1

TESTS D'HYPOTHESES

F. BENINEL
I.U.T. - DPT STID
Centre Du Guesclin
79000 NIORT

Nombreuses sont les problématiques de sciences expérimentales conduisant à la réalisation d'un test d'hypothèses.

En général, la réalisation d'un test d'hypothèses consiste à partir de l'observation d'échantillon(s) convenablement choisi(s), et au moyen d'un mécanisme de décision à choisir entre hypothèses antagonistes ; ces dernières portant sur des caractéristiques inconnues des populations statistiques étudiées.

Φ_1- EXEMPLES INTRODUCTIFS

EXEMPLE 1. CONTROLE STATISTIQUE DE FABRICATION

Une entreprise industrielle produit des bouteilles d'eau minérale dont la teneur en sodium annoncée est de 44mg/l.

Ne pouvant mesurer la teneur en sodium de toutes les bouteilles d'eau produites et désirant être en règle avec la législation du point de vue conformité aux normes, l'entreprise a "à choisir" pour chaque lot (ensemble des bouteilles fabriquées en 1 journée : population statistique), entre les 2 hypothèses suivantes :

H_0 : le lot est conforme à la norme
(en matière de teneur en sodium)

H_1 : le lot n'est pas conforme.

En désignant par TS_m la teneur moyenne en sodium dans le lot, la personne chargée du contrôle statistique de la fabrication, reformule le test comme suit :

H_0 : $TS_m = 44$
H_1 : $TS_m \neq 44$

TS_m est un paramètre inconnu, la réalisation de ce test nécessite la mesure de la teneur en sodium sur un échantillon de bouteilles (une partie du lot).

La validité du mécanisme permettant d'opter pour l'une ou l'autre des 2 hypothèses, dépend du nombre de bouteilles analysées (taille d'échantillons) et de la façon dont ces bouteilles ont été prélevées (Echantillonnage).

Le raisonnement (de type inductif) présidant à la réalisation du test, peut conduire aux éventualités résumées par le tableau ci-après :

2

<**1>

VERITE / DECISION	H_0	H_1
H_0	Bonne décision	Lot commercialisé alors qu'il est non conforme
H_1	Lot non commercialisé alors qu'il est conforme	Bonne décision

EXEMPLE 2 : COMPARAISON DE 2 VARIETES DE MAïS DU POINT DE VUE DU RENDEMENT

Une entreprise de commercialisation de semences désire comparer les performances des variétés (V_A, V_B) de maïs, quant au rendement.

Un plan d'expérimentation est donc mis en place, celui-ci consistant à semer chacune des deux variétés sur un certain nombre de parcelles de 1 ha (n_A parcelles élémentaires pour V_A ; n_B parcelles pour V_B :Echantillons).

Désignons par X_1,X_2 designent les variables rendement de la variété V_A et rendement de la variété V_B.

Les deux variétés sont semées dans des conditions similaires et fournissent des résultats du type suivant :

Données expérimentales

	Variété V_A	Variété V_B	
	$x_{1\ 1}$	$x_{2\ 1}$	
	$x_{1\ 2}$	$x_{2\ 2}$	
Rendement de V_A obtenu sur la parcelle n° i	<------- $x_{1\ i}$	$x_{2\ j}$	--> Rendement de V_B obtenu sur la parcelle n° j
	$x_{1\ n_A}$	$x_{2\ n_B}$	

Les résultats obtenus "suggèrent", que globalement, la variété V_B donnerait un meilleur rendement que la variété V_A. Ainsi se propose-t-on de vérifier cela, par la réalisation du test:

H_0 : $R_A = R_B$ (rendements identiques)
H_1 : $R_A < R_B$ (V_B a un meilleur rendement que V_A)

ici R_A et R_B désignent les rendements moyens (ceux que l'on obtiendrait en semant les 2 variétés sur toutes les parcelles imaginables : population) des variétés V_A et V_B.

