EN DEÇA ET AU-DELA DE LA GENESE D'UN TEST

GRAS Régis
IRMAR ([1])

INTRODUCTION

L'objectif premier poursuivi à travers cet exposé consiste en la reconstruction, au sens épistémologique du terme, d'un concept statistique. Je souhaiterais vous restituer, à partir de la problématique originale, la modélisation et la formalisation choisies, puis les développements théoriques consécutifs, et enfin quelques applications obtenues. J'essaierai de montrer en quoi le choix opportun d'un modèle accroit la fécondité de son extension théorique et la variété de ses applications. Le temps me manquera certainement pour vous faire part des errances vécues mais je voudrais qu'elles ne soient pas ignorées, la construction théorique ne suivant jamais une trajectoire complètement prévisible, sans point d'arrêt et sans remise en cause.

En 1978, la problématique de ma recherche s'inscrit dans le cadre de l'évaluation nationale d'une expérience pédagogique à l'origine du courant réformateur des programmes du 1er cycle. Plus spécifiquement, apparaît la nécessité de hiérarchiser des performances d'élèves en fonction des niveaux de complexité a priori des questions qui leur sont posées. Pour y parvenir, il me faut donner un sens à des énoncés du type : "la question **a** est plus complexe que la question **b**", énoncé qui se ramène à celui-ci : "tout élève qui réussit **a** réussit également **b**". C'est cette situation de quasi-implication ou, en langage ensembliste de quasi-inclusion, qu'il faut tester.

Or, étant donné la taille de l'échantillon d'élèves et le nombre d'items à hiérarchiser, je ne dispose à ce moment que d'outils statistiques classiques mettant à l'épreuve une hypothèse nulle, différente de celle en question, ou encore de méthodes d'analyse de données ne traitant la multidimensionnalité qu'à travers la similarité ou la distance mutuelle, approches essentiellement symétriques.

Je vous fais grâce des nombreux tâtonnements qui m'ont fait croiser par hasard (et m'en rendre compte après coup, hasard que rencontrera également plus récemment A. Bodin) la même réponse que celle donnée par un chercheur britannique, J. Loevinger, en 1947. Mais cet indice, dont je parlerai plus loin, n'est pas une échelle de probabilité et je l'ai rejetée.

Une réponse non quantifiée à la même question est fournie par certains psychologues à partir de l'examen du tableau de croisement des variables **a** et **b**. Pour décider, par exemple, que a implique b, ils estiment "à vue" la petitesse de l'effectif de l'ensemble de ceux qui satisfont **a** sans satisfaire **b**. Mais ce jugement est subjectif.

La première brique théorique va donc consister en une substitution de l'indice de J. Loevinger par un indice fondé sur les probabilités. Les briques suivantes sont le fruit des thèses de A. LARHER (1991) et de celles de S. Ag. Almouloud, A. Totohasina et H. Ratsimba-Rajohn (thèses à soutenir fin 1992).

---

[1]) Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX.

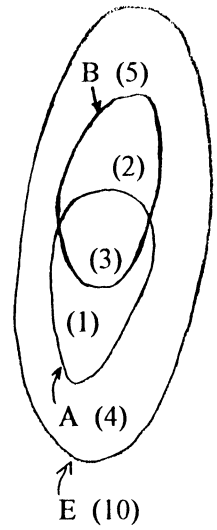
§ 1 - IMPLICATION ENTRE VARIABLES BINAIRES, TEST, EXTENSION.

1.1. Modélisation.

Dans le cas binaire, la situation générique est la suivante. Croisant une population E et un ensemble de variables V et du fait de l'observation exceptionnelle de l'implication stricte de la variable **a** sur la variable **b**, on veut donner un sens statistique à une implication non stricte : **a** $\Rightarrow$ **b**. En termes ensemblistes, A et B représentant les sous-populations respectives où les variables **a** et **b** prennent la valeur 1 (ou "vrai"), il y a équivalence à mesurer l'inclusion non stricte de A dans B.

Par exemple, si **a** est l'attribut "cheveux blonds" et **b** l'attribut "yeux bleus" dans une population E d'étudiants, les données pour étudier si **a** $\Rightarrow$ **b**, dans le cas où Card E = 10, peuvent se présenter de 3 façons différentes :

V / Sujets	**a**	**b**
1	0	0
2	0	1
3	1	1
4	1	0
5	0	0
6	1	1
7	1	1
8	0	0
9	0	1
10	0	0
Total	4	5



a / **b**	1	0	Marges
1	3	1	4
0	2	4	6
Marges	5	5	10

S'inspirant de la méthode de I.C. LERMAN [81] pour définir la similarité, R. GRAS [79] axiomatise la notion d'implication statistique de la façon suivante :

Soient X et Y deux parties aléatoires quelconques de E, choisies indépendamment (absence de lien a priori) et de mêmes cardinaux respectifs que A et B. Soient $\bar{Y}$ et $\bar{B}$ les complémentaires respectifs de Y et de B dans E.

Axiome 1.

> (**a** $\Rightarrow$ **b**) *est admissible au niveau de confiance 1 - α si et seulement si* $Pr\,[card(X \cap \bar{Y}) \leq card(A \cap \bar{B})] \leq \alpha$.

Intuitivement et qualitativement, ceci signifie que l'implication **a** $\Rightarrow$ **b** sera admissible à l'issue d'une expérience si le nombre d'individus de E la contredisant dans l'expérience est "*invraisemblablement petit*" par rapport au nombre d'individus attendu dans une hypothèse d'absence de lien.
Par exemple si Card E = 100, Card A = 35, Card B = 50, alors Card ($A \cap \bar{B}$) = 3 est "*invraisemblablement petit*" pour une absence de lien entre **a** et **b**.

