Samedi 5/09/92 - Atelier 8h30 à 10h30

SAINT-PIERRE

Application de la régression : loi de Weibull.

L'atelier était destiné à montrer à l'aide d'un TP (construction du papier de Weibull) une application de la régression linéaire au niveau BTS.
Les auditeurs ne connaissant pas la loi de Weibull, il a fallu, au préalable, donner les principales définitions et caractéristiques de la fiabilité et en particulier de la loi de Weibull (pages 8 et 9).

Le TP (pages 10 et 11) a été traité partiellement par les auditeurs, la fin présentant moins d'intéret.
Le groupe a préféré traiter les deux exercices d'un TP (pages12 et 13).
Ce TP a permis de comprendre l'utilisation du papier de Weibull pour déterminer les paramètres η puis β et γ dans les deux cas nul ou non nul.

Nous avons pu, au cours de cet atelier, contaster que pour comprendre ces domaines concrets et trouver des applications dans l'industrie, la démarche des professeurs était la même dans des spécialités pourtant très différentes (agronomie, maintenance etc..).

LA FIABILITE

1. Fonctions de défaillance F(t) et de fiabilité R(t) :

- Modèle mathématique:
La variable aléatoire T qui mesure la durée de vie sans défaillance ou le temps de bon fonctionnement avant défaillance (TBF) est une variable aléatoire de type continu prenant ses valeurs dans R^+, de densité de probabilité f .
Sa fonction de répartition F est appelée fonction de défaillance.
F(t) est la probabilité d'avoir vu le matériel en panne avant une durée t de fonctionnement.

$$F(t) = P(T \leq t)$$

F(t) est appelée fonction de défaillance.

La fiabilité R(t) est la probabilité que le matériel fonctionne sans panne jusqu'au temps t.

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$

R(t) est appelée fonction de survie ou fonction de fiabilité du matériel.

f étant la densité de probabilité et F la fonction de répartition, on a, si F est dérivable :

$$F'(t) = f(t) \qquad F(t) = \int_0^t f(x)dx$$

- Aspect statistique :

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)} = \frac{\text{nombre de survivants}}{\text{nombre de matériel initial}}$$

La fonction de fiabilité R(t) est alors la limite d'une fréquence.
La fonction de défaillance est alors :
On a également $F(t) = \dfrac{N(0) - N(t)}{N(0)} = \dfrac{\text{nombre de défaillants}}{\text{nombre de matériel initial}}$

2. Taux d'avarie λ(t) :

- Aspect statistique :

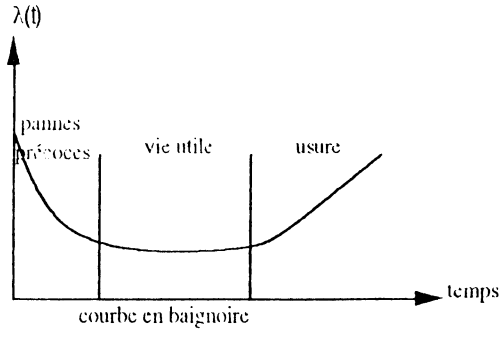
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

- Modèle mathématique :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

λ(t) est appelé le taux d'avarie instantané ou taux de défaillance instantané.
On constate expérimentalement , que pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané a la forme suivante :



courbe en baignoire

3. Relation entre R(t) et λ(t)

On a vu que $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}$ donc $\lambda(t)dt = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}dt$

$$\int_0^t \frac{F'(x)}{1 - F(x)}dx = -[\ln(1 - F(x))dx]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda(x)dx = -[\ln R(x)]_0^t, \qquad \int_0^t \lambda(x)dx = -\ln R(t) \text{ et finalement :}$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}} \qquad \boxed{F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}}$$

Le choix du modèle mathématique pour la fonction λ que l'on sait, devoir répondre à certaines conditions nous permet, par un calcul intégral de déterminer la fiabilité R(t) du matériel considéré.