3

A l'issue du test, on est conduit à se trouver dans une des 4 éventualités, données par le tableau suivant :

<**2>

DECISION \ VERITE	H_0	H_1
AH_0	Bonne décision	On considère les 2 variétés à mêmes rendements alors que V_B est meilleur. Erreur du type II
AH_1 (RH_0)	On considère V_B à meilleur rendt alors que les rendements sont identiques Erreur du type I	Bonne décision

A travers ces deux exemples, il apparaît que la décision que l'on prend à l'issue d'un test est entachée de risques d'erreurs qu'il s'agira de minimiser.

Ces risques d'erreurs sont dûs au hasard de l'échantillonnage.

La qualité statistique d'un test exige un choix rigoureux des échantillons. [Les échantillons doivent être représentatifs des populations étudiées].

Φ_2-PRINCIPES GENERAUX ET DEFINITIONS

La réalisation d'un test nécessite la définition des hypothèses :

H_0 (Hypothèse nulle)

H_1 (Hypothèse alternative)

Une et une seule de ces hypothèses est vraie. Par ailleurs ces hypothèses ne sont pas interchangeables. En effet, il est plus facile de réaliser le test (T_1) ci-dessous que le test (T_2).

$$(T_1)\quad \begin{cases} H_0 : TS_m = 0,45 \\ H_1 : TS_m \neq 0,45 \end{cases} \qquad (T_2)\quad \begin{cases} H_0 : TS_m \neq 0,45 \\ H_1 : TS_m = 0,45 \end{cases}$$

L'hypothèse H_0 joue un rôle privilégié car, et nous le verrons plus loin, influant sur le mécanisme de décision.

Comme nous l'avons vu en (**1) et (**2), quatres situations mettant en évidence le caractère aléatoire de la décision, sont à envisager :

RH_0/H_0 : on considère H_0 fausse alors qu'elle est vraie. Il s'agit là d'une erreur dite de 1ère espèce

RH_1/H_1 : on rejette H_1 alors que H_1 est vraie, cette erreur est appelée erreur de 2ème espèce

AH_0/H_0 : on conserve H_0 (comme hypothèse plausible) alors qu'elle est vraie. Bonne décision

AH_1/H_1 : on conserve H_1 alors qu'elle est vraie. Bonne décision

RISQUES, TABLEAU DE VERITE

Le risque de commettre l'erreur de 1ère espèce (ou risque de 1ère espèce) est donné par :

$$\alpha = \text{Proba}\ (RH_0/H_0)$$

Ce risque est fixé, au préalable, par le statisticien ; Selon les domaines d'application des tests, ce risque est choisi petit ou très petit (5 % , 1 % , 1 %.)

Le risque de commettre l'erreur de 2ème espèce (risque de 2ème espèce), s'il est souhaité aussi petit que possible, dépend de la valeur α, de la dimension des données expérimentales (taille d'échantillons). Ce risque est donné par :

$$\beta = \text{Proba}\ (RH_1/H_1) = P(AH_0/H_1)$$

En général, ce risque est difficile à calculer avec exactitude.

Relativement à l'exemple du test de l'exemple1 , on obtient une valeur de β chaque fois qu'on fixe une valeur de TS_m # 0,45 (H_1 vraie).

Le risque $\beta = \beta\ (TS_m)$ est d'autant petit que TS_m s'éloigne de 0,45 (valeur de TS_m sous H_0).

Il découle de ce qui précède :

$$P(AH_0/H_0) = 1 - \alpha$$

$$P(AH_1/H_1) = 1 - \beta \text{ (puissance du test)}$$

d'où le tableau récapitulatif suivant :

Tableau de vérité

DECISION \ VERITE	H_0	H_1
AH_0 (RH_1)	$1 - \alpha$	β
AH_1 (RH_0)	α	$1 - \beta$

α : RISQUE DE 1re Espèce

$1 - \beta$: Puissance du test

Φ_3-EXEMPLE DE REALISATION D'UN TEST

Une machine produit des boulons de 1 cm de diamètre.