La modélisation probabiliste que nous retenons de façon privilégiée est décrite par un processus de tirage aléatoire en 3 étapes (cf. I.C. LERMAN, R. GRAS, H. ROSTAM [81]). Notons n_a, n_b, $n_{\bar{b}}$, $n_{a \wedge \bar{b}}$, $n_{a \vee \bar{b}}$, les cardinaux respectifs de A, B, $\bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $A \cup \bar{B}$:

. on considère le référentiel E comme la réalisation d'un référentiel aléatoire $\mathcal{E}$ dont le cardinal $\mathcal{n}$ serait une variable aléatoire de Poisson de paramètre le cardinal n de E observé, hypothèse compatible avec les situations les plus fréquemment rencontrées et qui ne nuit pas à la généralité de la modélisation :

$$\Pr[\mathcal{n} = m] = \frac{n^m}{m!} e^{-n}$$

. le choix aléatoire d'une partie quelconque (par exemple X) de cardinal aléatoire K pour une distribution uniforme de probabilité sur les éléments de $\mathcal{E}$ et égale à $\frac{d}{m}$ (dans le cas de X, $d = n_a$) est alors de type binomial :

$$\Pr[K = k / \mathcal{n} = m] = \binom{m}{k} \left(\frac{d}{m}\right)^k \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m-k} \qquad \text{(pour } k \leq m\text{)}$$

. X et $\bar{Y}$ étant deux parties quelconques choisies de façon indépendante parmi les parties ayant respectivement pour cardinaux n_a et $n_{\bar{b}}$, la probabilité qu'un élément de $\mathcal{E}$ appartienne à $X \cap \bar{Y}$ est :

$$p(a).p(\bar{b}), \text{ où } p(a) = \frac{n_a}{m} \text{ et } p(\bar{b}) = \frac{n_{\bar{b}}}{m}$$

Proposition 1. La variable aléatoire Card $(X \cap \bar{Y})$ suit la loi de Poisson de paramètre $n.p(a).p(\bar{b})$.

La loi de probabilité conditionnelle du cardinal de $X \cap \bar{Y}$ est binomiale de paramètres m et $\pi = p(a).p(\bar{b})$

$$\Pr[\text{Card}\,(X \cap \bar{Y}) = s / \mathcal{n} = m] = \binom{m}{s} \pi^s (1 - \pi)^{m-s} \quad \text{pour } s \leq n_{a \wedge \bar{b}} \text{ et } m \geq n_{a \vee \bar{b}} .$$

Par suite, en faisant varier le conditionnement de $\mathcal{n}$, on obtient :

$$\Pr[\text{Card}(X \cap \bar{Y}) = s] = \sum_{m \geq s} \Pr[\text{Card}(X \cap \bar{Y}) = s / \mathcal{n} = m] \times \Pr[\mathcal{n} = m] = \frac{(n\pi)^s}{s!} e^{-n\pi} .$$

La variable aléatoire Card $(X \cap \bar{Y})$ suit donc la loi de Poisson de paramètre $n.\pi = n.p(a).p(\bar{b})$ (de moyenne et de variance $n.\pi$). D'autres modélisations conduiraient à une loi hypergéométrique ou à une loi binomiale.

Corollaire. Comme I.C. LERMAN, nous réduisons et centrons cette variable de Poisson en la variable :

$$Q(a,\bar{b}) = \frac{\text{Card}\,(X \cap \bar{Y}) - n\,p(a)\,p(\bar{b})}{\sqrt{n\,p(a)\,p(\bar{b})}} = \frac{\text{Card}\,(X \cap \bar{Y}) - \frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}} .$$

Dans l'expérience, la valeur observée de $Q(a,\bar{b})$ est $q(a,\bar{b}) = \dfrac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}}$, indicateur de la non-implication de **a** sur **b**.

Dans les cas légitimant convenablement l'approximation ($\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n} \geq 3$), la variable $Q(a,\bar{b})$ suit la loi normale centrée réduite. L'intensité d'implication, qualité de l'admissibilité de $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$, pour $n_a \leq n_b$, est alors définie à partir de l'indice $q(a,\bar{b})$ par :

Définition 1.

$$\varphi(a,\bar{b}) = 1 - \Pr[Q(a,\bar{b}) \leq q(a,\bar{b})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a,\bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Axiome 1'. L'axiome 1 devient :

> L'implication $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ sera admissible au niveau de confiance $1 - \alpha$, si et seulement si
> $$\varphi(a,\bar{b}) = 1 - \Pr\,[Q(a,\bar{b}) \leq q(a,\bar{b})] \geq 1 - \alpha.$$

Notons que si l'approximation gaussienne n'est pas valide, il est loisible de revenir aux origines poissonniennes de la variable Card $(X \cap \bar{Y})$ et de considérer :

$$\varphi(a,\bar{b}) = 1 - \Pr\,[\mathrm{Card}\,(X \cap \bar{Y}) \leq n_{a\wedge\bar{b}}\,].$$

Exemple

a \ b	1	0	Marges
1	5	1	6
0	10	84	94
Marges	15	85	100

Considérons les données ci-contre dans lesquelles :

Card $(A \cap \bar{B}) = n_{a\wedge\bar{b}} = 1$.

Alors $q(a,\bar{b}) = -1{,}816$

et $\varphi(a,\bar{b}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1{,}816}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0{,}9653.$

On dira dans ce cas que $(\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b})$ est admissible au niveau de confiance 96,5 %.

Remarquons deux valeurs particulières :

$$\varphi(a,\bar{b}) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow q(a,\bar{b}) \leq -1{,}65$$

et $\varphi(a,\bar{b}) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow q(a,\bar{b}) \leq 0$.

On notera que l'approche ci-dessus peut s'exprimer en termes de test d'hypothèse. Cependant, nous ne retenons pas cette voie qui, du fait de sa visée de prise de décision, limiterait les considérations qui vont suivre. Mais cette possibilité marque bien la différence avec l'approche de J. Loevinger (LOEVINGER [1947] qui définissait la quasi-implication de **a** sur **b** par l'indice qui prend ses valeurs sur $]-\infty,1]$:

$H(a,b) = 1 - \frac{n.n_{a\wedge b}}{n_a\, n_{\bar{b}}}$. Si $H(a,b)$ est "proche" de 1, l'implication est "presque" satisfaite.

Mais, comme on le voit, cet indice présente l'inconvénient, ne se référant pas à une échelle de probabilité, de ne pas fournir de seuil de vraisemblance et d'être invariant dans toute dilatation de E, A, B et $A \cap \bar{B}$. On a d'ailleurs la relation suivante entre $H(a,b)$ et $q(a,\bar{b})$:

$$\frac{q(a,\bar{b})}{H(a,b)} = -\sqrt{\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}\,.$$

Cette limitation apparaît dans l'approche de J. Pearl (PEARL [1988]), de S. Acid et als (ACID [1991]) et de A. Gammerman, Z. Luo (GAMMERMAN A. et LUO Z. [1991]). Chez ces derniers chercheurs, c'est l'écart entre la distribution conjointe entre **a** et **b** (et non **a** et $\bar{\mathbf{b}}$) et la distribution produit qui tient lieu de critère comparatif.

Dans la recherche sur l'apprentissage de bases de connaissances de J.G. Ganascia (GANASCIA J.G. [1991]), où "*l'incertitude*" sur l'implication $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ est évaluée par l'indice : $2\ Pr[b/a] - 1$ et étendue à des classes de variables, la simplicité de l'approche de la quasi-implication se paie selon ces deux mêmes inconvénients. De plus, cet indice ne sépare pas, numériquement, deux implications dont l'une serait triviale et l'autre hautement informative.

