul de K' , associé au nombre N saisi, permet, s'il est différent de K , de détecter une erreur de saisie. Évidemment, la correspondance entre N et K n'est pas bijective; une bonne clé est celle qui détecte les erreurs les plus fréquentes: inversion de deux chiffres et erreurs sur un seul chiffre (voir exercice de probabilité sur les erreurs de saisie).

Clés de contrôle des numéros INSEE ou de compte bancaires

La clé de contrôle est égale à $97 - R$ où R est le reste de la division de N par 97, N désignant le nombre entier écrit avec les treize chiffres du numéro INSEE (dans le cas du numéro de compte bancaire, N étant égal à 100 fois le nombre écrit avec les vingt et un chiffres du numéro RIB).

Le calcul effectif, avec une calculatrice ordinaire ou un tableur, montre la difficulté de manipuler des grands nombres et l'intérêt des propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec la multiplication et l'addition. On peut, par exemple écrire N sous la forme $N = A \times 10^{18} + B \times 10^{12} + C \times 10^6 + D$ et le calcul des restes modulo 97 des nombres $A, B, C, D, 10^6, 10^{12}$ et 10^{18} donnent R .

On pourra démontrer que les erreurs suivantes sont détectées: un seul chiffre saisi est erroné; deux chiffres consécutifs sont permutés. Les élèves pourront proposer des exemples d'erreurs de saisie non détectées.

Clé d'un numéro ISBN (International Standard Book Number)

Toutes les publications sont identifiées par un numéro à neuf chiffres $a_1 a_2 \dots a_9$ suivi d'une clé comportant un seul caractère. Ce numéro indique la langue de la publication, l'éditeur et le numéro de l'ouvrage dans le registre de l'éditeur. La clé est égale au reste modulo 11 de $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 9a_9$. Si ce reste est inférieur à 10, la clé est égale au résultat obtenu, si le reste vaut 10 la clé est égale à X.

On pourra démontrer que les erreurs suivantes sont détectées: un seul chiffre saisi est erroné, deux chiffres sont permutés. On pourra proposer des erreurs non détectées. Vérifier les numéros ISBN de quelques manuels scolaires.

Géométrie – Classe de première

Géométrie plane

Quelques éléments historiques

Les documents dont nous disposons à ce jour permettent de faire remonter les recherches quantitatives sur les questions géométriques aux Mésopotamiens et aux Égyptiens. Ainsi, le scribe égyptien Ahmès décrit dans un document datant de 1650 avant J.-C. une quadrature approximative du cercle, correspondant à une valeur de π proche de 3,16. Une tablette babylonienne contemporaine du papyrus d'Ahmès, ornée d'un carré et de ses diagonales, indique un calcul de $\sqrt{2}$, avec une précision supérieure à un millionième.

Environ mille ans plus tard, l'école pythagoricienne est active à Crotona, au sud de l'Italie, dans ce qu'on appelait alors la Grande Grèce. Nous n'avons aucun document contemporain qui permette de connaître le niveau de leurs connaissances. Il semble avéré qu'ils professaient une philosophie basée sur la primauté du nombre entier, ainsi qu'un intérêt marqué pour la géométrie. C'est peut-être à l'un d'entre eux qu'on doit la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté, donc, en termes modernes, de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Des récits postérieurs de plusieurs siècles affirment que cette découverte a engendré un effondrement catastrophique de leur doctrine, mais aucun document fiable ne permet de l'affirmer.

Il est certain par contre que le théorème de Pythagore, au moins dans des cas simples, était bien connu des Athéniens de l'époque de Socrate, puisque dans le dialogue du *Ménon* de Platon, Socrate explique à son interlocuteur supposé inculte une méthode simple de duplication du carré, qui montre en particulier que le rapport de la diagonale sur le côté a pour carré 2. À cette époque, l'irrationalité de certains rapports est connue des spécialistes. Platon (427-347 avant J.-C.), élève de Socrate, fonde une école qui s'occupe entre autres de ces questions. L'un de ses membres, Théodore de Cyrène, montre l'irrationalité des racines des entiers non carrés jusqu'à 17. On ne connaît pas la méthode utilisée, mais le fait qu'on se soit arrêté à 17 suggère que ses preuves étaient de nature géométrique. Un autre membre, Eudoxe (vers 408-vers 355 avant J.-C.), fonde une théorie des grandeurs pratiquement achevée et énonce en particulier l'axiome connu aujourd'hui sous le nom d'axiome d'Archimède. Cette théorie sera reprise par Dedekind au XIX^e siècle pour devenir la théorie moderne des nombres réels.

L'école de Platon a joué un rôle apparemment crucial dans les restrictions imposées à la construction des figures, et particulièrement dans l'importance accordée à l'usage préférentiel de la règle et du compas. On ne connaît pas clairement les raisons qui ont imposé ce choix. Il se peut qu'une philosophie basée sur l'idée que le cercle était une figure « parfaite » ait joué son rôle. « Les conceptions [idéalistes de Platon] l'ont amené à avoir peu d'estime pour les instruments de mesure ou de construction nécessairement imparfaits. Il fait toutefois exception pour la règle et le compas qui sont les seuls, à ses yeux, à pouvoir respecter la symétrie des configurations. L'influence de Platon, qui fut considérable à son époque et pendant les siècles qui ont suivi, se retrouve chez Euclide qui dans ses *Éléments* ne s'écarte pas des prescriptions du philosophe* ». « On peut [aussi] penser, mais ceci n'est qu'une hypothèse, que les

* J.-C. Carrega, *Théorie des corps*, Éditions Hermann, 1981, p. 4.

constructions à la règle et au compas ont été mises en avant pour servir de caution géométrique aux nouveaux nombres mis en évidence par le théorème de Pythagore. De plus, en s'interdisant d'autres types de construction on se préservait contre de nouvelles crises**.

Les mathématiciens grecs ont laissé à la postérité quatre problèmes célèbres : la duplication du cube, la trisection de l'angle, la construction de polygones réguliers et la quadrature du cercle.

Le premier problème est très naturel puisque la duplication du carré était un exercice de base. Le second s'ensuivait simplement de la facile construction de la bissectrice.

Le troisième était peut-être issu de considérations pythagoriciennes ; il semble en effet que la pentagone régulier ait été un symbole mystique pour les pythagoriciens, qui connaissaient peut-être sa construction à la règle et au compas ; celle-ci était en tout cas connue d'Euclide au troisième siècle avant J.-C. De plus on ne sait pas si les premiers exemples d'irrationalité concernaient $\sqrt{2}$ ou le « nombre d'or ». En effet, notre témoin le plus ancien, Aristote, parle du « rapport de la diagonale sur le côté » mais ne précise jamais s'il s'agit du carré ou du pentagone. Précisons au passage que la fascination pour le « nombre d'or » (une terminologie du XIX^e siècle) est un phénomène moderne. Aucun document historique n'indique que les Grecs de l'époque classique partageaient cette fascination. La construction de polygones réguliers est bien sûr liée au calcul du nombre π ; c'est d'ailleurs ainsi qu'Archimède obtient ses approximations. Le problème de la quadrature du cercle relève de la même préoccupation : il est facile de vérifier qu'elle équivaut à la construction à la règle et au compas de deux segments dont le rapport des longueurs est π . Puisque la théorie d'Eudoxe définit un nombre comme un rapport de longueurs (ou plus généralement de deux grandeurs « du même genre »), l'enjeu est considérable : c'est du statut exact, de la définition même du nombre π qu'il s'agit. Les Anciens ne disposaient pas de méthodes algébriques assez puissantes pour venir à bout de ces problèmes difficiles. Leibniz, à la fin du XVII^e siècle, se convaincra de l'impossibilité de la quadrature du cercle en remarquant que l'équation naturelle $\sin(x) = 0$ dont π est racine est de degré infini et donc qu'« il est impossible de représenter par une équation de degré déterminé en toute généralité la relation entre un arc et le sinus ». En 1796, Gauss montre que le polygone à dix-sept côtés est constructible à la règle et au compas. Sa méthode algébrique ouvre l'étude moderne de ces questions. En 1837, Wantzel caractérise les coordonnées des points que l'on peut construire à la règle et au compas : les longueurs constructibles sont celles qui s'expriment à partir des entiers à l'aide des quatre opérations et de l'extraction de racines carrées. Elles forment ainsi un sous-corps strict du corps des nombres algébriques. Wantzel en déduit que la duplication du cube et la trisection de l'angle sont impossibles à la règle et au compas. Enfin, en 1882, Lindemann montre la transcendance de π , qui prouve l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Notons en conclusion que les points constructibles à la règle et au compas sont constructibles au compas seul (Mascheroni, 1750-1800), ou à la règle seule si on se donne un cercle dans le plan du dessin (Steiner, 1796-1850).

Intentions pédagogiques

Le paysage historique décrit ci-dessus donne une première justification du choix de ce paragraphe dans le programme : aspect historique, culturel, meilleure compréhension de la notion de nombre, perception de l'imbrication entre éléments géométriques et numériques.

Comme le dit le programme, il ne s'agit pas d'en rester à « une culture spéculative », mais de proposer « une réelle pratique du raisonnement et de la démonstration » : ce paragraphe s'y prête tout particulièrement et la progression des exemples sera choisie pour que cet objectif soit atteint. On articulera « avec soin tracés effectifs et justifications » ; on pourra distinguer trois étapes dans l'étude d'un problème donné : analyse du problème, appel aux constructions autorisées et validation finale de la construction (on retrouve ici la démarche d'analyse-synthèse familière aux professeurs de mathématiques).

** Ibid.

L'exemple de l'octogone régulier (voir ci-après) éclairera le sens du propos : un octogone régulier étant construit, on analyse la figure et on ramène le problème à la construction d'un triangle isocèle d'angle au sommet 45° ; cette construction s'obtient aisément à l'aide de la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre. On procède ensuite à la construction effective à partir d'un côté, en n'utilisant que les constructions autorisées (c'est-à-dire pouvant se ramener à la seule utilisation de la règle et du compas). Une dernière étape, souvent délicate pour les élèves, et dont la nécessité logique n'apparaît pas forcément, consiste à vérifier si on obtient bien toujours un octogone régulier (ici pas de cas particulier, mais nécessité de vérifier que le dernier report ferme bien le polygone).