La variabilité du processus de production est telle que malgré les entretiens dont fait l'objet la machine, le diamètre des boulons ne peut être considéré comme une constante égale à la norme (D_0 = 1 cm)

La recherche de la maîtrise de la fabrication conduit à supposer que le Diamètre D est une variable aléatoire, distribuée selon la loi normale de moyenne m_D et d'écart type σ_D (on note N (m_D, σ_D)).

Ainsi pour bien contrôler le bon fonctionnement de la machine, on décide de prélever chaque 2 heures, 10 boulons, d'en mesurer le diamètre, pour réaliser le test:

H_0 : Bon fonctionnement de la machine ($m_D = D_0$)

(α = 5 %)

H_1 : Fonctionnement défaillant ($m_D \neq D_0$)

ELABORATION DU MECANISME DE DECISION

Notons D_1, D_2, ..., D_{10}, les variables aléatoires d'échantillonnage (D_i : variable aléatoire mesurant le diamètre du ième boulon prélevé $1 \leq i \leq 10$)

Le prélèvement des boulons se faisant avec remise (Echantillon simple) et sachant que les boulons, faisant partie d'un lot, ont la même chance de faire partie de l'échantillon (Echantillon aléatoire).

6

Nous pouvons considérer $D_1, D_2, \ldots, D_{10}$ comme des V.A. indépendantes et de même loi que D ($D_i \rightsquigarrow N(m_D, \sigma_D)$) (**3)

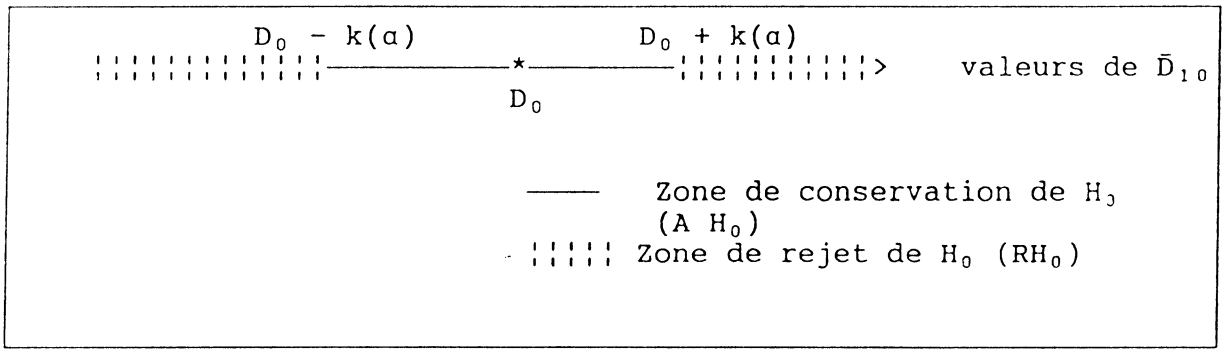
Statistique de test :

Etant donné un échantillon de 10 boulons, il nous paraît clair que H_0 est d'autant invraisemblable que

$\bar{D}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i$ s'écarte de D_0.

Il convient donc de rejeter H_0 lorsque

$|\bar{D}_{10} - D_0| > k(\alpha)$ [$k(\alpha)$ un nombre dépendant de α, qu'il s'agira de déterminer]



un écart entre $\bar{D}_{10}$ et D_0 n'excédant pas $k(\alpha)$ est attribué au hasard de l'échantillonnage.

($\bar{D}_{10}$ et appelé statistique de test.)