LOI DE WEIBULL

DEFINITION

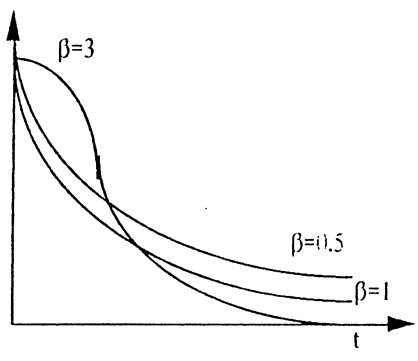
Pour couvrir tous les cas où le taux d'avarie λ(t) est variable et afin de faciliter le calcul intégral, Weibull a choisi pour λ(t) une fonction puissance :

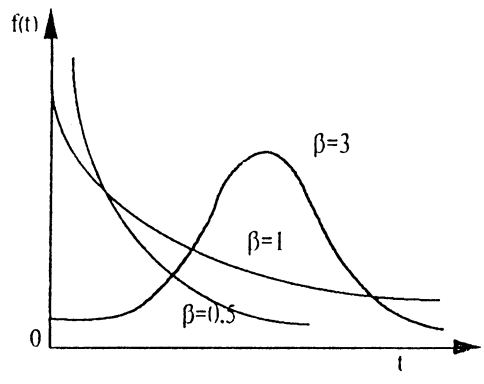
$$\boxed{\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta - 1}}$$

avec $t - \gamma > 0$; $\beta > 0$; $\eta > 1$

$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$ donc en intégrant la fonction puissance $\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta - 1}$ on obtient :

$$\boxed{R(t) = e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta}}}$$





UN TP POUR CONSTRUIRE DU PAPIER DE WEIBULL

Le but de ce TP est de reconstituer le papier de Weibull.

On rappelle que dans le modèle de Weibull. lorsque $\gamma = 0$, la probabilité de défaillance F(t) est donnée par la relation : $F(t) = 1 - e^{-[t/\eta]^{\beta}}$

1°) Démontrer que $\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$.

Démontrer en posant $X = \ln t$ et $Y = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right]$ que l'on obtient l'équation de droite :

$$Y = \beta X - \beta \ln \eta$$

2°) Compléter les tableaux suivants :

t	0,1	0,3	e^{-1}	0,5	1	3	5	8	10	20	50
ln t	- 2,3				0				2,3		
4 × ln t	- 9,2				0				9,2		

F(t) en %	0,1 %	1 %	10 %	20	30	50	60	70	80	90	99 %
$\ln\left(\ln\frac{1}{1-F(t)}\right)$	- 6,9						- 0,08				
Y × 2 cm	- 13,8										

3°) Sur l'axe "X_1" du papier millimétré ci- joint la valeur de t placée en H est 0,1. Pour t = 0,1 on a ln t ≈ - 2,3 cm, d'où avec l'échelle choisie 4 × ln 0,1 ≈ - 9,2 cm.

L'axe des ordonnées "Y" aura sa position déterminée par le point I correspondant à ln t = 0 donc à t = 1 donc tel que $\overline{IH}$ = - 9,2 cm.

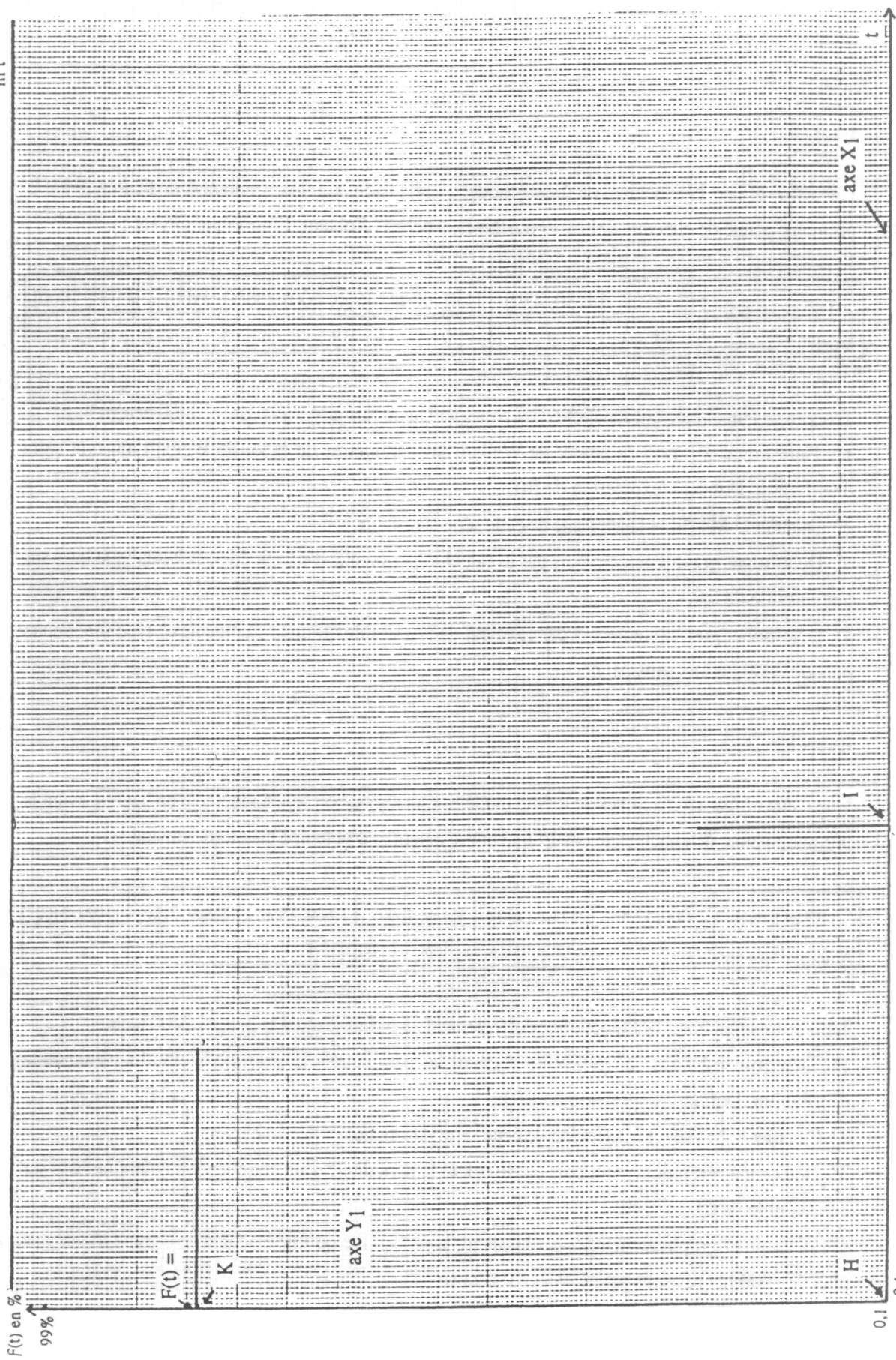
Placer sur cet axe "Y" les valeurs de t données dans le premier tableau.