Par ailleurs, le caractère relativement concret des activités proposées dans ce paragraphe devrait permettre de développer chez les élèves de cette section la confiance en soi indispensable à leur réussite.

On notera aussi l'intérêt de ces activités pour les élèves se destinant au professorat des écoles.

L'intervention de l'outil informatique fait partie intégrante du cursus obligatoire (voir programme de mathématique-informatique) ; l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique sera particulièrement éclairant dans ce paragraphe.

Certaines des constructions ci-dessous pourront être directement proposées aux élèves ; pour d'autres, on pourra leur demander de reconnaître un procédé de construction à partir d'une figure qui garde la trace d'un tel procédé.

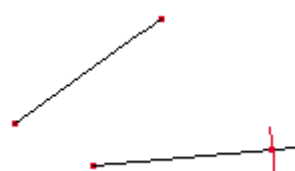
Il n'y a pas lieu de traiter systématiquement les problèmes d'existence et de nombre de solutions pour les constructions proposées, mais on veillera à introduire ce type de questionnement au moins sur un exemple.

Une liste d'exercices est proposée ci-dessous ; l'enseignant pourra s'en inspirer ou choisir certains d'entre eux pour construire des progressions sur les sujets abordés.

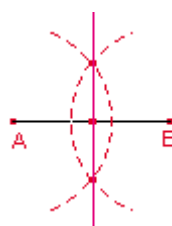
Constructions et tracés (« à la règle et au compas »)

Constructions élémentaires

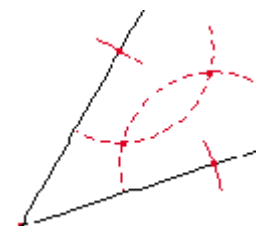
On s'assurera de la possibilité de quelques constructions élémentaires (déjà vues au collège) sur lesquelles on pourra par la suite s'appuyer sans en exiger évidemment ni le détail ni la mise en œuvre effective (macroconstruction). Si on utilise un environnement informatique avec un logiciel de géométrie dynamique, on identifiera les outils correspondants à des constructions à la règle et au compas et on les utilisera en tant que tels.



Report d'un segment

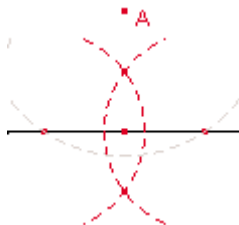


Médiatrice
et milieu d'un segment

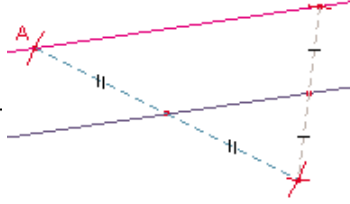
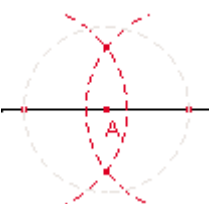


Bissectrice d'un angle

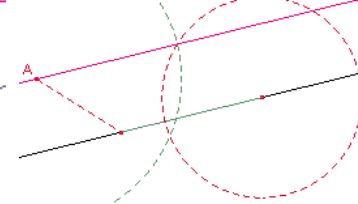
- Image d'un point par symétrie centrale ; par symétrie axiale ; par translation (construction d'un parallélogramme).



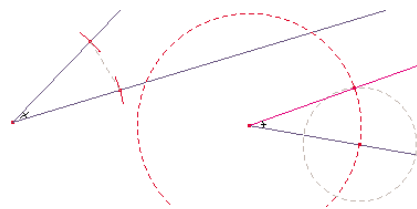
Perpendiculaire à une droite
passant par un point donné



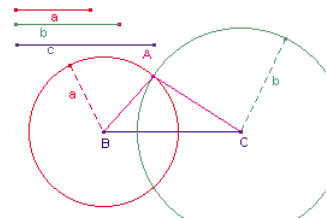
Parallèle à une droite
passant par un point donné



Parallèle à une droite donnée
passant par un point donné



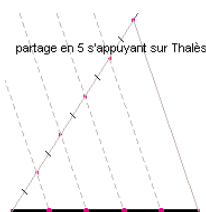
Report d'angle



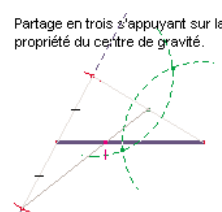
Triangle de côtés donnés

- Image d'un point par rotation d'angle donné (on utilise le report d'angle; ne pas perdre de vue que la plupart des angles ne sont pas constructibles à la règle et au compas).

- Partage d'un segment.

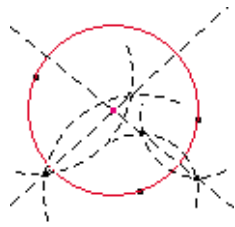


partage en 5 s'appuyant sur Thalès

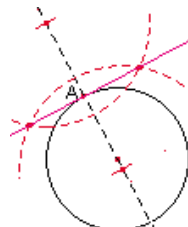


Partage en trois s'appuyant sur la propriété du centre de gravité.

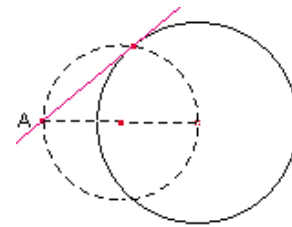
- Centre d'un cercle; tangente à un cercle.



Centre d'un cercle donné



Tangente en un point donné du cercle



Tangente passant par un point extérieur au cercle

- Droites remarquables du triangle; cercle circonscrit, cercle inscrit dans un triangle.

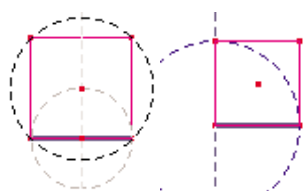
Remarque – Après avoir réalisé la construction du centre du cercle inscrit, on veillera à ce que l'élève prenne conscience que la construction du cercle inscrit nécessite celle de la projection orthogonale du centre sur un des côtés du triangle.

- Indétermination d'un quadrilatère défini par la longueur des côtés

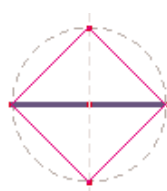
Polygones réguliers

Il est particulièrement intéressant de comparer différentes procédures de construction. Rappelons que l'esprit est plus de proposer ou de reconnaître une méthode de construction à la règle et au compas que d'en réaliser effectivement toutes les étapes avec règle et compas. Ainsi, dès lors qu'on sait le faire à la règle et au compas, on ne se privera pas d'utiliser une équerre ou une procédure logicielle directe pour tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.

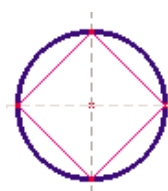
Exemple 1 : construction d'un carré



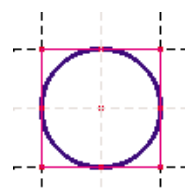
Carré à partir d'un côté



À partir d'une diagonale

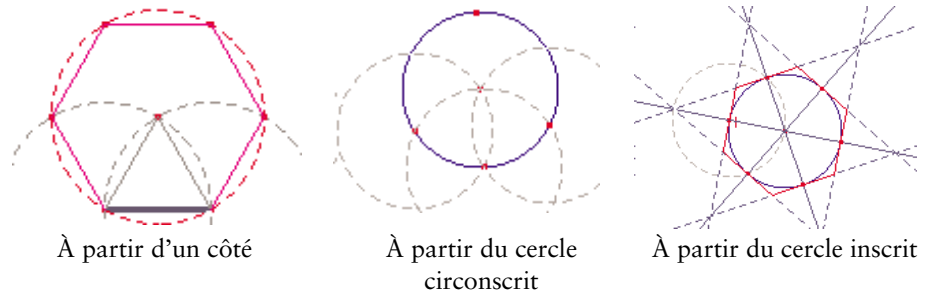


À partir du cercle circonscrit

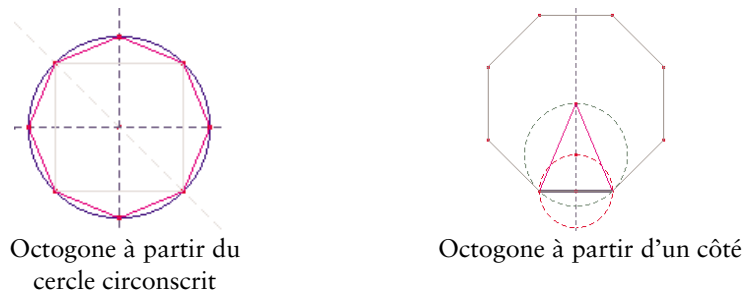


À partir du cercle inscrit

Exemple 2 : construction d'un hexagone régulier



Exemple 3 : construction d'un octogone à partir du cercle circonscrit en s'appuyant sur le carré inscrit, où à partir d'un côté

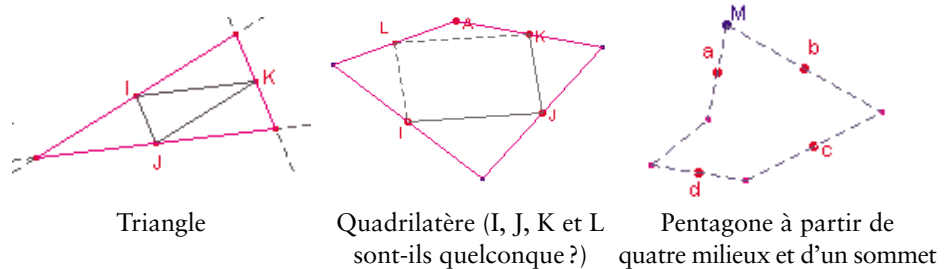


Une mise en œuvre de ces procédures de construction dans un environnement de logiciel de géométrie dynamique permet de gagner du temps (avec l'utilisation des outils identifiés comme appartenant au domaine « règle et compas » et d'étudier leurs conditions de validité et les cas limites).