En raison de (**3) on a :

$$\bar{D}_{10} \rightsquigarrow N(m_D, \sigma_D/\sqrt{10})$$

DETERMINONS $k(\alpha)$

α = Proba (RH_0/H_0 vraie)

= Proba ($|\bar{D}_{10} - D_0| > k\alpha / m_D = D_0$)

$$= \text{Proba} \left(\frac{|\bar{D}_{10} - D_0|}{\sigma_D / \sqrt{10}} > \frac{k\alpha}{\sigma_D / \sqrt{10}} \Big/ m_D = D_0 \right)$$

Ayant $m_D = D_0$ (ie. H_0 vraie), cela nous donne :

$$\bar{D}_{10} \rightsquigarrow N(D_0, \sigma_D / \sqrt{10})$$

et par suite:

$$\frac{\bar{D}_{10} - D_0}{\sigma_D / \sqrt{10}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

il s'ensuit :

$$k_c = U_{1-\alpha/2}\ \sigma_D/\sqrt{10}$$

$U_{1-\alpha/2}$: fractile de la loi Normale centreé réduite d'ordre $1-\alpha/2$

LA REGLE DE DECISION PEUT SE FORMULER AINSI :

Ayant un échantillon de 10 boulons, on rejettera l'hypothèse H_0 avec un risque de se tromper égal à α, lorsque :

$$|\bar{D}_{10} - D_0| > U_{1-\alpha/2}\ \sigma_D/\sqrt{10}$$

APPLICATION

Examinons ce que donnent deux contrôles différents quant au test :

H_0 : Bon fonctionnement de la machine.

H_1 : Fonctionnement défaillant.

Ce test est réalisé avec un risque de première espèce fixé à 5% .

L'écart type σ_D est supposé connu et égal à 0,01 cm.

CONTROLE 1	CONTROLE 2
ECHANTILLON : 1,01 1,02 0,99 0,97 0,98 0,97 0,98 1,00 1,03 1,02	1,07 1,10 0,94 1,05 1,12 1,03 1,04 0,98 0,97 0,93
CALCUL DE $\bar{D}_{10}$	
$\bar{D}_{10} = 0,997$ d'où	$\bar{D}_{10} = 1,033$
$\lvert\bar{D}_{10} - D_0\rvert = (0,997 - 1) = 0,003$	$\lvert\bar{D}_{10} - D_0\rvert = 0,033$
CALCUL DU SEUIL:	
$u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$	
$k_{(\alpha)} = u_{1-\alpha/2}\ \sigma_D/\sqrt{10}$	IDEM
$= 1,96\ (0,01/\sqrt{10})$	
$= 0,0062$	

CONCLUSION

On a $\lvert\bar{D}_{10} - D_0\rvert < k(\alpha)$;	$\lvert\bar{D}_{10} - D_0\rvert > k(\alpha)$
On conserve H_0; le risque de se tromper est égal à ß	On rejette H0; le le risque de se tromper est égal à 5 %
LE FONCTIONNEMENT DE LA MACHINE PEUT ETRE CONSIDERE COMME NORMAL	LE FONCTIONNEMENT DE LA MACHINE PEUT ETRE CONSIDERE COMME DEFAILLANT

PUISSANCE DU TEST

Posons $D = \{ D_1 / D_1 \neq D_0 \}$

D désigne l'ensemble des valeurs que peut prendre m_D lorsque l'hypothèse H_1 est vraie.

Ou encore, D est l'ensemble des valeurs de réglage de la machine autres que (D_0 = 1 cm).

La fonction puissance du test est donnée par :

$$g : D \longrightarrow [0,1]$$

$$D_1 \longrightarrow g(D_1) = P(AH_1 / m_D = D_1)$$

$$= 1 - \beta(D_1)$$

Ainsi à chaque valeur D_1 (pour un risque de 1ère espèce et une taille d'échantillon, fixés) correspond une valeur de la puissance.