4° Sur l'axe "Y_1" la valeur de F(t) placée en H est 0,001 ou 0.1 %. Pour F(t) = 0,001 on a $\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right]$ ≈ - 6,9 cm d'où avec l'unité choisie - 13,8 cm.

L'axe des abscisses "X" aura sa position déterminée par le point K correspondant à $\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right] = 0$ donc tel que $\overline{KH}$ = - 13,8 cm. Placer alors la valeur de F(t) correspondant au point K. puis les autres valeurs de F(t) données dans le deuxième tableau.

5°) Pour obtenir le coefficient directeur de la droite on trace un nouvel axe des ordonnées "Y_2" parallèle à "Y_1" et "Y" tel que son abscisse soit (- 1) , sa position est donc telle que ln t = - 1 ou $t = \frac{1}{e}$. Construire cet axe. Le module de cet axe est l'unité choisie sur l'axe des ordonnées, son origine est sur l'axe "X" et son vecteur unitaire est opposé à celui de l'axe "Y". Graduer cet axe.

Tracer la droite d'équation Y = 2 X - 2 ln 10, en déduire F(t) et R(t) en fonction de t.


ln t
t
axe X1
1
1
I
F(t) en %
99%
F(t) =
K
axe Y1
H
0,1
0,1

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Une usine utilise 19 machines de même modèle. L'étude du bon fonctionnement en heures, avant la première panne de chacune de ces 19 machines, a permis d'obtenir l'historique suivant :

TBF en heures	]0, 250]	]250, 450]	]450, 600]	]600. 800]	]800, 1100]	]1100, 1400]
Nombre de pannes	1	2	2	3	4	4

Trois autres machines ont fonctionné correctement au moins jusqu'à la date :" 1400 heures ".

1° Déterminer à l'aide du papier de Weibull les paramètres de la loi de Weibull ajustant cette distribution. Donner l'expression de R(t).

2° Calculer la MTBF et la Médiane de cette série statistique.

3° Déterminer graphiquement puis par le calcul la périodicité d'un entretien systématique basé sur une fiabilité de 0,9.

4° Déterminer graphiquement et par le calcul, la probabilité qu'une machine de ce type fonctionne plus de 2000 heures sans panne.