1.2. Test d'hypothèse

L'indice d'implication étant défini entre deux variables binaires, il est possible de considérer cet indice comme la valeur d'une statistique du cadre inférentiel. En effet, examinons, relativement aux 2 variables **a** et **b**, l'hypothèse nulle suivante :

$\mathbf{H_0}$: les variables **a** et **b** sont indépendantes

Sous cette hypothèse, l'effectif des individus respectant **a** et non **b** doit être $\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}$. En considérant comme hypothèse alternative $\mathbf{H_1}$: la variable **a** implique la variable **b**, le test va consister à estimer jusqu'à un certain seuil (par exemple à 5 %) la faiblesse de l'effectif observé, eu égard, d'une part à $\mathbf{H_0}$, d'autre part aux variations dues aux aléas de l'échantillonnage. Ainsi nous accepterons l'hypothèse $\mathbf{H_1}$ si l'indice $q(a,\bar{b})$ associé est inférieur à la valeur-limite définie par la loi de Poisson ou par la loi de Laplace-Gauss (par exemple, pour 5 %, $q(a,\bar{b}) = -1{,}65$).

En fait, on retiendra, préférentiellement, le cas échéant, l'une des 2 hypothèses alternatives :

"la variable **a** implique la variable **b**" ou "la variable **b** implique la variable **a**".

Le critère décisif tiendra à l'ordre entre les nombres $n_{a\wedge\bar{b}}$ et $n_{\bar{a}\wedge b}$ comme il a été vu dans le cas de l'indice d'implication, sachant que si ces 2 nombres sont petits, on acceptera simultanément les 2 hypothèses.

1.3. Quelques propriétés du modèle

A. LARHER dans sa thèse [1991] étudie et démontre différentes propriétés de q et φ. Les plus importantes, auxquelles nous adjoignons les propositions 5 et 6, sont les suivantes :

Proposition 2. Si, n_a étant fixé et A inclus dans B, n_b tend vers n (B croît vers E), alors $\varphi(a,\bar{b})$ tend vers 0,5. Un prolongement par continuité nous permet donc de définir : si B = E alors $\varphi(a,\bar{b}) = 0{,}5$.

Proposition 3. Pour toute variable a :

$$0{,}95 \le \varphi(a,\bar{a}) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad n_a \in \left[\frac{n - \sqrt{n(n-11)}}{2}\ ;\ \frac{n + \sqrt{n(n-11)}}{2}\right].$$

Or, pour n assez grand, l'intervalle ci-dessus est voisin de [0,n], ce qui permet d'affirmer que l'implication statistique $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}$ a un sens, tout en réservant une limite de confiance à la stabilité du caractère reproductible de la variable **a**.

Proposition 4. *La relation $\mathcal{R}$ sur V^2 définie par :*

$$\forall (a,b) \in V^2 \qquad a \mathcal{R} b \quad \text{dès que} \qquad \varphi(a,\bar{b}) \geq 0{,}95 \text{ et que } n_a \text{ vérifie (1)}$$

est réflexive, mais ni symétrique, ni antisymétrique, ni transitive.

Pour lui associer un graphe valué, sans cycle et transitif, on en prendra la restriction $\mathcal{R}'$ aux variables vérifiant la condition : si $a \mathcal{R}' b$ et $b \mathcal{R}' c$, alors l'arc (a,c) appartient au graphe seulement si $\varphi(a,\bar{c}) \geq 0{,}5$. $\mathcal{R}'$ définit alors un préordre partiel et permet une représentation claire de la relation d'implication statistique (cf. GRAS [1979]). On décrit dans [LERMAN I.C., GRAS R., ROSTAM H. 1981] l'algorithme qui permet de le construire. Ce seuil de 0,5 permet, en outre, la satisfaction d'un objectif d'accroissement informationnel. En effet, si I est l'incertitude associée aux variables a et b, il permet de vérifier $I(a|b) \leq I(a)$.

Remarque 1. Notre approche diffère également de celle de S. AMARGER et als (AMARGER S., DUBOIS D. et PRADE H. [1991]) qui, à partir d'une certaine inférence (une probabilité conditionnelle telle que $p(b|a)$ appartient à un intervalle, sans être parfaitement connue), induisent transitivement, de proche en proche, des probabilités conditionnelles sur un graphe incomplet, et cela sans la contrainte d'un seuil. Notre problématique, à l'opposé, vise l'analyse d'un tableau donné, sans ambition inductive a priori, mais en imposant un seuil qui autorise la fermeture transitive du graphe implicatif.

Proposition 5. *Comparons le coefficient de corrélation $\rho(a,b)$ et l'indice $q(a,\bar{b})$.*

$$\left| \; \text{Supposons } q(a,\bar{b}) \neq 0. \text{ Alors : } \frac{\rho(a,b)}{q(a,\bar{b})} = -\sqrt{\frac{n}{n_b\, n_{\bar{a}}}} \right.$$

$$\text{En effet, } q(a,\bar{b}) = \frac{n_{a\wedge\bar{b}} - \dfrac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\dfrac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}} = \frac{n_a\, n_b - n\, n_{a\wedge b}}{\sqrt{n\, n_a\, n_{\bar{b}}}}$$

$$\text{et} \qquad \rho(a,b) = \frac{n.n_{a\wedge b} - n_a\, n_b}{\sqrt{n_a\, n_b\, n_{\bar{a}}\, n_{\bar{b}}}} \quad \text{d'où la relation entre } \rho(a,b) \text{ et } q(a,\bar{b}).$$

Ainsi $q(a,\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \rho(a,b) = 0$ et $\rho(a,b) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(a,\bar{b}) \geq 0{,}5$. Ceci signifie que implication et corrélation linéaire vont plutôt *"dans le même sens"*. Cependant, on peut observer une croissance de l'implication en même temps qu'une décroissance de la corrélation. Ce qui montre bien, qu'outre la dépendance aux effectifs n, $n_{\bar{a}}$ et n_b, le rapport $\frac{\rho}{q}$ indique la non-coïncidence des deux concepts.

La double situation suivante l'illustre :

b_1 / a_1	1	0	Marges
1	61	1	62
0	57	81	138
Marges	118	82	200

$\rho_1(a_1,b_1) = 0{,}537$

$q_1(a_1,\bar{b}_1) = -4{,}843$

b_2 / a_2	1	0	Marges
1	69	5	74
0	48	78	126
Marges	117	83	200

$\rho_2(a_2,b_2) = 0{,}540$

$q_2(a_2,\bar{b}_2) = -4{,}639$

Par suite :

. d'une part, $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{b_1}$ sont moins corrélées que $\mathbf{a_2}$ et $\mathbf{b_2}$,

. d'autre part, l'intensité d'implication de $\mathbf{a_1}$ sur $\mathbf{b_1}$ est plus forte que celle de $\mathbf{a_2}$ sur $\mathbf{b_2}$ puisque $q_1 < q_2$.

