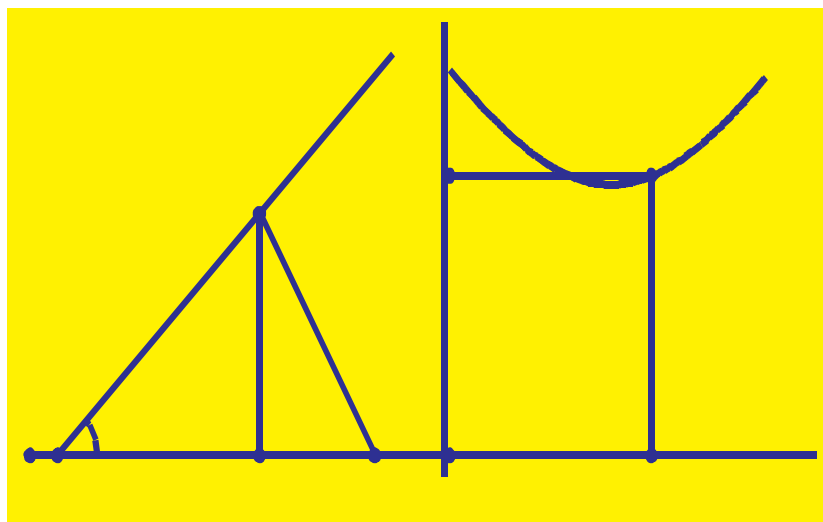




MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA RECHERCHE ET DE LA TECHNOLOGIE

ALGÈBRE ET FONCTIONS



Direction de l'enseignement scolaire
Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques

*Groupement National d'Équipes de Recherche
en Didactique des Mathématiques*

Table des matières

<u>Table des matières</u>	1
<u>Avant-propos</u>	3
I. <u>Introduction</u>	5
II. <u>L'apprentissage de l'algèbre au collège</u>	7
II.1. L'apprentissage de l'algèbre élémentaire : une mission du collège	7
II.2. Résultats de recherches françaises et étrangères	8
III. <u>L'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée</u>	16
III.1. Des recherches didactiques sur le concept de fonction	16
III.2. L'apprentissage des fonctions au lycée	22
IV. <u>Exemples de travaux sur le calcul algébrique</u>	23
IV.1. Calcul numérique et calcul algébrique au collège : analyse des difficultés et propositions d'activités (Equipe de Strasbourg)	23
IV.2. Etude du rapport au calcul littéral et à l'algèbre chez les élèves et les enseignants des premier et second cycle dans une perspective d'amélioration des apprentissages (Equipe de Montpellier).	26
V. <u>Exemples de recherches sur les fonctions</u>	39
V.1. Premiers travaux sur les fonctions (équipe de Montpellier)	39
V.2. Fonctions et représentations graphiques (Equipe de Strasbourg)	46

Avant-propos

La recherche en didactique des mathématiques produit, depuis de nombreuses années, une grande quantité de documents du plus grand intérêt. On doit constater, malheureusement, que ces matériaux restent ignorés de la plupart des professeurs de mathématiques. La formation initiale et continue des enseignants semble, trop souvent encore, méconnaître l'importance de ces travaux et les ressources qu'ils peuvent offrir à des professeurs de mathématiques qui demandent à être accompagnés dans l'évolution et l'enrichissement de leurs pratiques pédagogiques. La prise en compte de la diversité des élèves, la capacité à analyser leurs difficultés ne vont pas de soi.

C'est pourquoi il a paru intéressant à la Direction des lycées et collèges puis à la Direction de l'enseignement scolaire de commander au Groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques cette brochure, fruit d'un travail de grande qualité mené par plusieurs équipes de professeurs travaillant au sein de ce Groupement. Ce document devrait d'ailleurs être suivi de plusieurs autres.

Le présent ouvrage s'est donné pour objectif de fournir aux formateurs IUFM et aux professeurs de mathématiques des lycées et des collèges une vision synthétique des principaux acquis didactiques *concernant l'apprentissage de l'algèbre au niveau du collège et de l'entrée dans la pensée fonctionnelle au début du lycée*. Il présente des recherches, sous forme de travaux réalisés en classe, sur l'articulation dans le travail algébrique et fonctionnel des différents registres sémiotiques dans lesquels s'inscrit l'activité mathématique. Il insiste sur la nécessité de faire coexister simultanément les cadres géométriques, graphiques, algébriques et numériques, en même temps qu'il montre la nécessité de préciser le statut et le rôle spécifique de chacun de ces cadres.

On y trouve réunis des exemples intéressants, issus de la mise en commun d'un certain nombre d'expériences. Ils constituent un élément, parmi d'autres, pour nourrir la réflexion des enseignants et nourrir leur propre pratique sur un large éventail d'activités. Les études sont toutes conduites dans une perspective d'amélioration des apprentissages.

Ce document est adressé aux IPR-IA de mathématiques ainsi qu'aux directeurs d'IUFM. Il va de soi qu'une diffusion plus large, à l'attention des formateurs ou même des équipes de professeurs sur le terrain ne pourrait être que bénéfique. Nos partenaires institutionnels sauront apprécier les meilleures conditions de diffusion et d'utilisation de cette brochure dans les académies.

Paul Attali

Doyen du groupe de mathématiques de l'inspection générale

I. Introduction

De nombreuses recherches, en France comme à l'étranger, ont concerné ces dernières années l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre et des fonctions au niveau de l'enseignement secondaire. Ces recherches ont permis de mieux connaître les difficultés rencontrées par les élèves dans l'accès à ces champs conceptuels, de préciser les principales étapes du développement cognitif dans ces domaines, d'analyser les stratégies usuelles d'enseignement et leurs effets sur l'apprentissage. Elles ont aussi permis de produire des travaux d'ingénierie didactique prenant en compte les résultats obtenus.

Cette brochure a pour objectif, d'une part, de fournir une vision synthétique des principaux acquis didactiques concernant l'apprentissage et l'enseignement dans ces deux domaines, d'autre part, de présenter des recherches menées avec le soutien de la Direction de l'enseignement scolaire, dans le cadre du Groupement National d'Equipes de Recherche en Didactique des Mathématiques. Ces recherches portent notamment sur l'articulation dans le travail algébrique et fonctionnel des différents registres sémiotiques dans lesquels s'inscrit l'activité mathématique : registre de la langue naturelle, registre des écritures algébriques, registre graphique... ainsi que sur le rôle que peuvent jouer les nouvelles technologies informatiques pour favoriser l'articulation des cadres, registres et points de vue et soutenir les activités de modélisation prônées par les programmes, tant en ce qui concerne l'initiation à l'algèbre que l'initiation aux fonctions.

En ce qui concerne la présentation synthétique des principaux acquis de la recherche, nous voudrions souligner qu'au delà des spécificités propres à chaque champ conceptuel, les problèmes d'apprentissage dans ces deux domaines renvoient à des problèmes plus transversaux :

- celui des continuités et ruptures cognitives sous-jacentes à l'entrée dans de nouveaux champs conceptuels : ici elles vont se manifester aussi bien dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, que dans le passage de l'algèbre élémentaire centrée sur le monde des équations et inéquations au monde fonctionnel,
- celui de l'évolution du statut des nouveaux objets mathématiques introduits et, en liaison avec lui, celui de la prise de sens de ces objets,
- celui de la maîtrise des registres sémiotiques dans lesquels les objets mathématiques sont exprimés et travaillés et de l'articulation de ces différents registres, les liens entre cette maîtrise et la conceptualisation,
- et enfin, ceux liés à l'articulation dans l'enseignement et l'apprentissage mathématique des deux dimensions « outil » et « objet » des notions mathématiques.

Ont participé au travail sur l'axe « algèbre - fonctions » dans le cadre du groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques : Jean Claude Rauscher et Marie Agnès Egret pour l'équipe de Strasbourg, Bernard Capponi pour l'équipe de Grenoble, Mirène Larguier, Maryse Noguès, Jacques Salles et Michel Seco pour l'équipe de Montpellier.

La coordination de la partie algèbre a été assurée par Bernard Capponi, celle de la partie fonctions par Maryse Noguès, la coordination globale par Michèle Artigue.

Nous remercions vivement la Direction de l'enseignement scolaire pour le soutien qu'elle a apporté à ce travail, via le soutien en heures apporté aux collègues de l'enseignement secondaire qui y ont participé et, en particulier, Jean Mativet qui en a assuré le suivi pour la sous-direction des actions éducatives et de la formation des enseignants.

II. L'apprentissage de l'algèbre au collège

L'apprentissage de l'algèbre constitue l'un des enjeux fondamentaux de l'enseignement des mathématiques au niveau du collège. Les enseignants qui ont en charge cet enseignement ont depuis longtemps repéré certaines difficultés rencontrées par les élèves. Paradoxalement, il apparaît même que certaines performances des élèves se dégradent après les premiers apprentissages de techniques algébriques. Ainsi, par exemple, la recherche d'un entier n tel que $3n + 2 = 5$, qui ne pose pas de grands problèmes à des élèves de 11 ans, est encore source d'erreurs à la fin du collège. Ce type de paradoxe et, plus généralement, les difficultés que pose l'apprentissage de l'algèbre ont été étudiés par de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques, tant en France qu'au niveau international. Après avoir rappelé les principales caractéristiques de l'enseignement de l'algèbre en France au collège, nous proposons ici une synthèse de ces recherches et de leurs principaux résultats.

II.1. L'apprentissage de l'algèbre élémentaire : une mission du collège

L'apprentissage de l'algèbre se développe traditionnellement au niveau du collège. En France les premiers apprentissages sont esquissés en sixième et cinquième et deviennent plus intenses à partir de la quatrième. Il faut cependant considérer qu'une grande partie des notions étudiées sont encore en cours d'acquisition à la fin de la troisième et que l'apprentissage va se continuer au niveau du lycée.

L'apprentissage de l'algèbre se développe suivant plusieurs axes, contribuant, d'une part, à la maîtrise des objets de l'algèbre : lettres avec un statut de nombre généralisé, d'inconnue ou de variable, formules, équations, inéquations, systèmes et, d'autre part, à la constitution de l'algèbre en outil de l'activité mathématique.

a) Maîtrise du statut des lettres dans le langage algébrique

Dès le début du collège, les élèves sont confrontés à des calculs où ils rencontrent des lettres représentant des nombres (formules d'aires et de périmètres notamment...) et sont amenés à opérer sur ces lettres, ne serait-ce que pour leur substituer des valeurs numériques. Ils sont ensuite conduits à opérer sur des expressions littérales et à transformer de telles écritures, le plus souvent dans le cadre d'expressions polynomiales. Cet aspect de l'apprentissage de l'algèbre concerne l'utilisation des lettres pour représenter des nombres et les calculs qui y sont associés. Le calcul littéral est vu ici comme une combinatoire de règles de transformations autorisées par les propriétés des opérations.

b) Mise en équation de problèmes

L'algèbre est alors utilisée pour résoudre des problèmes. Cela conduit à choisir des lettres pour représenter une ou des quantités inconnues puis à traduire par des équations et inéquations les relations décrites dans l'énoncé du problème.

c) Résolution d'équations et de systèmes d'équations

C'est en quatrième que sont véritablement mises en place les manipulations d'égalités et les règles qui permettent la résolution des équations du premier degré via la conservation de l'équivalence. En troisième, les élèves commencent à utiliser les factorisations pour résoudre des équations de degré supérieur à un. Par ailleurs, c'est dans cette classe qu'apparaît la résolution des systèmes linéaires. Cet apprentissage est mis en relation avec les fonctions linéaires et affines.

On peut aussi considérer que l'introduction des nombres relatifs ainsi que la maîtrise du calcul sur les quotients et les racines carrées rentrent dans le domaine de l'algèbre dans la mesure où les écritures introduites se manipulent d'une façon analogue à celle qui conduit à transformer des expressions littérales.

Les contenus mathématiques ne sont donc pas considérables mais leur enseignement se heurte à des difficultés récurrentes qui indiquent que l'acquisition des concepts mis en jeu ne va pas de soi. C'est ce qui a incité les chercheurs en didactique à se pencher sur cet apprentissage pour analyser les types de difficultés rencontrés par les élèves et pour aider ainsi à la mise en place de séquences d'enseignement permettant de traiter plus efficacement certains problèmes rencontrés.

II.2. Résultats de recherches françaises et étrangères

Les recherches conduites en France et à l'étranger concernent à la fois les dimensions outil et objet de l'algèbre. Dans le premier cas, l'algèbre est considérée comme un outil pour la résolution de problèmes faisant éventuellement intervenir d'autres domaines mathématiques, voire des domaines extra-mathématiques. Dans le second cas, l'algèbre est considérée comme un ensemble organisé d'objets comme les variables, inconnues, paramètres, équations, fonctions... Ces objets sont étudiés en tant que tels avec leurs propriétés, leurs modes de traitement, leurs systèmes de représentations.

Dans le survol des recherches que nous présentons ici, nous envisagerons principalement la dimension objet en nous limitant, bien entendu, à l'enseignement de l'algèbre élémentaire, sans aborder donc les questions liées aux structures algébriques.

a) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

L'arithmétique enseignée à l'école élémentaire et au début du collège traite de la résolution de problèmes numériques utilisant essentiellement des nombres entiers naturels et des décimaux positifs. Cette résolution met en jeu des techniques spécifiques impliquant des relations entre grandeurs. Comme le souligne Y. Chevallard (Chevallard 1989), "l'outil essentiel de l'arithmétique est le langage ordinaire augmenté du calcul sur les nombres. [...]. Elle demeure essentiellement un savoir oral qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur les nombres."

L'arithmétique utilise un ensemble d'outils sémiotiques dont le rôle est de coder les calculs à effectuer. Il s'agit de la représentation des nombres entiers et décimaux, des symboles d'opérations, de parenthèses pour gérer les priorités opératoires et du signe "=" indiquant des résultats de calculs. Mais ces outils restent très limités. Dans ce contexte, le calcul prend une place très accessoire au regard du raisonnement explicite en langue naturelle. Le calcul ne joue ici que le rôle d'une mécanique au service du raisonnement exprimé par ailleurs. L'exécution du calcul nécessite bien sûr son codage à l'aide de ces outils sur le papier mais l'exécution achevée, les calculs sont considérés comme une étape qui ne vaut que par les résultats qu'elle permet d'obtenir.

En algèbre, la situation est sensiblement différente et, de ce fait, les connaissances arithmétiques des élèves qui proviennent de l'école élémentaire vont, pour certaines d'entre elles, se dresser en obstacles à l'appropriation des savoirs du domaine algébrique entreprise au collège.

En effet, l'algèbre est aussi un domaine où l'on code les calculs dans des ensembles de nombres, mais elle fournit un moyen plus puissant, lié à l'usage des lettres pour désigner les variables et à la possibilité de calculer sur les expressions littérales qu'elle conduit à former (Chevallard 1989). Il ne s'agit plus de travailler uniquement sur des quantités connues, en progressant pas à pas du connu vers l'inconnu comme en arithmétique, mais d'exprimer des relations entre ces quantités. Qu'elles soient connues ou inconnues n'est plus un obstacle à l'écriture des relations contrairement à ce qui se passe en arithmétique. Ce qui fait la force de l'algèbre, c'est d'autre part l'emploi de paramètres, ou de variables du système, dont les valeurs sont supposées connues. "En termes de modélisation, l'introduction des paramètres fait passer d'une modélisation "arithmétique" à une modélisation où les énoncés du langage ordinaire [...] cèdent la place à des expressions littérales sur lesquelles opère le calcul algébrique et qu'on pourra évaluer en fin de calcul, en revenant alors aux nombres particuliers définissant l'état du système auquel on s'intéresse". (Chevallard 1989).

La puissance qu'introduit l'algèbre par rapport à l'arithmétique la rend de toute façon nécessaire dès que la complexité des situations dépasse un certain niveau, la plupart du temps dès qu'on aborde les problèmes autres que ceux qui relèvent du premier degré.

Soulignons dès à présent, même si nous y reviendrons ultérieurement, que la maîtrise de l'algèbre du collège nécessite de la part de l'élève l'appropriation d'une syntaxe nouvelle mais aussi celle de nouveaux usages de certains symboles déjà connus comme les symboles opératoires, le signe égal ou les parenthèses.

Les recherches en didactique de l'algèbre se sont particulièrement penchées sur ce qu'on désigne habituellement par le terme de "rupture arithmétique/algèbre". L'algèbre met en effet en jeu, dans ses rapports à l'arithmétique, une double rupture épistémologique :

- d'une part, celle résultant de l'introduction d'un détour formel dans le traitement de problèmes habituellement traités intuitivement,
- d'autre part, celle résultant de l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme les équations, les inconnues ou les fonctions (Vergnaud 1988).

Le passage d'un mode de raisonnement qui n'utilise le secours de l'écrit que pour effectuer des calculs numériques à une problématique de l'écriture des relations en jeu entre les nombres n'est pas sans dresser un certain nombre d'obstacles bien identifiés, ces dernières années. On peut dire que, de ce point de vue, l'algèbre ne peut pas être considérée comme une simple généralisation de l'arithmétique. "Learning algebra is not merely a question of making explicit what was implicit" (Kieran 1989). C'est sans doute l'un des résultats fondamentaux obtenus par la recherche dans ce domaine que d'avoir mis en évidence que l'algèbre ne s'apprend pas par de simples transferts et généralisations des connaissances de l'arithmétique même si, dans les deux domaines, les calculs et leur gestion ont beaucoup d'éléments en commun.

Nous précisons ci-après quelques-uns des résultats des recherches conduites au niveau de cette rupture.

- Le statut du signe d'égalité

Le signe d'égalité pose un problème de rupture essentiel. Il a, en effet, essentiellement en arithmétique, le statut d'annonce d'un résultat alors qu'en algèbre il traduit une relation d'équivalence, notamment dans les équations. Pour les élèves, après le début des enseignements

de l'algèbre, le signe d'égalité reste souvent cantonné dans son sens initial dominant en arithmétique (Vergnaud 1987). Ce statut d'annonce d'un résultat est à l'origine d'écritures bien connues des enseignants comme $12 + 3 + 5 = 15 = 20$ où la symétrie et la transitivité de l'égalité se trouvent violées. Il rend aussi difficile à certains élèves l'acceptation du fait qu'en algèbre, toute expression ne peut être réduite à une « expression résultat » sans signe opératoire apparent et il contribue à expliquer des erreurs bien connues des enseignants comme $2x + 3x^2 = 5x^3$. Il rend plus difficile la prise de sens d'équations comme $2x + 3 = x + 4$ et contribue à expliquer les décalages fréquemment observés dans les réussites, si l'on compare avec des équations comme $2x + 3 = 7$.