Exercice 2

Une usine utilise 19 machines de même modèle. L'étude du bon fonctionnement en heures, avant la première panne de chacune de ces 19 machines, a permis d'obtenir l'historique suivant :

TBF en heures	]1000, 1250]	]1250, 1450]	]1450, 1600]	]1600, 1800]	]1800, 2100]	]2100, 2400]
Nombre de pannes	1	2	2	3	4	4

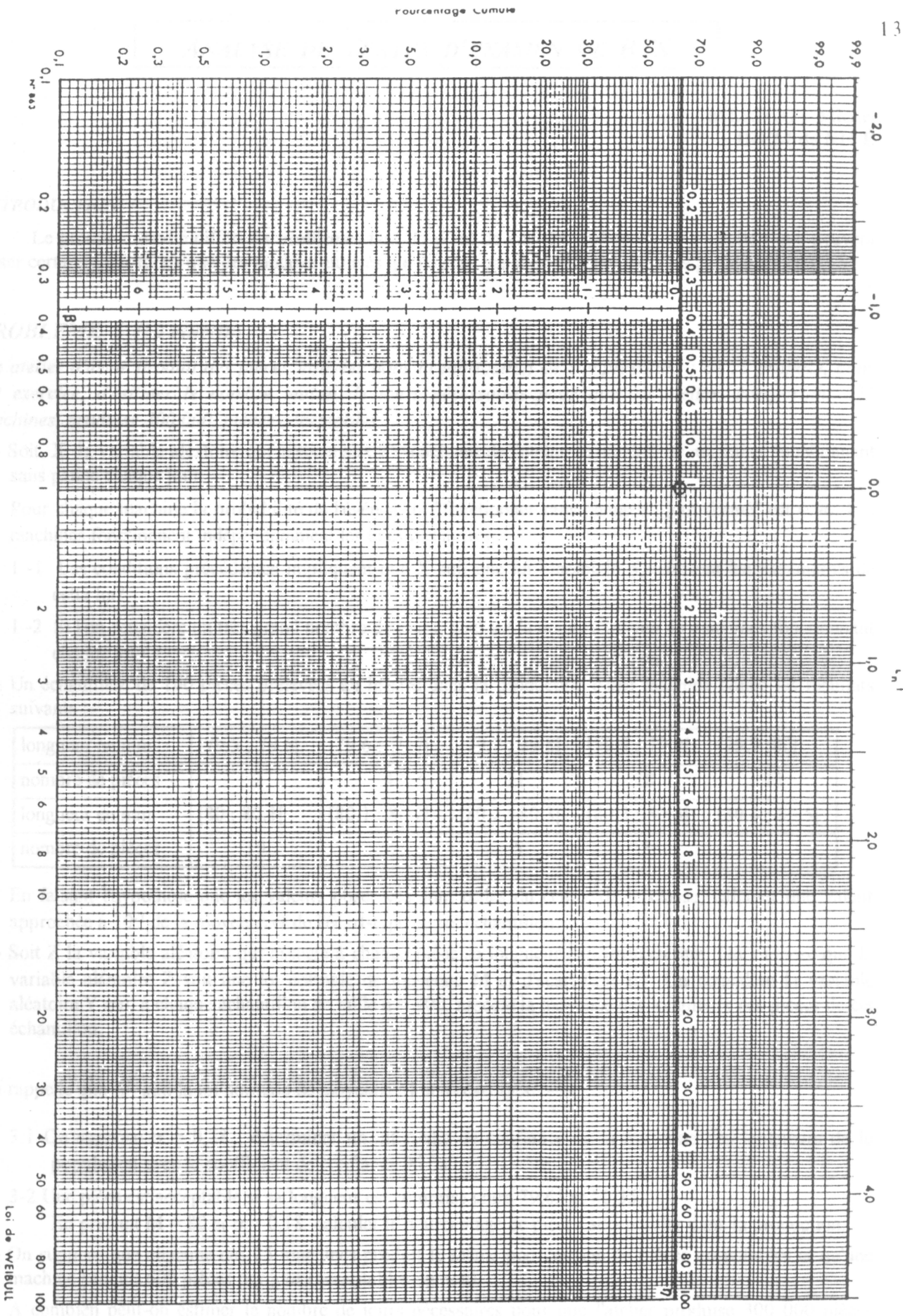
Trois autres machines ont fonctionné correctement au moins jusqu'à la date : " 2400 heures ".

1° Déterminer à l'aide du papier de Weibull les paramètres de la loi de Weibull ajustant cette distribution. Donner l'expression de R(t).

2° Calculer la MTBF et la Médiane de cette série statistique.

3° Déterminer graphiquement puis par le calcul la périodicité d'un entretien systématique basé sur une fiabilité de 0,9.

4° Déterminer graphiquement et par le calcul, la probabilité qu'une machine de ce type fonctionne plus de 2000 heures sans panne.


Pourcentage Cumulé
Loi de WEIBULL