Problèmes de construction

Construction d'un polygone à partir des milieux de ses côtés

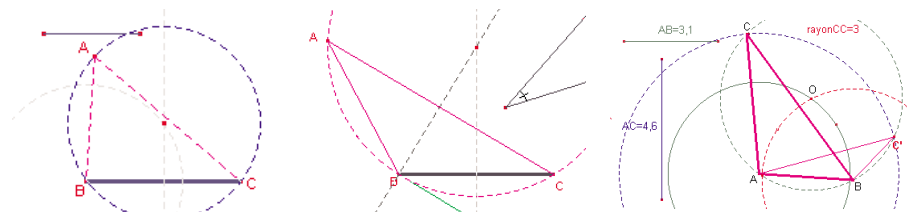
On étudiera les conditions rendant possible une telle construction.



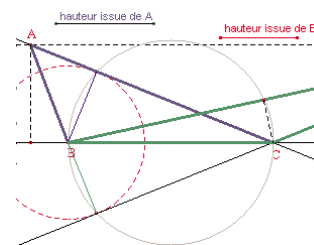
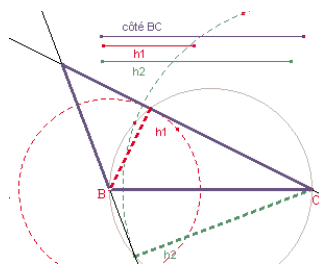
Se reporter aussi au paragraphe « Exemples de constructions nécessitant une étude plus approfondie ».

Construction d'un triangle connaissant...

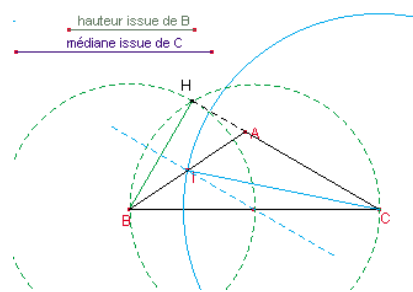
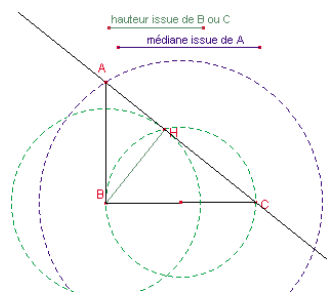
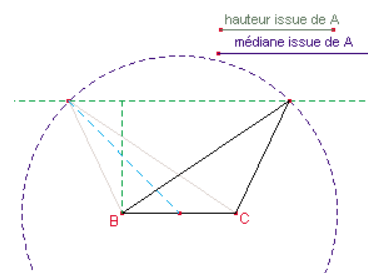
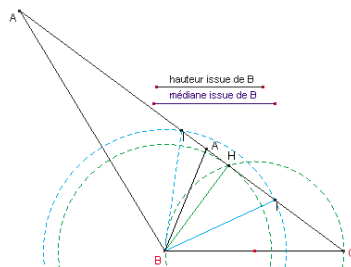
- Trois côtés; trois angles; deux côtés et un angle; un côté et deux angles. On pose en particulier le problème de l'unicité de la construction.
- Le côté BC et le rayon du cercle circonscrit; le côté BC et l'angle $\hat{A}$; deux côtés AB et AC et le rayon du cercle circonscrit.



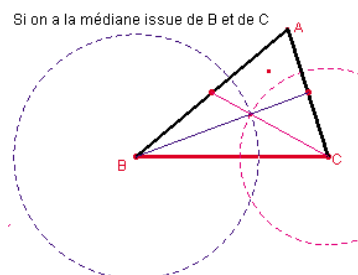
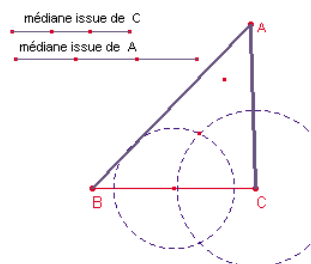
- Un côté et deux hauteurs.



- Un côté, une hauteur et une médiane.

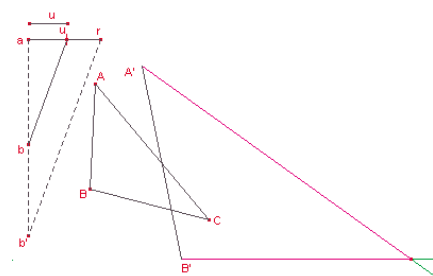


- Un côté et deux médianes.

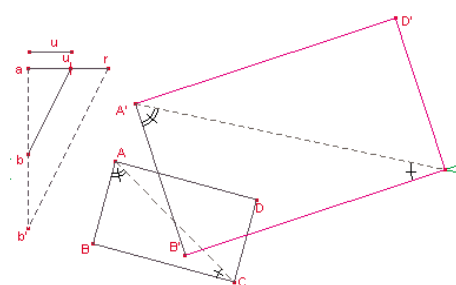


Constructions de figures semblables

- Triangle semblable à un triangle donné ; rectangle semblable à un rectangle donné.



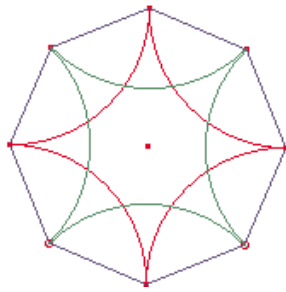
Rapport des côtés : r/u



Rapport des côtés : r/u

Constructions avec contraintes

- Reproduction de figures.

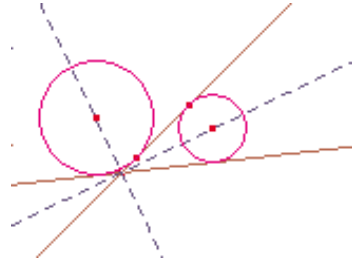


Reproduire la figure suivante sachant qu'on a un octogone régulier et que les arcs sont tangents deux à deux.

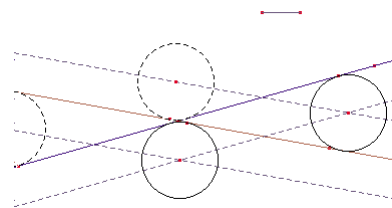
- Tangence.

Cercle tangent :

à deux droites

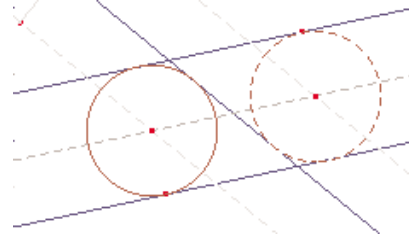


à deux droites et de rayon donné

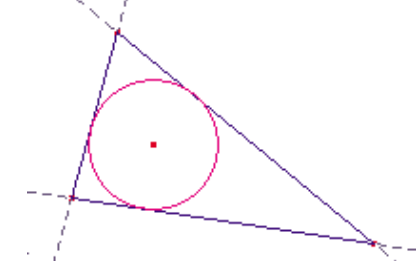


Cercle tangent à trois droites :

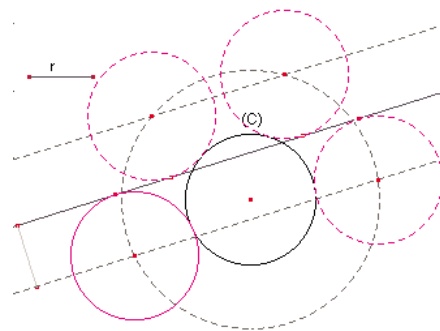
dont deux sont parallèles



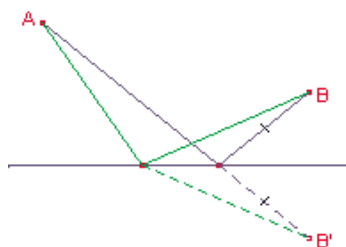
les trois droites sont sécantes



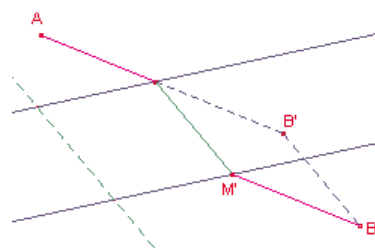
Cercle de rayon donné tangent à une droite et à un cercle donnés



- Construction avec une contrainte d'optimisation (et ici utilisation d'une transformation)

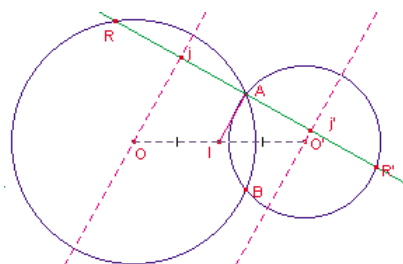


Soit une droite (d) et deux points A et B n'appartenant pas à (d) ; construire M tel que la longueur $AM + MB$ soit la plus courte possible.

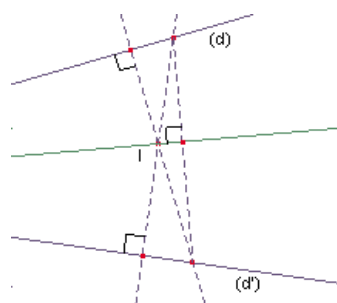


Soit deux droites parallèles (d) et (d') , deux points A et B situés de part et d'autre de la bande déterminée par (d) et (d') et (δ) une droite ; construire M et M' respectivement sur (d) et (d') tels que (MM') soit parallèle à (δ) et le trajet $AM + MM' + M'B$ soit le plus court possible.

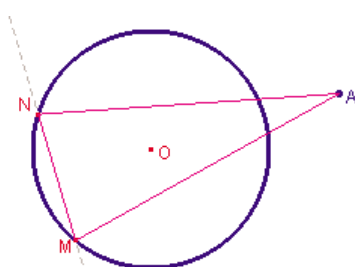
Divers



Soit deux cercles sécants en A ; construire une sécante RR' aux deux cercles passant par A telle que A soit le milieu de $[RR']$.