- Le statut des lettres

En arithmétique, on utilise des lettres mais elles sont présentes pour désigner des mesures ou bien jouent un rôle d'étiquette comme dans l'expression 7m utilisée pour désigner 7 mètres ou 7 motos. En algèbre, les lettres désignent des nombres qui sont traités en tant que tels dans les calculs. Ainsi 7m désigne le produit de 7 par le nombre m. Le passage d'une conception à l'autre ne va pas de soi pour les élèves. Ces différences ont été particulièrement étudiées par Booth (Booth 1984) et Kieran (Kieran 1990).

Une classification des différents statuts des lettres a été, par ailleurs, proposée par Küchemann (Küchemann 1981) qui il distingue :

- lettre évaluée : on la remplace par une valeur numérique,
- lettre non considérée : la lettre est ignorée dans le calcul,
- objet concret : la lettre est une étiquette,
- inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu à rechercher,
- nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs,
- variable : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel.

Le décalage qui peut exister entre le statut attribué à la lettre par un élève et son professeur constitue aussi un obstacle et surprend souvent les enseignants qui voient dans certaines erreurs de leurs élèves une régression alors qu'il s'agit plutôt d'une prise en compte insuffisante du niveau auquel fonctionne l'élève.

- Fausse continuités et discontinuités

Comme nous l'avons déjà souligné, pour Kieran (Kieran 1994) les difficultés des élèves en algèbre proviennent en partie de présentations de l'algèbre qui en font une simple *généralisation* de l'arithmétique. Même si l'activité algébrique s'appuie sur des compétences arithmétiques, il existe entre les deux domaines à la fois de fausses continuités et des discontinuités dont l'enseignant doit être conscient.

Les fausses continuités résident, selon l'auteur, dans :

- le partage des mêmes symboles et signes (opérateurs et égalité) mais avec une interprétation différente,
- la présence de lettres n'ayant plus la même signification.

Les discontinuités tiennent quant à elles à :

- la mise en œuvre de démarches de résolution différentes,
- l'utilisation de nouveaux objets (expressions, équations, inéquations...),
- le déplacement de conceptions procédurales vers des conceptions structurales,
- la représentation formelle des problèmes,
- l'utilisation de procédures formelles pour leur résolution.

b) Le statut des expressions algébriques

Les expressions algébriques sont de nouveaux objets introduits par l'algèbre mais des objets construits avec des éléments : nombres, signes opératoires qui appartiennent aussi à l'arithmétique. En arithmétique, si un signe opératoire apparaît dans une écriture, il indique un calcul à effectuer. En algèbre, comme nous l'avons déjà fait remarquer, ce n'est pas nécessairement le cas et des signes opératoires restent souvent présents au niveau des résultats. Par exemple, dans l'expression $x + 1$ le signe opératoire additif ne donne pas lieu à exécution d'un calcul. Cette difficulté, dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, et les erreurs qu'elle produit (nous en avons cité un exemple typique plus haut) a été identifiée très tôt par les chercheurs (Davis 1974).

Les recherches se sont aussi intéressées plus généralement aux conceptions que les élèves développent vis à vis des expressions algébriques, au statut qu'ils leur donnent. A. Sfard (Sfard 1991) propose ainsi de distinguer deux conceptions principales pour une expression algébrique : elle peut être conçue soit de façon structurale, comme un objet, soit de façon opérationnelle, comme un processus, et A. Sfard souligne que, dans une activité mathématique efficace, on articule ces deux conceptions en fonction des besoins. Cette analyse conduit, par exemple, à considérer suivant les contextes une expression comme $5x+3$ soit comme le processus opératoire consistant à prendre un nombre, le multiplier par 5 et lui enlever 3, soit comme le résultat de ce processus opératoire, un objet qui peut être considéré comme un tout et, par exemple, substitué à une autre lettre dans un calcul, soit comme l'expression générique d'un nombre congru à trois modulo cinq (au même titre que $2n+1$ désigne génériquement un nombre impair), soit comme l'image de x par une fonction ou, enfin, comme une chaîne de symboles sans signification mais sur laquelle on peut agir de manière formelle à l'aide de règles bien définies. L'étude du développement cognitif de l'élève tend à montrer que les conceptions opérationnelles précèdent généralement les conceptions structurales, et que l'introduction trop précoce d'approches structurales, en empêchant les conceptions opérationnelles de se développer, conduit à la constitution de pseudo-objets pour lesquels le jeu entre les deux types de conceptions ne peut pas s'enclencher.

La question du statut des expressions algébriques est abordée par d'autres chercheurs dans une analyse organisée autour de la syntaxe des expressions, de leurs référents possibles et de leur sens. C'est le cas de J.F. Nicaud (Nicaud, 1994) qui a développé un logiciel tutoriel pour les tâches de factorisation et s'appuie sur une analyse où, à côté d'une composante syntaxique, il distingue trois niveaux différents de traitement sémantique des expressions algébriques, correspondant à des compétences algébriques différentes :

- niveau 1 : attribution de valeurs aux variables intervenant dans une expression algébrique,
- niveau 2 : transformation d'une expression en une expression équivalente (développement, factorisation) par un calcul direct,
- niveau 3 : organisation des étapes d'un calcul algébrique à l'aide d'un raisonnement stratégique.

Nicaud considère « qu'on effectue un réel travail d'algèbre lorsqu'une partie significative de l'activité se situe au troisième niveau. »

De son côté, Drouhard (Drouhard 1992) s'appuie sur les concepts de sens, dénotation, interprétation et connotation pour analyser le traitement des expressions algébriques au niveau de l'algèbre élémentaire. Ainsi les écritures 2 ou $\sqrt{4}$ ou $1+1$ renvoient au même nombre qui est leur unique *dénotation*, en revanche, chacune porte un sens différent puisqu'elles relèvent de domaines de description différents et ne nous donnent pas à voir les mêmes propriétés du nombre 2. De la même façon, les deux expressions algébriques : $(x-2)^2 + 1$ et $x^2 - 4x + 5$ ont la même dénotation, mais non le même sens. Seule, la première nous donne à voir que l'expression est

toujours positive, par exemple. Le traitement d'une expression dépend de son *sens*, mais il s'effectue en conservant sa *dénotation*. Une expression a pour *interprétation* dans un cadre donné (au sens des travaux de R. Douady (Douady 1984)) tout objet qui correspond à la dénotation de cette expression dans ce cadre. Enfin la notion de *connotation* désigne la perception et l'interprétation subjective de l'élève d'une expression en fonction de son expérience scolaire et des situations au cours desquelles il a déjà fréquenté des objets analogues.

Les recherches mettent en évidence les décalages qui peuvent exister entre les réalisations d'un élève et les attentes du professeur en raison des connotations différentes qui guident leurs perceptions respectives. Elles montrent aussi que, même au niveau du lycée, de nombreux élèves, d'une part, ne respectent pas la dénotation des expressions algébriques dans les transformations qu'ils leur font subir, d'autre part, ne sont pas capables de piloter les calculs algébriques en prenant en compte le sens des expressions (GECO, 1997).

c) Stratégies d'apprentissage de l'algèbre

L'apprentissage de l'algèbre ne se limite pas à son étude en tant qu'objet, même si c'est cette dimension que nous avons plus particulièrement évoquée à travers le recensement des travaux de recherche.

Les stratégies proposées à partir des travaux de recherche prennent toutes en compte l'impossibilité de se limiter au traitement des problèmes de syntaxe et mettent en avant la résolution de problèmes où l'algèbre est un outil pertinent. Les connaissances des élèves entrant au collège leur permettent de résoudre de nombreux problèmes d'arithmétique et le traitement algébrique de ces problèmes est souvent privilégié comme point d'entrée dans la dimension outil de l'algèbre. La résolution algébrique passe alors par l'écriture de relations explicites entre les données et les inconnues qui sont ensuite traitées à l'aide de procédures spécifiques pour trouver la solution. La résolution algébrique est alors présentée aux élèves comme un moyen efficace et économique de résoudre ce type de problèmes.

Cette stratégie n'est pas sans inconvénient : d'une part, elle tend à présenter l'algèbre comme une simple généralisation de l'arithmétique, d'autre part, il n'est pas facile de convaincre les élèves, peu familiers avec le domaine algébrique, que le détour algébrique est réellement un moyen plus efficace et économique que les techniques arithmétiques qui leur sont familières. Ceci sera particulièrement vrai si, comme c'est souvent le cas, on utilise des problèmes où le détour algébrique ne s'impose pas. Il est donc important de proposer des problèmes que les élèves ne peuvent résoudre par des moyens arithmétiques et où l'outil algébrique s'impose comme un moyen de résolution. G. Vergnaud a bien souligné que c'est dans les équations du type $ax + b = cx + d$ que l'algèbre devient un outil plus pertinent que l'arithmétique et non dans celles de la forme $x + a = b$ ou $ax = b$ qui sont privilégiées au début du collège.

Comme le soulignent de nombreux chercheurs, la dimension outil de l'algèbre peut s'exprimer dans d'autres types de problèmes et il serait dommage de se limiter aux problèmes dits arithmétiques dans l'initiation à ce domaine au collège. Il peut s'agir notamment de problèmes de géométrie mettant en jeu des mesures de longueurs, d'aires et d'angles mais aussi de problèmes conduisant à prouver par l'algèbre des propriétés numériques, qui permettent d'engager l'algèbre dans l'initiation au travail de preuve et évitent de limiter cette initiation au seul raisonnement déductif géométrique.

Plus généralement, l'algèbre, dans sa dimension outil, est considérée dans les travaux récents, comme un outil de modélisation de problèmes issus d'autres domaines, des problèmes qui sont donc étudiés dans le cadre algébrique. La compétence algébrique s'évalue alors par la capacité à traduire algébriquement un problème puis à mobiliser des outils algébriques pour sa résolution. Le travail de modélisation algébrique est vu, d'autre part, comme un moyen pour les élèves de

donner du sens aux objets de l'algèbre et à leurs représentations symboliques. R. Douady, par exemple, affirme que c'est en terme d'équilibre entre la construction du sens et la familiarité technique des algorithmes que se conçoit l'apprentissage de l'algèbre, (Douady, 94).

Ce point de vue est partagé par Vergnaud qui propose dans la phase d'introduction de l'algèbre d'utiliser des situations qui conduisent l'élève à comprendre le caractère transitif et symétrique du signe de l'égalité, en introduisant en même temps des règles de manipulation des équations qui conservent cette égalité. Il pense aussi que l'introduction de l'algèbre, comme outil de résolution de problèmes, conduit inévitablement à la question de la modélisation à travers des situations "réalistes".

L'approche de Chevallard (Chevallard 1989) fait aussi intervenir la notion de modélisation qui, selon lui, permet de développer une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école élémentaire à l'université. Il affirme que « la fonctionnalité du calcul algébrique suppose précocement l'emploi de paramètres ; suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant leur production que leur mise en œuvre) et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction ».

J. Gascon (Gascon, 94) se situe dans la perspective anthropologique développée plus récemment par Y. Chevallard (Chevallard, 1992). Pour lui, l'algèbre s'impose comme un moyen de résolution de problèmes. Elle étudie un champ de problèmes qui contient à la fois des problèmes arithmétiques, des problèmes de construction géométrique, de dénombrement simple, de lignes de niveau etc. De plus, la méthode algébrique fournit une symbolisation globale de la relation entre les données et les inconnues d'un problème. Pour lui aussi les lettres peuvent prendre des statuts différents et l'usage de paramètres dans les formules contribue à leur faire jouer le rôle de modèles algébriques du système sous-jacent au problème.

Nous souhaiterions, pour terminer cette synthèse des travaux de recherche, mentionner la recherche menée par B. Grugeon (Grugeon 95) dont nous avons repris dans ce qui précède une partie des analyses. En s'appuyant sur les recherches existantes, elle a construit une structure d'analyse multidimensionnelle des compétences en algèbre élémentaire. Il s'agissait pour elle d'étudier les décalages existants entre les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire à la transition entre la seconde générale, les BEP tertiaire et la première STT et d'essayer de mieux comprendre et gérer, en fonction de ces décalages, les difficultés rencontrées dans les classes de première d'adaptation. Son étude des rapports institutionnels s'appuie à la fois sur l'étude fine des programmes et sur l'analyse de cahiers d'élèves. Elle construit aussi un outil diagnostique pour étudier les rapports personnels des élèves de la classe de première d'adaptation à l'algèbre. L'intérêt de ce type de recherche est de fournir des outils d'analyse qui peuvent permettre de "lire" les difficultés rencontrées par les élèves et de penser des scénarios d'intervention. Le problème de la transmission à des enseignants d'une version simplifiée de la structure d'analyse, accompagnée d'un outil de diagnostic adapté à la transition collège/lycée a été étudié dans son mémoire de DEA par A. Lenfant (Lenfant, 1997).

d) La diffusion des travaux de recherche

La plupart des travaux des chercheurs en didactique, prenant en compte la complexité des problèmes soulevés dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, atteignent un degré de complexité qui les rend difficiles à lire et à exploiter par des enseignants, sans formation ou accompagnement spécifique.

Il existe un autre type de travaux qui fournit des outils plus accessibles aux enseignants, tout en prenant en compte les travaux des chercheurs. Leur diffusion est réalisée par le canal de revues

professionnelles comme *Petit x*, *Repères IREM* ou le bulletin de l'APMEP¹ ou de publications des IREM² ou de l'INRP³.

Ainsi les travaux de recherche conduits à l'INRP (Colomb et al, 1995) qui s'appuient sur les travaux en didactique déjà évoqués (Chevallard, Kieran...). Ils visent à tester des hypothèses de recherches concernant plusieurs aspects de l'enseignement de l'algèbre (résolution de problèmes, calcul numérique, calcul littéral, résolution d'équations) et se donnent comme but de les confirmer ou de les infirmer. Ce travail est à destination des enseignants et l'analyse des résultats constitue un outil précieux et accessible pour la construction de l'enseignement de l'algèbre au collège.

L'étude porte sur les classes de quatrième et troisième et montre que, sur certaines compétences, les capacités des élèves s'accroissent d'une classe à l'autre alors qu'elles évoluent peu sur d'autres. En particulier :

- Dans une résolution de problème où les élèves ont le choix entre des procédures arithmétiques ou algébriques (cas où l'inconnue apparaît dans un seul membre, cf. plus haut), leur choix se porte massivement sur les procédures arithmétiques, les pourcentages évoluant cependant de la quatrième (85%) à la troisième (67%).
- Ils notent une résistance importante à la mise en équation, mais là encore la performance des élèves s'accroît de la quatrième à la troisième.
- Avec des différences importantes suivant le type de problèmes, les réussites à la mise en équation sont faibles (23%) en quatrième. Elles s'améliorent en troisième, bien que le taux de réussite reste inférieur à 50%.
- En ce qui concerne le calcul numérique, cette étude indique que les réussites sur les tâches de calcul d'expressions nécessitant la mise en œuvre des règles de priorité et l'emploi des parenthèses sont bonnes et progressent de la cinquième (82%) à la troisième (94%). Il en est de même pour le remplacement de lettres par des valeurs numériques simples.
- Les réussites sur des tâches nécessitant une analyse de la forme de l'expression donnée ou une anticipation de la forme attendue sont plus faibles mais progressent avec le niveau de la classe de 26% à 80%, par exemple, de la quatrième à la troisième pour le calcul de $2(a + 3)$.
- Pour les équations, les élèves mettent en œuvre des algorithmes de résolution au point de perdre la signification de l'action entreprise. La présence de zéro perturbe de manière importante la résolution d'une équation ($5a = 0$). Il y a cependant une forte progression des performances dans la résolution d'équations de la quatrième à la troisième, notamment quand l'inconnue est présente dans les deux membres.

Dans le cadre de la même institution (INRP), ces recherches ont servi ensuite de support à la mise en place d'ingénieries présentées dans une brochure intitulée : “ Les débuts de l'algèbre au collège : au pied de la lettre ” (Combier, Guillaume, Pressiat, 1996). Ce document se situe en aval des travaux des autres chercheurs déjà évoqués et propose une ingénierie pour plusieurs étapes de cet enseignement. Notamment, des séquences sur l'introduction des lettres en sixième et cinquième, la mise en équation en quatrième.

Soulignons que cette phase de transition entre la recherche et son exploitation par les enseignants ne va pas de soi. Elle est souvent réalisée dans les IREM et constitue l'une des tâches auxquelles se consacrent les équipes du groupement national d'équipes de recherche en

¹ Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

² Instituts de Recherche sur l'enseignement des mathématiques.

³ Institut national de recherche pédagogique.

didactique des mathématiques auxquelles sont associés des enseignants du secondaire qui y apportent leur point de vue de professionnels.

e) Outils d'évaluation

Terminons cette première partie en évoquant les travaux importants sur l'évaluation qui ont été menés ces dernières années.

La DPD⁴ a conduit depuis plusieurs années des évaluations en mathématiques. Elle fournit également aux enseignants des outils d'évaluation aux niveaux charnières (CM2-sixième-seconde) qui leur permettent de repérer les capacités de leurs élèves et leurs difficultés. Par exemple, dans l'évaluation nationale de seconde en 1996, sur des compétences liées au calcul d'une expression, " les résultats sont de 70,3% et 64,1% sur les items qui portent sur le calcul algébrique ou les équations et de 11,6% pour ceux qui portent sur le calcul des puissances de dix, qui reste une difficulté importante à l'entrée en seconde ”.

Dans la même évaluation menée en 1997, on a pu noter dans des classes de seconde 48% de réussite pour le calcul de $\left(-\frac{3}{2}a\right) \times (-8a)$ et 15% de réussite sur la factorisation de l'expression : $(x+5)^2 - 4$.

D'autres évaluations sont réalisées à grande échelle, comme celles de L'APMEP. Cette association a conduit depuis plusieurs années (1987-1997) des évaluations des programmes de mathématiques et a, en particulier, relevé ainsi les capacités des élèves dans le domaine de l'algèbre pour les quatre classes du collège puis les classes de lycée jusqu'à la première. Ces évaluations étudient les évolutions des élèves en s'appuyant sur des comparaisons d'items repris d'une évaluation à l'autre. Ils montrent une amélioration sensible des réussites sur le calcul algébrique. Par exemple, sur le développement de $(5-2x)(5+2x)$, on passe de 17% à 58% de réussites de la quatrième à la troisième. Cet accroissement des réussites ne doit cependant pas masquer que la proportion d'échecs reste relativement importante et que la manipulation des expressions algébriques reste une compétence en cours d'acquisition à la fin du collège.