Ecrivons de façon plus explicite, relativement à notre exemple, $\beta(D_1)$:

$$\beta(D_1) = P(RH_1 / H_1)$$

$$= P(\lvert\bar{D}_{10} - D_0\rvert < u_{1-\alpha/2}\, \sigma_D/\sqrt{10} / m_0 = D_1)$$

$$= P(D_0 - u_{1-\alpha/2}\, \sigma_D/\sqrt{10} < \bar{D}_{10} < D_0 + u_{1-\alpha/2}\, \sigma_D/\sqrt{10})$$

avec $m_0 = D_1$

$$= P\{(D_0-D_1)/(\sigma_D/\sqrt{10}-u_{1-\alpha/2} < U < (D_0-D_1)/(\sigma_0/\sqrt{10}+u_{1-\alpha/2}\}$$

avec $U = (\bar{D}_{10} - D_1) / \sigma_D/\sqrt{10} \rightsquigarrow N(0, 1)$

et par suite:

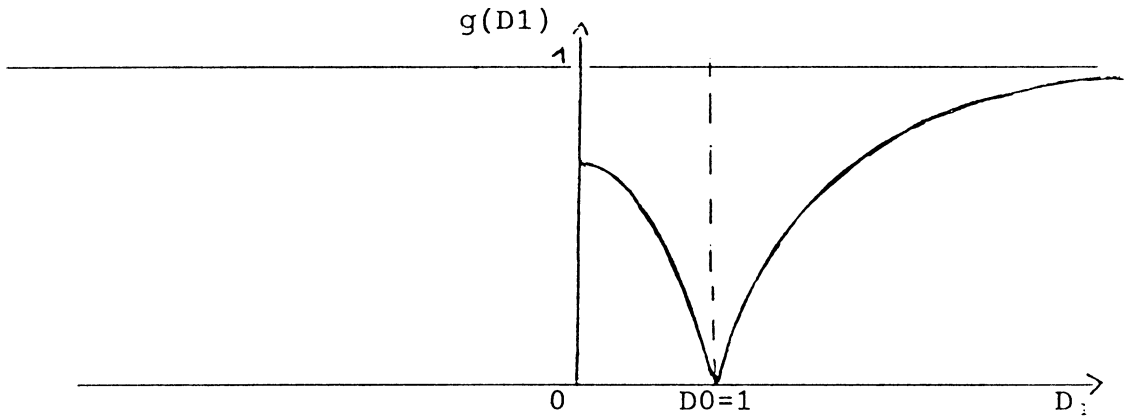
$$\beta(D_1) = \pi\{(D_0-D_1)/\sigma_0/\sqrt{10}+u_{1-\alpha/2}\} - \pi\{(D_0-D_1)/\sigma_0/\sqrt{10}-u_{1-\alpha/2}\}$$

avec π désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Calculons la valeur de la fonction puissance pour quelques valeurs de D_1:

D1	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999
g(D1)	1	1	1	1	0.885	0.061

Figure1: Allure de la courbe de la fonction puissance



Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus, si la vraie valeur m_0 a un écart D_0 de l'ordre de 1/1000, le test est peu puissant, ne serait-il pas plus judicieux dans ce cas de réaliser le test à "PILE ou FACE " ! ?

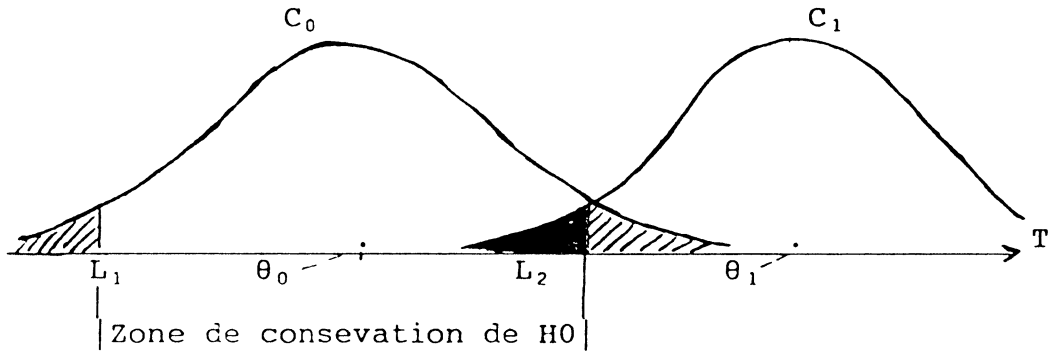
L'erreur de deuxième espèce, consisterait à considérer que la machine est réglée pour produire des boulons de 1 cm de diamètre alors qu'elle est réglée pour produire des boulons de 0.999 cm (par exemple).