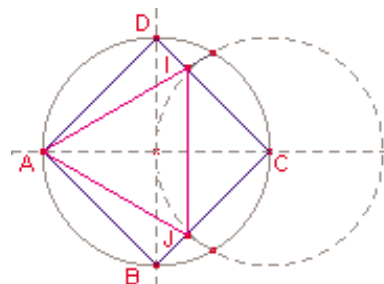


Construction d'une droite passant par un point et l'intersection de deux droites sans utiliser cette intersection.

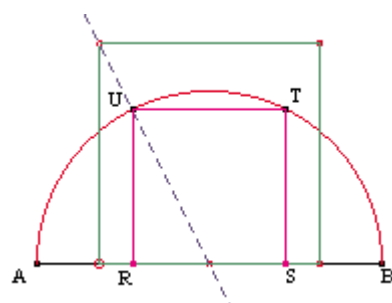


Étant donné un point A et un cercle (C) de centre O , construire un triangle AMN tel que M et N soient des points de (C) et que O soit le centre de gravité.

On pourra remarquer que le triangle cherché est isocèle. On pourra dégager les conditions d'existence.



Étant donné un carré $ABCD$, construire un triangle équilatéral AIJ , I et J étant sur les côtés du carré.

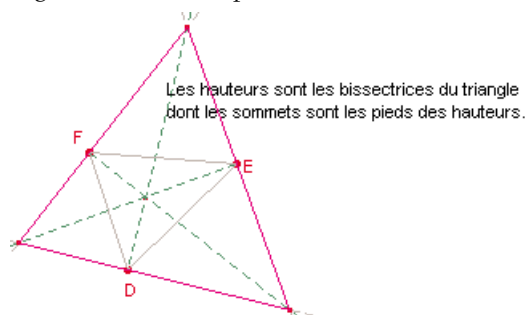


Inscrire un carré dans un demi-disque.

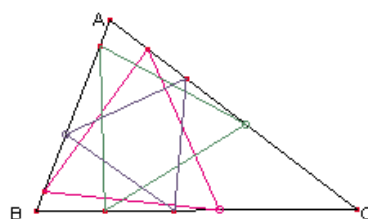
La construction se justifie ici à l'aide de la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ et de l'énoncé de Thalès.

Complément : exemples de constructions nécessitant une étude plus approfondie

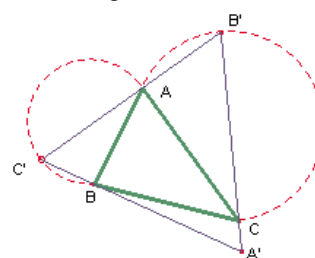
- Construction d'un triangle connaissant le pied des trois hauteurs.



- Incrire, circonscrire un triangle équilatéral à un triangle donné.

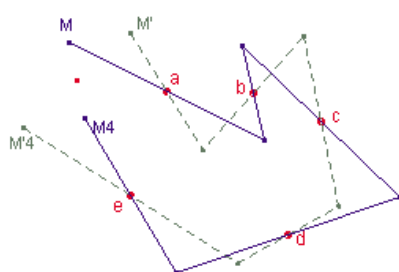


Construction s'appuyant sur des rotations



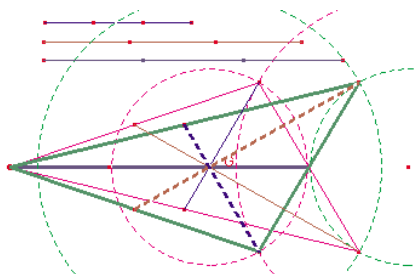
Il s'agit de trouver B' et C' tels que de ces points « on voit » les côtés AC et AB sous un angle de 60° .

- Construction d'un pentagone connaissant les milieux de ses côtés.



Ce problème est difficile. On pourra, dans une classe où on souhaite le traiter, considérer un point quelconque M , construire M_1 symétrique de M par rapport à a , M_2 symétrique de M_1 par rapport à b et ainsi de suite jusqu'à M_4 et recommencer la construction pour un autre point M' ; on construira alors les milieux de MM_4 et $M'M'_4$... On pourra à ce propos s'intéresser à la composition d'un (petit) nombre pair de symétries centrales et à la composition d'une translation et d'une symétrie centrale.

- Construction d'un triangle connaissant la longueur des trois médianes.



Nombres constructibles

On se donne ici un axe muni d'un point origine et d'un point unité (la droite numérique déjà introduite dans les classes antérieures). Construire un nombre, c'est alors construire « à la règle et au compas » le point représentant ce nombre sur cet axe. Quels nombres peut-on ainsi construire ?

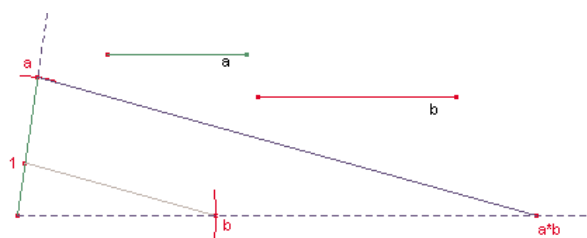
Trois objectifs pourront être assignés à ce paragraphe :

- montrer que l'ensemble des nombres constructibles est « stable » par addition ou soustraction, par multiplication ou quotient et par passage à la racine carrée ;
- montrer que tous les nombres entiers et fractions d'entiers sont constructibles ; vérifier qu'il y a des nombres constructibles qui ne sont pas rationnels (en lien avec le paragraphe suivant) ;
- s'interroger sur la question « tous les nombres réels sont-ils constructibles ? » ; on donnera ainsi du sens à l'un ou l'autre des quatre problèmes présentés dans l'introduction historique, et à la réponse que les mathématiciens ont réussi à leur apporter.

Somme et différence

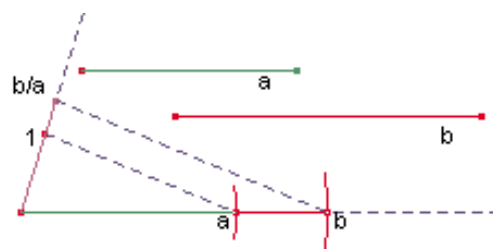


Produit de a et b



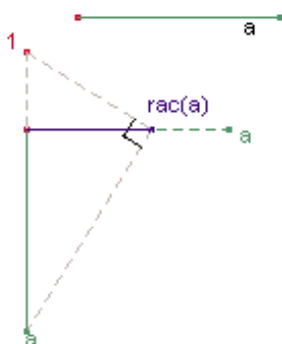
On obtient le carré de a en prenant $b = a$.

Quotient de a et b



On obtient l'inverse de a en prenant $b = 1$.

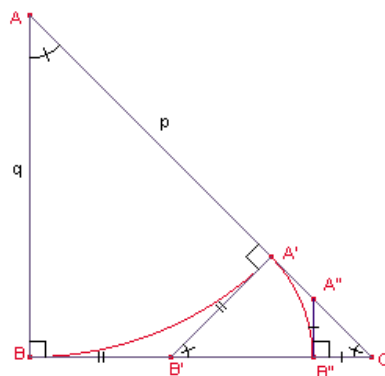
Racine carrée de a



Commensurabilité

Deux segments sont commensurables s'il existe une unité dans laquelle leurs longueurs soient mesurées par des nombres entiers.

On montrera l'existence de segments incommensurables : le côté et la diagonale du carré par exemple (ce pourra aussi être l'occasion d'une approche du raisonnement par l'absurde).



Dans la figure ci-contre, si p et q sont entiers, alors les côtés des triangles $A'B'C$ et $A''C''B''$ sont commensurables et de longueurs respectives strictement inférieures à p et q .

Pour un rectangle donné :

- si les côtés sont incommensurables, il est alors impossible de le paver avec des carrés ;
- si les côtés sont commensurables, on peut chercher la plus grande unité pour laquelle les mesures des côtés sont des nombres entiers : c'est le problème du pavage d'un rectangle avec des dalles carrées identiques les plus grandes possibles et c'est aussi la recherche du PGCD des entiers p et q , mesure des côtés du triangle dans une unité donnée.

Géométrie dans l'espace

Intentions pédagogiques

En continuité avec les programmes de collège et de seconde, on clarifiera les conventions usuelles de la représentation en perspective cavalière. Pour cela, on pourra proposer la détermination de sections planes de solides usuels dans des cas simples : ce travail sera l'occasion d'explicitier les principales propriétés de la perspective cavalière.

Celle-ci se définit comme la projection selon une direction donnée sur un plan donné (la direction n'étant pas orthogonale au plan de projection, ce dernier étant généralement qualifié de frontal) ; l'objet de référence est le cube et les autres solides peuvent être pensés comme posés à l'intérieur de ce cube. Il est important de noter que l'application n'a jamais été formellement définie dans le programme des années antérieures ; le mot « projection » lui-même pourra n'avoir jamais été utilisé par certains élèves : les principales propriétés peuvent néanmoins être obtenues, mais on s'attachera plus à les faire fonctionner qu'à les démontrer. Aucune spécification en termes de rapport de réduction et d'angle de fuite, indispensable dans le cadre d'un dessin technique, ne sera exigée des élèves.

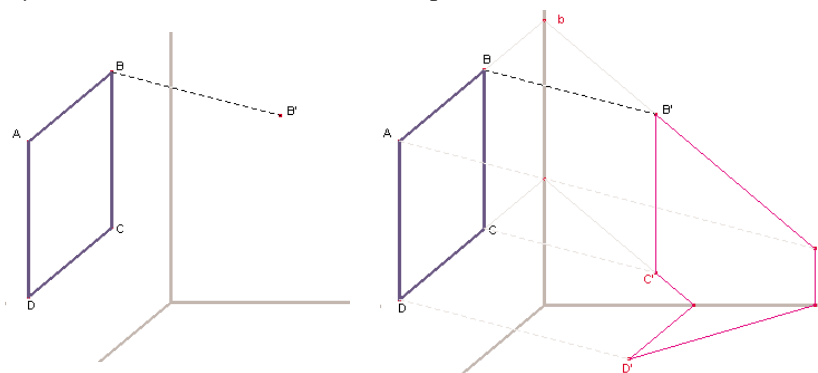
Ce paragraphe sera prolongé par la présentation en classe terminale de la notion de perspective à point de fuite : la comparaison entre les deux perspectives ne pourra se faire utilement que si les élèves ont une maîtrise suffisante de la perspective cavalière.