Les deux évaluations précédentes sont plutôt conçues comme des outils de diagnostic pour mesurer les capacités des élèves (DPD) ou pour mesurer le niveau d'acquisition des "compétences exigibles" mentionnées dans les programmes (APMEP). Elles portent sur de vastes populations d'élèves et fournissent ainsi des outils de comparaisons utiles pour les professeurs. Précisons qu'elles cherchent à évaluer de vastes domaines de l'enseignement des mathématiques et ne se limitent donc pas à l'algèbre.

⁴Direction de la prospective et du développement- ministère de l'éducation nationale.

III. L'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée

Lorsque les élèves sont confrontés pour la première fois au concept de fonction, en fin de troisième, puis en seconde, ils doivent arriver à lui donner un statut d'objet mathématique et entrer dans une pensée fonctionnelle où il sera outil de modélisation. Tout ceci ne va pas de soi, car accéder à la maîtrise du concept nécessite notamment l'utilisation et la coordination des différents registres de représentation dans lesquels il s'exprime, le dépassement de conceptions purement procédurales, la reconnaissance de l'intérêt de la modélisation fonctionnelle par rapport aux approches numériques et algébriques développées jusqu'alors et enfin la capacité d'évoluer dans différents environnements : le chemin à parcourir sera long et semé d'embûches...

Nous présenterons dans cette partie, de façon synthétique, différents travaux de recherche didactique qui, nous semble-t-il, aident à mieux comprendre ce que met en jeu l'entrée dans la pensée fonctionnelle au début du lycée.

III.1. Des recherches didactiques sur le concept de fonction

a) De la modélisation algébrique à la modélisation fonctionnelle

Le concept de fonction est retenu par le savoir “savant” comme correspondance arbitraire et univoque entre une variable x , élément d'un ensemble E , et une variable (dépendante) y , élément d'un ensemble F . Il perd lors de son introduction en cycle secondaire un peu de sa généralité puisque l'on considère essentiellement les fonctions numériques de la variable réelle.

Ce qui caractérise ainsi plus spécifiquement le passage à la pensée fonctionnelle pour les apprenants, par opposition aux modes de pensée arithmétique et algébrique, est l'intégration d'une variation continue de la variable (recommandée par les programmes⁵), par opposition aux phénomènes “discrets” étudiés antérieurement.

Si le mode de pensée algébrique est relié au domaine des lettres, à l'usage du calcul littéral, et se caractérise par l'établissement d'équations, d'inéquations, de formules permettant la détermination d'inconnues, le mode de pensée fonctionnel est lui essentiellement caractérisé par des variables, des lois fonctionnelles et des variations. Penser ainsi en terme de variation impliquera d'attribuer aux lettres un autre statut, d'intégrer de nouveaux registres de représentation qui puissent rendre compte de ces variations.

Entrer dans ce mode fonctionnel permettra de modéliser des situations fonctionnelles c'est à dire, en reprenant les critères retenus par D. Pihoué (Pihoué, 96), des situations présentant les caractéristiques suivantes :

1. l'exposé est posé dans un cadre non fonctionnel (c'est à dire qu'aucune fonction n'est donnée a priori),
2. une modélisation du problème conduit à l'introduction d'une fonction,
3. l'étude des propriétés de cette fonction permet de résoudre le problème.

⁵ Ainsi les suites, dissociées au fur et à mesure des fonctions, pour devenir un chapitre à part dans les programmes, ne représentent plus un des enjeux de l'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée, et sont introduites seulement en première. La notion de dépendance continue est ainsi privilégiée, laissant peut-être un peu trop dans l'ombre celle de dépendance tout court.

A la suite d'une étude portant sur divers manuels de seconde (classe où sont introduites les fonctions de façon plus générale que les cas affines et linéaires de troisième), D. Pihoué conclut que le mode de pensée fonctionnelle est le plus souvent imposé par l'énoncé et demeure lié à la résolution d'équations essentiellement algébriques pour ce qui concerne ce niveau.

Il analyse de plus les comportements d'élèves face à deux situations fonctionnelles : la première, géométrique (recherche d'une aire maximale dans une figure donnée), la seconde, d'origine non mathématique (établissement d'une jauge pour un récipient donné). Il montre ainsi qu'en fin de seconde, le recours à un modèle fonctionnel, s'il n'est pas prescrit par l'énoncé, n'est pas naturel aux élèves, mais pointe des phases de la résolution où la transition vers un mode de pensée fonctionnelle se manifeste chez certains élèves et en analyse les caractéristiques.

En posant les questions d'entrée dans la pensée fonctionnelle en termes de modélisation de situations fonctionnelles, nous avons privilégié la dimension outil du concept. Nous aborderons, dans le paragraphe suivant, plus spécifiquement sa dimension objet, à travers la question de son statut.

b) Le statut des objets fonctionnels

Les recherches en didactique se sont attachées à distinguer au niveau des processus cognitifs les différents statuts que peut prendre un concept mathématique.

Ainsi Régine Douady (Douady, 86) introduit la dialectique outil-objet pour décrire les rôles d'outil et d'objet joués alternativement par les concepts mathématiques. De manière assez générale, ces derniers apparaissent d'abord comme outils implicites puis explicites dans la résolution de problèmes et ils n'acquièrent qu'ensuite le statut d'objets mathématiques (au sens d'objets culturels institutionnellement reconnus). Ils peuvent ensuite être réinvestis dans la recherche de nouveaux problèmes, recherche où ils joueront alors le rôle " d'ancien objet ".

Elle introduit aussi la notion didactique de cadre, ensemble des " objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leur formulation éventuellement diverse et des images mentales associées à ces objets et éléments ". Le passage d'un cadre à un autre (jeu de cadres) qui demande d'établir des correspondances entre objets et relations lors des phases de transfert et d'interprétation est, selon elle, un élément moteur des processus de conceptualisation par les interactions qu'il rend nécessaires.

A. Sfard (Sfard 91) distingue, comme elle l'a fait à propos des expressions algébriques, des conceptions procédurales et structurales de la notion de fonction, les conceptions procédurales précédant, selon elle, les conceptions structurales dans le processus d'apprentissage.

Dans un premier temps, l'apprenant découvre un nouveau processus constitué d'opérations exécutées sur des objets mathématiques connus. Ceci permet au concept d'acquiescer plutôt un statut procédural. Pour les fonctions, par exemple, c'est lorsque l'apprenant aura acquis l'idée de variable, qu'il saura déterminer les valeurs de la variable sortie (l'image) en fonction de celles de la variable entrée.

Ensuite, l'apprenant devient capable de se référer au processus de façon plus économique – par un nom (son nom de fonction) – et il peut effectuer un certain nombre d'opérations sur le processus ainsi globalisé et intériorisé : calculs, tracé de courbes...

La dernière phase de l'apprentissage se produit lorsque l'objet (ici les fonctions) se dégage du processus de production pour devenir un objet à part entière, est intégré à une certaine catégorie dont on peut étudier les propriétés ou dans laquelle on peut chercher des représentants particuliers répondant à certaines conditions (recherche de solution d'équation fonctionnelle ou différentielle, par exemple). L'objet fonction acquiesce alors davantage un statut structural.

Notons toutefois que, selon les contextes, c'est parfois une conception procédurale, parfois structurale qui pourra être privilégiée, car ces deux statuts ne fonctionnent pas en opposition mais en dualité. En fait, lors de l'introduction du concept de fonction en début de lycée, c'est le statut procédural de l'objet qui est essentiellement visé dans l'enseignement actuel, le statut structural intervenant beaucoup plus en fin de cycle secondaire et à l'université. Mais pour permettre aux apprenants d'intérioriser le processus, la résolution de problèmes, dans lesquels il interviendra comme outil, sera déterminante.

Cette résolution de problèmes passe essentiellement par des processus de modélisation qu'Yves Chevallard [Chevallard, 89] décompose en trois étapes :

1. définition du système et reconnaissance des aspects pertinents par rapport à l'étude envisagée ;
2. construction du modèle qui est l'ensemble des relations établies entre les variables prises en compte ;
3. " travail " sur le modèle pour produire des connaissances sur le système par l'intermédiaire de nouvelles relations entre les variables.

C'est la troisième étape seule qui est proprement mathématique, le système initial pouvant être extramathématique.

c) Les différents registres associés aux fonctions

Que l'on considère le concept dans sa dimension objet ou outil, celui-ci peut être caractérisé comme le propose Gérard Vergnaud (Vergnaud 90) par le triplet suivant :

- S : ensemble de situations donnant du sens (référence) ;
- I : ensemble des invariants rendant possible le recours aux schèmes (signifié) ;
- s : ensemble des formes langagières ou non symbolisant le concept (signifiant).

G. Vergnaud appelle *schème* " l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée ". Celui-ci est composé " de règles d'actions et d'anticipations puisqu'il génère une suite d'actions en vue d'atteindre un certain but ", d'invariants opératoires (concepts et théorèmes en actes) et d'inférences en situation.

Étudier le développement et le fonctionnement d'un concept mathématique, au cours d'un apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations.

G. Vergnaud privilégie ainsi un système d'élaboration pragmatique des connaissances où interviennent dualement symbolisme et situations.

S'intéressant plus particulièrement aux signifiants, R. Duval (Duval 93) s'appuie sur la notion de *registre sémiotique*, ensemble de signes (traits, symboles, icônes...) appartenant à un même réseau sémantique qui permet l'appréhension et la production d'une représentation du concept. A tout registre sémiotique pourra ainsi être associé un registre correspondant de représentation si celui-ci permet le fonctionnement des activités cognitives propres au traitement des signes :

1. formation d'une représentation identifiable dans un registre donné, ce qui implique la connaissance des règles propres au registre et la capacité d'accomplir une tâche de description pour produire la représentation ;
2. traitement d'une représentation dans un registre donné selon des règles de traitement qui sont propres à chaque registre ;
3. conversion d'une représentation d'un registre dans un autre, ce qui requiert de faire la différence entre le sens et la référence des symboles et des signes, sans qu'il s'agisse là de

codage dans un autre registre (substitutions directes de signifiants), ni d'interprétation (ce qui sous-entend un changement de cadre théorique⁶).

La capacité, pour un élève, d'effectuer des conversions entre différents registres de représentation d'un concept est ainsi, pour R. Duval, le signe d'une compréhension intégrative du concept. Cette conversion ne peut avoir lieu que si sont clairement identifiées les unités sémiotiques propres à chaque registre et les correspondances qui s'effectuent entre ces unités sémiotiques dans le passage d'un registre à l'autre⁷. Mais il n'y a pas forcément congruence dans ce passage (les unités ne se correspondent pas forcément de façon bijective, elles ne s'organisent pas forcément de la même façon dans les deux registres et c'est bien pourquoi l'activité de conversion n'est pas seulement une activité de codage). Ceci entraîne des difficultés de conversion, et donc des difficultés d'appréhension du concept.

En ce qui concerne les fonctions, les principaux registres de représentation sont les suivants :

- algébrique (loi fonctionnelle qui va permettre le calcul de la variable dépendante) ;
- graphique (la correspondance fonctionnelle s'exprime au travers d'un ensemble de points du plan) ;
- programmation (processus automatisé permettant d'obtenir des valeurs de la variable dépendante) ;
- tableau (la loi fonctionnelle est ici réduite à une description discrète).

On peut ajouter :

- diagramme (la loi fonctionnelle est exprimée de façon générique) ;
- verbal (la loi fonctionnelle est exprimée à travers les mots de la langue naturelle).

Pour ce dernier registre, nous soulignerons toutefois que s'il fait essentiellement intervenir des procédures langagières, celles-ci ne peuvent être absentes du travail dans un quelconque registre donné.

En effet, tout processus de conceptualisation met en jeu des procédures langagières d'explicitation, de formulation et les apprenants devront, outre la maîtrise des divers registres de représentation, de leurs règles et de leurs variables, faire interagir langue naturelle et écriture symbolique lors des opérations qu'ils effectueront dans ces divers registres, nouvelle source de difficultés comme l'a montré Colette Laborde (Laborde, 82).

Celle-ci introduit le concept de *code* : “ système structuré de signes permettant à un émetteur de transmettre un message à un récepteur, un code est caractérisé par un répertoire de signes et par des règles d'agencement entre signes ”. L'écriture symbolique en mathématique, la langue naturelle sont des codes qui interagissent lors de toute activité mathématique. Elle met en évidence l'apparition d'un code hybride : la langue mathématique, résultat des déformations réciproquement subies, dans le discours mathématique.

Toute activité dans un registre donné mettra en jeu différents codes qui devront être maîtrisés et contrôlés par les apprenants. Le rôle de la langue et du discours est donc très important lors de la constitution des images mentales associées au concept et le processus de conceptualisation

⁶ Lors d'activités de transfert entre cadres, des problèmes d'interprétation se posent, mais soulignons que si "un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales, un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques". Ainsi, "il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres". [R. Duval]

⁷ Les traits graphiques de la représentation d'une fonction sont les unités sémiotiques du registre graphique : croissance ou décroissance sur un intervalle, position de la courbe par rapport aux axes, position des points d'intersection éventuels avec les axes, linéarité, discontinuités, convexité... Dans le registre des écritures algébriques, les unités sémiotiques sont celles intervenant dans une expression algébrique de la fonction voire de l'une de ses dérivées si elles existent, par exemple, le signe des coefficients numériques, le degré de l'expression...

⁸ Parmi les exemples les plus "perturbants" ou "paradoxaux", on peut relever le tracé de certaines courbes sur certains intervalles.

requiert, lors des phases d'institutionnalisation, le recours à un vocabulaire précis, à des définitions explicites, qui sont parfois négligées ou pour lesquelles il n'y a pas consensus (Noguès 92).

d) La problématique des environnements

Depuis quelques années, l'apparition dans les classes (le cours de mathématiques, en particulier) de calculatrices de plus en plus performantes et d'ordinateurs a ajouté aux problèmes de conceptualisation, qui jusqu'alors se posait dans un environnement papier/crayon, les problèmes liés à l'environnement informatique.

Les difficultés liées à cet environnement ont été soulignées par différents chercheurs, par exemple N. Balacheff (Balacheff 94) et M. Artigue (Artigue 95). L. Trouche (Trouche 96) a étudié plus précisément les rapports entre processus de conceptualisation et d'instrumentation. Enfin la nécessité d'une formation tant initiale que continue a été mise en évidence (Bernard et al. 97).

1. L'environnement informatique, par les contraintes de médiation qu'il introduit, modifie les objets qui sont représentés. Nicolas Balacheff analyse et nomme ce nouveau phénomène : la *transposition informatique*. Son analyse distingue trois régions :

- univers interne ;
- interface ;
- univers externe ;

liées à l'utilisation d'un dispositif informatique et qui sont autant de lieux de représentations des connaissances.

Les choix des concepteurs et les progrès techniques régissent au niveau interne les effets obtenus à l'interface, lieu de visualisation et de manipulation directe d'entités abstraites qui se retrouvent ainsi soumises à des phénomènes non intrinsèques⁸. Mais plutôt que de s'interroger sur la "fidélité" des représentations des dispositifs informatiques, Balacheff propose de s'attacher à la problématique du domaine de validité des représentations qui permettrait, sans ignorer les limites de telles représentations, de rendre compte de la réalité des bénéfices que l'on peut en tirer.

2. De façon plus pragmatique, Michèle Artigue analyse deux phénomènes liés à la transposition informatique, celui de la *double référence*⁹ et celui de la *pseudo transparence*¹⁰ et tient à souligner qu'il n'y a pas de familiarité immédiate avec l'environnement informatique. Par ailleurs, elle insiste sur la spécificité des processus d'adaptation aux EIAO¹¹, plus précisément sur le rôle joué par la possibilité d'une adaptation perceptive globale au détriment d'un fonctionnement plus analytique¹². Elle met aussi en évidence le fait que, si le recours aux EIAO, lié à une économie dans la résolution de certaines tâches, peut entraîner effectivement un fonctionnement plus réflexif et conceptuel chez les élèves, il peut aussi entraîner l'apparition de *comportements de pêche* dans la recherche de solutions¹³.

3. A propos des processus de conceptualisation, Luc Trouche s'appuie sur les travaux de Gérard Vergnaud pour attribuer aux schèmes, "totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet

⁹A propos de la factorisation de $x^n - 1$, les processus mis en œuvre par le logiciel Derive ne correspondent pas forcément aux propriétés à utiliser recommandées par les programmes officiels.

¹⁰A propos d'activités de parenthésage d'expressions mathématiques, le traitement informatique de certains symboles – crochets par exemple – est différent selon le contexte.

¹¹ EIAO : environnement interactif d'apprentissage avec ordinateur.

¹² Elle observe ainsi des séances autour des polynômes du second degré et conclut que la connaissance du rôle des coefficients sur la forme de la parabole associée peut être liée à une association perceptive globale, sans que l'articulation registre visuel, registre numérique soit effective.

¹³ L'auteur analyse à ce propos les stratégies mises en place pour déterminer comment on passe d'une équation à une autre. Deux élèves demandent ainsi à la calculatrice d'effectuer le quotient de deux équations...

pour une classe de situations spécifiée”, une place primordiale lors d’un processus de conceptualisation. Repérer les différentes étapes d’un tel processus requiert la mise en place d’un dispositif permettant le repérage des conceptions des apprenants à travers leurs réalisations.

Il reprend les travaux de Pierre Rabardel¹⁴, pour définir ce qu’est un processus d’instrumentation. L’appropriation d’un artefact (objet technique, machine) s’accompagne de l’élaboration de schèmes d’utilisation (schèmes d’action instrumentée, schèmes d’usage) spécifiques. Le processus d’instrumentation est défini par “ l’accommodation des schèmes du sujet, consécutive à la découverte progressive des propriétés intrinsèques de l’instrument ”.

Il s’attache alors à repérer l’ensemble des conceptions des élèves, relatives à un concept (ici celui de limite), à déterminer les schèmes d’instrumentation (relatifs à une calculatrice graphique et aussi à une calculatrice symbolique) et à établir les rapports entre les deux processus.

Il met en évidence que la nature des liens entre les deux processus dépend du concept étudié, de l’instrument utilisé mais aussi du “ profil ” des élèves, dénomination qui renvoie à une classe de comportements spécifiques. L’interdépendance des processus de conceptualisation et d’instrumentation imposera ainsi une triple prise en compte par l’enseignant de la connaissance à enseigner, de l’instrument et de la diversité des élèves.

