Mardi 1/09/92 - Atelier 16h à 18 h

LABROUE, SAINT-PIERRE :

Echantillonnage, Estimation (niveau 1)

Au cours de cet atelier, nous avons d'abord présenté une activité préparatoire destinée aux élèves de section de technicien supérieur : cette activité consiste à faire prélever aux élèves (de préférence chez eux) des échantillons aléatoires, avec remise, de taille 30 dans une population de 100 éléments, (pages 2 et 3) .
Les élèves déterminent, pour chaque échantillon prélevé, soit la moyenne, soit le pourcentage des éléments de cet échantillon ayant une propriété donnée.
Les résultats reportés dans un tableau fournissent, sans formalisme inutile à ce niveau de formation, des données utiles pour introduire le cours sur l'échantillonnage, mais également pour celui concernant l'estimation par intervalle de confiance.

Des sujets de brevets de technicien supérieur se rapportant à ces deux parties ont été analysés et traités, nous avons passé pas mal de temps à discuter sur le contenu et la rédaction de ces sujets. D'autres rédactions ont été proposées, (pages 4, 5 et 6).

Nous avons été limités par le temps, peu d'exercices sur l'estimation ont été abordés, aussi, avons nous distribué aux intéressés des propositions de rédactions de sujets de brevets de technicien supérieur des dernières années avec leurs corrigés (20 pages).

ECHANTILLONNAGE : Travaux pratiques

D'après TP 1 et 2 page 135 (livre de Mr Verlant)

On considère la population constituée des 100 éléments suivants:

classe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
effectif	1	3	7	12	17	20	17	12	7	3	1

1° Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette population. Calculer le pourcentage p d'éléments de la population correspondant à un nombre supérieur ou égal à 6.

2° Prélever au hasard et avec remise, 10 échantillons de 30 éléments de la population. Dans chacun de ces échantillons, calculer les moyennes respectives $\overline{x}_1, .. \overline{x}_n$, ainsi que les pourcentages f_1, f_2, ..f_n d'éléments correspondant à un nombre supérieur ou égal à 6.

3° Calculer la moyenne μ et l'écart type s de la nouvelle série statistique constituée des 10 moyennes ainsi que la moyenne $\overline{f}$ et l'écart type s' de la série statistique constituée des 10 pourcentages f_i.

4° a) Comparer m et μ d'une part, et d'autre part $\frac{\sigma}{\sqrt{30}}$ et s

b) Comparer p et f d'une part, et d'autre part $\sqrt{\frac{p(1-p)}{30}}$ et s' : leurs valeurs numériques sont-elles proches ?

5° a) Pour chaque échantillon, déterminer les bornes de l'intervalle :

$[\ \overline{x}_i - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\ ;\ \overline{x}_i + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}]$ et placer ces dix intervalles sur 10 axes parallèles en alignant verticalement les abscisses communes.

Quel pourcentage de ces intervalles contient la moyenne m de la population ?

b) Même question avec les intervalles $[\ f_i - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{30}}\ ;\ f_i + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{30}}\ ]$.

Quel pourcentage de ces intervalles contient la valeur de p calculée au 1° ?

Placer les résultats dans ce tableau :

échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i										
f_i										

0	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7
7	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	10				

ECHANTILLONNAGE

Exercice 1 MICROTECHNIQUE 89 *(extrait)*

Une machine fabrique des pièces de forme circulaire en grande série. A chaque pièce, tirée au hasard, on associe son diamètre exprimé en millimètres ; on définit ainsi une variable aléatoire X. On suppose que X suit une loi normale ; on désigne par m sa moyenne et par σ son écart type.

On suppose connue la moyenne : m = 150. On a constaté que 8 % des pièces de la production ont un diamètre supérieur à 150,3 mm.

1° Quelle est la loi suivie par la variable $T = \frac{X - 150}{\sigma}$? Etablir que $\sigma = 0{,}21$.

2° Calculer le pourcentage de pièces de cette fabrication dont le diamètre est compris entre 149,79 et 150,42.

3° Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 400 pièces associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{400}} = 0{,}0105.$$

Déterminer h pour que $P(m - h \leq \overline{X} \leq m + h) = 0{,}95$.

Exercice 2 MECANIQUE ET AUTOMATISMES INDUSTRIELS 88 *(extrait)*

Une machine fabrique des pièces en grande série. La variable aléatoire X qui, associe à chaque pièce tirée au hasard sa longueur suit la loi normale de moyenne m = 28,20 mm et d'écart type $\sigma = 0{,}027$ mm

On admet que la variable aléatoire $\overline{X}$ prenant pour valeurs les moyennes des échantillons de même taille n suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

1° Une pièce est " bonne " si sa longueur appartient à l'intervalle [28,15 ; 28,27].
Calculer le poucentage de pièces " bonnes " dans la fabrication.

2° On prélève un échantillon (non exhaustif) dans cette production.
Quelle doit être la taille de l'échantillon pour que la moyenne des longueurs des pièces prélevées appartienne à l'intervalle [28,195 ; 28,205] avec une probabilité de 0,95 ?

