Tests non paramétriques

Il s'agit de présenter quelques tests non paramétriques comme réponses à des problèmes non réglés par les tests paramétriques quand leurs hypothèses de fonctionnement ne sont pas satisfaites.

I. Test de Mann et Whitney

• Utilisation

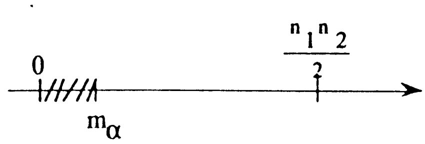
Il permet de comparer les moyennes de deux échantillons indépendants dans le cas où l'on ne sait rien des populations et où les tailles des échantillons sont insuffisantes pour appliquer un test de Student.
On dispose de deux échantillons, indépendants et non-exhaustifs, E_1 et E_2, de tailles respectives n_1 et n_2. On veut comparer les moyennes expérimentales, c'est-à-dire tester l'hypothèse nulle $(H_0) : \mu_1 = \mu_2$.

• Mise en place du test

On classe par *ordre croissant* l'ensemble des valeurs des deux échantillons. Pour distinguer les valeurs qui proviennent de E_1 et de E_2, on peut utiliser divers moyens; il est commode d'utiliser deux couleurs si on le peut.
Pour tout élément x_i de E_1, on compte le nombre d'éléments de E_2 situés après x_i (en comptant pour 0,5 tout élément de E_2 ex-æquo avec x_i).
On note u_1 la somme de toute les valeurs ainsi associées à tous les éléments de E_1.
On définit de même u_2 en permutant les rôles de E_1 et de E_2. Puis on pose $u = \min(u_1, u_2)$.
On vérifie que $u_1 + u_2 = n_1 n_2$.

• Règle de décision

Soit $\mathcal{U}$ la variable aléatoire qui prend la valeur u à l'issue de l'expérience aléatoire.
Les tables jointes donnent, en fonction de n_1, n_2 et α la valeur m_α telle que, sous (H_0), $P(\mathcal{U} \leq m_\alpha) = \alpha$ dans les cas $\alpha = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$. On rejette l'hypothèse nulle si $u \leq m_\alpha$.



II. Test de Wilcoxon

• Utilisation

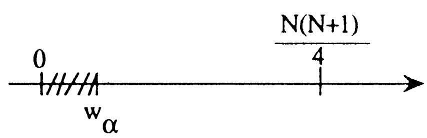
Il permet de comparer les moyennes de deux échantillons appariés dans le cas où l'on ne sait rien des populations et où la taille des échantillons n'est pas suffisante pour appliquer un test de Student.
On veut comparer les moyennes expérimentales, c'est-à-dire tester l'hypothèse nulle (H_0) : $\mu_1 = \mu_2$.

• Mise en place du test

On calcule les différences entre les valeurs appariées. On supprime les différences nulles et on note N le nombre de différences non nulles.
On classe ces différences par ordre croissant des valeurs absolues.
On affecte à chaque différence son rang dans ce classement, s'il y a des ex-æquo, on attribue à chacun un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.
On calcule w_+ la somme des rangs des différences positives et w_- somme des rangs des différences négatives. On vérifie que $w_+ + w_- = \dfrac{N\,(N+1)}{2}$.
On note $w = \min\,(w_+, w_-)$.

• Règle de décision

Soit W la variable aléatoire qui prend la valeur w à l'issue de l'expérience aléatoire.
Si $N \leq 25$, la table jointe donne, en fonction de N, et α la valeur w_α telle que, sous (H_0), $P(W \leq w_\alpha) = \alpha$ dans les cas $\alpha = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$. On rejette l'hypothèse nulle si $w \leq w_\alpha$.



Daniel FREDON
IREM de LIMOGES

bibliographie :

F.Couty, J.Debord, D.Fredon
Probabilités et statistiques pour les biologistes (chap. 17)
collection Flash U A.Colin

TABLE 7

Test de Mann et Whitney ($\alpha = 0{,}05$)

La table donne la valeur m_α telle que $P(U \leqslant m_\alpha) = \alpha = 0{,}05$ pour deux échantillons d'effectifs n_1 et n_2 avec $n_1 \leqslant n_2$.

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	–	–	–	–	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	–	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
5		2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6			5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7				8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8					13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9						17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10							23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11								30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12									37	41	45	49	53	57	61	65	69
13										45	50	54	59	63	67	72	76
14											55	59	64	69	74	78	83
15												64	70	75	80	85	90
16													75	81	86	92	98
17														87	93	99	105
18															99	106	112
19																113	119
20																	127

TABLE 8

Test de Mann et Whitney ($\alpha = 0{,}01$)

La table donne la valeur m_α telle que $P(U \leqslant m_\alpha) = \alpha = 0{,}01$ pour deux échantillons d'effectifs n_1 et n_2 avec $n_1 \leqslant n_2$.

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
3	–	–	–	–	–	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4	–	–	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5		0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6			2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7				4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8					7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9						11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10							16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11								21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12									27	31	34	37	41	44	47	51	54
13										34	38	42	45	49	53	57	60
14											42	46	50	54	58	63	67
15												51	55	60	64	68	73
16													60	65	70	74	79
17														70	75	81	86
18															81	87	92
19																93	99
20																	105

TABLE 9

Test de Wilcoxon

La table donne la valeur w_α telle que $P(W \leqslant w_\alpha) = \alpha$, dans les cas $\alpha = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$.

α \ N	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0,05	2	4	6	8	11	14	17	21	25	30	35	40	46	52	59	66	73	81	89
0,01	–	0	2	3	5	7	10	13	16	20	23	28	32	38	43	49	55	61	68

Extrait de F.Couty, J.Debord, D.Fredon
Probabilités et statistiques pour les biologistes
Collection Flash U, A.Colin.