4. Soulignons pour terminer que la prise en compte de ce nouvel environnement rend nécessaire une formation des enseignants, tant initiale que continue.

Michèle Artigue (Artigue 95) propose de :

- présenter des recueils de situations mises au point par des chercheurs et des innovateurs qui ont déjà été expérimentées ;
- informer sur les phénomènes didactiques spécifiques auxquels les stagiaires seront nécessairement confrontés lors de leur cursus d’enseignant, sur les moyens de les repérer et de les gérer efficacement.

Dans leur rapport, faisant suite à une étude sur l’intégration des outils informatiques dans la formation initiale, (Bernard et al. 97), complètent ces propositions en envisageant certains moyens :

- inciter à la rédaction de mémoires professionnels sur ce thème ;
- proposer des prêts tournants de matériel ;
- insérer la problématique posée par l’intégration de ces nouveaux outils dans d’autres problématiques en la rendant ainsi plus globale, par exemple :
 - outils de calcul et pédagogie différenciée ;
 - outils de calcul et débat scientifique ;
 - outils de calcul, argumentation, et preuve.

¹⁴ Voir en particulier, Pierre Rabardel : *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, 1995, Armand Colin.

III.2. L'apprentissage des fonctions au lycée

Cet aperçu des différents statuts du concept de fonction (outil-objet), de ses divers registres de représentation, des problèmes liés à l'apparition d'un nouvel environnement, permettent de percevoir les enjeux qui seront attachés à l'apprentissage des fonctions au lycée.

Les fonctions, engagées comme outil dans la résolution de problèmes, acquièrent peu à peu un statut d'objet "procédural" à travers leurs différents registres de représentation et les divers environnements avant de se constituer en objet "structural".

Les situations proposées devront ainsi permettre l'émergence de cet objet. Divers travaux ont proposé, en terme d'introduction, des approches géométriques (par exemple, recherche d'une aire extrême dans une figure donnée) en opposition aux approches cinématiques (par exemple, étude du remplissage d'un récipient) plus susceptibles de faire accéder les élèves à la notion de variable dépendante et de variations.

Dans tous les cas, afin de permettre l'émergence d'une pensée fonctionnelle, il faudrait mettre en place des situations fonctionnelles réellement ouvertes et axées sur ce qui fait vraiment la différence avec le mode de pensée algébrique : la notion de variation, se départissant ainsi d'un travail trop restreint à une résolution d'équation.

Cet aspect est essentiellement développé dans l'exemple proposé par le groupe "intégration des outils informatiques" de Montpellier (partie IV). Toutefois cette proposition ne néglige pas non plus un deuxième aspect, qui est l'utilisation de différents registres de représentation, même si les activités de conversion ne sont pas demandées à tous les apprenants, à ce stade de l'apprentissage, mais font l'objet d'une synthèse.

C'est le travail de l'équipe de Strasbourg qui permet de mettre plus particulièrement l'accent sur l'articulation des registres graphiques et algébriques, deuxième enjeu de l'apprentissage des fonctions au lycée. Lorsque les activités de passage entre divers registres seront maîtrisées, alors l'apprenant pourra plus facilement attribuer à l'objet fonction un statut structural lui permettant d'accéder à des concepts de niveau supérieur.

Les travaux de l'IREM de Montpellier introduisent une dimension supplémentaire à leur projet, en proposant un travail dans un environnement de calculatrice *formelle*. Les possibilités de calcul approché, exact, formel relèvent véritablement d'un bouleversement symbolique et la généralisation de ce type d'environnement dans les classes fait de sa prise en compte un enjeu important aussi bien pour l'enseignement de l'analyse que celui de l'algèbre.

IV. Exemples de travaux sur le calcul algébrique

IV.1. Calcul numérique et calcul algébrique au collège : analyse des difficultés et propositions d'activités (Equipe de Strasbourg)

L'équipe de Strasbourg, dont nous résumons ici les travaux, a mené une recherche sur l'accès au monde de la formalisation et du calcul littéral au collège. Un premier temps du travail a consisté à analyser les difficultés rencontrées par les élèves en cinquième, quatrième et troisième. Dans un deuxième temps, des activités destinées à favoriser les apprentissages à faire pour surmonter ces difficultés ont été élaborées et proposées aux élèves. L'efficacité et les limites de la stratégie didactique adoptée ont été évaluées dans un troisième temps de travail. Voici un compte rendu succinct de ces trois aspects de la recherche.

Analyse des difficultés rencontrées par les élèves

L'idée qui a guidé le travail est en fait que lors des travaux d'initiation à l'algèbre esquissés par les commentaires des programmes (passage du numérique à l'algébrique, situations où l'algèbre se révèle comme un outil, etc.) l'élève se trouve en fait confronté à des registres différents (registre numérique, registre algorithmique, registre littéral ou registre du langage naturel) et que la navette de l'un à l'autre de ces registres recouvre en fait une variété de difficultés différentes d'expression et de traitement. Repérer et hiérarchiser quelques-unes des difficultés de cet ordre fut donc la première tâche. Pour cela, l'équipe a élaboré un test qui permettait de repérer a priori dans les trois derniers niveaux du collège des évolutions dans la compréhension et la manipulation de la notion de variable. Les observations faites en début d'année dans les classes de cinquième, quatrième et troisième ont été menées dans quatre collèges représentatifs de situations sociologiques variées.

Les résultats nous ont conduits à distinguer quatre catégories de questions : celles qui paraissent d'un accès facile dès la cinquième, celles qui deviennent progressivement d'un accès facile, celles pour lesquelles on note des progrès réguliers mais dont l'accès n'est pas encore suffisamment maîtrisé en troisième et enfin celles qui offrent des résistances tenaces quel que soit le niveau où elles sont posées. Ce constat effectué, nous avons essayé d'analyser les tâches que recouvrent ces différentes catégories de questions.

Première catégorie : questions pour lesquelles il y a un bon taux de réussite de la cinquième à la troisième (>75% tout au long des trois niveaux). Il s'agit de tâches où l'objectif est de calculer en respectant les règles de priorité et d'écrire correctement les calculs.

Exemples :

Calcul du périmètre d'un rectangle à partir de données numériques

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	85%	94%	93%

Calcul de $49 \times 29 + 51 \times 29$

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	82%	88%	97%

Deuxième catégorie : questions pour lesquelles on constate une progression régulière pour aboutir finalement à un bon taux de réussite en troisième (>75%). Les élèves doivent exprimer des situations à l'aide de variables. Pour ces exercices, les pourcentages qui atteignent des valeurs élevées traduisent une bonne maîtrise de tâches fréquemment pratiquées à tous les niveaux depuis l'introduction des nouveaux programmes.

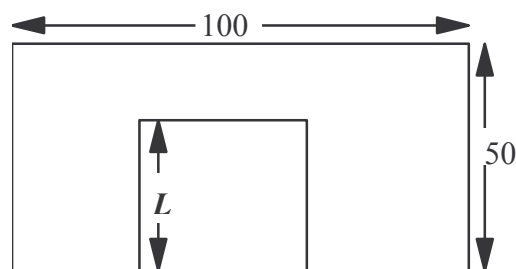
Exemple :

Exprimer l'aire d'un rectangle sachant que ses dimensions sont 5 et L

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	50%	70%	88%

Le seul exercice de cette catégorie qui donne de très faibles résultats est celui où la complexité de la figure fait obstacle :

Il s'agit (a) d'exprimer le périmètre de cette figure à partir des données indiquées et (b) de calculer la valeur de ce périmètre lorsque $L = 25$



a	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	13%	10%	31%
b	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	16%	11%	33%

Troisième catégorie : questions pour lesquelles, malgré une progression tout au long des trois niveaux, les échecs sont encore majoritaires en troisième. Les élèves doivent fournir ou reconnaître la description d'un traitement à effectuer.

Exemples :

Reconnaître les expressions donnant l'aire d'un rectangle composé de 2 rectangles de dimensions respectives a et b, 7 et b

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite (3 formules)	26%	46%	50%

Décrire le programme de calcul mental de $49 \times 29 + 51 \times 29$

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	22%	35%	50%

Quatrième catégorie : questions pour lesquelles il y a un fort taux d'échecs (au moins deux tiers) dans les trois niveaux. Dans cette catégorie nous trouvons paradoxalement des exercices purement numériques côtoyant des exercices comportant des variables. Pourquoi cela ? La difficulté commune est qu'il faut transformer une expression en une autre pour répondre à la question. De fait en amont de cette difficulté, on constate que les élèves ont du mal à entrer dans un registre où, soit les nombres, soit les lettres sont manipulés comme des symboles. Ainsi, le fait de décrire le traitement à effectuer sur une variable pour mettre en œuvre une formule donnée donne lieu à des erreurs fréquentes de la cinquième à la troisième. L'analyse montre que ces erreurs consistent à décrire un ordre de calcul qui correspond à l'ordre de lecture et non pas à l'organisation des calculs à partir de la variable à laquelle on affecte une valeur numérique. Et remarquons que ces erreurs se produisent malgré de nombreuses occasions de la cinquième à la troisième où les élèves ont à " formaliser " une situation.

Exemples :

Calculer mentalement $987654321 \times 1234 - 987654321 \times 234$

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	14%	24%	28%

Ecrire un programme de calcul correspondant à l'expression $(3 + 5 \times n) \times 2 - 6$

	Cinquième	Quatrième	Troisième
Réussite	21%	24%	30%

C'est à la suite de ce repérage que, dans une deuxième étape, nous nous sommes particulièrement attachés à proposer à nos élèves des activités destinées à les aider à surmonter les points de résistance mis en évidence dans les catégories 3 et 4.

Activités proposées

Notre but a donc consisté à élaborer des activités en cinquième et quatrième où considérer une lettre ou un nombre comme une entité symbolique soit une nécessité et où, d'autre part, apparaissait la nécessité de prouver des équivalences entre formules ou programmes. Il est bien entendu que, par ailleurs, tout au long du déroulement du programme de cinquième et quatrième, nous avons proposé aux élèves des situations où des besoins spécifiques de formulations ou de traitements algébriques apparaissent (problèmes géométriques, problèmes numériques, proportionnalité...)

En quatrième, nous avons élaboré un scénario d'activités basé sur des échanges de messages entre élèves où les objectifs d'apprentissage sont :

- savoir transformer un programme de calcul en formule et se servir de parenthèses
- savoir transformer une formule en un programme de calcul et maîtriser l'organisation du calcul autour de la variable
- savoir utiliser la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition comme un outil de transformation des formules (dans le domaine algébrique, une entrée dans le " monde de la démonstration " consiste à chercher ou prouver des équivalences entre formules).

En cinquième, nous avons élaboré une activité qui offre des perspectives similaires en s'appuyant a priori sur un contexte uniquement numérique. Mais il fallait bien entendu que les contraintes données obligent les élèves à manipuler certains des nombres comme des entités symboliques, indépendamment de leurs valeurs numériques. En outre, cette activité, comme celles de quatrième, s'inscrit aussi dans la volonté de préparer le terrain aux exercices qui consistent à trouver et prouver des règles générales. Il s'agit pour les élèves d'écrire et décoder des programmes de calculs où certains nombres sont manipulés comme des symboles. Par exemple, de trouver un programme qui donne le chiffre des dizaines d'un nombre entier à trois chiffres à partir d'instructions élémentaires (diviser par 100, prendre la partie entière etc., mettre en mémoire + etc.)

Evolution des élèves

Un test final a permis d'évaluer les progrès réalisés par les élèves en fin d'année. Les différences constatées entre les productions des élèves en début d'année et fin d'année ont permis de mettre en évidence l'efficacité de la stratégie didactique adoptée et ses limites en fonction des niveaux d'enseignement.

Le test final comprenait à nouveau des exercices analogues à ceux proposés en début d'année. C'est par rapport aux quatre catégories de tâches repérées lors du test de début d'année que nous pouvons rendre compte des évolutions des élèves.

Pour les **deux premières catégories** (écriture et organisation de calculs et expression de situations à l'aide de variables) les réussites restent importantes. Des progrès intéressants sont particulièrement à signaler en cinquième pour l'expression de situations à l'aide de variables). Il est vrai que c'est en cinquième que l'on commence à voir plus systématiquement des situations de formulation. De nombreuses activités dans ce sens ont été développées dans les classes.

Pour la **troisième catégorie** (description d'un traitement à effectuer), en comparant ces résultats à ceux observés au premier trimestre sur une question de formulation identique, nous constatons une persistance de résultats médiocres en cinquième (26% contre 21% au premier trimestre), alors qu'en quatrième (75% contre 24% au premier trimestre), et même en troisième (60% contre 30%) avec un enseignement usuel, nous assistons à un véritable décollage. Il est vrai que les activités conçues pour que les lettres soient considérées comme des variables ont particulièrement été travaillées en quatrième et aussi en troisième (à un niveau moindre et pas dans toutes les classes).

Pour la **quatrième catégorie** (les élèves transforment une expression en une autre) les pourcentages de réussite restent dans une fourchette de 30 à 50%. Cela prouve que cette tâche reste difficile. Mais nous pouvons constater une progression à tous les niveaux. On passe de 14 à 35% de réussite en cinquième pour le calcul astucieux, de 24 à 49% en quatrième et de 28 à 34% en troisième.

Il nous semble donc que, par les activités pratiquées, les conditions pour que les élèves entrent dans un registre où les variables ou les nombres seraient manipulés comme des symboles semblent favorisées. Et on peut alors développer plus efficacement la capacité à transformer une expression numérique ou littérale, même s'il convient de modérer ce propos dans la mesure où les progrès dans ce domaine sont encore ténus.

IV.2. Etude du rapport au calcul littéral et à l'algèbre chez les élèves et les enseignants des premier et second cycle dans une perspective d'amélioration des apprentissages (Equipe de Montpellier).

I - Quelques sources d'informations

Les élèves font des erreurs en calcul algébrique. Les professeurs sont confrontés à ce problème tous les jours et ce thème alimente de nombreuses recherches.

Ce qui est remarquable c'est le nombre élevé de types d'erreurs ainsi que la diversité possible de leurs origines.

En France, une évaluation des programmes de quatrième menée par l'APMEP en 1989 (publication n° 77) fait apparaître des difficultés qualifiées d'intrinsèques en calcul algébrique. Par exemple, les factorisations de $5a - 5$ et $6 - 9y$ ne sont réussies qu'à 42% et 46% avec des erreurs fréquentes de type $5a - 5 = a$ et $6 - 9y = 3(2x - 3y)$.

Depuis 1992, une évaluation nationale, en mathématiques en particulier, est proposée aux élèves qui entrent en seconde. Il n'existe pas de résultats nationaux de cette évaluation. En 1976, l'exercice suivant a été donné :

Voici un programme de calcul :

"Soit un nombre que l'on nomme x . Prendre son triple et ajouter 4. Elever le résultat au carré puis retrancher la moitié de x ".

Traduire ce programme à l'aide d'une expression algébrique.

Les résultats d'un échantillon de 166 élèves font apparaître 11,3% de non-réponse, 52,4% de programmes corrects et 37,3% de programmes comportant au moins une erreur (une étude plus détaillée est donnée en annexe 1).

Dans une étude récente, A. Demby (Demby, 1997) a proposé à des élèves de 13 à 15 ans des expressions algébriques à transformer. Elle a identifié pas moins de 7 groupes de procédures de transformations et fait état des erreurs liées à ces procédures.

- Dans le groupe F (formule), des élèves utilisent $(5a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour $(8 - 2x)^2$ et donnent pour second membre : $8^2 - 2 \times 8 \times (-2x) + (-2x)^2$.
- Dans le groupe R (règle), on trouve l'égalité : $2x^2 - x - 5x^2 = 4x - x - 25x = 22x$.

Les enseignants qui liront cette publication seront peut-être déculpabilisés par le fait que les élèves de Gdansk et de Malbork, en Pologne, confrontés aux mêmes tâches que les élèves de leurs classes font exactement les mêmes erreurs. Maigre consolation il est vrai.

Pour notre part, nous avons proposé aux élèves de classes de quatrième et de troisième deux tests que nous avons appelés "test quotient" et "test parenthèses". Ces tests ont pour objectifs l'étude du rapport des élèves à la règle de simplification, d'une part, et à la règle de distributivité, d'autre part. Nous avons aussi réalisé des entretiens individuels auprès de 3 élèves, en mettant en pratique les modalités de l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994). Les résultats montrent, en accord avec ce qui précède, que le rapport à ces deux règles est loin d'être adéquat aux attentes officielles.

II - Test Parenthèses

1 – Test proposé aux élèves

Pour étudier le rapport des élèves au calcul littéral et à l'algèbre, nous avons élaboré un test dans lequel des égalités sont données aux élèves et ils ont à dire si elles sont justes ou fausses en expliquant pourquoi.

Ce test a été passé auprès d'élèves de quatrième, troisième et seconde. Nous avons analysé les réponses de 72 élèves de troisième. En voici l'énoncé :

Voici des égalités, pour chacune d'elles, dites si elle est vraie et pourquoi, ou si elle est fausse et pourquoi :

- 1) $8 \times (9 \times 5) = 8 \times 9 \times 8 \times 5$
- 2) $5 \times (2 \times x) = 2 \times (5 \times x)$
- 3) $(2 \times x) \times (5x y) = 10 \times 2y \times 5x \times x y$
- 4) $2(x \times y) = 2x \times 2y$
- 5) $(2 + 5) \times x = 7 \times x$
- 6) $(2 \times 5)x = 2 \times x \times 5 \times x$
- 7) $xy = x + y$
- 8) $(2 \times 5) \times x = 10 \times x$
- 9) $(x \times y)^2 = x^2 \times x y \times y x \times y^2$
- 10) $2 \times (5 \times x) = 10x$
- 11) $3x \times y = 3x \times 3y$

2 – Analyse a priori du test

Les concepts mathématiques sous-jacents dans ce test sont :

- l'égalité ;
- la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication ;
- les propriétés des parenthèses ;
- la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication.

Le registre utilisé est celui des écritures symboliques algébriques qui utilisent des nombres, numériquement comme des nombres indéterminés désignés par des lettres.

Le but de l'étude est, d'une part, de repérer les changements dans les comportements des élèves en fonction de la nature des nombres dans les parenthèses qui sont :

- tous connus comme dans $(2 \times 5) \times x = 10x$
- tous indéterminés comme dans $2(x \times y) = 2x \times 2y$
- de nature mixte comme dans $2 \times (5 \times x) = 10x$.