Proposition 6. Considérons le χ^2 d'indépendance des variables **a** et **b** ; alors

$$\frac{\chi^2}{q^2(a;\bar{b})} = \frac{n^2}{n_b\, n_{\bar{a}}}$$

La démonstration est aisée, en particulier si l'on remarque que $\chi^2 = n\,\rho^2$.

On constate ainsi que les deux concepts χ^2 et q^2 ne se superposent pas. $q(a,\bar{b})$ est la racine carrée de la contribution à χ^2 de la case $(a,\bar{b})$ du tableau de croisement des 2 variables **a** et **b**. La seule considération, non relative, de χ^2 et des effectifs des 4 cases de ce tableau, comme le font souvent les psychologues, ne peut donc pas rendre compte précisément de l'implication.

Remarque 2. Etudions la sensibilité de q aux faibles variations d'effectif. Supposons pour cela que, par exemple, $n_{a\wedge\bar{b}}$ devienne $n'_{a\wedge\bar{b}} = n_{a\wedge\bar{b}} + k$, où $k \in \mathbf{Z}$, sans que varient n_a et $n_{\bar{b}}$. Alors :

$$q'(a,\bar{b}) = q(a,\bar{b}) + \frac{k}{\sqrt{\frac{n_a\, n_{\bar{b}}}{n}}}.$$

L'effet de l'erreur de mesure k est atténué en $\sqrt{\frac{n}{n_a\, n_{\bar{b}}}}$, ce qui permet dans la plupart des cas de maintenir la validité d'une implication au même seuil ou à un seuil voisin.

1.4. Extension à des variables fréquentielles.

Les problématiques didactiques nous conduisent à des situations où les données issues des faits observés ne sont plus binaires.

a) C'est le cas des faits dont la valeur de vérité n'est pas nécessairement 0 (faux) ou 1 (vrai), mais toute valeur modale de [0,1], quantification d'un "peut-être", "sans doute", rarement, etc. A ce type de variable modale, nous pouvons rattacher les variables ordinales représentant un ordre préférentiel parmi les énoncés proposés. Par exemple, Marc Bailleul, dans sa recherche sur les représentations des mathématiques et de leur enseignement par les professeurs, propose 10 termes associables à des

conceptions personnelles de ceux-ci. Il leur demende d'en choisir 3, jugés représentatifs et de leur associer les valeurs 1, 2 ou 3 par ordre d'adéquation décroissant. La variable ordinale correspondante pourrait donc prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4 auxquelles nous substituons les valeurs modales respectives 1, 2/3, 1/3 et 0 (cas de non choix).

b) C'est aussi le cas de faits répétés (un type d'erreur par exemple) rencontrable dans un questionnaire ou au cours d'une observation. A l'effectif observé, on associera la fréquence du fait en considérant le nombre maximum de fois où il peut se répéter. Par exemple, S.Ag Almouloud a identifié une vingtaine de conduites observables au cours d'une démonstration de géométrie, chacune pouvant apparaître plusieurs fois dans la rédaction de la démonstration.

A l'égard de ces 2 types de variables, nous procédons comme pour les variables binaires.

Soient **(a,b)** $\in V^2$ et i $\in$ E, α (resp. β) la valeur maximum de **a** (resp. **b**) sur E. α_i (resp. β_i) la **valeur observée** de **a** (resp. **b**) sur i. Posons :

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha},\quad \beta'_i = \frac{\beta_i}{\beta},\quad \nu_a = \sum_{i\in E} \alpha'_i,\quad \nu_b = \sum_{i\in E} \beta'_i,\quad \nu_{a\wedge\bar{b}} = \sum_{i\in E} \alpha'_i\,(1-\beta'_i) \text{ et } \nu_{\bar{b}} = n - \nu_b .$$

Donc posons, comme pour les variables binaires : $q(a,\bar{b}) = \dfrac{\nu_{a\wedge\bar{b}} - \dfrac{\nu_a\,\nu_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\dfrac{\nu_a\,\nu_{\bar{b}}}{n}}}$

qui sera, pour $\nu_a \le \nu_b$, l'indicateur retenu pour l'implication statistique de **a** sur **b**.

§ 2 - IMPLICATION ENTRE CLASSES DE VARIABLES.

Elle ne prend véritablement son sens qu'à condition qu'à l'intérieur de chaque classe de variables dont on examine la relation avec d'autres, existe une certaine "**cohésion**" entre les variables qui la constituent, ceci afin que le "*flux*" implicatif d'une classe $\mathcal{A}$ sur une classe $\mathcal{B}$ soit nourri d'un "flux" interne à $\mathcal{A}$ et alimente un "*flux*" interne à $\mathcal{B}$. Cette cohésion, généralement nourrie de cohérence sémantique ou, dans le cas de la didactique, de conditions psychologiques, cognitives, situationnelles, etc., doit se traduire ici par une mesure (quantitative). On pourrait penser qu'un ensemble d'indices de similarité assez élevés entre les éléments de la classe serait un bon indicateur de cohésion. Nous ne retenons pas cette approche qui ne rendrait compte que d'une cohésion de profils symétriquement comparables, ne restituant pas une dynamique interne orientée (donc non symétrique). Or, nous disposons avec les intensités d'implication entre variables d'un instrument de mesure d'un emboîtement de deux parties d'une population E. Par exemple, si dans la classe à 3 éléments *a*, *b*, *c*, on observe : $\varphi(a,\bar{b}) = 0{,}97$, $\varphi(b,\bar{c}) = 0{,}95$, $\varphi(a,\bar{c}) = 0{,}92$, on pourra dire que la classe orientée de *a* vers *c* admet une bonne cohésion.

Ce ne serait pas le cas si $\varphi(a,\bar{b}) = 0{,}82$, $\varphi(b,\bar{c}) = 0{,}38 < \varphi(c,\bar{b}) = 0{,}70$ et $\varphi(a,\bar{c}) = 0{,}48 > \varphi(c,\bar{a})$.

C'est donc cette voie que nous choisissons pour une cohésion implicative donc orientée, comme peut l'être une filiation procédurale ou une genèse. Nous verrons ensuite quel indicateur permettrait de rendre compte d'une extension aux classes, de la notion d'implication.