Cette erreur si elle est probable (ß =0.994) n'a pas d'incidence négative sur la fabrication des boulons;En effet un boulon de 0.999cm de diamètre assure " sans peine " la fonction d'un boulon de 1cm.

D'une façon générale, le test est d'autant puissant que la valeur de θ_1 s'éloigne de θ_0 , pour le test: $H_0:\theta=\theta_0$ - $H_1:\theta=\theta_1$ (graphique ci après).

Figure2: Visualisation graphique des risques.

C_0 :Courbe de la fonction densité de T sous H_0
C_1 :Courbe de la fonction densité de T sous H_1



α = Aire hachurée. ß = Aire en noir.

Ainsi donc,nous pouvons résumer la démarche d'un test comme suit:

1) Définition des hypothèses H_0 et H_1 et la donnée du risque de première espèce α

2) Détermination de la statistique de test et étude de sa loi de probabilité sous H_0;

3) Détermination de la région critique (ou régle de décision);

4) Etude de la puissance 1-ß ;

5) Calcul de la valeur expérimentale de la statistique de test (ou variable de décision);

6) Conclusion : rejet ou conservation de H_0.

Remarque relative au risque α

On peut envisager deux façons de procéder:

La première façon consiste à fixer α et à voir si l'on rejette H_0 ou pas.
La deuxième façon consiste à déterminer α,dans le cas ou l'on décide de rejeter H_0.

Examinons ce que donnent ces deux démarches sur l'exemple (paragraphe Φ_3-controle2 sur les boulons).

α1) En prenant α = 5%,on obtient comme seuil de rejet de H_0, k(α) = 0,0062 .

α2) On se pose la question suivante:"En rejettant H_0,dans la configuration de nos données,quel rique α encourt-on".

Dans ce cas on prend $|\bar{D}_{10} - D_0| = 0,033$ comme seuil de rejet de H0.
Dans ce cas on pose:

$$k(\alpha)=0,033$$

Cela donne:

$$U_{1-\alpha/2} = 10,48$$

Et par suite:

$$\alpha = \alpha_0 < 10^{-5}$$

En résumé $\alpha = 5\%$ est le risque maximum quand on rejette H_0. $\alpha=\alpha_0$ est le risque exacte quant on rejette H_0.

Nous pouvons classifier les tests que l'on retrouve dans la littérature statistique, en distinguant les catégories suivantes:

C1- TESTS DE COMPARAISONS

(Moyennes, écart-types, proportions, distributions de probabilité, ...)

C2- TESTS DE CONFORMITE

(Moyenne, écart-types, proportions, ...)

C3- TESTS D'INDEPENDANCE ENTRE VARIABLES

(test du Chi-2, test de corrélation, ...)

C4- TESTS D'AJUSTEMENT D'UNE DISTRIBUTION EXPERIMENTALE A UNE DISTRIBUTION THEORIQUE

(test du Chi-2, test de Kolmogorov-Smirnov, ...)

Sur le plan méthodologique la réalisation des tests cités ci-dessus,se fait selon deux approches différentes:

(*) Approche paramétrique.

(**)Approche non paramétrique.