Ces changements de comportements pourraient correspondre à des connaissances du 1^{er} niveau, celles des propriétés arithmétiques, ou bien à celles du 2^{ème} niveau, celles des relations entre les écritures algébriques.

D'autre part, notre but est de repérer les rapports des élèves avec les propriétés de l'addition et de la multiplication et, en particulier, de repérer si les conditions d'utilisation de ces règles sont bien connues.

Un autre type de renseignement fourni par ce test est la nature de la justification utilisée par les élèves. Nous adopterons la typologie suivante :

- justification grâce à une règle ;
- vérification de l'égalité grâce à des valeurs données aux lettres ;
- justification à cause de l'évidence du vrai ou du faux ;
- aucune justification.

A travers ces différentes justifications, des hypothèses sur les conceptions des élèves à propos du vrai et du faux en mathématiques pourront être dégagées.

A - Le cas d'une égalité juste comme :

$$2 \times (5 \times x) = 10x$$

*** Réponse : l'égalité est vraie**

V 1 - La réponse mathématique possible de la part des élèves est :

- soit en écriture symbolique (plus ou moins complète) :
 $2 \times (5 \times x) = 2 \times 5 \times x = (2 \times 5) \times x = 10 \times x = 10x$
- soit en langage naturel utilisable par les élèves :
dans un produit de plusieurs facteurs, on peut enlever et mettre des parenthèses, sans changer le produit.

V 2 - Cas d'une réponse de style :

- c'est juste, sans justification, ou bien en justifiant en disant que l'égalité est évidente.

Dans ce cas, on peut se demander de quelle nature sont les raisons qui engendrent la bonne réponse et cela nous amène à nous poser la question suivante : « Pourquoi des élèves sont-ils capables de manipuler des expressions algébriques sans pouvoir traduire cela dans le registre du langage naturel et est-ce que cette lacune n'est pas une des origines des difficultés des élèves en algèbre ? » (cf. l'entretien présenté dans (Sfard & Linchevski, 1994) avec un bon élève qui sait que : $3x - x = 2x$ mais qui est incapable de transformer $kx - x$ en $(k-1)x$).

V 3 - L'élève qui remplace a , par un nombre donné pour avoir la preuve que l'égalité est vraie :

- cela indiquera que cet élève n'a pas compris le sens de l'égalité entre deux expressions algébriques et/ou n'a pas compris le sens de la lettre.

*** Réponse : l'égalité est fausse**

F 1 - Elève qui dit que c'est faux car on devrait trouver :

$$2x \times 5x \quad \text{ou} \quad 2x + 5x \quad \text{etc. ...}$$

On pourra déceler ici l'extension de la règle de la distributivité et se poser des questions sur les indices visuels qui déclenchent l'utilisation de cette règle.

F 2 - Elève qui dit que c'est faux car on doit faire en priorité le calcul entre parenthèses, on ne peut donc commencer par $2 \times x$.

Dans ce cas, ces élèves ne semblent pas avoir dépassé le stade opérationnel, celui des connaissances à propos des opérations arithmétiques et ils semblent ne pas avoir atteint le stade structural (Sfard & Linchevski, 1994).

B - Le cas d'une égalité fausse comme :

$$(2 \times x) \times (5xy) = 10 \times 2x \times 5y \times xy$$

Démonstrations mathématiques :

1) DM 1 - On remplace x et y par des valeurs numériques pour démontrer que l'égalité est fausse.

Ce type de preuve, grâce au contre-exemple, est à la portée des élèves, mais nous nous attendons à le trouver rarement. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'il y a des vides didactiques, au collège, d'une part, à propos du sens d'une égalité mathématique entre deux expressions algébriques, d'autre part, à propos des règles du débat (Arsac & al., 1992).

2) DM 2 - On utilise les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} * (2 \times x) \times (5 \times y) &= 2 \times x \times 5 \times y = 2 \times 5 \times x \times y \\ &= (2 \times 5) \times xy = 10xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * 10 \times 2x \times 5y \times xy &= 10 \times 2 \times 5 \times x \times x \times y \times y \\ &= (10 \times 2 \times 5) \times (x \times x \times y \times y) = 100x^2y^2 \end{aligned}$$

Pour démontrer que $10xy$ et $100x^2y^2$ sont deux nombres différents, soit on utilise un contre-exemple, soit on démontre que l'équation :

$$Z^2 - Z = 0 \quad (\text{avec } Z = 10xy)$$

n'a que deux solutions 0 et 1 alors que Z peut prendre d'autres valeurs que 0 et 1, par exemple, si : $x = y = 1$, $10xy = 10$.

3) Cette démonstration n'est pas à la portée des élèves et une réponse reconnue comme une explication acceptable (et non pas comme une démonstration valide) de la part des élèves est la suivante :

$$(2 \times x) \times (5xy) \neq 10 \times 2y \times 5x \times xy$$

car on ne peut pas utiliser la distributivité comme si c'était : $(2 + x) \times (5 + y)$

L'élève reconnaît ainsi des formes de 2 expressions de part et d'autre du signe $=$, qui évoquent l'utilisation de la double distributivité, mais il signale clairement qu'on ne peut utiliser cette règle car les conditions d'utilisation ne sont pas satisfaites.

4) Une réponse telle que la suivante, ne sera pas reconnue comme une explication acceptable :

“ on n'obtient pas $10 \times 2y \times 5x \times xy$, car on doit obtenir : $10 + 2y + 5x + xy$ ”.

Cette réponse semble témoigner du fait que l'élève repère une forme dans le membre de droite, suffisante à ses yeux, pour déclencher l'usage de la règle de la double distributivité, mais qu'il n'a pas conscience de toutes les conditions d'utilisation de la règle.

Une hypothèse de notre travail est que l'enseignement de l'appréhension des écritures symboliques algébriques n'est pas fait, et nous faisons là un parallèle avec l'appréhension des figures telle qu'analysée dans ses travaux par R. Duval (Duval, 1996).

5) Un autre type de justification attendue est :

$$(2 \times x) \times (5x y) = 10 \times 2x \times 5y \times x y$$

est juste car on utilise la distributivité.

Dans ce cas, l'appréhension simultanée des deux membres de l'égalité, nous semble devoir renforcer le recours à cette règle.

C - Le cas d'une égalité dans le domaine numérique :

$$8 \times (9 \times 5) = 8 \times 9 \times 8 \times 5$$

Nous attendons les types suivants de réponses.

1) $8 \times (9 \times 5) = 8 \times 45 = 370$

$$8 \times 9 \times 8 \times 5 = 2880$$

Pour savoir si deux écritures différentes de deux nombres, représentent ou non le même objet nombre, les élèves peuvent comparer " les résultats ".

2) $8 \times (9 \times 5) = 8 \times 9 \times 8 \times 5$

est juste car c'est la distributivité.

Cette réponse témoignerait du fait que les élèves n'appréhendent pas toutes les conditions d'utilisation de la distributivité, ni les limites de validité de la règle. D'autre part, cela pourrait révéler le fait que les élèves disqualifient les preuves arithmétiques dès lors qu'ils ont été initiés au maniement des transformations algébriques.

3) $8 \times (9 \times 5) = 8 \times 9 \times 8 \times 5$

est faux car on doit trouver $8 \times 9 + 8 \times 5$ (cf. B4).

Nous nous attendons à avoir ici un moins grand pourcentage d'élèves qu'en B 4.

En effet, l'égalité ne comporte pas de variable et nous faisons l'hypothèse que la lettre est un indicateur pour l'élève pour utiliser une règle algébrique.

Pour ces élèves, la rupture entre l'arithmétique et l'algébrique serait comme une frontière qui interdirait la communication de ces deux domaines.

Dans ce cas, les élèves ne semblent pas avoir dépassé le stade opérationnel, celui des connaissances à propos des opérations arithmétiques et ils semblent ne pas avoir atteint le stade structural nécessaire au fonctionnement algébrique.

3 – Résultats du test

I - Les types d'arguments

Nous avons regroupé les réponses d'élèves selon trois types d'arguments majoritaires :

- distributivité ;
- priorité des calculs entre parenthèses ;
- propriétés de la multiplication.

Nous donnons des exemples de réponses pour chaque argument afin de permettre au lecteur de se faire une idée de la diversité du vocabulaire et de la formulation des règles.

a) Distributivité

Sous ce titre, nous avons regroupé les justifications ayant un lien avec la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ; parfois ce lien est clairement exprimé, parfois notre interprétation de la réponse nous a conduit à la ranger dans cette catégorie. Entre parenthèses figurent les numéros des items concernés.

- (1) Vrai, on développe.
- (1) C'est juste, car 8 est le facteur de 9×5 .
- (1) Juste, car il y a distributivité – l'élève écrit le second membre sous la forme : $(8 \times 9) \times (8 \times 5)$.
- (2) Faux, $5 \times 2 \times 5 \times x$ développement.
- (2) Faux, on ne peut pas inverser les facteurs.
- (2) Faux, car 5 est le facteur et pas 2.
- (3) Faux, parce que $(2 \times x) \times (5 \times y) = 10 + 2y + 5x + xy$.
- (3) Cette égalité est juste avec la distributivité – l'élève utilise des flèches pour montrer comment il obtient le second membre.
- (3) Elle est vraie car on développe, elle est développée.
- (4) Vraie, car on ne connaît pas la valeur exacte de x et de y .
- (4) Vraie, l'opération est sous forme de factorisation donc il y a égalité.
- (5) Faux, il faut développer.
- (5) Vrai, car si on distribue on trouve $2x + 5x = 7 \times x = 7x$.
- (6) Vrai, propriété des parenthèses. Cette égalité est juste car en faisant la distributivité du premier produit le résultat est égal au deuxième produit.
- (8) Vrai, la distributivité.
- (9) Certes, car au premier nombre et deuxième nombre carré + deux nombres communs.
- (10) Vrai, on développe.
- (10) Faux, car le développement est mal fait.
- (10) Faux, il faut multiplier 2 par 5 et par x .
- (11) Faux, on ne peut pas multiplier les mêmes signes.
- (11) Faux, on ne peut pas appliquer la distributivité.
- (11) Faux, le facteur n'est pas 3.
- (11) Faux, l'égalité est fausse parce que 3 n'est pas facteur, x et y ne sont pas entre parenthèses.

b) Priorité aux calculs entre parenthèses

Nous avons placé, en particulier, sous ce titre les élèves qui calculent formellement les écritures données en respectant les priorités :

- (2) Vrai, $5 \times 2x$ priorité des parenthèses.
- (2) Vrai, les parenthèses ne sont pas nécessaires.
- (2) Faux, car il faut d'abord faire le produit entre parenthèses.
- (2) Faux, car il y a des parenthèses et ce n'est pas pareil.
- (3) Faux, $= 2x + 5y$ les parenthèses ont priorité.

- (4) Faux, car il faut calculer $(x \times y)$ avant de multiplier par 2.
- (5) Juste, l'addition dans la parenthèse (ici $2 + 5 = 7$) a priorité sur la multiplication.
- (6) Faux, car on multiplie x par le résultat de la parenthèse.
- (6) Vrai, $10 \times x$ propriété des parenthèses.
- (8) Vrai, pas besoin de parenthèses.
- (10) Faux, priorité aux parenthèses.
- (10) Faux, c'est $(2 \times 5) \times x$ qui est égal à $10x$.

c) Propriétés de la multiplication

Les propriétés ne sont pratiquement jamais nommées par associativité et commutativité car ces mots ne figurent pas dans les capacités exigibles.

- (2) Faux, les nombres sont inversés, l'opération est fautive, commutativité.
- (2) Vrai, car on multiplie partout par les mêmes chiffres.
- (3) Faux, $(2 \times x) \times (5 \times y) = 2 \times x \times 5 \times y = 10xy$.
- (4) Faux, car $k(ab) = kab$.
- (6) Faux, l'une des égalités contient un x de trop.
- (8) Vrai, commutativité.
- (10) Juste, le calcul de la multiplication.

Des réponses n'ont pu, à cause de leur ambiguïté, être rangées dans ces catégories.

II - Les résultats et commentaires

Item 1 : $8 \times (9 \times 5) = 8 \times 9 \times 8 \times 5$

* Faux :	44 élèves	61%
- distributivité :	9	12%
- priorité aux () :	10	
- propriété de x :	11	
- calcul num. :	6	
- sans explication :	6	
* Vrai :	28 élèves	39%
- distributivité :	24	33,3%
- sans explication :	4	

Commentaires

Bien que l'item soit numérique, peu de calculs sont faits pour contrôler la valeur de vérité de l'égalité.

Les élèves se placent dans l'algébrique en occultant le numérique.

Dans une étude conduite par E. Cauzinille (Cauzinille & al., 1987), il a été remarqué que les élèves, placés devant des égalités numériques comportant des parenthèses, utilisaient peu la procédure numérique pour évaluer la vérité de l'égalité.

Item 2 : $5 \times (2 \times x) = 2 \times (5 \times x)$

* Vrai :	35 élèves	48,6%
----------	-----------	-------

- propriété de $\times$:	21	29%
- sans explication :	11	
* Faux :	37 élèves	51,4%
- distributivité :	17	23,6%
- priorité des () :	5	
- propriété de $\times$:	7	

Commentaires

Nous reviendrons ultérieurement sur cet item en essayant, pour l'analyser, d'utiliser différents points de vue que nous avons rencontrés dans des articles de recherche.

Item 4 : $2(x \times y) = 2x \times 2y$

* Faux :	25 élèves	35%
- distributivité :	4	
- priorité aux () :	6	
- propriété de $\times$:	9	
- sans explication :	6	
* Vrai	47 élèves	65%
- distributivité :	26	
- sans explication :	18	

Commentaires

C'est le premier item qui comporte dans la parenthèse un produit littéral de même forme que l'item 1.

23 élèves répondent vrai aux items 1 et 4.

Il semble que le produit littéral, ne permettant plus le calcul, soit une variable intervenant dans les réponses.

Item 5 : $(2 + 5) \times x = 7 \times x$

* Vrai :	52 élèves	72%
- distributivité :	9	
- priorité aux () :	25	
- sans explication :	17	
* Faux :	20 élèves	28%
- distributivité	16	22%
- sans explication :	3	

Commentaires

Dans cet item, la parenthèse est une somme numérique. Le facteur x est placé derrière, c'est une place peu habituelle. Il se trouve, néanmoins, 25 élèves, soit près de 35%, qui font appel à la distributivité dans leurs explications. On trouve, par exemple, la réponse : « *Faux car on doit trouver $2x + 5x$ et non pas $7x$* ».

Item 6 : $(2 \times 5) \times x = 2 \times x \times 5 \times x$

* Faux :	41 élèves	57%
- distributivité :	6	
- priorité aux () :	17	
- propriété de $\times$:	6	

- sans explication :	8	
* Vrai :	31 élèves	43%
- distributivité :	16	22%
- sans explication :	12	

Commentaires

Comme pour l'item 5, le premier membre de l'item 6 est le produit d'une parenthèse numérique avec le facteur x placé derrière. La forme du second membre semble être une variable pertinente : 11 élèves de moins qu'à l'item 5 donnent une réponse juste.

Item 8 : $(2 \times 5) \times x = 10x$

* Vrai :	53 élèves	74%
- distributivité :	3	
- priorité aux () :	25	
- propriété de $\times$:	5	
- sans explication :	16	
* Faux :	19 élèves	26%
- distributivité :	15	
- sans explication :	3	

Commentaires

On retrouve pour cet item des résultats comparables à ceux de l'item 5. Cependant, l'argument de la distributivité est employé moins souvent par ceux qui répondent vrai. Ce résultat confirme l'hypothèse à propos de la variable forme du second membre.

Item 10 : $2 \times (5 \times x) = 10x$

* Vrai :	41 élèves	57%
- distributivité :	5	
- priorité aux () :	6	
- propriété de $\times$:	7	
* Faux :	31 élèves	43%
- distributivité :	23	
- sans explication :	7	

Commentaires

Le facteur numérique est placé devant. Le second membre n'est plus une "forme distributive" comme à l'item 6. Les résultats sont cependant comparables. Le premier membre est pratiquement celui de l'item 2 qui est un peu moins réussi (48,6% vs 57%). 24 élèves répondent faux aux items 2 et 10, parmi eux 18 utilisent l'argument de distributivité pour les deux items.

Item 11 : $3x \times y = 3x \times 3y$

* Faux :	70 élèves	97%
- distributivité :	17	24%
- propriété de $\times$:	32	45%
- sans explication :	17	

Commentaires

Cet item comparé à l'item 4 montre combien la présence de parenthèses est une variable décisive pour choisir l'argument de la distributivité justifiant la réponse vraie.

Item 3 : $(2 \times x) \times (5 \times x) = 10 \times 2y \times 5x \times xy$

* Faux :	27 élèves	37,5%
- distributivité :	11	
- propriété de $\times$:	8	
- sans explication :	6	
* Vrai :	45	62,5%
- distributivité :	27	37,5%
- sans explication :	14	

Commentaires

38 élèves, soit 50%, font appel à la distributivité pour argumenter leurs réponses.

Les élèves emploient, assez souvent, le terme “développement”. Quelques-uns utilisent des flèches associant les nombres deux à deux pour former les produits du membre de droite.

Item 9 : $(x \times y)^2 = x^2 \times xy \times xy \times y^2$

* Faux :	34 élèves	47%
- distributivité :	7	
- propriété de $\times$ et du carré :	13	
- sans explication :	7	
* Vrai :	38 élèves	53%
- distributivité :	24	
- sans explication :	14	

Commentaires

31 élèves, soit 43%, utilisent l'argument de la distributivité.

9 élèves répondent faux car ils ne reconnaissent pas le fameux double produit $2xy$.

4 - Conclusion

Pour les 8 items, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11 soit 576 réponses, 426 sont justifiées ; 205, soit 48%, font intervenir des arguments liés à la distributivité dont 126, soit 30%, pour justifier une réponse fausse.

A part l'item 11, les autres se présentent sous la forme du produit d'un nombre et d'une parenthèse.

Nous interprétons les résultats en disant que c'est la forme $a * (\text{bloc}) =$ avec $*$ et o pouvant être $\times$ et/ou $+$ qui active chez les élèves “la procédure distributive”. Le fait qu'aucun élève ne donne pour vraie l'égalité 11 qui, elle, n'a pas de parenthèses, renforce singulièrement cette interprétation.

