

QUELQUES POINTS D'HISTOIRE DE LA STATISTIQUE

Les théorèmes limites du calcul des probabilités, fondement de la Statistique

Pichard Jean François IREM de ROUEN

Préambule

Le but de cet exposé est surtout d'ordre culturel et épistémologique. Dans les classes de S.T.S., l'ampleur du programme de mathématiques ne permet pas de s'étendre sur une approche historique du calcul des probabilités et de la Statistique. Cependant, en introduction aux techniques statistiques étudiées, on peut indiquer les problèmes, les savants ayant donné une contribution significative pour la résolution de ces problèmes et poser ainsi quelques jalons chronologiques concernant l'élaboration de la théorie des probabilités et de la Statistique.

Introduction

La théorie des probabilités et la Statistique étant des sciences relativement jeunes (milieu du 17^e siècle), leur développement s'est surtout fait à partir de problèmes externes : les jeux, la démographie et la sociométrie - l'arithmétique politique -, la physique statistique, la biométrie... L'apport de problèmes internes est assez récent (surtout à partir du 19^e siècle) et reste faible par rapport aux mathématiques ; en effet, la Statistique est essentiellement une science appliquée où les incitations externes sont fortes et beaucoup de problèmes viennent des autres disciplines.

L'idée principale développée ici concerne des résultats qui font le lien entre la théorie des probabilités et la statistique ; ils ont été énoncés (et pour partie démontrés) au 18^e et au début du 19^e siècle. Les deux théorèmes limites - la loi des grands nombres et le théorème central-limit - sont le fondement mathématique de la statistique inférentielle.

Les développements plus récents de la statistique, en particulier l'apport de l'école anglaise de biométrie à la fin du 19^e et la première moitié du 20^e siècle, peuvent être trouvés dans les ouvrages donnés en bibliographie (partie histoire).

La mise en place des premiers concepts

Les jeux de hasard (dés, cartes) et les questions économiques en avenir incertain (espérances sur un héritage, bourse, rentes viagères,...) ont joué un rôle moteur dans la naissance et le développement du calcul des probabilités et de la statistique ⁽¹⁾.

C'est le cas en particulier de la correspondance de 1654 entre B. Pascal et P. Fermat, qui porte surtout sur le problème des partis (partage d'un enjeu ou d'un héritage à venir) ⁽²⁾. La connaissance des sujets traités entre Fermat et Pascal a incité C. Huygens à écrire le premier ouvrage à être publié en cette matière ⁽³⁾. On peut dire, de même, que ce sont des questions posées par des joueurs qui ont amenés J. Bernoulli, P. de Montmort ⁽⁴⁾ et A. de Moivre au calcul des probabilités.

¹⁾ voir par exemple Hacking I. : *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, 1975.

²⁾ voir par exemple Pascal B. : *Traité du triangle arithmétique*, in *Oeuvres complètes*, Gallimard, Coll. La Pléiade, Paris, 1954, où il traite le problème des partis par une méthode de récurrence.

³⁾ Huygens, Christiaan : *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, in Frans van Schooten, *Exercitationum Mathematicarum*, Elsevirii, 1657, où il introduit la notion d'espérance mathématique.

⁴⁾ Montmort, Pierre Remond de : *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708, 2^e éd. 1713. C'est le deuxième ouvrage publié sur le sujet après celui de Huygens.

Un autre thème d'importance commence en Angleterre à la même époque ⁽⁵⁾ sous le nom d'arithmétique politique ⁽⁶⁾. A partir de tables de mortalité, on calcule l'espérance de vie à différents âges pour obtenir les annuités de rentes viagères ⁽⁷⁾ ; on assiste ainsi au début de la théorie des assurances, avec une mesure raisonnée du risque.