2.1. Cohésion implicative.

Afin d'en améliorer l'intuition, nous la définirons progressivement pour 2, puis 3 et r éléments de classe.

La cohésion, se voulant indicateur d'ordre implicatif au sein d'une classe de variables, s'oppose en cela au"**désordre**" dont rend compte l'entropie d'une expérience aléatoire. Rappelons au sujet de celle-ci que, X étant une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $S = \{m_1, m_2, .., m_k\}$ muni de la loi

$\{p_1,p_2,...,p_k\}$, l'entropie est l'espérance mathématique de la variable I(X) prenant les valeurs $I(m_1)$, $I(m_2),...,I(m_k)$; $I(m_j)$ est l'incertitude sur $\{m_j\}$ ou information apportée par la réalisation de $\{m_j\}$. Ainsi :

$$\mathcal{E}[I(X)] = \sum_{j=1}^{k} - p_j \log_2 p_j$$

est **l'entropie de l'expérience.**

2.1.1. Cas de 2 éléments : classe (a,b).

Supposons $n_a \leq n_b$. Nous allons définir la cohésion du couple (a,b).

Soit χ la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $[Q(a,\bar{b}) \geq q(a,\bar{b})]$. Alors :

$$\Pr(\chi = 1) = \varphi(a,\bar{b}) = p$$

et $$\Pr(\chi = 0) = 1 - \varphi(a,\bar{b}) = 1 - p.$$

L'entropie ou incertitude de cette expérience est alors :

$$\mathcal{E}[I(\chi)] = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) .$$

Par exemple :

. si $\varphi(a,\bar{b}) = p = 0{,}95$, alors :

$$\mathcal{E}[I(X)] = \frac{-0{,}95 \ell n\, 0{,}95 - 0{,}05 \ell n\, 0{,}05}{\ell n\, 2} = 0{,}286.$$

. si $\varphi(a,\bar{b}) = 1$, alors $\mathcal{E}[I(\chi)] = 0$ en convenant que $0\ \ell n\ 0 = 0$

. si $\varphi(a,\bar{b}) = 0{,}5$, alors $\mathcal{E}[I(\chi)] = 1$ (entropie maximale).

Mais si $\varphi'(a,\bar{b}) = 1 - \varphi(a,\bar{b})$, alors $\mathcal{E}[I(\chi)] = \mathcal{E}[I(1-\chi)]$.

Précisément, en posant : $\mathcal{E} = f(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$, on a : $f(1-p) = f(p)$.

L'entropie est donc symétrique par rapport à $p = 0{,}5$.

De plus, $\frac{df}{dp} = \log_2 \frac{1-p}{p}$ pour $p \in]0,1[$

donc $\mathcal{E}$ croît de 0 à 1 sur $]0;0{,}5]$ et décroît de 1 à 0 sur $[0{,}5;1[$.

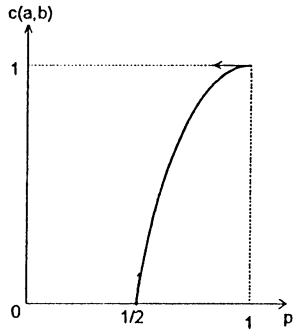
Aussi, la propriété de symétrie de $\mathcal{E}$ allant à l'encontre de la dissymétrie de la quasi-implication, nous retiendrons finalement, comme indicateur de cohésion, l'application c définie sur $V \times V$ par :

* **Définition 2.** *La cohésion du couple de variables (a,b) tel que* $n_a \leq n_b$ *est le nombre c(a,b) où :*

. *si* $\varphi(a,\bar{b}) = p \geq 0{,}5$, $c(a,b) = [1 - [p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)]^2]^{1/2} = \sqrt{1-\mathcal{E}^2}$
. *et si* $\varphi(a,\bar{b}) = p < 0{,}5$, $c(a,b) = 0$ *(absence de cohésion).*

La fonction "**carré de l'entropie**" est choisie pour des raisons de renforcement du contraste sur [0,1]. Nous prenons la racine carrée de son complément à 1 pour donner à la cohésion la dimension de l'entropie et pour accroître sa valeur numérique (en effet pour $x \in [0,1]$, $\sqrt{1-x^2} \geq 1-x$).

* **Etude aux limites.**



Posons : $c(a,b) = g(\mathcal{E}) = g[f(p)]$

$$\frac{dg}{d\mathcal{E}} = -\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{1-\mathcal{E}^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{dc}{dp} = \frac{-\mathcal{E}}{\sqrt{1-\mathcal{E}^2}} \times \log_2 \frac{1-p}{p}.$$

$c(a,b)$ croît donc de 0 à 1 quand $p = \varphi(a,\bar{b})$ croît de 0,5 à 1. La fonction c de p est continue en $p = \frac{1}{2}$.

Nous prolongeons par continuité en prenant :

$c(a,b) = 1$ lorsque $p = 1$ (c'est-à-dire lorsque l'implication $a \Rightarrow b$ est stricte).

* **Remarque 3.** Rappelons un résultat démontré dans la thèse d'A. LARHER :

si $n_a \leq n_b$ et si $q(a,\bar{b}) \leq 0$ alors l'intensité d'implication de a sur b est supérieure à celle de b sur a. Ce qui signifie que :

$$n_a \leq n_b \text{ et } q(a,\bar{b}) \leq 0 \Rightarrow \varphi(a,\bar{b}) = \max(\varphi(a,\bar{b}), \varphi(b,\bar{a})).$$

Appelant **classe** (a,b) le couple (a,b) tel que $n_a \leq n_b$, la cohésion de la classe (a,b) est définie sans équivoque à partir de la plus grande des intensités relatives à $(a \Rightarrow b)$ et $(b \Rightarrow a)$.

D'où la :

* **Définition 2'.**

La cohésion de la classe (a,b) est le nombre c(a,b) tel que :
. *si* $p = max\ [\varphi(a,\bar{b}), \varphi(b,\bar{a})] \geq 0{,}5$ *et* $\mathcal{E} = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ $\quad c(a,b) = \sqrt{1-\mathcal{E}^2}$
. *si* $p = 1$ $\quad c(a,b) = 1$
. *si* $p \leq 0{,}5$ $\quad c(a,b) = 0$.