Pour les items 3 et 9, à cause de la complexité des membres des égalités, on aurait pu s'attendre à un fort pourcentage de réponses fausses. Or, ce n'est pas le cas et, de plus, les résultats sont

comparables à ceux de l'item 4. Les élèves reconnaissent dans le deuxième membre une forme possible du développement du premier membre, cette reconnaissance de forme étant indépendante des opérations en jeu, mais par contre fortement liée à l'organisation syntaxique de la forme.

III - Essai pour comprendre les réponses “ faux ” de l'item 2 :

$$5 \times (2 \times x) = 2 \times (5 \times x)$$

Pour interpréter les réponses des élèves nous utilisons les outils d'analyse développés par A. Sfard (cf. p. 5) et R. Duval (cf. p. 12).

L'écriture soumise aux élèves semble provoquer deux attitudes cognitives.

- L'élève reconnaît une forme, une production dans le registre algébrique, de type $a * (b * c)$ où $*$ $\in$ $\{+, -, \times\}$. Certains lisent cette forme en employant le mot facteur : “ faux car 5 est le facteur ”. Les unités discriminées sont 5, $\times$ et $()$, cet acte sémiotique, comme l'appelle DUVAL, découpe un objet d'attention, porté à la conscience de l'élève : “ la formule de distributivité ”. Un élève dira même que la distributivité ne peut pas se modifier.

Les connaissances activées liées à la forme et non au contenu mathématique engagent l'élève dans une opération de comparaison du second membre avec $(a * b) * (a * c)$.

- L'élève interprète l'expression $5 \times (2 \times x)$ au niveau procédural : c'est un programme de calcul où intervient uniquement la multiplication.

Aux unités discriminées précédemment s'ajoutent le $\times$ et le x dans la parenthèse. Le produit dans la parenthèse va émerger comme objet et activer la règle de priorité des calculs dans une parenthèse. L'interprétation, en terme de programme de calcul, ne permet pas à l'élève d'envisager une autre écriture car $2 \times x$ ne peut être effectué (de plus $2 \times x$ est différent de $5 \times x$).

Il est remarquable que des élèves écrivent $(2 \times x) = 2x$. Dans ce cas $2x$ n'est plus un programme de calcul mais le résultat du calcul, reconnu comme un tout, il ne peut plus se prêter à des transformations.

La question que l'on peut se poser est de savoir si l'élève écrit $2x$ pour avoir un "résultat" conforme au contrat ou s'il exprime par là que $2x$ est un nombre.

Références :

- Arsac G. & al., 1992 : *Initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM de Lyon.
- Cauzinille-Marmèche E., Mathieu J., Resnick L., 1987 : *L'intégration de nouvelles connaissances : entre arithmétique et algèbre*. *Journal Européen de Psychologie de l'Education*, vol. 2 (n 1), 45-57.
- Demby A., 1997 : Algebraic Procedures used by 13-to-15 Years Olds, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 33, 45-70.
- Duval R., 1996 : *Semiosis et Pensée Humaine*, Peter Lang, Berne.
- Sfard A. & Linchevski L., 1994 : The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, 191-228.
- Vermersch P., 1994 : *L'entretien d'explicitation*, Editions E.S.F., Paris.

V. Exemples de recherches sur les fonctions

V.1. Premiers travaux sur les fonctions (équipe de Montpellier)

Ce travail a été réalisé dans une classe de seconde expérimentale dotée d'outils de calcul formel (machines TI 92), au lycée René Gosse, à Clermont l'Hérault.

La construction du TP présentée ici marque l'intention d'installer dès son introduction le concept de fonction dans les trois cadres algébrique, graphique, géométrique, sans en privilégier aucun a priori.

I. CONTENU DU TP

Le problème propose la recherche du minimum d'une fonction numérique :

On considère un segment $[AB]$ de longueur 5 cm et une droite (D) passant par le point A en faisant un angle de 72° avec la droite (AB) .

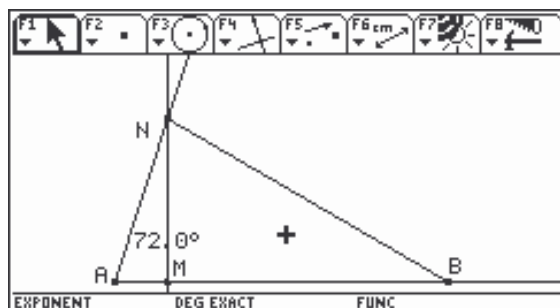
Sur le segment $[AB]$ on choisit un point M.

La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe la droite (D) en N.

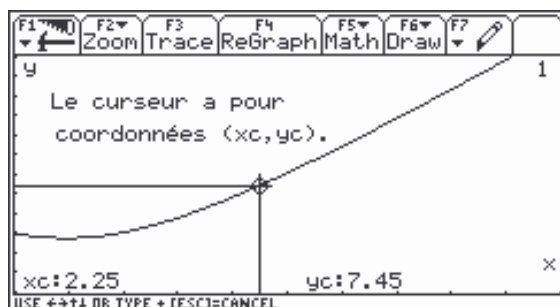
On se propose de prouver que la distance BN passe par un minimum lorsque M varie sur le segment $[AB]$ et de déterminer la position du point M correspondant.

Trois approches sont disponibles : la fonction est représentée par

- une figure géométrique



- un ensemble de points dans un repère du plan



- une expression algébrique

$$\ell(x) = \sqrt{(6+2\sqrt{5})x^2 - 10x + 25}$$

Chacune des activités rédigées autour de ce problème à partir de l'une des trois approches se prolonge par une étude dans chacun des deux autres cadres. A l'issue, et quelle que soit l'activité choisie, les élèves ont manipulé trois *présentations* d'une même fonction, seul l'ordre d'introduction a changé.

II. OBJECTIF PRINCIPAL

Cet objectif est triple :

- faire prendre conscience de l'existence de plusieurs cadres pour résoudre un même problème ;
- donner du sens à l'objet « fonction » en utilisant d'emblée ses diverses *présentations* et en explorant ses qualités à travers les différents cadres ;
- mettre en place un réseau de traductions réalisant des passerelles de l'un à l'autre.

III. OBJECTIFS SECONDAIRES

- favoriser l'accès au nouveau concept en plaçant au départ chaque élève dans celui des trois cadres qu'il maîtrise le mieux, ce que rend possible la différenciation des approches ;
- décroiser les cadres algébrique, géométrique, graphique, en réalisant des interactions non hiérarchisées ;
- développer le rôle d'investigation que peut remplir la TI 92 pour la résolution de problèmes ;
- apprendre à utiliser certaines applications de la TI 92 liées aux fonctions numériques.

IV. PLACE PAR RAPPORT AUX APPRENTISSAGES DE SECONDE

- *Avant*
 - calcul numérique, approximations décimales d'un nombre
 - calcul algébrique : factoriser, développer une expression ; signe d'une expression, condition d'existence de la racine carrée d'un nombre
 - configurations géométriques : Pythagore, plus court chemin d'un point à une droite
 - configuration graphique : point dans un repère du plan
 - un exercice sur le calcul de la longueur du côté d'un pentagone régulier convexe a été posé dans les jours précédant la séance¹⁵.
- *Au cours et à l'issue du TP*
 - lire graphiquement $f(a)$, calculer et interpréter $f(a)$ (vocabulaire : image)
 - lire graphiquement, calculer le ou les réels x pour lesquels $f(x) = b$ (vocabulaire : antécédents) ; interpréter l'égalité $f(a) = b$.
 - reconnaître le sens de variation d'une fonction (vocabulaire : fonction croissante, décroissante)

¹⁵ Pourquoi le choix d'un angle de 72° dans ce problème ? D'autres choix (45°, 60°, ...) permettent aussi un calcul exact et facilitent même grandement les calculs, mais le minimum de la fonction correspondante est alors atteint pour un décimal x dont la « simplicité d'écriture » ôte toute pertinence à la recherche d'approximations.

- reconnaître le minimum d'une fonction
- contrôler une lecture ou un calcul par traduction d'un cadre à l'autre
- lire graphiquement, déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x) \leq b$;
- interpréter cette inéquation (vocabulaire : image réciproque d'un intervalle)

- *Après*

Les activités proposées par la suite amènent les élèves à résoudre un problème en effectuant dans un premier temps le choix d'un cadre pertinent puis, après un temps de maturation convenable, à réaliser eux-mêmes, en cours de recherche, des changements de cadre.

V. ORGANISATION DE LA SÉANCE

- Durée : 2 heures (sans les synthèses)
- Disposition : demi-classe, les élèves se répartissant en groupes de 4 ; chaque groupe désigne un rapporteur.
- Documents distribués aux élèves :
 - documents papier : à chaque groupe est distribué un texte spécifique en fonction de l'approche et, éventuellement, une boîte à outil décrivant les nouvelles commandes utilisées ou précisant celles qui ont déjà été abordées ;
 - documents machine : afin de permettre un démarrage rapide de l'activité chaque élève dispose sur sa machine de la figure géométrique ainsi que d'une représentation graphique qu'il suffit d'appeler à l'aide d'un programme ; pour qu'il en soit ainsi, figure et programme ont été préalablement chargés sur chaque TI.
- Rôle du professeur pendant la séance : intervention dans chaque groupe (et non devant la classe entière) afin d'explicitier les consignes lorsque cela s'avère nécessaire et faciliter les diverses manipulations, notamment en géométrie.
- Les synthèses sont présentées la semaine suivante à partir des travaux des différents groupes présentés par leur rapporteur. Le vocabulaire nouveau est alors noté. Une fiche de synthèse est réalisée.

VI. RÔLE DE LA MACHINE

Pourquoi associer la TI 92 à la poursuite des objectifs cités plus haut ?

La TI-92, de par sa conception, permet la coexistence simultanée des cadres géométrique, graphique, algébrique et numérique. Il est bien évidemment important de préciser à tout moment le cadre dans lequel on se place : application initiale [HOME] (calcul formel et approché), application de géométrie [APPS] [8], application graphique [GRAPH] (représentations graphiques, lecture et calcul approché).

- Le cadre algébrique fournit des résultats immédiats sur les développements ou les factorisations nécessaires ce qui évite à certains élèves d'être bloqués sur des questions non centrales ici; ils peuvent ainsi poursuivre l'activité. Le calcul de $\ell(x)$ pour différentes valeurs de x n'est pas non plus pénalisant et par conséquent la construction de la courbe et les réflexions autour du minimum peuvent être amorcées rapidement.
- Dans le cadre graphique, une courbe est d'emblée proposée et son exploitation par trace et value permet d'arriver rapidement à des conjectures. Des fonctions comme ZoomBox et ZoomFit, la possibilité de régler la précision des résultats, permettent d'affiner rapidement la recherche.

- Le cadre géométrique permet, grâce à la dynamique de cabri 2, une approche plus expérimentale et remplace avantageusement toutes les constructions que l'on serait amené à faire sur papier avec de plus la possibilité d'émettre des conjectures géométriques sur le minimum cherché.
- En effaçant un certain nombre de difficultés annexes liées à une maîtrise hétérogène du calcul algébrique, numérique, des constructions graphiques ou géométriques, la TI 92 permet de maintenir l'attention mobilisée sur les « objectifs-élèves » de la situation proposée.



Application utilisée: l'application initiale.

Préparation de la TI92 : taper $\boxed{\text{R}}$ puis $\boxed{\text{HOME}}$ éventuellement.

A. On considère l'expression $\ell(x) = \sqrt{(6+2\sqrt{5})x^2 - 10x + 25}$

Pour programmer l'expression $\ell(x)$ utiliser:

$\boxed{\text{F4}} \boxed{1}$ Define $\ell(x) = \sqrt{(6+2\sqrt{5})x^2 - 10x + 25}$ (cf. LES FONCTIONS)

1) Développer $(5-x)^2 + (5+2\sqrt{5})x^2$.

En déduire que l'on peut calculer $\ell(x)$ pour toutes les valeurs de x .

2) Compléter le tableau suivant, *sans remplir les cases grisées*.

X	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\ell(x)$											
Approximation décimale à 10^{-1} près de $\ell(x)$											

Pour obtenir $\ell(0)$, c'est-à-dire $\ell(x)$ quand $x = 0$, taper $\ell(0)$ puis $\boxed{\text{ENTER}}$.

Pour obtenir une approximation décimale de $\ell(0)$, taper $\ell(0)$, $\boxed{\text{R}}$ puis $\boxed{\text{ENTER}}$, après avoir fixé la précision de l'approximation avec $\boxed{\text{MODE}}$.

3) Sur du papier millimétré, placer dans un repère, les points de coordonnées $(x, \ell(x))$. On choisira un repère orthogonal ; unités : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

B. On considère un segment $[AB]$ de longueur 5cm et une droite (D) passant par le point A en faisant un angle de 72° avec la droite (AB) .

Sur le segment $[AB]$ on choisit un point M.

La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe la droite (D) en N.

Construire la figure.

1) On pose $AM = x$. Démontrer que $MN = x\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ⁽¹⁾, en déduire que $BN = \ell(x)$.

On se propose de montrer qu'il existe une position de M sur $[AB]$ pour laquelle la distance BN est minimum.

2 a) Les résultats du A suggèrent l'existence d'un minimum pour la distance BN. Donner une approximation de la distance AM correspondante.

2 b) En utilisant la TI92, améliorer la précision du résultat précédent. Expliquer la démarche utilisée.

3) Une construction géométrique du point cherché.

Pour quelle position de M sur (D) , la distance BN est-elle minimum ? En déduire une construction à la règle et au compas du point M correspondant. Calculer AM.

¹ On rappelle que : $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.



TP N 5 : FONCTIONS-APPROCHE GRAPHIQUE

Application utilisée: l'application graphique [GRAPH].

Préparation de la TI92 : se placer dans l'application initiale en tapant [®] puis [HOME]. Taper pentagra() puis [ENTER], la machine passe automatiquement dans [GRAPH].

On considère un segment [AB] de longueur 5cm et une droite (D) passant par le point A en faisant un angle de 72° avec la droite (AB).

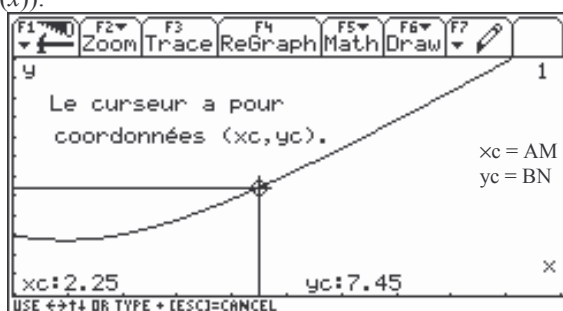
Sur le segment [AB] on choisit un point M.

La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe la droite (D) en N.

✍ Faire une figure à l'échelle 2

On se propose de montrer qu'il existe une position de M sur [AB] pour laquelle la distance BN est minimum.

Lors du lancement du programme on obtient une courbe identique à la courbe ci-dessous ; elle représente la longueur $\ell(x)$ du segment [BN] en fonction de la distance $AM = x$. Un point de la courbe a pour coordonnées $(x, \ell(x))$.



Lorsqu'on utilise TRACE, le curseur désigne un point de la courbe ; son abscisse x_c représente la distance AM, son ordonnée y_c représente la distance BN correspondante.

On a de plus : $y_c = \ell(x_c)$.

Ainsi, si $AM = 2,25$ alors $BN \approx 7,45$.

Le vérifier sur la figure.

Première partie

✎ 1) En utilisant TRACE le long de la courbe, de la gauche vers la droite, décrire les variations de x_c et de y_c .

✎ 2) La commande VALUE s'obtient en tapant [F5] [1].

La machine attend un choix de x , par exemple, taper 3 puis [ENTER], on lit alors $x_c = 3$ et $y_c = 9,45$.

On note $\ell(3) \approx 9,45$. Noter que le curseur se place au point de coordonnées (3 ; 9,45).

Deuxième partie

Dans cette partie choisir Display / Digits FIX 4 à l'aide de la touche [MODE].

3 a) ✎ Quelle est la distance BN si $AM = 0,955$?

b) ✎ Quelle doit être la distance AM pour que la distance BN soit peu différente de 7 ?
Quelle doit être la distance AM pour que la distance BN soit peu différente de 4,8 ?

4) ✎ Utiliser VALUE pour remplir le tableau suivant :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1	1,2	1,3	1,5
Approximation décimale de $\ell(x)$											

5) ✎ A l'aide de TRACE déterminer un encadrement de la distance AM pour lequel la distance BN est minimum.

Utiliser ZOOMBOX et ZOOMFIT, éventuellement plusieurs fois, pour améliorer l'encadrement précédent. Donner un encadrement de la distance BN correspondante.

6) ✎ Démontrer que $MN = x\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ⁽¹⁾. En déduire la formule donnant $\ell(x)$ en fonction de x .

¹ On rappelle que : $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.



TP N 5 : FONCTIONS-APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Application utilisée: l'application N 8 Geometry.

Préparation de la TI92 : Taper [APPS] puis [ENTER], charger la figure PENTA72. Après avoir chargé la figure taper [®] puis choisir FIX 3, taper [ENTER].

On considère un segment [AB] de longueur 5cm et une droite (D) passant par le point A en faisant un angle de 72° avec la droite (AB).

Sur le segment [AB] on choisit un point M.

La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe la droite (D) en N

On se propose de prouver que la distance BN passe par un minimum lorsque M varie sur le segment [AB] et de déterminer la position du point M correspondant.

1) ✎ On pose $AM = x$ et $BN = \ell(x)$. Quel est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le problème a un sens ?

2) ✎ On se propose, avec la TI 92, d'étudier BN lorsque M varie sur le segment [AB].

En utilisant Distance & length, afficher les longueurs AM et BN.

Déplacer ensuite le point M et choisir au moins une douzaine de positions de M, régulièrement réparties sur [AB] pour remplir le tableau suivant :

x													
Approximation décimale de $\ell(x)$													

✎ Indiquer, à l'aide du tableau, un encadrement de la distance AM pour laquelle la distance BN est minimum.

3) ✎ Sur du papier millimétré, placer dans un repère les points de coordonnées $(x, \ell(x))$. On choisira un repère orthogonal ; unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

4) ✎ En déplaçant le point M à l'aide de la "main", conjecturer la position du point M relative des droites (D) et (BN) pour laquelle la distance BN est minimum.

✎ Valider cette conjecture par un argument géométrique.

5) ✎ Démontrer que $MN = x\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ⁽¹⁾. En déduire la formule donnant $\ell(x)$ en fonction de x .

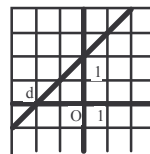
¹ On rappelle que : $\tan 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$.