La loi des grands nombres

Le premier théorème limite du calcul des probabilités - la loi faible des grands nombres ⁽⁸⁾ - est établi par Jacques Bernoulli dans la quatrième partie de son ouvrage *Ars Conjectandi* [3], publié après sa mort. Il y montre sa proposition principale :

"... j'appellerai *fertiles* les cas dans lesquels un événement peut se produire, et *stériles* les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences *fertiles* celles pour lesquelles on constate qu'un des cas fertiles peut survenir, et *stériles* celles pour lesquelles on observe qu'un des cas stériles se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement dans le rapport r/s et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport $r/r+s$ ou r/t , rapport qu'encadrent les limites r^{+1}/t & r^{-1}/t . Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soient au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que r^{+1}/t , ni plus petit que r^{-1}/t ." en utilisant pour cela des méthodes combinatoires : comparaison des coefficients du binôme dont l'exposant est très élevé.

Le programme ambitieux mis en titre de cette quatrième partie : "L'usage et l'application de la doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques", qui est l'objectif de l'arithmétique politique, ne sera pas traité par Bernoulli, mais va être une ligne de conduite pour certains de ses successeurs, avec cependant une éclipse pendant la 2e moitié du 19e siècle.

Au 18e siècle, l'arithmétique politique se propose, en s'appuyant sur le calcul des probabilités, de mettre en évidence une régularité des phénomènes démographiques, sociaux et politiques pour fonder des lois ⁽⁹⁾ et faire de la prévision ⁽¹⁰⁾.

Par exemple, avant l'instauration des recensements (1801 en France), pour obtenir la population d'un pays on dénombrait sur un échantillon les foyers (les feux), ensuite on a utilisé les naissances de l'année, puis on multipliait par un coefficient convenable pour avoir une valeur approchée de cette population. Cette démarche est celle de l'estimation, mais le problème de la représentativité se pose aussi ⁽¹¹⁾, ainsi que celui de l'influence d'autres facteurs, et donnera lieu à de nombreuses discussions.

A. de Moivre, après avoir publié un mémoire *De Mensura Sortis* en 1711 ⁽¹²⁾, développe ses recherches dans son traité *The Doctrine of Chances* [9]. En particulier, il y incorpore un résultat de 1733 ⁽¹³⁾ sur une approximation de la probabilité que la somme d'un grand nombre de jets de dés soit dans un intervalle donné, en utilisant un développement en série de logarithme hyperbolique pour les coefficients binomiaux (appelé maintenant formule de Stirling pour la factorielle).

⁵⁾ Graunt, John : *Natural and Political Observations ... made upon the Bills of Mortality*, London, 1662.

⁶⁾ une définition en est donnée dans l'*Encyclopédie méthodique*, mathématiques, par MM d'Alembert, l'abbé Bossut, de la Lande, le Marquis de Condorcet, &c, Paris, 1784. Réédition du Bicentenaire, ACL-éditions, Paris, 1987.

⁷⁾ voir par exemple de Moivre : *Annuities upon the Lives*, in [9].

⁸⁾ la dénomination serait due à Poisson.

⁹⁾ dans le même sens que loi en physique.

¹⁰⁾ sur ce sujet, on peut lire avec profit l'*Essai philosophique*.. [7a] de Laplace.

¹¹⁾ voir l'article de Bru B. : *Estimations laplaciennes* dans [17].

¹²⁾ traduit en anglais par Hald A. dans : *International Statistical Review*, 1984, vol. 52 n°3, pp. 229-262.

¹³⁾ de Moivre A. : *A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expanded into a Series*, in [9].

Cette approximation de Moivre améliore la loi des grands nombres de J. Bernoulli ⁽¹⁴⁾.

Laplace reprend ce résultat dans son traité *Théorie analytique des probabilités* [7d], Livre II, chapitre iii : "Des lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements" et montre, en utilisant des approximations établies (et ce sont souvent des affirmations sans justification, fondées sur des analogies) dans son Livre I "Du calcul des fonctions génératrices", que la probabilité que le rapport des arrivées d'un événement au nombre total de coups soit renfermé dans des limites fixées peut être approchée à l'aide de l'intégrale de la densité de la loi normale ⁽¹⁵⁾.