Pour voir ce qui différencie ces deux approches intéréssons nous au test relatif à la comparaison du rendement des deux variétés de maïs V_A et V_B (cf:Exemple introductif n° 2).

Approche paramétrique du test:

$$H0: E(X_1)=E(X_2)$$

$$H1: E(X_1) < E(X_2)$$

Approche non paramétrique du test:

$$H0: P[rg(X_1)>rg(X_2)] = P[rg(X_1)<rg(X_2)]=1/2$$

$$H1: P[rg(X_1)>rg(X_2)] = P[rg(X_1)<rg(X_2)]$$

(E:symbole espérance P: probabilité et rg:le rang)

L'approche paramétrique suppose connue la distribution des variables aléatoires dont on étudie les paramètres.

L'approche non paramétrique ne fait aucune supposition quant à la distributions des variables aléatoires étudiées.

Ces deux approches ne sont pas en concurrence;c'est la nature des donnéesqui rend telle ou telle autre approche efficiente.

En ce qui concerne le rendement (exemple 2),divers connaissances nous permettent de considérer cette variable comme distribuée selon la loi normale.

S'il s'agissait de notes attribuées à des vins quant à leur bon goût,le caractère particulièrement subjectif de la notation nous amène à considérer comme plus fiable le classement des vins,que les notes attribuées.

Φ_4-METHODOLOGIE DE CONSTRUCTION D'UN TEST

Par choix d'un test,il est entendu dans le cas présent le choix de la régle de décision ,une fois les hypothèses posées.

Dans ce qui suit,on se place dans le cas général:

$$H0: \quad \theta \in \theta_0$$

$$H1: \quad \theta \in \theta_1$$

θ: paramètre d'une variable aléatoire X.

θ_0:ensemble des valeurs du paramètre θ sous H0.

θ_1:ensemble des valeurs du paramètre θ sous H1.

Pour réaliser le test posé précédement,on dispose d'échantillons de taille n,du type $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,de réalisations de la variable X.

Posons D={d0,d1},l'ensemble des décisions possibles à l'issue du test.

d0:Décider H0.

d1:Décider H1.

Remarque

Il faut dire que pour certaines procédures,l'ensemble des décisions peut comporter plus que deux décisions.

A titre d'exemple on peut avoir comme décisions possibles:

d0:décider H0.

d1:décider H1.

d2:s'abstenir(ou réaliser d'autres observations pour mieux décider).

Un test peut être considéré comme une fonction:

$\Phi: X^n \longrightarrow D$

(X^n:ensemble des échantillons de valeurs de X,de taille n)

On appellera région critique,l'ensemble:

$$W=\{ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n \ / \ \Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d1\}$$

$$=\Phi^{-1}(d1)$$

On appellera région de"conservation" de H0,l'ensemble:

$$\overline{W}=\{ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n \ / \ \Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d0\}$$

$$=\Phi^{-1}(d0)$$

Le mécanisme de décision est élaboré dés lors que l'on connait W (ou, ce qui est équivalent,la fonction Φ).

Supposons maintenant que pour un même test l'on ait deux régions critiques différentes W et W'(ou encore deux fonctions test Φ et Φ').

La règle de décision se basant sur W comme région critique sera dite meilleure que celle se basant sur W' si:

(i) $\alpha(\Phi) \leq \alpha(\Phi')$.

(ii) $\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi')$.

Avec $\alpha(\Phi)=P((X_1,X_2,\ldots,X_n)\in W / H_0 \text{ vraie})$

$\beta(\Phi)=P((X_1,X_2,\ldots,X_n)\in \overline{W} / H_1 \text{ vraie})$

$X_1,X_2,\ldots,X_n$:variables aléatoires d'échantillonnage indépendantes et de même loi que X.

En d'autres termes,la meilleure règle de décision sera celle minimisant à la fois l'erreur de première espèce et celle de deuxième èspece.

En réalité,on ne peut minimiser simultanément les deux risques(α et β) (voir figure 2).