Exemples

Les deux exemples font référence au texte du programme dans les colonnes modalités et commentaires.

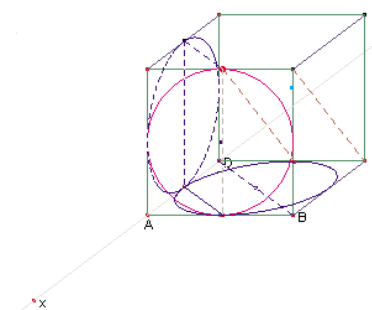
Exemple 1

Détermination de la tâche lumineuse produite sur le mur et sur le sol par le soleil rentrant par une fenêtre ABCD dont les bords sont parallèles au coin d'une pièce. Les rayons du soleil sont considérés comme parallèles et leur direction est donnée par BB'.



Exemple 2

Dans un environnement informatique, avec un logiciel de géométrie plane dynamique, on peut travailler la représentation plane des objets de l'espace et en particulier la représentation d'un cercle sur les faces d'un cube.



On peut ensuite chercher à représenter la sphère inscrite dans ce cube, à l'aide des trois cercles principaux parallèles aux faces du cube. On comparera le dessin ainsi obtenu à celui fréquemment obtenu lors d'un dessin spontané (plus précisément, observer les positions des pôles nord et sud sur ce dessin et sur un dessin spontané : la représentation usuellement faite de la sphère terrestre l'est donc rarement selon les règles de la perspective cavalière).

Quelques éléments de bibliographie

- LEHMANN D. et BKOUCHE R., « Perspectives », dans *Initiation à la géométrie*, chapitre V, PUF, 1988, p. 99-150.
- ROUCHE, N. et LISMONTE L., *Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de la maternelle à dix-huit ans*, CREM a.s.b.l., Nivelles, Belgique, 1999.
- DESTAINVILLE B., « Représenter l'espace », dans « Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée », *APMEP*, n° 99, 1995, p. 43-88.
- AUDIBERT G., « La perspective cavalière », *APMEP*, n° 75, 1990.
- GILBERT T., *La Perspective en questions*, Ciaco Éditeur, Belgique, 1987.
- ROUSSELET M., *Dessiner l'espace (ou comment employer Cabri-géomètre en géométrie dans l'espace)*, Éditions Archimède, Argenteuil, 1995.
- BONAFÉ F., « Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière », *Bulletin de l'APMEP*, n° 363, p. 151-164.
- Article « Perspective », *Encyclopedia Universalis*.

Et aussi...

- De nombreux articles dans les revues :
 - Bulletin de l'APMEP*, n° 424, p. 570 : « L'invention de la perspective géométrique, 1330-1580 ».
 - Repères*, n° 30, p. 81-94 : « Pour diversifier les problèmes de représentation de l'espace en perspective ».
 - Bulletin de l'APMEP*, n° 406, p. 537-545 : « Enseigner la perspective cavalière au collège ».

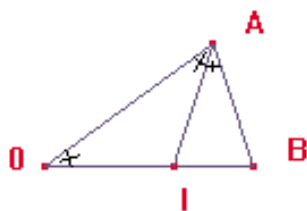
Nombre d'or et pentagone régulier

On trouvera ci-dessous quelques développements historiques et géométriques sur le sujet. Ils ne sont pas tous directement utilisables pour la classe ; mais on pourra s'inspirer de certains éléments pour concevoir des séquences d'enseignement adaptées à ce niveau et à cette série.

Ce paragraphe prolonge le travail entrepris pour la classe de première sur les problèmes de constructibilité (constructions à la règle et au compas) et de commensurabilité. On y trouvera l'occasion de raisonnements géométriques ou algébriques (équation du second degré, suites).

Décagone et pentagone

Un polygone régulier est un polygone ayant ses côtés et ses angles égaux, ou un polygone inscrit dans un cercle ayant ses côtés égaux (on pourra éventuellement justifier l'équivalence de ces deux définitions).



Considérons un triangle AOB, où AB est un côté d'un décagone inscrit dans un cercle de rayon OA. C'est un triangle isocèle de sommet O et d'angle au sommet 36° (soit $2\pi/10$ radians). La bissectrice issue de A coupe le côté OB en I. Les triangles AOB et BAI sont semblables puisqu'ils ont tous les deux un angle de mesure 36° et deux angles de mesure 72° (voir figure ci-contre).

Il s'ensuit $\frac{IB}{AB} = \frac{AB}{OB}$, et comme $IB = OB - OI = OB - BA$, on a $\frac{AB}{OB} = \frac{OB - AB}{AB} = \frac{OB}{AB} - 1$.

D'où, en résolvant l'équation $x^2 + x - 1 = 0$: $AB/OB = (\sqrt{5} - 1)/2$.

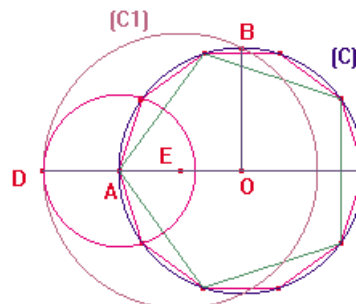
Le décagone régulier est le polygone inscrit à dix côtés égaux, et le calcul ci-dessus donne la valeur du rapport (côté/rayon) pour cette figure. On en déduit une construction à la règle et au compas du décagone régulier.

Construction à la règle et au compas d'un décagone et d'un pentagone inscrits dans un cercle

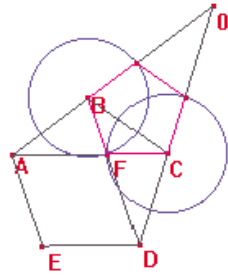
Soit (C) un cercle de centre O, et soient A et B deux points du cercle tels que OA et OB soient orthogonaux. Soit E le milieu de OA et (C1) le cercle de centre E passant par B. Il coupe la droite (OA) en un point D extérieur au cercle (C) (voir figure ci-dessous). La longueur AD est égale au côté du décagone inscrit dans (C) (en prenant $OA = 1$, alors $EB = ED = EB = ED = \sqrt{5}/2$).

d'où $AD = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Par conséquent, le cercle de centre A et de rayon AD permet de construire le premier côté du décagone, qu'on complète ensuite par itération. Le pentagone régulier s'en déduit en prenant un sommet sur deux du décagone.



Pentagone et nombre d'or



Soit $ABCDE$ un pentagone régulier. On note d la longueur de la diagonale de ce pentagone et c la longueur de son côté. Soit F le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) . Les points B, F et C sont trois sommets d'un pentagone régulier de diagonale BC (figure ci-contre).

Comme tous les pentagones réguliers sont semblables, on a $d/c = BC/BF$.

Mais $AB = c$ et $BF = d - c$, et en notant Φ le rapport d/c , on obtient $\Phi = d/c = c/(d - c) = 1/(\Phi - 1)$.

En résolvant l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, on en déduit $\Phi = d/c = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,62$.

Le nombre ϕ ainsi défini est souvent appelé le nombre d'or.

Galerie nationale Capodimonte, Naples, D.R.



Précisons que cette terminologie était inconnue des Anciens et ne remonte qu'au XIX^e siècle ; le terme de « divine proportion » pour Φ est antérieur, comme en témoigne l'ouvrage *De divina proportion* d'un moine du XV^e siècle, Fra Luca Pacioli (ci-contre, peint par Jacopo de Barbari).

Les Grecs de l'époque classique avaient à leur disposition la partie du raisonnement ci-dessus qui conduit à la relation :

$$\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}.$$

Mais on pense qu'ils n'étaient pas en mesure de résoudre l'équation générale du deuxième degré. Il est plus vraisemblable qu'ils déduisaient de cette relation, par application de l'algorithme d'Euclide (ou antiphérèse), ce que nous appelons aujourd'hui le développement en fraction continue de Φ .

Remarque – Dans tout triangle isocèle ABC de sommet A où le rapport $AB/BC = \Phi$, les angles sont $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$.

On trouvera ci-après quelques thèmes d'étude.

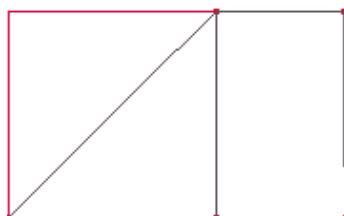
Rectangles d'or



On recherche un rectangle (R) tel qu'en repliant le petit côté sur le grand, le rectangle (R') qui reste ait un rapport (longueur/largeur) identique à celui de (R) .

Si L et l sont les longueur et largeur de (R) ,

on doit avoir $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$.

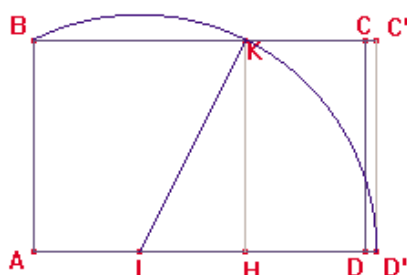


D'où $\frac{L}{l} = \Phi$.



On peut regarder si un rectangle est un rectangle d'or en mesurant les côtés et en faisant le rapport des nombres obtenus. On peut aussi vérifier avec une règle et un compas.

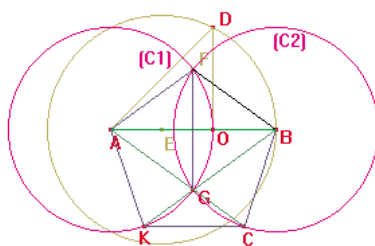
Le rectangle ABCD ci-contre n'est pas un rectangle d'or, le rectangle $AB C' D'$ en est un.