De Moivre obtient aussi par la même méthode une approximation dans le cas où la probabilité de l'événement favorable devient très petite ; mais la caractérisation de la loi limite obtenue est due à Poisson ([10]) et elle porte son nom.

Méthode de Bayes-Laplace

Le problème d'évaluation d'une probabilité inconnue, dans le cas binomial, est apportée par la loi des grands nombres de J. Bernoulli. Le problème inverse : déterminer la distribution de la possibilité d'un événement à partir d'une série d'observations reçoit une première réponse par Bayes ⁽¹⁶⁾ qui suppose que la possibilité a priori est uniforme entre 0 et 1. Indépendamment, Laplace montre un théorème connu sous le nom de théorème de Bayes (ou Bayes-Laplace) dans son mémoire sur la probabilité des causes ([7b]) en utilisant un principe de vraisemblance maximum, énoncé par Lambert en 1760. Comme application de cette méthode, on trouve les recherches sur la probabilité des jugements pour lesquelles on peut mentionner Condorcet ⁽¹⁷⁾, Laplace ⁽¹⁸⁾ et Poisson [10].

De la théorie des erreurs au théorème central-limit

Au cours des observations astronomiques effectuées depuis l'Antiquité pour essayer de déterminer les lois qui régissent les astres - fixité ou périodicité -, on avait remarqué que les mesures faites sur un objet céleste n'étaient pas toujours les mêmes. De plus, lors de la mesure du méridien faite au 18e, malgré tout le soin apporté, on s'est aperçu qu'il y avait encore des discordances, des erreurs d'observation, écart entre la vraie valeur inconnue et les résultats d'observation.

Pour obtenir une valeur approchée de la constante inconnue, diverses méthodes étaient utilisées sans justification. Simpson, en 1757, applique le calcul des probabilités à ce problème en considérant les erreurs de mesure comme des pertes au cours d'un jeu de hasard (contre la Nature), propose quelques lois de distribution - appelées loi des erreurs - et étudie la distribution de la moyenne arithmétique de n observations indépendantes.

Ce problème est du même type que la recherche du rapport entre les naissances des garçons et des filles à laquelle vont participer D. Bernoulli, J.L. Lagrange et P. Laplace ⁽¹⁹⁾.

¹⁴⁾ Laplace, dans son *Essai* ([7a], p.199), écrit : "Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de celui de leurs possibilités respectives, il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports est contenue dans des limites données."

¹⁵⁾ Il semble que c'est D. Bernoulli qui étudia le premier (vers 1794) la distribution continue appelée maintenant loi normale (d'après K. Pearson, 1893 ou Poincaré) ou de Laplace-Gauss.

¹⁶⁾ Bayes, Thomas : An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances, *Phil. Trans. of the Royal Society*, Londres, 1763, reproduit dans [15] pp. 131-153 et traduit dans [1].

¹⁷⁾ Condorcet, Caritat de : *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785, in *Sur les élections*, Fayard, 1986.

¹⁸⁾ Laplace met dans l'avertissement de la 2e édition de *Théorie Analytique* : "La théorie de la probabilité des témoignages, omise dans la première édition, est ici présentée avec le développement qu'exige son importance". Il y consacre une partie de l'introduction (l'*Essai*, p.118), le chapitre xi : "De la probabilité des témoignages", ainsi qu'une partie du *Premier Supplément* "De la probabilité des jugements".

¹⁹⁾ voir en particulier l'article de Bru op. cit.

A propos de ce problème, on peut voir chez Laplace [7c] le premier test d'hypothèse lorsqu'il fait la comparaison de ces rapports observés à Londres et à Paris ⁽²⁰⁾.

Cette théorie des erreurs conduit d'une part à la recherche d'estimateurs d'une valeur centrale, par exemple chez Daniel Bernoulli (voir [2]) et Laplace ([7c]), et d'autre part à la détermination de la loi des erreurs pour laquelle plusieurs distributions furent proposées, et l'énonciation du théorème central-limit ⁽²¹⁾ par Laplace (1810), en particulier dans [7d] livre II, chapitre iv : "De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et des résultats moyens les plus avantageux".