La démarche proposée par NEYMAN-PEARSON consiste pour α fixé,à construire une règle de décision (ou fonction test Φ^*),minimisant le risque de deuxième éspèce β.

càd: $\beta(\Phi^*)=\min \beta(\Phi)$.

METHODOLOGIE DE NEYMAN-PEARSON

Fonction de vraisemblance (rappel):

Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ un échantillon indépendant d'une variable aléatoire X.

La loi de X dépend du paramètre θ.

notons $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)$,la vraisemblance de l'echantillon $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,on a si:

X est une V.A discrète:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)=P[X=x_1]\ P[X=x_2]\ldots P[X=x_n]$$

X est une V.A continue:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)=f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$$

(ou f désigne la foncion densité de X)

Considérons le test:

H0: $\theta=\theta_0$

H1: $\theta=\theta_1$ (θ_0 différent de θ_1)

Théorème de Neyman-Pearson:

Pour tout $\alpha\in[0,1]$, il éxiste un test pur de niveau α, de puissance maximum, défini par la région critique W:

$$W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n / \frac{L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta_0)}{L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta_1)} \leq k(\alpha) < 1\}$$

Cela signifie que lorsque pour un échantillon $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ donné la vraisemblance sous H_0 est plus faible que celle sous H_1, on rejette H_0.
En d'autres termes H_1 est des deux hypothèses, la plus vraisemblable.

Exemple d'application:

Considérons le test de conformité relatif à la moyenne d'une population gaussienne. [$N(m,1)$]

H_0: $m = m_0 = 2$ [$m = m_0$]

H_1: $m < m_0$ [$m = m_1 < m_0$]

(on prendra comme risque de 1ère éspèce $\alpha = 5\%$)

Pour réaliser ce test, on a prélevé l'échantillon $x_1,x_2,\ldots,x_{16}$ de moyenne $\overline{x} = 2,6$.

Forme de la région critique:

On a $L(m)=(x_1,x_2,\ldots,x_{16},m) = \pi(1/\sqrt{2\pi})\ \exp(-1/2(x_i-m)^2)$

cela nous donne l'équivalence entre les relations (1) et (2) suivantes:

(1) $L(m_0)/L(m_1) \leq k(\alpha)$

(2) $-1/2(m_1-m_0)\Sigma[2xi-(m_0+m_1)] \leq k'(\alpha)$ avec $k'=Ln(k)$.

On déduit de ce qui précède(cf. relation (2)):

$\overline{x} = 1/16\ \Sigma x_i \leq k''(\alpha)$ (k":un nombre indépendant des valeurs x_i)

La région critique est selon Neyman-Pearson de la forme:

$W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{16})/\ \overline{x} \leq k''(\alpha)\}$

Explicitons davantage cette région critique:

$\alpha = P[(X_1,X_2,\ldots,X_{16})\in W\ /\ m=m_0]$

$= P[\ \overline{X} \leq k''\ /\ m=m_0]$

En utisant le fait que sous H_0 $\quad \overline{X} \rightsquigarrow N(m_0 , 1/\sqrt{16})$ on a:

$$k''(\alpha) = m_0 + U_\alpha$$

Et par suite:

$$W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{16})/\ \overline{x} \leq m_0+(1/4)\ U_\alpha\}$$

Relativement à notre exemple on est conduit à rejetter H0 puisque:

$$k''(\alpha) = k''(0,05) = 1,59$$

et

$$\overline{x} = 2,6$$

OUVRAGES CONSEILLES:

1-C.R.RAO: Linear statistical inference and its applications,Wiley,1973.

2-P.TASSI: Méthodes statistiques,Economica,1989.

3-G.SAPORTA: Probabilités,analyse des données et statistiques,Technip,1990.

4-P.DAGNELIE: Théorie et méthodes statistiques,vol1,2, presses agronomiques de Gembloux,1973.