

ANALYSE DE TEXTES D'EXAMEN DE BTS

MERIGOT Michel
IREM de NICE

INTRODUCTION

Le groupe a étudié différents problèmes tant du point de vue des difficultés de rédaction que peuvent poser certaines questions que des modèles utilisés qui ne sont pas à développer dans les problèmes de BTS.

PROBLEME I (10 POINTS)

Un atelier d'usine produit des pièces utilisées dans la fabrication de compresseurs ; on se propose, dans cet exercice, d'estimer le nombre moyen de jours nécessaires pour que cet atelier, comportant 25 machines, produise 300 000 pièces acceptables.

1 - Soit X la variable aléatoire qui associe aux 25 machines de l'atelier le nombre de machines fonctionnant sans panne chaque jour.

Pour chaque machine la probabilité de l'événement "fonctionner sans panne un jour donné" est 0.96. Les machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

1 -1 Les conditions précédentes impliquent que X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi?

1 -2 Si l'on considère un très grand nombre de jours, quel est le nombre moyen de machines fonctionnant chaque jour ?

2 - Un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans la production d'une machine donne les résultats suivants :

longueur en mm	[79.5 ; 79.6[	[79.6 ; 79.7[	[79.7 ; 79.8[	[79.8 ; 79.9[	[79.9 ; 80[
nombre de pièces	2	4	11	18	23
longueur en mm	[80 ; 80.1[	[80.1 ; 80.2[	[80.2 ; 80.3[	[80.3 ; 80.4[	[80.4 ; 80.5[
nombre de pièces	19	14	5	3	1

En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} de la moyenne et de l'écart-type de cet échantillon.

3 - Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque pièce sa longueur exprimée en mm. On suppose que la variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne M et d'écart-type σ . On considère la variable aléatoire Y qui, à chaque échantillon de taille $n = 100$, associe la moyenne des longueurs des pièces de cet échantillon.

On rappelle que Y suit la loi normale de moyenne M et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3.1 On suppose $\sigma = 0,18$, déterminer un intervalle de confiance de la moyenne des longueurs de la population avec le coefficient de confiance 95 %.

3-2 Une pièce est acceptable si sa longueur est comprise entre 79,65 et 80,35.

En prenant $M = 80$ et $\sigma = 0,18$, calculer le pourcentage de pièces acceptables dans la production.

4 - On suppose que chacune des 25 machines produit le même pourcentage de pièces acceptables et qu'une machine produit 600 pièces par jour (acceptables ou non).

A combien peut-on estimer le nombre de jours nécessaires pour que l'atelier produise 300 000 pièces acceptables. (On utilisera les questions (1-2 et 3-2).

REMARQUES SUR LE PROBLEME 1

1- La première question ne pose aucune difficulté, par contre la question 1-2 a amené une longue discussion. On a retenu deux possibilités de rédaction :

a) Sur n jours (n éventuellement précisé), le nombre moyen de machines en fonctionnement est une variable aléatoire N . Quelle est son espérance ? (On supposera que les événements "fonctionner sans panne un jour donné" sont indépendants) (*).

b) Si l'on veut garder l'approche fréquentiste, on peut demander d'étudier la loi de N .

Soit X_i la variable aléatoire "nombre de machines fonctionnant sans panne le jour i "

$$X_i \sim \mathcal{B}(25; 0,96)$$

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

Les variables sont indépendantes : $Y \sim \mathcal{B}(n \times 25; 0,96)$ et $N = \frac{Y}{n}$. N prend des valeurs de la forme k/n et les probabilités sont celles d'une loi binomiale.

$$E(N) = \frac{n \times 25 \times 0,96}{n} = 24 \quad \text{et} \quad \text{var}(N) = \frac{n \times 25 \times 0,96 \times 0,04}{n^2} = \frac{0,96}{n}$$

Quand n est grand, la variance de N est très petite et la loi est très concentrée autour de 24.

2- $\bar{x}$ nous est inconnue, mais la valeur obtenue en prenant pour valeur observée le centre de la classe est une bonne approximation de $\bar{x}$.

3-1 Même si l'on utilise l'écart-type calculé, on peut déterminer un intervalle de confiance de la moyenne car

la variable $\frac{Y - M}{\sigma/\sqrt{n}}$ est bien représentée par une loi normale réduite.

4- On retombe sur les difficultés de la question 1-2 avec en plus la combinaison d'une loi binomiale et d'une loi normale.

PROBLEME 2

Au cours des élections présidentielles du 10 mai 1981, 51.75% des électeurs ont voté pour Mitterrand et 48.25 % pour Giscard d'Estaing.

a) Si un sondage de 1000 électeurs choisis au hasard dans la population française avait été réalisé, quelle aurait été la probabilité de prévoir à tort la défaite de Mitterrand ?

b) Si le risque de se tromper dans la question précédente doit être réduit à 1%, quelle doit être la taille de l'échantillon ?

REMARQUES SUR LE PROBLEME 2

2 interprétations ont été données aux questions :

- Soit, on cherche la probabilité pour qu'un sondage propose un résultat défavorable
- Soit, on attache à chaque sondage un intervalle de confiance et, pour un risque donné, on recherche la probabilité que la borne supérieure de l'intervalle soit encore inférieure à 0.50

*) N.d.E. Il faut de plus supposer qu'une machine tombant en panne est réparée pour le lendemain.