La "démonstration" du théorème central-limit par Laplace a paru fort obscure à ses successeurs. Son argumentation est basée sur les résultats indiqués dans son Livre I : "Du calcul des fonctions génératrices", et en particulier de la Seconde Partie "Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de grands nombres". Il fait des extensions par analogie du cas fini au cas infini, que ce soit lors du passage des équations aux différences finies à des équations différentielles que pour les intégrations. Il utilise des développements en série et les intègre ou les différencie sans se préoccuper de la convergence. Il admet que la transformation d'une suite à sa fonction génératrice et inversement, se conserve pour les opérateurs sur ces fonctions. Il considère, par analogie, que les intégrales de fonctions d'une variable complexe ont les mêmes propriétés que celles des fonctions d'une variable réelle, par exemple $\int dt.f(t).c^{-\alpha t \sqrt{-1}}$, où "c est le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité". Il utilise des extensions qui ont paru mal fondées. Au n°18, après avoir montré le résultat si les erreurs peuvent prendre des valeurs entières uniformément entre -n et +n, il écrit : "Supposons généralement que la probabilité de chaque erreur positive ou négative soit exprimée par $\varphi(x/n)$, x et n étant des nombres infinis."

Le problème des erreurs d'observation en astronomie, où l'on a plusieurs paramètres inconnus, va amener à la méthode des moindres carrés par Legendre A.M., Laplace P.S. ([7d], II n°20 à 23) et Gauss C.F. ; pour Gauss et Laplace, cette méthode est basée sur la nature probabiliste des erreurs ⁽²²⁾. La méthode des moindres écarts, développée auparavant par Laplace ([7c] et [7d], II n°23), rend nécessaire l'utilisation du milieu de probabilité (la médiane) et de la distribution dite 1ère loi de Laplace.

Pendant la première moitié du 19e siècle, les travaux se poursuivent sur l'application du calcul des probabilités à des phénomènes sociaux : Laplace ([7d], chapitre XI : De la probabilité des témoignages), Poisson (op. cit.), Quetelet A. (*Essai de Physique Sociale*, Paris, 1835). Cependant, en raison de la difficulté pour attribuer une probabilité, comme Laplace l'avait noté ⁽²³⁾, les controverses sur les bases scientifiques de ces études et les critiques ⁽²⁴⁾ portées contre la notion d'"homme moyen" introduite par Quetelet jettent le discrédit sur ce genre d'étude, tout au moins en France.

²⁰⁾ Dans l'*Essai* ([7a]), Laplace écrit : (p.88) "Mais avant que d'en rechercher les causes, il est nécessaire, pour ne point s'égarer dans de vaines spéculations, de s'assurer qu'ils sont indiqués avec une probabilité qui ne permet point de les regarder comme des anomalies dues au hasard." et (p.116), "Le calcul des probabilités peut faire apprécier les avantages et les inconvénients des méthodes employées dans les sciences conjecturales. Ainsi, pour reconnaître le meilleur des traitements en usage dans la guérison d'une maladie, il suffit d'éprouver chacun d'eux sur un même nombre de malades, en rendant toutes les circonstances parfaitement semblables... le calcul fera connaître la probabilité correspondante de son avantage et du rapport suivant lequel il est supérieur aux autres."

²¹⁾ appellation de Polya de 1920, que je conserve telle que, la francisation de cette expression en "théorème de la limite centrale, ou centrée" n'ayant aucun sens. Laplace présente ce résultat dans son *Essai* [7a, p.91].

²²⁾ Laplace écrit dans [7d], II chapitre iv, n°23 : "La méthode des moindres carrés des erreurs devient nécessaire, lorsqu'il s'agit de prendre un milieu entre plusieurs résultats donnés, chacun, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations de divers genres." Il obtient aussi la loi normale comme loi des erreurs "qui donne constamment la règle des milieux arithmétiques."