* **Remarque 4.** Lorsque $b = a$ et que $n_a \in [\frac{n-\sqrt{n(n-11)}}{2} ; \frac{n+\sqrt{n(n-11)}}{2}]$, nous avons vu que (cf. p. 7) $0{,}95 \leq \varphi(a,\bar{a}) \leq 1$. La cohésion de la classe (a,a) a donc un sens et, en général, puisque $\lim_{p\to 1^-} c = 1$, cette cohésion est très voisine de 1. Par définition, nous poserons donc :

$$\forall a \in V \qquad c(a,a) = 1.$$

2.1.2. Cas de 3 éléments *a*, *b* et *c*.

Six valeurs d'intensité correspondent a priori à l'ensemble $\dot{A} = \{a,b,c\}$:

$$\varphi(a,\bar{b}),\ \varphi(a,\bar{c}),\ \varphi(b,\bar{a}),\ \varphi(b,\bar{c}),\ \varphi(c,\bar{a}) \text{ et } \varphi(c,\bar{b}).$$

Nous souhaitons que l'indice de cohésion implicative contienne l'information révélée par les relations implicatives binaires entre tous les éléments de l'ensemble $\dot{A}$. Mais, en même temps, pour conserver la dynamique dissymétrique de l'implication, seule la relation la plus puissante entre deux éléments quelconques reste pertinente par rapport à notre objectif. Par suite, parmi toutes les associations 3 à 3 ne faisant intervenir qu'une fois chaque couple d'éléments de $\{a,b,c\}$ et restituant au mieux la puissance de certaines implications, nous retenons les valeurs :

$$\max[\varphi(a,\bar{b}), \varphi(b,\bar{a})],\ \max[\varphi(a,\bar{c}), \varphi(c,\bar{a})] \text{ et } \max[\varphi(b,\bar{c}), \varphi(c,\bar{b})].$$

Comme précédemment, dans le cas où ils sont supérieurs ou égaux à 0,5, les maxima obtenus sont compatibles avec l'ordre des effectifs n_a, n_b et n_c. Par exemple, si $n_a \leq n_b \leq n_c$, les trois maxima sont : $\varphi(a,\bar{b})$, $\varphi(a,\bar{c})$ et $\varphi(b,\bar{c})$.

Définition 3. *Le couple* $\mathcal{A} = ((a,b),c)$ *sera encore appelé* **classe** *et sa cohésion implicative sera définie ainsi :*

$$C(\mathcal{A}) = [c(a,b) \times c(b,c) \times c(a,c)]^{1/3}$$

moyenne géométrique des cohésions des classes à 2 éléments

La préférence accordée à la moyenne géométrique plutôt qu'à la moyenne arithmétique tient à notre volonté, d'une part d'obtenir une cohésion nulle pour une classe dès que la cohésion d'un de ses couples est nulle, c'est-à-dire dès que les implications mutuelles sont inférieures ou égales à 0,5, d'autre part de "**ramener**" $C(\mathcal{A})$ au voisinage de 1 lorsque les cohésions des couples sont assez fortes.

2.1.3. Cas de r éléments $a_1, a_2,...,a_r$.

Nous opérons comme ci-dessus, c'est-à-dire en retenant les maxima des intensités d'implication entre 2 éléments quelconques de l'ensemble $\dot{A} = \{a_1,a_2,...,a_r\}$. A ces maxima sont associés les cohésions implicatives des couples et l'ordre induit sur $\dot{A}$ par les effectifs n_{a_1}, n_{a_2} ,..., n_{a_r}. Par exemple, si $n_{a_1} \leq n_{a_2} \leq ... \leq n_{a_r}$, nous appellerons classe le couple $\mathcal{A} = (((a_1,a_2),a_3),...,a_r)$, et comme il y a $\frac{r(r-1)}{2}$ paires, sa cohésion implicative sera :

Définition 4.

$$C(\mathcal{A}) = \Big[\prod_{\substack{i \in \{1,...r-1\} \\ j \in \{2,...,r\} \\ j>i}} c(a_i,a_j) \Big]^{\frac{2}{r(r-1)}}$$ *moyenne géométrique des cohésions de classes à 2 éléments*

2.2. Implication entre classes.

Nous souhaitons que l'implication entre deux classes se constitue à partir des informations suivantes :

- les cohésions respectives des 2 classes,

- une intensité d'implication extrémale des éléments d'une classe sur les éléments de l'autre,

- les cardinaux respectifs des 2 classes.

Chacune de ces informations crédite l'indice que nous retiendrons si :

- l'indice croît avec les cohésions de chaque classe et s'annule lorsque la cohésion de l'une d'entre elles est nulle,

- l'indice croît avec la liaison extrémale (minimale si l'on vise un degré d'exigence élevé, maximale si l'on recherche une souplesse réaliste),

- l'indice décroît avec les cardinaux des classes, eu égard à la prise en compte d'une liaison maximale.

Posons : . $\dot{A}$ et $\dot{B}$ deux parties disjointes : $\dot{A} = \{a_1,...,a_r\}$ et $\dot{B} = \{b_1,...,b_s\}$,

. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les classes qui leur sont respectivement associées ,

. $C(\mathcal{A})$ et $C(\mathcal{B})$ leurs cohésions respectives.

Conformément aux lois de probabilité des sup. de variables aléatoires, a priori uniformément distribuées, nous définissons l'indice d'implication $\psi(\mathcal{A},\mathcal{B})$ de la classe $\mathcal{A}$ vers la classe $\mathcal{B}$ par :

Définition 5.

$$\psi(\mathcal{A},\mathcal{B})=\{\sup_{\substack{i\in\{1,\ldots,r\}\\ j\in\{1,\ldots,s\}}}\varphi(a_i,\bar{b}_j)\}^{rs}\times[C(\mathcal{A})\times C(\mathcal{B})]^{\frac{1}{2}}$$

L'expression $[C(\mathcal{A})\ C(\mathcal{B})]^{\frac{1}{2}}$ représente la cohésion moyenne (géométrique) de $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$; elle intègre les informations de cohésivité des 2 classes en jeu ; de plus, cette expression est telle que si $C(\mathcal{A})$ et $C(\mathcal{B})$ sont simultanément multipliées par k, alors $\psi(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est multipliée par k.

Dans sa thèse, A.Totohasina étudie, par des simulations, la loi de variation de ψ(A,B) afin de munir cette implication d'un "seuil de crédibilité" comparable à celui des variables seules et fonction des effectifs de variables constituant respectivement A et B.

2.3. Agrégations successives des classes.

Selon l'objectif classique des méthodes de classification hiérarchique ascendante, nous avons construit un algorithme d'agrégations successives des classes basé sur le critère de leur cohésion maximale. S. Ag Almouloud a réuni dans un même logiciel, CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), le traitement des analyses de similarité et d'implication entre variables de nature différentes, ainsi que la construction graphique des hiérarchies orientées correspondantes. H. Ratsimba-Rajohn considère, dans sa thèse en cours, les niveaux significatifs de la hiérarchie, moments cruciaux de formation d'une typologie orientée par l'implication de classes. Par ailleurs, il s'intéresse à la contribution des individus et de leurs descripteurs par rapport à cette typologie.