Exercices non corrigés :

I)

Dans une population donnée, la proportion p de fumeurs est 0,36. Quelle est la probabilité qu'en prélevant avec remise un échantillon simple de 400 personnes dans cette population la proportion de fumeurs dans l'échantillon soit plus grande ou égale à 0,40 ?

II)

Au cours d'une consultation électorale, un candidat a recueilli 46 % des suffrages.

1° Quelle est la probabilité qu'un groupe de 200 personnes, prises au hasard, lui ait donné la majorité ?

2° Même question avec un groupe de 1000 personnes.

Exercice 4 BTS MAINTENANCE 84

Une machine automatique fabrique des pièces. On suppose que la variable aléatoire X qui à chaque pièce associe son poids x exprimé en grammes suit la loi normale de moyenne 0,90 et d'écart type 0,06.

Une deuxième machine met les pièces fabriquées en boîtes, à raison de 100 pièces par boite ; on prélève au hasard un certain nombre de boites et pour chaque boîte on mesure la moyenne $\bar{x}$ des poids des pièces de cette boîte. On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui à chaque boîte associe la moyenne des poids $\bar{x}$.

1° Quelle est la loi suivie par $\bar{X}$?

2° Déterminer $P(|\bar{X} - 0,9| \leq 0,01)$ c'est à dire $P(0,9 - 0,01 \leq \bar{X} \leq 0,9 + 0,01)$

3° Déterminer un intervalle centré en 0,9 tel que $\bar{X}$ prenne une valeur dans cet intervalle avec la probabilité 0,95.

Exercice 5 BTS MAI 86

Une machine fabrique des disques pleins en grande série. On suppose que la variable aléatoire X qui, à chaque disque tiré au hasard, associe son diamètre suit la loi normale $N(\mu,\sigma)$ où $\mu = 12.8$ mm et $\sigma = 2,1$ mm.

1° Quelle loi suit la variable aléatoire $\bar{X}$ qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de taille $n = 49$, associe la moyenne des diamètres des disques de cet échantillon ?

2° Déterminer un intervalle centré en 12.8 tel que la variable aléatoire $\bar{X}$ prenne ses valeurs dans cet intervalle avec la probabilité 0,95.

3° On se propose de prélever un échantillon aléatoire non exhaustif de taille n. Déterminer n pour que la moyenne des diamètres des disques prélevés ne s'écarte pas de 12,8 de plus de 0,2 mm, avec une probabilité de 0,95.

Exercice 6 BTS PRODUCTIONS ANIMALES 87

On admet que dans un élevage de poulets fermiers agés de 3 mois, la variable aléatoire prenant pour valeur le poids d'un poulet suit la loi normale de moyenne 1 325 g et d'écart type 175 g.
On prélève au hasard de manière non exhaustive 16 poulets de cet élevage.

1° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\bar{X}$ qui, associe à chaque échantillon de 16 poulets le poids moyen des poulets de cet échantillon.

2° Calculer la probabilité que le poids total d'un échantillon de 16 poulets :

a) dépasse 22 kg ; [c'est à dire $P(\bar{X} > \frac{22000}{16})$]

b) soit compris entre 20 kg et 22 kg ; [c'est à dire $P(\frac{2000}{16} < \bar{X} < \frac{22000}{16})$]

c) soit inférieur à 20 kg . [c'est à dire $P(\bar{X} < \frac{20000}{16})$]

ESTIMATION

Exercice 1 CHIMISTE 91 (*extrait*)

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaine de conditionnement. On a prélevé de manière aléatoire, un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants où P_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

P_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1° Calculer la moyenne et l'écart type des masses du produit dans cet échantillon.

2° A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne m et de l'écart type σ de la masse du produit de la population.

3° On suppose que la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 lots associe la moyenne des masses du produit, suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{100}})$ et on prend pour σ l'estimation ponctuelle obtenue au 2° .Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de la population avec le coefficient de confiance 95 % .

4° Même question avec le coefficient de confiance 99 %, puis avec le coefficient de confiance 90 %

Exercice 2 CONSTRUCTION NAVALE 85

On a mesuré les longueurs en mm d'un échantillon de 100 tiges d'acier, tirées au hasard, à la sortie d'une machine automatique :

longueurs	effectif
[132 ; 134 [	2
[134 ; 136 [	5
[136 ; 138 [	13
[138 ; 140 [	24
[140 ; 142 [	19
[142 ; 144 [	14
[144 ; 146 [	10
[146 ; 148 [	8
[148 ; 150 [	3
[150 ; 152 [	2

1° Calculer la moyenne et l'écart-type des longueurs des tiges dans cet échantillon.

2° A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, proposer une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ de la longueur de toutes les tiges sorties de la machine.

3° Donner un intervalle de confiance à 99 % de la longueur moyenne μ des tiges de toute la production de la machine.

4° Quelle doit être la taille d'un échantillon extrait de la population pour que la moyenne des longueurs des tiges de la production soit estimée à 10^{-1} près, avec le coefficient de confiance 95 %