²³⁾ ([7a, p 38]) : "DEUXIEME PRINCIPE : Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives, dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards."

²⁴⁾ tout d'abord par Cournot, A. : *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, 1843, et repris par Bertrand, J. : *Calcul des probabilités*, Hachette, Paris, 1889.

L'époque moderne : fin du 19e, 20e

Pendant la deuxième moitié du 19e siècle, les mathématiciens qui s'intéressent au calcul des probabilités se garderont de toute application aux phénomènes humains et sociaux. Ils vont partir des résultats de leurs prédécesseurs (en particulier Laplace, [7d]) pour en donner des démonstrations avec des conditions moins restrictives. Dès cette époque, les deux théorèmes limites vont devenir des problèmes internes pour la théorie des probabilités.

Bienaymé ⁽²⁵⁾ démontre une inégalité - dite aussi de Tchebychev - avec laquelle il obtient "un théorème sur les probabilités qui contient comme cas particuliers le théorème de Bernoulli et la loi des grands nombres". C'est une loi faible des grands nombres pour une suite de variables aléatoires dont les variances sont majorées par un même nombre. Dans un autre mémoire ⁽²⁶⁾, il montre un théorème central-limit pour une suite de v.a. dont "les espérances mathématiques de toutes leurs puissances ne dépassent pas une limite finie quelconque".

Dans la recherche de conditions plus larges pour la loi des grands nombres et le théorème central-limit, on peut noter l'apport de l'école russe de la fin du 19e siècle avec Tchebychev P.L. ⁽²⁷⁾, Markov A.) qui donne la première démonstration rigoureuse du théorème central-limit en 1898, Liapounov A. (1901), Lindeberg J.W. (1922), jusqu'à Khintchine A. ⁽²⁸⁾.

Dans cette recherche sur la loi des grands nombres, on va utiliser une autre sorte de convergence : la convergence presque sûre. La démonstration est basée sur un résultat appelé lemme de Borel-Cantelli (voir [4]).

On peut trouver différentes conditions pour lesquelles une suite de variables aléatoires vérifie la loi des grands nombres (faible ou forte) et le théorème central-limit par exemple dans Feller [5] ou Lévy [8] ; la démonstration du théorème central-limit par la méthode des fonctions caractéristiques est due à P. Lévy, qui justifie en les précisant les affirmations de Laplace.

Vers l'axiomatisation de la théorie des probabilités

Le calcul des probabilités va bénéficier des progrès effectués dans la théorie de la mesure des ensembles linéaires, puis quelconques, et de la théorie de l'intégration faits par : Baire M., Borel E., Lebesgue H. ⁽²⁹⁾ et une généralisation par Fréchet M. ⁽³⁰⁾.

L'extension de l'intégrale à un espace abstrait (Radon, Fréchet) va permettre l'axiomatisation de la théorie des probabilités qui est réalisée par A.N. Kolmogorov ⁽³¹⁾ ; la notion fondamentale est l'espace probabilisé, c'est-à-dire mesuré avec une mesure totale égale à 1. On peut donc utiliser tous les résultats démontrés en théorie de la mesure dans le cas particulier d'une mesure finie. Le calcul des probabilités sort du rôle de calculs sur les jeux pour devenir une théorie mathématique à part entière.

²⁵⁾ Bienaymé, I.J. : Des valeurs moyennes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (C.R.A.S.), Paris, entre 1850 et 60 (?)

²⁶⁾ Bienaymé, I.J. : Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités, idem

²⁷⁾ Tchebychev donne en 1887 un énoncé clair et une démonstration (incomplète) du théorème central-limit.

²⁸⁾ Khintchine, A. : Sur la loi des grands nombres, *C.R.A.S.*, Paris, 1929.

²⁹⁾ Lebesgue, H. : *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

³⁰⁾ Fréchet, M. : Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 1915.