L'agrégation en classes, comme le graphe implicatif, conduit à la mise en évidence de phénomènes orientés, assimilables quelquefois à des conceptions dont on restituerait la genèse. C'est le cas de la recherche d'A. Totohasina qui, sur l'acquisition par les élèves de Terminale de la notion de probabilité conditionnelle, a mis en évidence, entre autres, 2 conceptions : l'une causaliste, l'aute chronologiste, avec leur forme initiale et achevée.

§ 3 – QUELQUES EXEMPLES TRAITES

3.1. Questionnaire sur de courtes démonstrations de géométrie.

3.1.1 Présentation du questionnaire

FAITS

1	(EF) et (CD) sont symétriques par rapport au point I
2	[MN] est le symétrique de [PR] par rapport au point I
3	(AB) et (CD) sont symétriques par rapport au point 0
4	(MN) // (PR)
5	(CD) // (EF)
6	(AB) // (CD)
7	(AB) // (EF)
8	MN = PF
9	CD = EF
10	AB = CD
11	AB = EF

THEOREMES

1 La symétrie centrale conserve les longueurs.
2 Si (D) // (D') et (D') // (D") alors (D) // (D").
3 Le symétrique d'une droite (D) par rapport à un point est une droite (D') parallèle à (D).
4 Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.
5 Deux segments symétriques par rapport à un point ont même longueur.
6 La symétrie centrale conserve les directions.

En fait, chaque question se présente schématiquement ainsi :

Hypothèse : fait n° p **Théorème** : n° q **Conclusion** : fait n° ?

Schématiquement, l'ensemble questions-réponses peut être présenté ainsi :

	HYPOTHESES	THEOREME	? CONCLUSION à trouver
Q1 { Hypothèse : 1 / Théorème : 3 → / Conclusion : 5	(EF) et (CD) symétriques par rapport à I	Le symétrique de (D) par rapport à un point est (D') // (D)	(EF) // (CD)
Q2 { Hypothèse : 3 / Théorème : 4 → / Conclusion : 6	(AB) et (CD) symétriques par rapport à 0	Si 2 droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles	(AB) // (CD)
Q3 { Hypothèse : 2 / Théorème : 5 → / Conclusion : 8	[MN] est symétrique de [PR] par rapport à I	2 segments symétriques par rapport à un point ont même longueur	MN = PR
Q4 { Hypothèse : 3 / Théorème : 6 → / Conclusion : 6	(AB) et (CD) symétriques par rapport à 0	La symétrie centrale conserve les directions	(AB) // (CD)
Q5 { Hypothèse : 6 et 5 / Théorème : 2 → / Conclusion : 7	(AB) // (CD) et (CD) // (EF)	Si (D) // (D') et (D') // (D"), alors (D) // (D")	(AB) // (EF)
Q6 { Hypothèse : 2 / Théorème : 1 → / Conclusion : 8	[MN] est symétrique de [PR] par rapport à I	La symétrie centrale conserve les longueurs	MN = PR

Exemple. 3-6-10 (Q_4).

Hypothèse : (AB) et (CD) sont symétriques par rapport à 0.

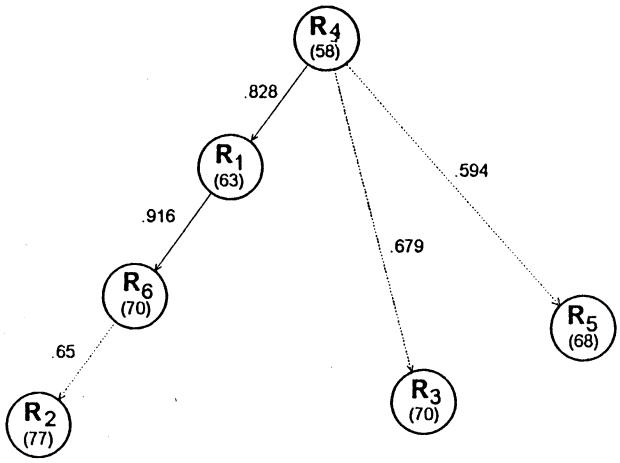
Théorème : la symétrie centrale conserve les directions.

Conclusion donnée par l'élève : AB = CD.

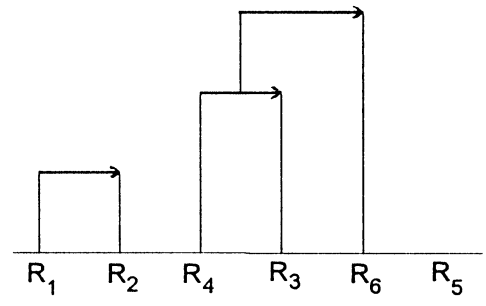
Ce questionnaire a été proposé à l'aide du logiciel "Premier Pas" à 80 élèves de 4ème. Compte tenu des 31 comportements de réponse des élèves, nous disposons d'un tableau 80*31 dont les régularités, les traits pertinents, en particulier les relations implicatives entre les modalités, sont impossibles à analyser "à la main".

3.2. Graphe implicatif et hiérarchie implicative entre les réussites.

Le graphe implicatif des réussites du "6 questions" traduit une relation de préordre partiel dans cet ensemble. Il est donc orienté et valué. R_4, réussite à la question (Q_4) la plus complexe du questionnaire (et la moins bien réussie), en est la source. R_2, R_3, R_5 en sont les puits :



Ci-contre, nous présentons le graphe implicatif entre les 6 modalités de réussite.



hiérarchie cohésitive

Les valeurs indiquées sont les intensités des implications.
Sur le même chemin, les réussites se placent dans l'ordre croissant de leurs effectifs.

R_2 , réussite à la question (Q_2) dont le théorème est exprimé en "si .... alors", formulation facilitant, semble-t-il, le succès.

R_3 , relative à la conservation des longueurs dans la symétrie centrale. La longueur est une notion plus familière à l'élève que celle de direction.

R_5 , seule question relative à la transitivité du parallélisme.

Notons la séparation de R_5 des autres réussites, ce qui ne se produit pas en analyse des similarités où l'on force celles-ci, même lorsqu'elles sont faibles. Je renvoie à la thèse d'A. Larher pour lire l'analyse fouillée des graphes de réussites et de toutes les modalités de réponse, de même que les hiérarchies implicatives associées.