V.2. Fonctions et représentations graphiques (Equipe de Strasbourg)

Chaque année, dans les tests d'évaluation des élèves en début de seconde, des exercices de ce type sont proposés :

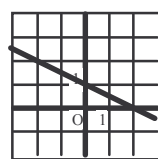
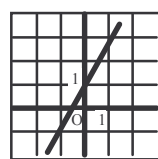
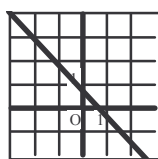
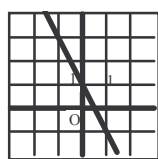
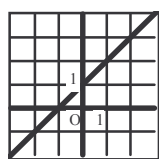
a)

La droite d représentée ci-contre a pour équation :



$y = -x + 2$	$y = x + 1$	$y = 2x + 1$	$y = x + 2$	$y = 3x + 2$
--------------	-------------	--------------	-------------	--------------

b) La droite d'équation $y = -2x + 1$ est représentée par :



Les enseignants de collège et de lycée s'étonnent souvent du faible taux de réussite à ces exercices (environ 20% des élèves réussissent aux deux exercices simultanément). En effet, les représentations graphiques sont utilisées dès la classe de sixième et même avant à l'école primaire pour étudier des situations variées.

Pour représenter des fonctions, on peut recourir à différents moyens de représentation : tableaux, graphiques, diagrammes. Et, généralement, on oppose ces moyens plus “visuels”, donc censés être plus “faciles” et plus “directs”, à l'écriture algébrique considérée comme plus mathématique parce que plus générale et donnant les moyens de calcul.

Nous nous proposons de considérer tous ces moyens de représentation : tableaux, graphiques, diagrammes ainsi que l'écriture algébrique et l'emploi de la langue naturelle (pour les définitions) comme autant de registres différents de représentation. Une des difficultés est alors, pour les élèves, le passage de l'un à l'autre.

Au collège, les fonctions sont utilisées comme outil, en particulier dans l'étude de la proportionnalité; elles sont un concept transversal qu'on utilise dans d'autres disciplines (physique, géographie, biologie, économie...). Pour ces disciplines, l'interprétation et la lecture de courbes ont autant, voire plus, d'importance que leur tracé à partir de formules ou de tableaux de valeurs numériques. En d'autres termes, si l'on considère les différents registres que la notion de fonction met en jeu, à savoir le registre algébrique (écriture $y = f(x)$), le registre tableau de valeurs, le registre graphique (tracé de la courbe), le registre langue naturelle (définir quelque chose en fonction de quelque chose), on remarque que le passage du registre graphique vers les autres registres sera beaucoup sollicité dans les disciplines autres que les mathématiques.

I - La démarche la plus fréquente

Regardons d'un peu plus près les manuels scolaires de collège :

A. En sixième, les thèmes “rangement des nombres entiers ou décimaux”, “nombres relatifs” permettent d'introduire (ou de réviser) les coordonnées d'un point : tous les manuels proposent donc des activités de repérage sur une droite ou sur un quadrillage. Les activités se font le plus souvent dans le sens, tableau de valeurs – la représentation graphique –, parfois dans l'autre

sens, lecture de coordonnées de points à partir d'une représentation graphique ou d'un tableau de valeurs même si ces dernières sont peu nombreuses.

Ce sont toujours des démarches de pointage qui sont sollicitées : repérage de positions par sélection des points du champ quadrillé. La démarche inverse est une démarche de lecture.

B. En cinquième, les outils de représentation sont enrichis et les activités sont élargies à des situations combinant différents points de vue : numérique, graphique, géométrique. Les élèves doivent en particulier être capables de reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un graphique. On retrouve en plus grand nombre des activités semblables à celles proposées en sixième, dans des situations plus variées utilisant en particulier la géométrie. De plus, les élèves disposent de la règle suivante : *il y a proportionnalité entre deux grandeurs, lorsque tous les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère*. Les tâches demandées aux élèves sont donc des tâches de conversion (tableau de valeurs- graphique ou l'inverse) ou de traitement (repérage des points). Mais ce traitement ne consiste plus seulement en une démarche de pointage, il faut aussi appréhender globalement la forme visuelle du graphique par rapport au champ quadrillé ou plan repéré.

C. En quatrième, le registre de l'écriture algébrique commence à être régulièrement employé. Une nouvelle conversion entre deux registres différents (graphique-algébrique) va donc être possible.

La mise en œuvre de nouveaux outils de représentation accentue la maîtrise des situations de proportionnalité. La notion de fonction linéaire est introduite.

D. En troisième, les élèves vont étudier les droites dans deux domaines différents : ils étudient les fonctions qui admettent pour représentation graphique une droite et la géométrie analytique, ce qui permettra d'introduire les notions de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine. Le nouvel outil "équations de droite" va alors leur permettre de *résoudre graphiquement des systèmes simples d'équations linéaires et d'inéquations*.

En fait, l'apprentissage de la notion de fonction au collège repose dans les manuels sur le postulat implicite qu'une maîtrise suffisante des démarches de pointage (repérage d'un point, lecture de coordonnées...) suffit pour appréhender globalement la notion de fonction. De nombreux résultats d'évaluation contredisant la validité de ce postulat, il nous paraît donc important de proposer une autre démarche conduisant à une bonne maîtrise des représentations graphiques et des fonctions.

II - Une autre démarche

Une bonne maîtrise de la représentation graphique ne peut se limiter à l'application de la règle de codage, c'est-à-dire associer un point à un couple de nombres. Elle nécessite également un développement de l'appréhension globale, c'est-à-dire interpréter qualitativement la position, l'orientation et la forme du graphique, ceci en relation systématique avec l'écriture algébrique de relations (équations ou inéquations).

Des tâches spécifiques pour faire acquérir les démarches de pointage, pour permettre aux élèves de distinguer les différentes variables visuelles d'une représentation graphique et pour développer l'appréhension globale sont nécessaires mais ne peuvent être dissociées d'un contenu mathématique.

Nous nous proposons d'illustrer chacun des types de tâche par un exercice.

Sixième et cinquième : automatisation de la règle de codage, démarches de pointage et vers une première appréhension globale

A : Démarches de pointage

Associer un point à un couple de nombres est une tâche essentielle pour la compréhension des représentations graphiques. Pour certains élèves, c'est une tâche difficile, en particulier lorsque le pointage nécessite une interpolation.

1. Repérage d'un point d'intersection d'une ligne horizontale et d'une ligne verticale sur le quadrillage

Placer les points de coordonnées (2, 5), (3, 7), (5, 11). Ces points sont alignés. Dessiner la droite qui passe par ces trois points.

2. Lecture sur le graphique des coordonnées d'un point (sans interpolation)

Trouver sur le quadrillage deux autres points de cette droite et écrire leurs coordonnées.

3. Repérage d'un point sur le graphique par interpolation (le point à repérer ne correspond pas aux intersections des lignes du quadrillage)

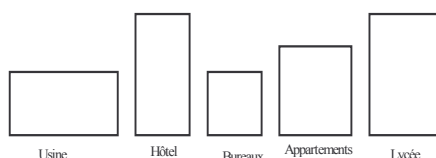
Le point (4, 6 ; 10, 2) appartient aussi à cette droite. Le placer approximativement.

4. Lecture d'un intervalle de points sur le graphique par interpolation

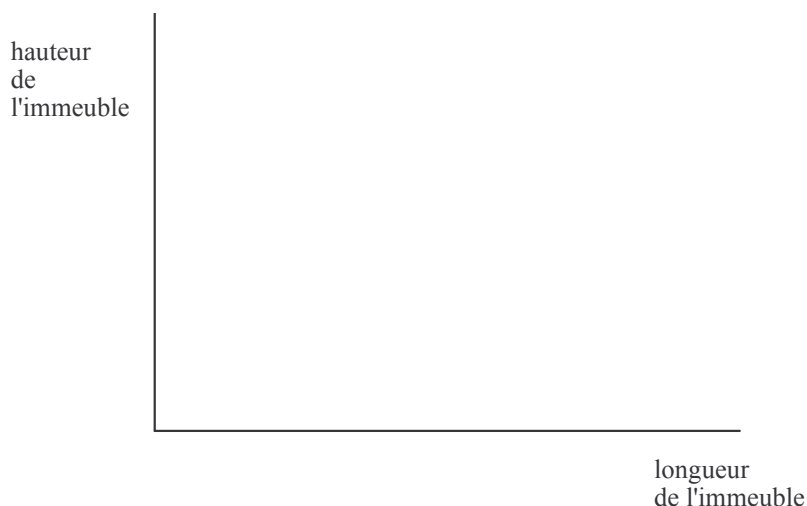
Y a-t-il des points sur la droite entre les points (2, 5) et (3, 7). Si oui, combien ?

5. Utilisation de la règle de correspondance pour un report graphique de figures simples.

Voici cinq immeubles.



Placer sur le graphique ci-dessous cinq points représentant chacun des immeubles.



(Suivi scientifique sixième, p.153)

La tâche principale consiste ici à établir la correspondance entre longueur et hauteur, d'une part, et abscisse et ordonnée, d'autre part. Un tel exercice ne peut venir qu'après les précédents. On peut faire des exercices de même type mais cette fois où la correspondance doit être faite à partir du graphique.

B : Vers une première appréhension globale des graphiques

L'enseignant doit être attentif au fait que, par structure, il y a indépendance des deux dimensions du plan repéré (le placement d'un point s'effectue en deux temps indépendants, la lecture de

coordonnées de points s'effectue en deux recherches indépendantes). Or, sans intériorisation de la bi-dimensionnalité du plan, l'acquisition de l'ensemble des traitements graphiques ne pourra se faire.

Les tâches de régionnement du plan permettent de ne plus travailler chacune des dimensions du plan de manière indépendante et oblige l'élève à associer les deux dimensions. Le traitement proposé n'est donc plus seulement un traitement ponctuel mais oblige à une appréhension globale. Nous présentons trois variantes parce que les résultats de régionnement ne sont pas de même nature (demi-plan, segment de droite et quart de plan).

1. *Représenter en rouge l'ensemble des points qui ont une abscisse positive (un repère ayant été donné aux élèves)*
2. *Un point M a une abscisse égale à 3 et une ordonnée égale à 1.*
 - a) *On fait subir à M un traitement qui diminue son ordonnée. Colorier en vert la région du plan où on trouvera M après ce traitement.*
 - b) *On fait subir à M un traitement qui augmente son abscisse et diminue son ordonnée. Colorier en bleu la région du plan où on trouvera M après ce traitement.*

Bien d'autres exercices peuvent être évidemment proposés mais pour retenir tel ou tel exercice deux critères de choix s'imposent :

- un traitement simple : il n'y a pas plusieurs opérations mathématiques à enchaîner pour faire l'exercice
- une exécution du traitement qui centre directement l'attention sur le but que l'on vise en proposant cet exercice.

Le but visé étant la maîtrise des démarches de pointage et le développement d'une première appréhension globale, tout exercice faisant référence à des interprétations de situation concrète ne peut convenir.

Quatrième et troisième : Articulation graphique/algébrique, appréhension globale, et discrimination de graphiques de fonctions et des autres graphiques

Une appréhension globale précise suppose de bien discerner toutes les valeurs visuelles pertinentes d'un graphique. Or ces valeurs visuelles ne peuvent être discernées qu'en relation avec le registre algébrique. Pour cela, il semble important de présenter aux élèves un grand nombre de variations et cela de manière hiérarchique, afin d'attirer leur attention sur ce qu'il est nécessaire de discriminer immédiatement dans l'utilisation d'un graphique.

Nous le ferons en utilisant les représentations de fonction affine et les équations de droites. Cela nous conduira très naturellement à l'appréhension globale des fonctions affines par morceaux (classe de seconde).

A. Coefficient directeur d'une droite passant par l'origine

Il s'agit ici de faire prendre conscience aux élèves du rapport entre l'inclinaison d'une droite passant par l'origine (« monte de droite à gauche ou de gauche à droite », plus ou moins verticale ou horizontale) et son coefficient directeur a . Ici naturellement, on met en place le lien coefficient directeur a et équation $y = ax$.

Dans les activités proposées ci-dessous, les graphiques sont bien sûr à rajouter pour les élèves.

1. Correspondance entre le sens d'inclinaison de la droite le signe du coefficient directeur

Chacune des figures représente une droite passant par l'origine et de coefficient directeur a . Indiquer pour chacune des figures le signe du coefficient a

2. Correspondance entre l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses (cas classique du repère orthonormé) et la comparaison de la valeur absolue du coefficient directeur et du nombre 1 (plus petit, plus grand ou égal à 1).

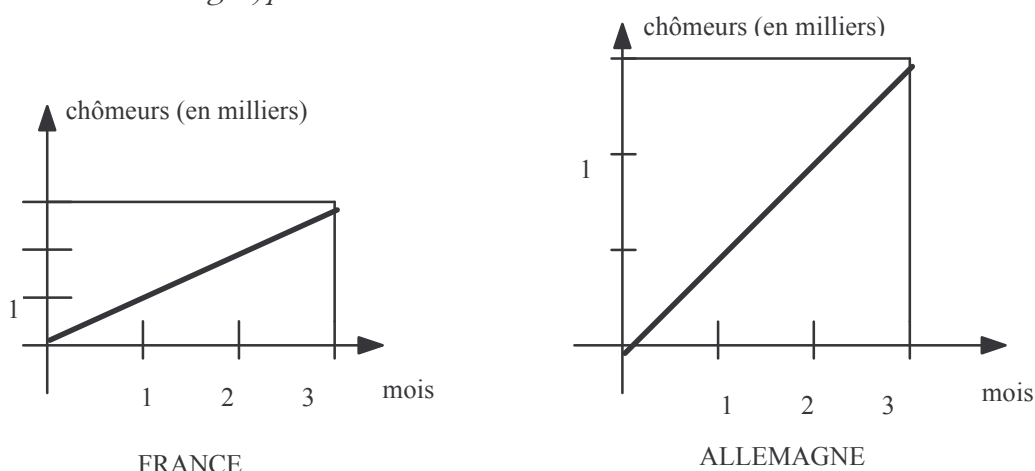
Pour chacune des droites (passant par l'origine et de coefficient directeur soit tous positifs, soit tous négatifs), indiquer si la valeur absolue du coefficient directeur est plus petite, plus grande, ou égale à 1

3. Réunion des deux correspondances précédentes en une seule

Pour chacune des droites (passant par l'origine), indiquer le signe du coefficient directeur et si sa valeur absolue est plus petite, plus grande, ou égale à 1

4. Utilisation de la représentation graphique pour accentuer ou pour atténuer l'importance d'un phénomène, le repère n'étant plus normé.

Les deux graphiques ci-dessous représentent l'augmentation du nombre de demandeurs d'emploi en France et en Allemagne, pour un trimestre :



Dans lequel des deux pays la progression est-elle la plus forte?

B. Droite ne passant pas par l'origine

Il s'agit maintenant de faire prendre conscience aux élèves de la notion d'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire de l'existence du coefficient b dans l'équation $y = ax + b$. Il est important de ne pas jouer dans ce deuxième temps sur toutes les variations à la fois, c'est-à-dire de ne pas faire varier a et b au cours du même exercice : il sera donc possible d'abord de faire lire les équations de droites parallèles à une droite donnée passant par l'origine.

1. Comparaison d'une droite ne passant pas par l'origine avec une droite passant par l'origine et de même coefficient directeur.

On peut alors demander aux élèves une conjecture sur la manière de reconnaître à la seule lecture de deux équations de droites si les droites sont parallèles ou non.

2. Utilisation de la représentation graphique pour accentuer ou pour atténuer l'importance d'un phénomène, le repère n'étant plus normé.

C. Combinaison de A. et B.

Dans ce troisième temps, il s'agit de faire prendre conscience aux élèves des variations visuelles qu'entraîne un changement à la fois du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. Les

exercices proposés dans les enquêtes ou évaluations depuis quelques années portent sur ce type de combinaison. Il nous paraît important de veiller toutefois à ce qu'il n'y ait pas de correspondance biunivoque entre le choix de l'équation et la représentation graphique.

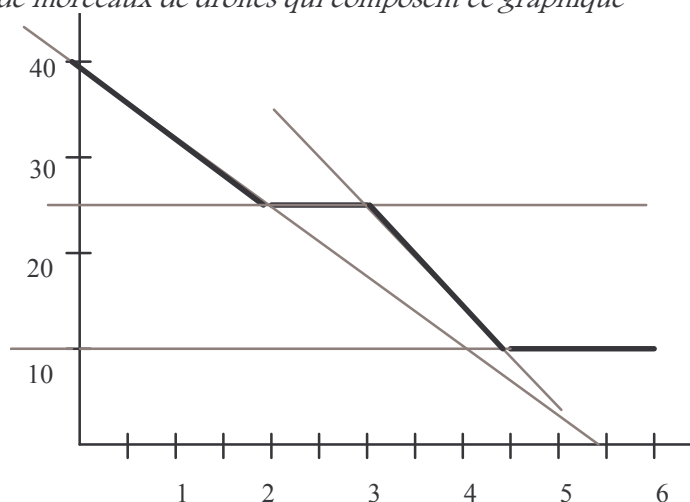
D. graphique droit ou brisé : fonction affine par morceaux

A ce stade, il devient naturel d'avoir une appréhension globale précise des représentations graphiques des fonctions affines par morceaux. Il suffit de voir chaque trait droit du graphique brisé comme une partie d'une droite dont les valeurs visuelles pertinentes sont immédiatement discernables. On aura donc autant d'équations que de traits. Et les différents traits du graphique brisés sont associés comme les mots dans une phrase.

On comprend maintenant pourquoi nous avons délibérément écarté la présentation de tels graphiques en sixième et cinquième. Les élèves n'ont pas les outils nécessaires pour les lire correctement, ils ne peuvent donc que se livrer qu'à de trompeuses analogies avec les images associées aux situations concrètes que le graphique est censé représenter (voir, par exemple, l'exercice sur l'ascenseur plus bas).