³¹⁾ Kolmogorov, A.N. : *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Press, New-York, 1950 ; 1e éd. en allemand, Springer, 1933.

Bibliographie

Ouvrages originaux (ou traduction)

- [1] Bayes, Thomas : *Essai en vue de résoudre un problème de la doctrine des chances*, 1763 ; traduit par J.P. Cléro, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, n° 18, 1988.
- [2] Bernoulli, Daniel : *Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium...*, Acta Acad. Sc. Petrop., 1777 ; traduit dans [14] : The most probable choice between several discrepant observations..
- [3] Bernoulli, Jacques : *Ars Conjectandi*, 1713 ; 4e partie traduite par N. Meusnier dans *Jacques Bernoulli & l'ars conjectandi*, IREM de Rouen, 1987.
- [4] Borel, Emile : *Oeuvres* en 4 vol., CNRS, Paris, 1972.
- *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, R. C. Circolo Mat. Palermo, 1909 ; *Oeuvres* t.2, Ed. du CNRS, Paris, 1972.
--- : *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 2e éd. 1952.
- [5] Feller, William : *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New-York, tome I, 1e éd. 1950, 2e éd. 1957.
- [6] Fréchet, Maurice : *Généralités sur les probabilités. Eléments aléatoires*, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1950.
- [7] Laplace, Pierre Simon de : a- *Essai philosophique sur les probabilités*, préface de R. Thom, postface de B. Bru, Bourgois, Paris, 1986 ⁽³²⁾
--- : *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, de 1878 à 1886
b- *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, 1774, O.C. t.8.
c- *Mémoire sur les probabilités*, 1781, O.C. t.9.
d- *Théorie analytique des probabilités*, 3e éd. 1820, O.C. t.7.
- [8] Lévy, Pierre : *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [9] Moivre de, Abraham : *The Doctrine of Chances*, 1e éd., 1718 ; 3e éd., 1756 réimprimée par Chelsea, New-York, 1967.
- [10] Poisson Denis : *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris, 1837.

Ouvrages sur l'histoire de la théorie des probabilités et de la statistique

- [10] Benzécri, Jean-Pierre : *Histoire et préhistoire de l'analyse des données*, Dunod, Paris, 1982.
- [11] Dieudonné, Jean et alii : *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, t. 2, Hermann, Paris, 1978.
- [12] Droesbeke, J.-J. et Tassi, Ph. : *Histoire de la Statistique*, P.U.F., Coll. "Que sais-je?", Paris, 1990.
- [13] Feldman J., Lagneau G., Matalon B. eds : *Moyenne, Milieu, Centre ; histoires et usages*, Ed. de l'EHESS, Paris, 1991.
- [14] Gillispie C.C. : *Dictionary of Scientific Biography*, C. Scribner's Sons, New-York, 16 vol. de 1970 à 1980.
- [15] Pearson, Egon S. and Kendall, Maurice G. eds : *Studies in the history of Statistics and Probability*, vol.1, Griffin & Co, London, 1970 ⁽³³⁾.
- [16] Kendall Maurice G. and Plackett Robin L. eds : *Studies...*, vol.2, Griffin & Co, 1977.
- [17] Mairesse, Jacques éd. : *Estimation et sondages*, cinq contributions à l'histoire de la statistique, Economica, Paris, 1988.
- [18] Stigler, Stephen M. : *The History of Statistics*, Belknap Harvard, 1986.
- [19] Todhunter, Isaac : *A history of the mathematical theory of probability*, Cambridge, 1865 ; réédition Chelsea, New-York, 1965.

³²⁾ L'*Essai philosophique* sert d'introduction à la *Théorie Analytique* à partir de la 2e éd. de 1812. Les références à l'*Essai* sont données pour cette dernière édition qui est plus facile à trouver que les *Oeuvres Complètes*.

³³⁾ Cet ouvrage, ainsi que le suivant, est en grande partie une compilation d'articles de *Biometrika*, revue créée par Karl Pearson.