3-2 Enquête sur les représentations des enseignants relativement à leur pratique

3-2-1 Présentation de l'enquête menée par Marc Bailleul

L'objectif de ce questionnaire est de faire apparaître certains aspects des représentations que se font les enseignants de mathématiques de l'enseignement de leur discipline, de plusieurs points de vue.

En effet, cette représentation peut être différente, nous dit M. Bailleul, selon qu'il s'agit :

- de leur propre enseignement des mathématiques,
- de leur idéal de l'enseignement des mathématiques,
- de l'enseignement des mathématiques tel qu'ils le perçoivent autour d'eux
- de l'enseignement des mathématiques tel que l'institution l'attend d'eux (à leur avis).

Pour cela, il leur est demandé de choisir, pour chacun des 4 points de vue, dans chacune des 3 colonnes proposées, 3 mots exactement qu'ils numéroteront de 1 (celui auquel ils accordent le plus d'importance) à 3.

MA PERCEPTION DE MON ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES.

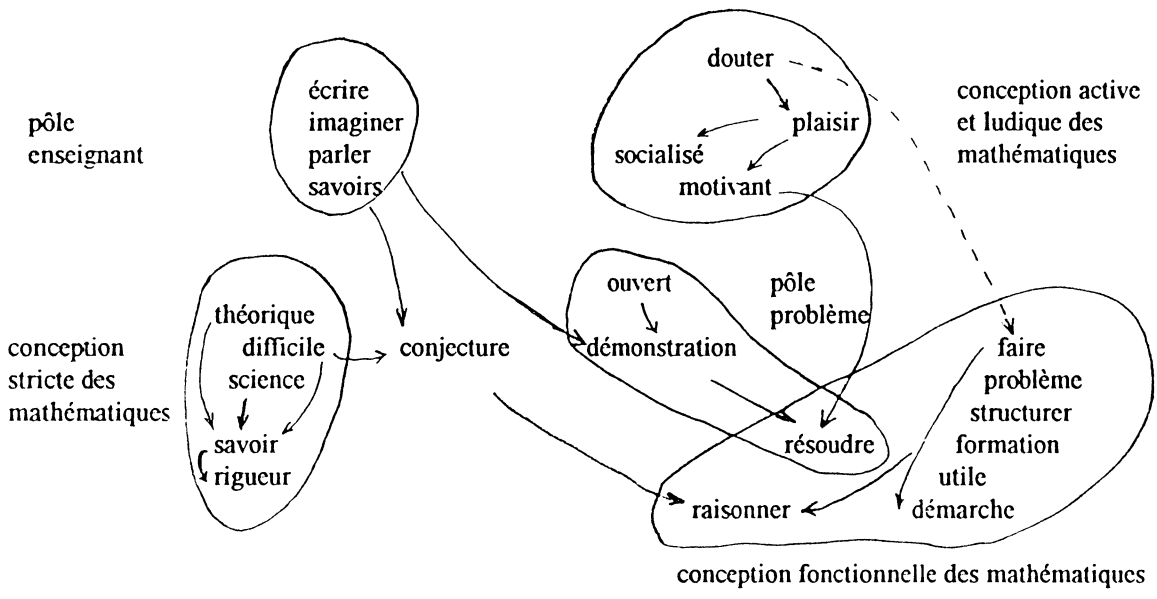
théorique		faire		rigueur	
symbolique		parler		démonstration	
concret		écrire		conjecture	
motivant		raisonner		science	
lassant		structurer		savoirs	
socialisé		savoir		jeu	
individuel		imaginer		plaisir	
difficile		douter		problème	
utile		appliquer		démarche	
ouvert		résoudre		formation	

Disposant des réponses d'une trentaine d'enseignants, nous avons procédé à une analyse des variables modales définies par les choix hiérarchisés des enseignants et obtenues à partir du point de vue "mon enseignement".

Bien entendu, il serait intéressant, par rapport aux mêmes expressions, d'analyser et comparer les représentations selon les 3 autres points de vue.

3-2-2 Analyse implicative

Schématiquement, nous obtenons l'arbre suivant :



CONCLUSION.

La méthode présentée ici apparaît donc en plein développement théorique et, compte tenu de ses premières applications, semble un complément statistique très riche, dépassant de trèsl oin l'intérêt d'un simple test statistique. C'est en effet un complément original des autres méthodes d'analyse de données. Ses extensions actuelles et la programmation des algorithmes de calcul autorisent maintenent son usage au même titre que les autres méthodes, en leur ajoutant son approche dissymétrique riche d'informations en didactique comme en intelligence artificielle.

REFERENCES

[ACID S., de CAMPOS L.M., GONZALEZ A., MOLINA R., PEREZ de la BLANCA N. 1991], Learning with Castle - in Symbolic and quantitative approaches to uncertainty (R. KRUSE, P. SIEGEL), Springer-Verlag, 99-106.

[AMARGE S., DUBOIS D., PRADE H. 1991], Imprecise quantifiers and conditional probabilities - in Symbolic and quantitative approaches to uncertainty (R. KRUSE, P. SIEGEL), Springer-Verlag, 33-37.

[DIDAY E. 1991] - Towards a statistical theory of intentions for knowledge analysis, rapport de recherche 1494, INRIA Rocquencourt.

[GAMMERMAN A., LUO Z. 1991] - Constructing Causal Trees from a medical database, Technical Report TR 91 002, Dep^{t} of Computer Sci., Heriot-Watt Univ., Edimburgh.

[GANASCIA J.G. 1991] - CHARADE : Apprentissages de bases de connaissances dans "Induction symbolique - numérique à partir de données", Ed. KODRATOFF et DIDAY, CEPADUES, 1991.

[GRAS R., 1979] - Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques, Thèse d'Etat, Université de Rennes I, octobre 1979.

[GRAS R. et LARHER A., 1989] - La quasi-implication : une méthode d'analyse de relations non symétriques entre attributs et entre classes d'attributs, Public. interne I.R.M.A.R., Rennes, 1989.

[GUIGUES J.L. et DUQUESNE V. 1986] - Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires, Mathématiques et Sciences Humaines n° 95, p. 5-18, 1986.

[LARHER A., 1991] - Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique, Thèse de l'Université de Rennes I, février 1991.

[LERMAN I.C., GRAS R., ROSTAM H., 1981] - Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, Mathématiques et Sciences Humaines n° 74, p 5-35 et n° 75, p 5-47, 1981.

[LERMAN I.C., 1981] - Classification et analyse ordinale des données, Dunod, 1981.

[LOEVINGER J. 1947] - A systematic approach to the construction and evaluation of tests of ability, Psychological Monograhs, 61, n° 4.

[PEARL J. 1988] - Probabilistic Reasoning in intelligent systems, San Mateo, CA, Morgan Kaufmann.