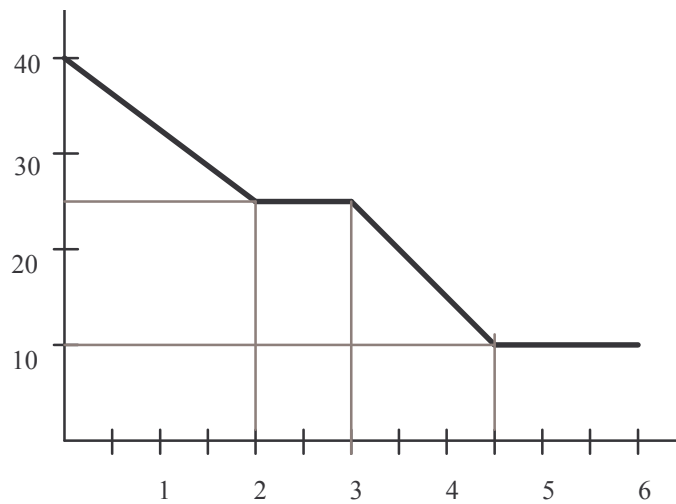
1 Présentation du graphique d'une fonction affine par morceaux

repérer le nombre de morceaux de droites qui composent ce graphique



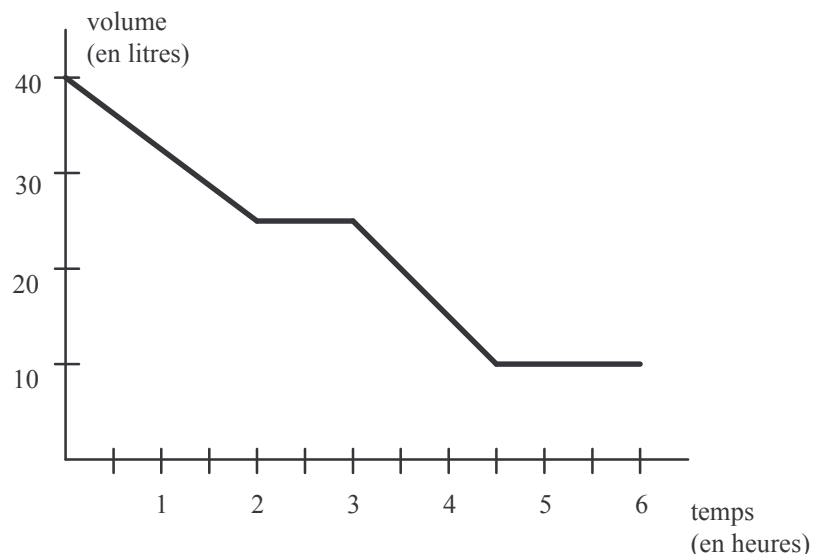
2. Interprétation algébrique du graphique ci-dessus

indiquer les différentes équations des droites qui supportent chacun des morceaux



3. Interprétation extra-mathématique ci-dessous

Décrire le phénomène représenté par chacun des morceaux



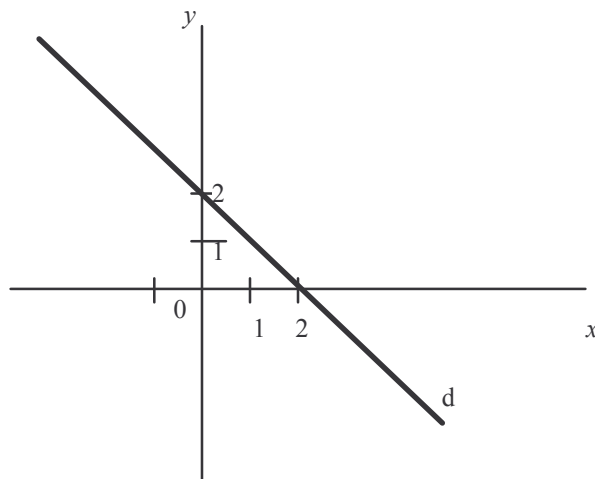
E. Résolution d'équations ou d'inéquations

Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation est une utilisation des représentations graphiques. Résoudre graphiquement une équation peut se faire simplement par une démarche de pointage (croisement de traits) ou, au contraire, par appréhension globale. Au niveau quatrième-troisième, la résolution graphique dépend essentiellement d'une démarche de pointage.

En revanche résoudre graphiquement une inéquation ou un système d'inéquations à deux inconnues nécessite une appréhension globale.

Représenter en rouge l'ensemble des points de d qui ont une ordonnée comprise entre 1 et 2.

Représenter en vert l'ensemble des points de d qui ont une abscisse comprise entre 1 et 2.



F. Classification de deux grands types de graphique : fonctionnel ou non

Pour pouvoir effectuer cette classification, il faut revenir d'une appréhension globale précise à certaines démarches de pointage. Une question générale est alors posée : examiner pour chaque graphique si pour chaque valeur d'abscisse, le tracé de la figure-forme permet de lire 0, 1 ou plusieurs valeurs d'ordonnées. La démarche de pointage mobilisée par cette question ne peut véritablement fonctionner que pour des élèves qui ont une bonne appréhension globale, car elle suppose un balayage global de la figure-forme par rapport à la figure-fond. Un élève qui aura élaboré la classification de représentations graphiques sur un tel critère sera prêt à entrer dans la définition des fonctions qui recourt à la notion d'antécédent et d'image.

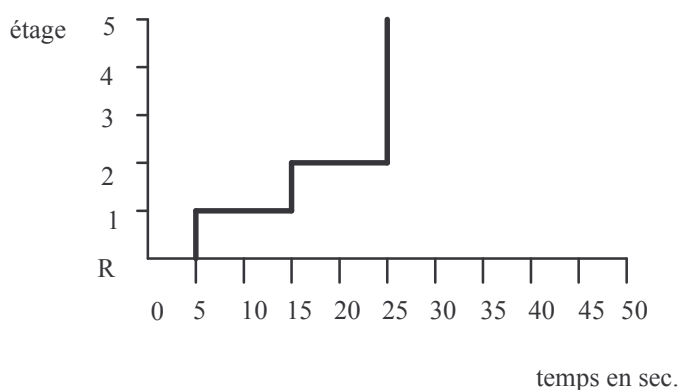
Pour ce type d'activité, des situations classiques comme celles d'une montée en ascenseur ou d'une promenade peuvent être utilisées mais en travaillant des tâches spécifiques.

L'ascenseur :

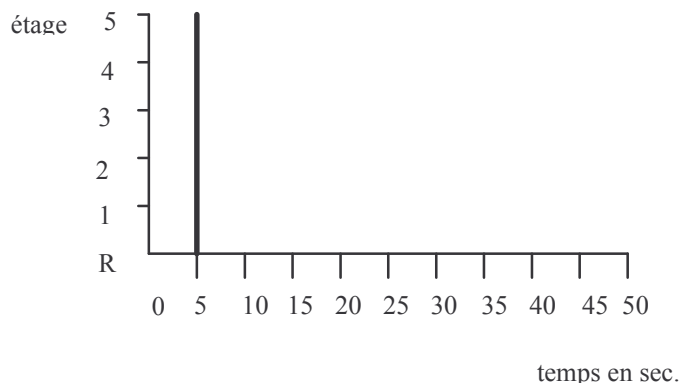
Dans un immeuble de cinq étages, il faut environ cinq secondes à l'ascenseur pour se déplacer d'un étage à l'autre.

Voici trois graphiques :

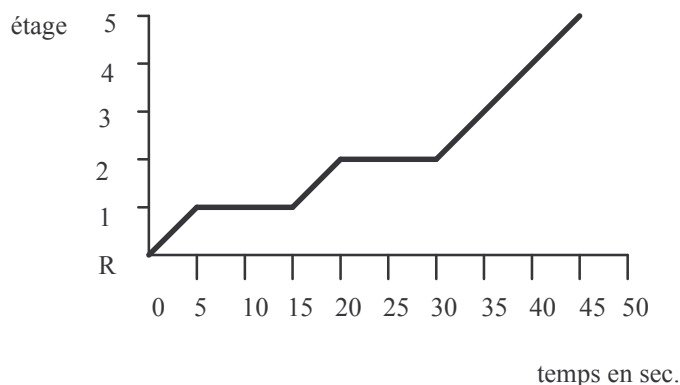
graphique 1 :



graphique 2 :



graphique 3 :



a. Indiquer pour chacun des graphiques, si pour chaque valeur d'abscisse correspondent 0, 1, ou plusieurs valeurs d'ordonnées. Cela permet-il de les distinguer?

b. Dans un immeuble de cinq étages, il faut environ cinq secondes pour se déplacer d'un étage à un autre et l'arrêt à l'étage dure dix secondes. Lequel de ces graphiques représente le voyage d'un ascenseur qui démarre au rez-de-chaussée R, et qui s'arrête uniquement aux premier, deuxième et cinquième étages?

L'apprentissage des représentations graphiques avec cette démarche permet alors aux élèves d'être à pied d'œuvre pour résoudre graphiquement des équations, des inéquations, pour étudier les variations de différentes fonctions comme celles du second degré, pour comprendre graphiquement les variations d'une fonction quelconque ou lire les coefficients directeurs des tangentes à une courbe. Toutes ces démarches mathématiques qui font partie intégrante des démarches mathématiques au lycée requièrent en effet des démarches de pointage à l'intérieur d'une appréhension globale qui permette de discerner tous les aspects qualitatifs du graphique.

Références :

Manuels Istra Hachette, IREM de Strasbourg, quatrième et troisième.

Suivis scientifiques sixième, cinquième, quatrième et troisième.

Mathématiques plein écran, CNDP Nancy-Metz.

VI . Références

APMEP Evaluations EVAPM 6 -première.

L'ensemble des documents produits par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public contient une opérationnalisation des contenus du programme de mathématiques de chaque classe. On trouve une analyse des obstacles rencontrés par les élèves. Document non limité à l'algèbre.

Artigue M., 1995. *Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement*. In Environnements Interactifs d'apprentissage avec ordinateur. Guin, Nicaud et Py, Eyrolles.

Approche centrée "sur deux aspects : les objets de savoir et les processus d'adaptation des élèves" et identification dans chaque cas d'un "certain nombre de phénomènes qu'une problématique d'intégration doit nécessairement prendre en compte".

Balacheff N., 1994. *La transposition informatique. Notes sur un nouveau problème pour la didactique*. In Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp. 364-370. Grenoble. La Pensée Sauvage Édition.

"Aux contraintes de la transposition didactique s'ajoutent, ou plutôt se combinent, celle de modélisation et d'implémentation informatiques : contraintes de la modélisation *computable*, contraintes logicielles et matérielles des supports informatiques de réalisation."

Bernard R., Faure C., Noguès M., Trouche L., 1997. *Intégration des calculatrices dans la formation initiale des Maîtres*, Rapport de recherche IUFM/MAFPEN. IREM de Montpellier.

Pour favoriser une intégration des calculatrices à l'enseignement, analyse des effets d'une "pression didactique" variable (ponctuelle, longue, faible, forte) sur des stagiaires en formation initiale de divers profils. Problèmes rencontrés et propositions de formation, tant initiale que continue.

Booth L.R., 1984. *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*. Petit x n 5 IREM de Grenoble.

Une analyse des difficultés que rencontrent les élèves dans la modélisation et dans le traitement des expressions algébriques. Cet article propose un ensemble de tests.

Chevallard Y., 1989. *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Perspective curriculaire : la notion de modélisation*. Petit X, n 19, pp. 45-75, IREM de Grenoble.

Comment définir un état du système d'enseignement (curriculum) qui permette un apprentissage de l'algébrique plus idoine aux tâches pour lesquelles il sera employé au lycée : calcul fonctionnel. Analyse des processus de modélisation, producteurs de connaissance, qui permettront d'atteindre l'objectif final : "la maîtrise formelle du calcul fonctionnel".

Colomb J. et al., 1995. *Calcul littéral , Savoir des élèves de collège*. Documents et travaux de recherche en éducation N 4 INRP, Paris

Combier G., Guillaume J.C., Pressiat A., 1996. *Les débuts de l'algèbre au collège- au pied de la lettre*. INRP Paris

Les deux documents précédents constituent deux étapes d'une même recherche ; le premier comportant des éléments d'analyse des erreurs et des obstacles rencontrés

par des élèves de collège ; le second, après une analyse théorique, propose des ingénieries dans le domaine de l'apprentissage de l'algèbre.

DEP *Evaluation à l'entrée en seconde générale et technologique* (96-97). Publication du ministère de l'éducation nationale.

Les documents d'évaluation produits par le ministère de l'éducation nationale et les analyses qui sont faites sur la base d'échantillons paraissent dans la série des documents *Educations et formations* publiées par la DEP. Ces documents permettent la construction et l'analyse d'évaluations par les enseignants.

Didierjean G., Egret M. A., Duval R., 1997. *Fonctions et représentations graphiques*. Bulletin de la mission Laïque Française. N° 26 et 27.

Texte complet des travaux présentés dans la partie III.

Douady R., 1986. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7 n° 2, pp. 5-31, Grenoble.

Des exemples de situations lors du cursus primaire illustrent comment construire un enseignement différent restituant leur sens aux outils mis en œuvre par les élèves tout en assurant une présentation institutionnelle des objets correspondants.

Duval R., 1988. *Graphiques et équations : l'articulation de deux registres*. Annales de didactique et de science cognitives, vol 1, pp. 235-253. IREM de Strasbourg.

"Une description systématique des variables visuelles à prendre en compte dans la démarche d'interprétation globale est proposée".

Duval R., 1993. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de science cognitives, vol 5, pp. 37-65. IREM de Strasbourg.

Comme il n'y a pas de noësis (appréhension conceptuelle) sans sémosis (appréhension d'une représentation), la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît comme fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets mathématiques, ce qui suppose une discrimination des unités signifiantes des divers registres.

Laborde C., 1982. *Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique*. Thèse d'état. Grenoble, IMAG.

Étude du rôle de l'activité langagière en mathématiques, des déformations qui résultent de l'insertion de la langue symbolique dans la langue naturelle à travers l'analyse de la production par des binômes d'élèves de sixième et cinquième d'énoncés écrits permettant à d'autres binômes de reproduire une figure donnée.

Lenfant A., 1997 *Etude sur la transposition d'un outil de recherche à destination des enseignants*- Mémoire de DEA, Université Paris 7.

Ce mémoire analyse la transposition réalisée par B.Grueon de l'outil de diagnostic des compétences en algèbre élémentaire qu'elle avait construit dans sa thèse de doctorat, pour, d'une part, l'adapter, d'une part, à la transition collège / lycée, d'autre part, le rendre exploitable par des enseignants.

Noguès M., 1992. *Le concept de fonction*, Mémoire de DEA, Didactique des Disciplines Scientifiques, IREM de Montpellier.

Etat des lieux des conceptions des élèves d'une classe de seconde et d'une classe de terminale lors de l'introduction de la notion de fonction.

Pihoué D., 1996. *L'entrée dans le mode fonctionnel en classe de seconde*. Mémoire de DEA, Didactique des Disciplines, option Didactique des Mathématiques, Paris VII.

Étude de la modélisation de situations fonctionnelles par des élèves de seconde. Repérage des divers registres et cadres utilisés par les élèves et des transitions vers un mode de pensée fonctionnel par opposition aux modes arithmétiques et algébriques.

Sfard A., 1992. *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function*. In *The concept of function. Aspects of epistemology and pédagogie*, pp. 59-84. Dubinski Ed, Guershon Harel, Editors, Mathematical Association of America. USA.

Rappel de la nature duale d'un concept mathématique : aspect structural et procédural (*operational*). A propos du concept de fonction, analyse des conceptions d'apprenants : problème de l'antériorité du statut procédural sur le statut structural, observations de conceptions pseudo structurales.

Trouche L., 1996. *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de Doctorat. Université de Montpellier II.

L'action instrumentée peut renforcer (ou altérer), lors de l'appropriation d'un concept (les limites sont le domaine d'étude), certaines conceptions par les interactions mises en jeu entre les deux processus. L'observation d'une classe permet de mettre en évidence que l'influence des outils de calcul dépend des caractéristiques cognitives des élèves.

Vergnaud G., 1990. *La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 10, n 23, 293-305.

"L'objet de la théorie des champs conceptuels est de fournir un cadre aux recherches sur les activités cognitives complexes, principalement sur les apprentissages scientifiques et techniques. C'est une théorie psychologique du concept, ou mieux encore de la conceptualisation du réel".

Références complémentaires

Chevallard Y., 1991 : Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Séminaire de didactique des mathématiques* et de l'informatique, n 122, 103-117.

Drouard J.Ph., 1992 : *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse, Université Paris VII.

Filloy R., Yague E., 1991 : Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning; *Proceedings of the fifteenth PME Conference*, Assisi, 48-55.

Gascon J., 1993 : Desarrollo del conocimiento matematico y analisis didactico : del patron de analisis-sintesis a la genesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* ; Vol 13-3, 295-332.

GECO, 1997 : Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire, *Repères IREM N 28*, 37-68.

Grugeon B., 1995 : *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

- Kieran C., 1990 : *Mathematics and cognition*, Cambridge University Press.
- Kieran C., 1994 : A functional approach to the introduction of algebra. Some pros and Cons. *Proceedings of PME 18* , Vol I, 157-175, Université de Lisbonne.
- Lemoyne G., Conne F., Brun J., 1993 : Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif à l'algèbre, *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol 13-3, 333-384.
- Nicaud J.F., 1994 : Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol 14/1.2, 67-112.
- Sfard A., 1991 : On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects a different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, 1-36.
- Sutherland R. 1993 : .Algebraic Processes and the role of Symbolism, *Working Conference of ESRC Seminar Group* , Institute of Education, Université de Londres.
- Vergnaud G., 1987 : Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in *Actes du Colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-288, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Vergnaud G., 1988 : Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. in *Actes du premier Colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 188-199, La Pensée Sauvage, Grenoble.

On trouvera dans cette brochure une vision synthétique des principaux acquis didactiques concernant l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre et des fonctions et une présentation des recherches menées dans le cadre du Groupement National d'Équipes de Recherche en Didactique des Mathématiques. Ces recherches portent notamment sur l'articulation dans le travail algébrique et fonctionnel des différents registres sémiotiques dans lesquels s'inscrit l'activité mathématique : registre de la langue naturelle, registre des écritures algébriques, registre graphique... ainsi que sur le rôle que peuvent jouer les nouvelles technologies informatiques pour favoriser l'articulation des cadres, registres et points de vue et soutenir les activités de modélisation prônées par les programmes, tant en ce qui concerne l'initiation à l'algèbre que l'initiation aux fonctions.

Le bureau de la valorisation des innovations pédagogiques peut, sur simple demande adressée par courrier électronique à monsieur Jean Mativet : jean.mativet@education.gouv.fr, envoyer le fichier WORD (754 Ko) contenant le présent document.

*Direction de l'enseignement scolaire
Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques
107 rue de Grenelle - 75007 Paris*