Les monuments font apparaître de nombreux rectangles (cadre de la façade, portes, fenêtres, rectangles délimités par des colonnes, etc.). Parmi tous ces rectangles, on en trouve assez souvent dont le rapport (longueur/largeur) est voisin de 1,62 ; certains interprètent ce 1,62 comme une occurrence de la divine proportion. Chacun est invité à la prudence à ce propos.

Construction par Euclide d'un pentagone régulier de côté donné

On part d'un triangle rectangle isocèle AOD , rectangle en O . Soit E le milieu de $[OA]$. Le cercle de centre E passant par D recoupe la droite (OA) en B . Soient F et G les intersections des cercles $(C1)$ et $(C2)$ de rayon OA centrés respectivement en A et B . Soient C et K les intersections respectives de la droite (AG) avec $(C2)$ et de la droite (BG) avec $(C1)$ (voir figure ci-dessous).



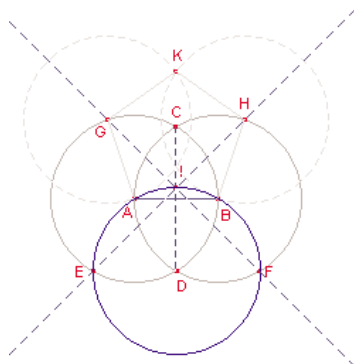
Comme $AB/AF = \Phi$, l'angle AFB vaut 108° . On en déduit les angles du losange $AFBG$. Les angles $\widehat{AGK}$ et $\widehat{BGC}$ valent 72° , donc aussi les angles $\widehat{AKB}$ et $\widehat{ACB}$; il s'ensuit que les angles $\widehat{KAG}$ et $\widehat{CBG}$ valent 36° ; le triangle KGC est isocèle et l'angle $\widehat{KGC}$ vaut 108° , donc les angles $\widehat{GKC}$ et $\widehat{GCK}$ valent 36° .

Il s'ensuit par additions que les cinq angles de $AFBCK$ sont égaux à 108° ; le triangle AKC ayant deux angles égaux est isocèle ; finalement, le pentagone $AFBCK$ ayant ses cinq angles et ses cinq cotés égaux est régulier.

À titre d'exercice, on pourrait faire construire un pentagone à partir de la diagonale $[AB]$.

Il est fréquemment affirmé que la construction à la règle et au compas du pentagone régulier était connue des pythagoriciens, et qu'elle était un secret jalousement gardé qu'ils ne devaient révéler à aucun prix. Ces affirmations ne sont confirmées par aucun document historique.

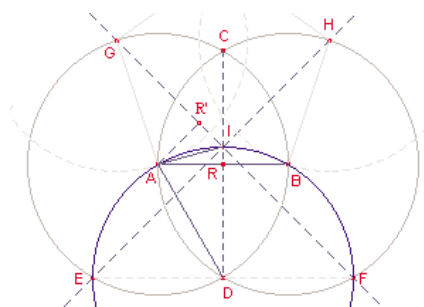
Construction approchée attribuée à A. Dürer (1471-1528)



La construction a été faite en partant seulement du segment [AB].

- Retrouver cette construction.
- Établir que les côtés du pentagone obtenu sont égaux.

Cependant, les angles ne le sont pas (on ne sait pas si A. Dürer s'en était rendu compte ; le calcul de leur valeur dépassent le cadre de ce programme).



Calcul de l'angle $\widehat{GAB}$

La figure est symétrique par rapport à la droite CD. Les triangles EDA et ADB sont équilatéraux, donc l'angle $\widehat{EDI}$ vaut $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ et l'angle $\widehat{EID}$ vaut 45° ; les droites (EH) et (GF) sont orthogonales. Soit R la projection de I sur (AB) et R' celle de A sur GF (voir figure ci-contre).

Comme $\widehat{ADB}$ vaut 60° , par des considérations d'angle au centre et d'angle inscrit, l'angle $\widehat{AIB}$ vaut 150° et l'angle $\widehat{AIR}$ la moitié. D'où, en prenant AB comme unité,

$AI = 1/(2\sin(75^\circ))$. L'angle $\widehat{AIE}$ vaut la moitié de $\widehat{ADE}$, soit 60° et l'angle $\widehat{AIR'}$ vaut $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Le cosinus de l'angle $\widehat{GAR'}$ est égal à AR' , avec $AR' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AI$; on trouve ainsi que cet angle vaut environ $63,36^\circ$; il s'ensuit que l'angle $\widehat{GAB}$, égal à la somme des angles $\widehat{RAI}$, $\widehat{IAR'}$ et $\widehat{R'AG}$ vaut en degrés environ $15^\circ + 30^\circ + 63,36^\circ = 108,36^\circ$ et non 108° comme dans un pentagone régulier. On trouvera une démonstration voisine dans le livre *Géométrie, A. Dürer*, présenté par J. Peiffer, Seuil, 1995.

Développement en fraction continue du nombre d'or – Lien avec la suite de Fibonacci

Jeux numériques autour du nombre d'or

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}, \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} \dots$$

Considérons les nombres rationnels suivants :

$$K_1 = 1, K_2 = 1 + \frac{1}{1}, K_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, K_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \dots$$

La suite $(K_n)_{n \geq 1}$ vérifie $K_1 = 1, K_{n+1} = 1 + \frac{1}{K_n}$.

Posons $K_n = p_n/q_n$; on peut choisir $p_1 = q_1 = 1$ et p_n et q_n tels que $p_{n+1} = p_n + q_n, q_{n+1} = p_n$. D'où $p_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = p_{n+1} + p_n$. Calculer avec un tableur $K_1 - \Phi, \dots, K_{10} - \Phi$.

Remarque à l'usage des enseignants

Rappelons que le PGCD de deux nombres entiers positifs est obtenu par l'algorithme d'Euclide comme suit : soient a et b ces deux nombres et supposons $a > b$. On effectue la division euclidienne $a = bq_1 + r_1$ avec $0 < r_1 < b$.

Si $r_1 = 0$, alors b divise a et est donc le PGCD.

Sinon, ce PGCD divise aussi r_1 .

On effectue la division $b = r_1 q_2 + r_2$, avec $0 < r_2 < r_1$.

Si $r_2 = 0$, alors r_1 divise b et est donc le PGCD.

Sinon, ce PGCD divise aussi r_2 .

On effectue la division $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ et ainsi de suite.

Comme la suite des restes strictement positifs est strictement décroissante, la suite des divisions s'arrête et fournit le PGCD, qui est encore la plus grande commune unité de mesure des entiers a et b . Notons que le développement (fini) en fraction continue de a/b s'obtient avec les quotients successifs :

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}$$

On peut utiliser la même méthode pour trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs a et b . Il n'est plus évident, cette fois, que cette procédure se termine puisque nous n'avons plus affaire à une suite décroissante de nombres entiers positifs. Et de fait si nous l'appliquons à $a = \Phi$ et $b = 1$, nous trouvons :

$$\Phi = 1 + (\Phi - 1) \quad (1).$$

Mais comme on a

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1},$$

on voit que la deuxième division s'écrit :

$$1 = (\Phi - 1) + (2 - \Phi) \quad (2).$$

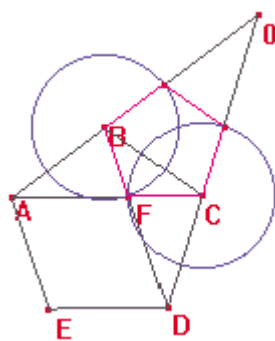
Les égalités (1) et (2) sont proportionnelles, et les rapports (quotient/reste) sont donc égaux. Il est alors clair que toutes les divisions successives sont proportionnelles, et il s'ensuit que la procédure est sans fin. En termes modernes, nous avons montré que le nombre Φ est irrationnel.

Un sous-produit de cette approche est que le développement (infini) en fraction continue de Φ a tous ses termes égaux à 1 :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

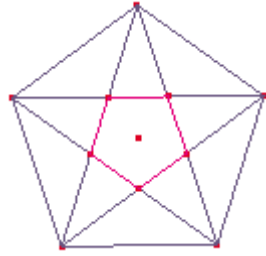
On peut également remarquer que le reste de la n ème division est égal à

$r_n = (-1)^n (F_{n+1} - \Phi F_n)$, où F_n est le n -ième terme de la suite de Fibonacci qui est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Il s'ensuit que le rapport F_{n+1}/F_n tend en oscillant vers Φ .



Le raisonnement ci-dessus peut encore s'exprimer géométriquement. Sur la figure ci-contre, nous voyons que pour trouver la plus petite commune mesure à la diagonale et au côté, nous sommes amenés à construire une suite de pentagones homothétiques au pentagone initial, par des homothéties de centre O et de rapport $1/\Phi$. Il est clair que la construction se poursuit indéfiniment (du moins si on admet que l'espace est infiniment divisible, ce qui nous amène à une autre piste de réflexion chère aux Grecs de l'époque classique), et il n'y a donc pas de mesure commune.

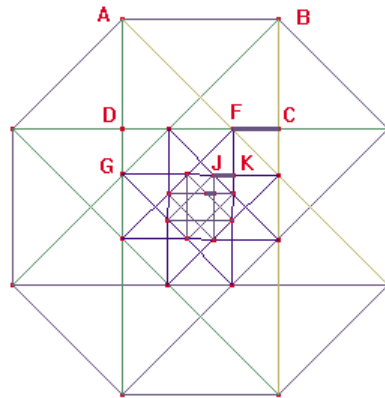
Irrationalité du carré du nombre d'or par une méthode géométrique



Le nombre $1/\Phi^2$ est le rapport d'homothétie qui permet de passer du grand pentagone au petit (figure ci-contre). Si ce rapport était rationnel, il existerait une unité telle que le grand et le petit pentagone aient des côtés dont les mesures sont des nombres entiers, d'où il s'ensuit par différence que le côté et la diagonale du grand pentagone sont entiers, ce qui contredit l'irrationalité de Φ . Il se peut que cet argument ait été connu dès l'époque classique.

Ce type de démonstration peut s'appliquer pour d'autres nombres, par exemple.

Développement en fraction continue de $\sqrt{2}$: étude géométrique



Une méthode possible consiste à construire l'octograme (voir ci-contre), avec $AD = 1$, d'où $AB = AF = \sqrt{2}$. On constate alors que l'algorithme d'Euclide appliqué à la division de AF par DF donne pour restes successifs FC , puis JK , et ainsi de suite à l'infini.

Dans ce cas, le premier quotient vaut 1, puis tous les quotients suivants sont égaux à 2, ce qui fournit le développement en fraction continue :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 \dots}}}}$$

Il est bien sûr naturel de chercher à établir l'irrationalité d'autres grandeurs par ces moyens géométriques.

On peut remarquer que ces constructions fournissent des approximations effectives des nombres considérés, qui se prêtent facilement au calcul automatisé.

Il est avéré que les Grecs ont utilisé des arguments de nature géométrique dans leur première preuve d'irrationalité. On sait par exemple que l'un des membres de l'école de Platon, Théodore de Cyrène, a établi l'irrationalité des racines des entiers non carrés jusqu'à 17.

On pourra sur ces sujets consulter le site : www.chronomath.irem.univ-mrs.fr.

Perspective à point de fuite

Un bateau s'éloigne du rivage

Il y a des segments de droite de toutes les longueurs. Il y en a donc de très petits. Et si un segment est extrêmement petit – au point peut-être qu'on ne le voit pas –, peut-on toujours en trouver un plus petit ? C'est une question dont les philosophes ont débattu depuis l'Antiquité. Pascal était convaincu qu'on peut toujours en trouver un plus petit. Voici un argument qu'il a utilisé pour convaincre de cela une personne persuadée du contraire, mais admettant par ailleurs qu'il existe des segments aussi grands que l'on veut¹ :

« Et dans l'espace le même rapport se voit entre ces deux infinis contraires²; c'est-à-dire que, de ce qu'un espace peut être infiniment prolongé, il s'ensuit qu'il peut être infiniment diminué, comme il paraît en cet exemple : si on regarde au travers d'un verre un vaisseau qui s'éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane³ où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continu, à mesure que le vaisseau fuit. Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement ; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infini de l'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au dessous de ce point horizontal. »

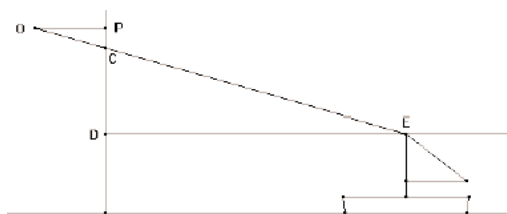


Figure 1

La figure 1 illustre la situation imaginée par Pascal. Le segment vertical représente la vitre vue de profil.

L'œil de l'observateur se trouve au point O. Son regard suit le sommet du mât du bateau.

Si, comme sur la figure 2, on munit la figure d'un axe des x et d'un axe des y , et si le bateau s'éloigne de la rive d'un mouvement uniforme d'équation $x(t) = vt$, où t est le temps et v la vitesse, comment évolue la distance de C à P, celle que Pascal considère ?

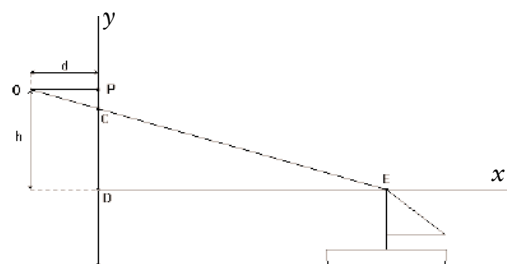


Figure 2

Les triangles OPC et CDE étant semblables, on peut écrire la proportion (1) :

$$CP/PO = DC/DE.$$

Désignons par $\varepsilon(t)$ la distance de C à P, par d la distance de l'œil à la vitre et par h la hauteur de l'œil au dessus du sommet du mât. Nous pouvons alors récrire l'égalité (1) sous la forme (2) :

$$\varepsilon(t)/d = (h - \varepsilon(t))/x(t).$$

En extrayant $\varepsilon(t)$ de cette égalité, nous obtenons (3) : $\varepsilon(t) = \frac{hd}{d + vt} = \frac{h}{1 + \frac{vt}{d}}$.

On voit que $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Le point C s'approche indéfiniment du point P sans

jamais l'atteindre. Le point P est appelé *point de fuite* de la trajectoire de C sur la vitre.

1. Blaise Pascal, *De l'esprit géométrique*, texte rédigé au plus tard en 1657-1658, dans *Œuvres complètes*, Seuil, Paris, 1963.

2. L'infiniment grand et l'infiniment petit.

3. La vitre.

Une flottille s'éloigne du rivage

Supposons maintenant que deux bateaux navigant de front s'éloignent du rivage. Le premier E_1 est celui de Pascal : l'observateur le voit en regardant droit devant lui. Le second E_2 navigue en parallèle, par exemple à droite de E_1 . Si l'observateur suit les deux bateaux avec des marqueurs sur la vitre, quelles trajectoires va-t-il obtenir ?

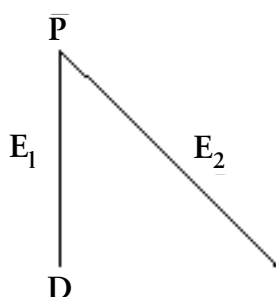


Figure 3

Nous connaissons la trajectoire de E_1 . C'est le segment $[DP]$: on le voit sur la figure 3 qui montre la vitre vue de face.

Lorsque l'œil de l'observateur suit le deuxième bateau, son regard se porte vers la droite. Mais au fur et à mesure que le bateau E_2 avance, le regard monte vers l'horizontale et se déporte vers la gauche. La droite du regard se rapproche de plus en plus de la droite (OP), perpendiculaire à la vitre issue de l'œil. La trajectoire du point représentant E_2 sur la vitre a le même point de fuite que la trajectoire de E_1 .

Généralisons cette observation : si toute une flottille de bateaux s'éloigne de front du rivage, leurs trajectoires sur la vitre auront toutes le même point de fuite. Et maintenant, si tous les bateaux s'éloignent de la vitre en navigant de biais, c'est-à-dire toujours sur des trajectoires parallèles, mais cette fois non perpendiculaires à la vitre ?

Dans ce cas, toutes les trajectoires des points représentant les bateaux sur la vitre convergeront encore vers un seul point de fuite. Celui-ci se trouve à l'endroit où la droite du regard parallèle aux trajectoires des bateaux intersecte la vitre. Il est, sur la vitre, à la même hauteur que le point de fuite des bateaux qui partaient droit devant.

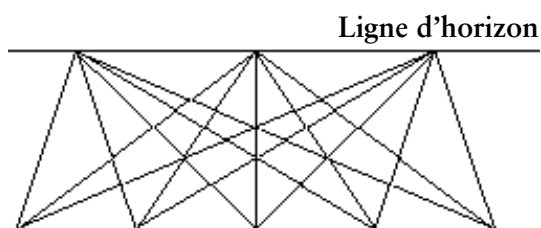


Figure 4

La figure 4 représente, sur la vitre vue de front, les trajectoires de trois flottilles¹.

Une question : si deux avions s'éloignent vers l'horizon en laissant derrière eux des lignes blanches, et si ces deux lignes semblent se rapprocher l'une de l'autre, comment savoir si les deux avions volent sur des trajectoires parallèles, ou s'ils s'écartent l'un de l'autre, ou au contraire s'ils se rapprochent ?

Une première règle de la perspective

Bien avant Pascal, les peintres ont utilisé une vitre disposée verticalement devant eux pour y dessiner ce qu'il voyaient au travers. Un tel dispositif est appelé *fenêtre d'Alberti*, du nom du premier auteur qui a exposé les principes de la perspective².

On peut imaginer autant de flottilles que l'on veut, s'écartant de même du rivage dans toutes les directions. Tous les points de fuite correspondants se trouveront sur la droite horizontale qui est sur la vitre à hauteur de l'œil. Cette droite s'appelle la *ligne d'horizon*.

1. On peut traiter ces problèmes de représentation de droites sur la vitre en termes de géométrie d'incidence. Le segment représentant une droite (ou plutôt une demi-droite, puisqu'on ne s'intéresse pas à ce qui se passe devant la vitre) se trouve à l'intersection de la vitre avec le plan déterminé par la demi-droite en question et la droite du regard.

2. Leon Battista Alberti, *De la peinture [De pictura]*, écrit en 1435 ; texte et traduction française par J.-L. Scheffer, Macula Dédale, 1992.



Figure 5

lèles sera représenté sur son tableau par des segments convergeant en un même point de fuite (sauf si les droites à représenter sont parallèles à la vitre !). En faisant cela, il applique la première règle de la *perspective à point de fuite*.

Le tableau de la figure 6 montre par un exemple que les peintres n'ont pas toujours appliqué cette règle. Il s'agit d'une *Dernière cène* de Duccio Di Buoninsegna (Cathédrale de Sienne, 1301-1308). Si, sur cette peinture (figure 7), on prolonge vers le bas les lignes formées par les poutres du plafond et les joints entre les panneaux qui ornent celui-ci, on aboutit à trois « points de fuite » distincts.



D.R.

Figure 6



Figure 7

Regardons en revanche la figure 8, qui reproduit un détail du tableau *La Profanation de l'hostie* de Paolo Uccello (Palais ducal d'Urbino, 1465-1469). On y relève un seul et même point de fuite, tant pour les lignes de carreaux que pour les poutres du plafond.



D.R.

Figure 8

Une deuxième règle de la perspective

Le tableau de Paolo Uccello nous invite à examiner un deuxième problème que se sont posé les peintres de la Renaissance : il s'agit du tracé d'un carrelage.

Pour dessiner un carrelage à travers une fenêtre d'Alberti, il suffit tout simplement de suivre avec un marqueur les joints du carrelage tels qu'on les aperçoit à travers la fenêtre. Mais supposons qu'on ne dispose pas d'une fenêtre d'Alberti et qu'on ait dessiné une première rangée de carreaux comme sur la figure 9. On a respecté la règle du point de fuite expliquée ci-dessus. Mais comment ensuite déterminer la largeur de la deuxième rangée de carreaux, puis la largeur de la troisième, et ainsi de suite ?

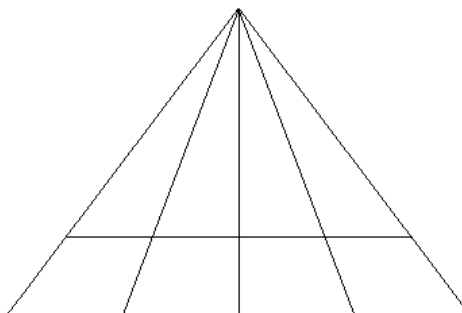


Figure 9

Alberti rapporte que certains peintres prenaient pour largeur de la deuxième rangée les deux tiers de la largeur de la première, et pour largeur de la troisième les deux tiers de la largeur de la deuxième, et ainsi de suite en progression géométrique. Cette méthode aboutit-elle à un dessin conforme à celui que donnerait une fenêtre d'Alberti ? Première réflexion : d'abord pourquoi deux tiers ? C'était sans doute une valeur de bonne pratique, qui donnait le plus souvent un dessin d'allure vraisemblable. Mais la valeur de deux tiers ne semble pas autrement justifiée. Comment montrer qu'elle est sûrement fausse ?

Si nous désignons par a la largeur de la première rangée de carreaux sur la peinture, en appliquant la règle en question, nous obtenons pour les largeurs successives

$$a, \frac{2}{3}a, \left(\frac{2}{3}\right)^2 a, \left(\frac{2}{3}\right)^3 a, \dots (3).$$

Si on totalise ces largeurs pour une infinité de rangées de carreaux, il faut évidemment que l'on arrive à la ligne d'horizon, qui est déjà là. Or, la limite de la série

$$a + \frac{2}{3}a + \left(\frac{2}{3}\right)^2 a + \left(\frac{2}{3}\right)^3 a + \dots \text{ s'écrit } \frac{a}{1 - 2/3} = 3a.$$

Ainsi, la ligne d'horizon se trouverait toujours à la hauteur $3a$ au dessus de la ligne où commence le carrelage ? Et cela, quel que soit a , et donc quelle que soit la taille des carreaux représentés... La ligne d'horizon serait déterminée par la taille des carreaux. Ce n'est pas acceptable. Voici comment Alberti critique les peintres qui procèdent ainsi :

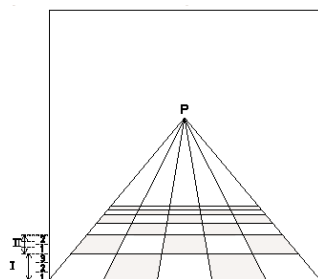


Figure 10

« Ceux qui feraient ainsi, même s'ils affirmaient suivre la meilleure voie en peinture, je déclare qu'ils se trompent beaucoup car, ayant posé au hasard la première ligne parallèle, quand bien même les autres lignes parallèles se suivraient selon un même rapport de diminution, le fait est qu'ils n'ont pas le moyen d'obtenir un lieu précis pour la pointe [de la pyramide] qui permet de bien voir. »

La figure 10 reproduit le dessin d'Alberti illustrant ce procédé incorrect¹.

Si ce n'est pas là une bonne façon de dessiner un carrelage, comment faut-il faire ?

L'idée clé – il fallait y penser ! – consiste à rajouter au carrelage les diagonales des carreaux.

1. Figure reproduite de l'ouvrage cité à la note 2, page 50.

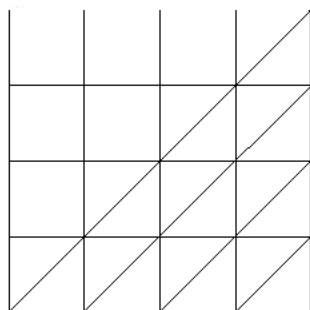


Figure 11

La figure 11 montre le carrelage vu du dessus, et sur lequel on a dessiné un réseau de diagonales. Celles-ci sont évidemment parallèles.

Repartons maintenant de la figure 8 où la première rangée de carreaux est déjà dessinée. Ajoutons y un ensemble de diagonales des carreaux : voir figure 12. Comme ces diagonales sont parallèles, elles ont un point de fuite. Prolongeons-les jusqu'à ce point (figure 13). La figure fait alors apparaître quelques sommets de carreaux de la deuxième et de la troisième rangées. On dessine alors les joints du carrelage qui sont parallèles à la vitre et qui passent par ces points.

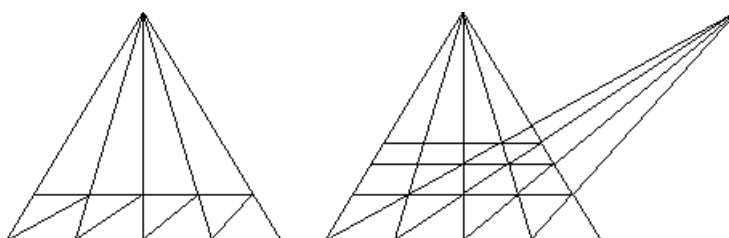


Figure 12 et 13

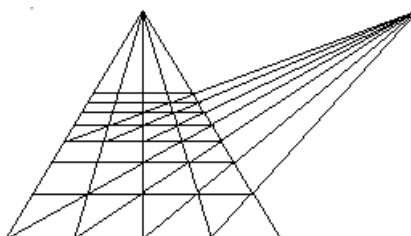


Figure 14

Comme le montre la figure 14, on peut recommencer ce processus et dessiner ainsi le carrelage sur une profondeur aussi grande que l'on veut.

Posons-nous une dernière question : nous avons vu ci-dessus que la loi des deux tiers pour les largeurs des rangées successives de carreaux n'était pas la bonne. Alors, quelle est la bonne loi ?

Pour répondre à cette question, redessignons la situation de profil, comme nous l'avons déjà fait aux figures 1 et 2. Sur la figure 15, nous avons placé l'axe des x le long du carrelage, en y marquant par des gros points les joints parallèles à la vitre. L'écart entre ces joints est noté ℓ . Soit E le n^{e} joint (sur la figure c 'est le deuxième) et C son image sur la vitre. Le triangle OCP est semblable au triangle CED .

Nous pouvons donc écrire (5) :

$$CP/OP = DC/DE.$$

Si nous désignons par ε_n la distance de C à P , nous pouvons récrire la formule (5) sous la forme (6) : $\varepsilon_n/a = (h - \varepsilon_n)/n\ell$.

De cette égalité, nous tirons que (8) : $\varepsilon_n = \frac{h}{1 + \frac{n\ell}{a}}$.

La suite (ℓ_n) des largeurs des carreaux en perspective se trouve ensuite en calculant

$$\ell_n = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \frac{h}{1 + \frac{(n-1)\ell}{a}} - \frac{h}{1 + \frac{n\ell}{a}}.$$

Ce qui donne après calcul :

$$\ell_n = \frac{ha\ell}{[1 + (n-1)\ell](1+n\ell)}, n = 1, 2, 3...$$

Si par hasard $h = \ell = a$ et si nous prenons cette longueur commune pour unité, nous obtenons :

$$\ell_n = \frac{\ell}{n(n+1)}.$$

La figure 16 montre *L'Annonciation* d'Ambrogio Lorenzetti (Pinacothèque de Sienne, 1344). Dans cette peinture, le carrelage n'a pas été dessiné selon la règle d'Alberti. La figure 17 montre, sur un agrandissement d'une partie de ce carrelage, que les diagonales des carreaux n'y sont pas alignées comme on s'y attendrait.



Figure 16

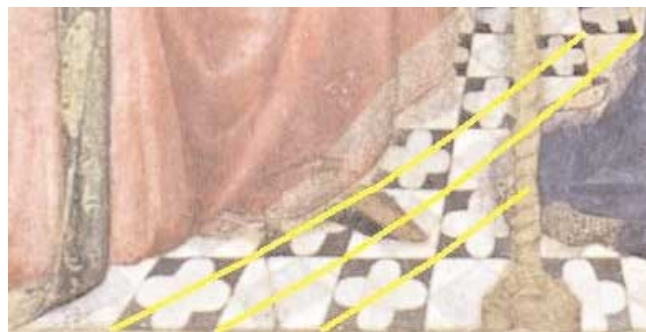


Figure 17

Quelques éléments de bibliographie

- En complément de la lecture de Pascal et d'Alberti mentionnés en notes, nous nous sommes appuyés, pour exposer ces quelques éléments de perspective, sur :
- GARRAUD C., *Représentation de l'espace (II), la perspective linéaire, approche historique*, Centre national de documentation pédagogique, 1978.
 - GILBERT Th., *La Perspective en questions*, GEM et CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.
 - GILBERT Th. et ROUCHE N., *La Notion d'infini, l'infini entre mystère et raison, intuitions, paradoxes, rigueur*, Ellipses, 2001.
- Il existe de nombreux autres exposés élémentaires des mêmes notions et de leurs origines historiques.
- L'IREM de Caen a été particulièrement active à cet égard. Parmi les autres sources qui pourraient être utilisées dans l'enseignement au lycée, mentionnons surtout : Piero Della Francesca, *De la perspective en peinture*, traduit et annoté par J.-P. Le Goff, *In Media Res*, Paris, 1998.
- De manière plus générale, pour les autres points de la partie « géométrie » :
- CARREGA J.-C., *Théorie des corps. La règle et le compas*, Hermann, 1981.
 - DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J., *Une histoire des mathématiques ; routes et dédales*, Seuil, 1986.
 - FOWLER D.H., *The Mathematics of Plato's Academy, a New Reconstruction*, Oxford, Oxford Science Publications-Claredon Press, 1987.
 - GODEFROY G., *L'Aventure des nombres*, Odile Jacob, 1997.
 - FOURREY É., *Curiosités géométriques*, Vuibert 2001.