

# Inégalité triangulaire. Notion de fréquence en classe de cinquième

*Monique MAZE et Aurélie ROUX, IREM de Clermont-Ferrand -  
Guillaume FRANCOIS, IREM des Pays de la Loire*

## Présentation

En classe de troisième, les élèves utiliseront le dé comme outil de simulation. Il nous semble important qu'ils aient été familiarisés à l'utilisation de l'objet dé.

Les deux activités pourront être faites à des moments différents dans la programmation, tout en respectant l'ordre proposé.

La première activité permet d'introduire l'inégalité triangulaire. De la situation proposée dans cette activité, naît la nécessité d'introduire la notion de fréquence, ce qui sera fait dans la deuxième partie.

## Objectifs

- Introduction de la notion : « inégalité triangulaire ».
- Familiarisation avec l'objet dé.
- Introduction de la notion de fréquence.

## Prérequis

### *Pour l'activité 1*

- Construction d'un triangle au compas. Ce savoir-faire est un objectif de la classe de 6<sup>e</sup>.

### *Pour l'activité 2*

- Il faut avoir fait l'activité 1, mais pas forcément juste avant.
- La fraction quotient. La fraction en tant que quotient est un des objectifs de la classe de sixième. Deux choix sont possibles : avoir réactivé cette notion au préalable (activités mentales, devoir maison...) ou au contraire saisir cette occasion pour le faire.

## Matériel envisagé

- Deux dés par binôme (pour les deux activités).
- Vidéoprojecteur : pour projeter un fichier « tableur » à remplir avec les élèves en classe (pour l'activité 2).

# Scénarii

## Activité 1 : (1 heure)

Organisation de la classe : les élèves travaillent en binômes. Le professeur propose un dispositif pour construire des triangles. Consigne orale.

« Vous allez construire des triangles. Pour cela, vous allez tous tracer un segment de 7 cm de long. Pour la longueur des deux autres côtés, je vous donne deux dés à jouer pour les déterminer ».

Pendant que les élèves tracent le segment de 7 cm, le professeur distribue deux dés par binôme.

Le professeur précise alors la façon de procéder.

« Chaque binôme lance les deux dés, note les résultats à côté du segment et construit son triangle. Il faut ensuite recommencer : tracer un segment de 7 cm, relancer les dés et construire le triangle ainsi déterminé. Il faut en construire au moins trois ; les plus rapides en feront plein d'autres ».

Après avoir laissé un temps suffisant pour que tous les binômes aient réalisé trois essais, le professeur lance l'une des deux questions suivantes.

« Qu'avez-vous obtenu ? » ou « Avez-vous des remarques à faire ? »

Le professeur lance ainsi le débat face à la classe entière : les élèves veulent tous participer pour rendre compte de ce qu'ils ont obtenu.

« Je n'ai rien remarqué ».

« Il y a un triangle que je n'ai pas pu construire. »

« Y'en a un qui est tout écrasé »

Certains élèves se sont lancés dans un débat sur le fait que le triangle était « presque écrasé » ou « complètement écrasé ».

En utilisant les nombres donnés par les dés, nombres entiers, la classe se rallie assez vite à l'idée que les points sont alignés. On a des arguments du type :  $2 + 5 = 7$ , donc le point doit être sur le segment.

La question suivante se pose : dans la situation où les points sont alignés, peut-on dire que l'on a un triangle ?

Si la réponse est oui, on le nommera triangle plat (expression donnée par l'enseignant).

Sinon, on se contentera de parler de points alignés.

Cette question doit être impérativement tranchée avant d'aborder l'activité 2.

Les dés à jouer sont rangés.

On se pose maintenant la question :

« Si on prend trois nombres, peut-on prévoir si l'on peut construire un triangle dont les dimensions sont données par ces trois nombres ? »

Libre à l'enseignant de choisir la façon de faire vivre cette partie de l'activité dans sa classe. En effet l'objet de cette brochure ne porte pas sur la géométrie.

Il ne reste plus qu'à institutionnaliser l'inégalité triangulaire.

## Activité 2 : (2 heures)

Organisation de la classe : les élèves travaillent en binômes. Consigne orale.

« Vous souvenez-vous de l'activité sur les triangles construits avec les dés ? J'ai une nouvelle question : a-t-on plus de chances de pouvoir construire le triangle que de ne pas pouvoir le construire ? »

Le cas du triangle plat a été évoqué dans la première activité. Il faut rappeler à la classe que ce cas fait partie des triangles constructibles.

« Je vous propose de refaire des essais en relançant les dés. Je vous laisse deux minutes pour les effectuer. »

Par binômes, ils expérimentent avec les dés.

Plutôt que de fixer le nombre de lancers, nous avons choisi de fixer la durée. Il est primordial que les élèves n'aient pas le même nombre d'essais. En effet, il est souhaitable que les quotients aient des dénominateurs différents afin que les comparaisons soient plus intéressantes. De plus, limiter la durée à 2 min permet en général d'obtenir des fréquences très différentes.

Nous passons ensuite au recensement des résultats et au débat. Éventuellement, certains groupes peuvent n'avoir fait qu'un tirage et avoir construit le triangle. Ce sera l'occasion de revenir sur l'utilité de l'inégalité triangulaire.

Les résultats des différents groupes sont relevés dans un tableau vidéoprojeté.

|          | Nombre d'essais | Nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle | Nombre de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle |
|----------|-----------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Groupe 1 |                 |                                                       |                                                              |
| ...      |                 |                                                       |                                                              |
| Groupe n |                 |                                                       |                                                              |

L'enseignant peut demander :

« Quel groupe a obtenu le plus de cas favorables, c'est à dire le plus grand nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle ? »

On attend comme remarque des élèves : « On n'a pas le même nombre de lancers. »

L'enseignant demande alors :

« Comment peut-on comparer les résultats ? ».

Le débat devrait conduire à l'écriture des résultats sous forme de quotients et la comparaison pourrait se faire par un passage à l'écriture décimale. Ce premier débat se conclut par la définition de la notion de fréquence.

Trace écrite :

fréquence de construction du triangle =  $\frac{\text{nombre de fois où on a pu le construire}}{\text{nombre d'essais}}$ .

La fréquence mesure si le triangle peut être construit fréquemment.

L'enseignant relance le débat :

« Pourquoi obtient-on des résultats si différents ? »

Il faut s'attendre à ce que les élèves n'aient pas de réponse. L'enseignant propose de relancer les dés, de mesurer les fréquences de construction des triangles et d'essayer de répondre à cette question. Pour la même raison que précédemment, on fixera le temps de cette partie.

« Prenez vos dés, je vous laisse 10 min pour faire ces expériences. »

Les résultats des différents groupes sont relevés dans un tableau vidéoprojeté.

|          | Nombre d'essais | Nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle | Nombre de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle | Fréquence de « construction des triangles. » | Fréquence de « non construction des triangles. » |
|----------|-----------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Groupe 1 |                 |                                                       |                                                              |                                              |                                                  |
| ...      |                 |                                                       |                                                              |                                              |                                                  |
| Groupe n |                 |                                                       |                                                              |                                              |                                                  |

Trace écrite:

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de fois où l'on obtient...}}{\text{nombre d'expériences}}$$

Plus le nombre d'expériences augmente, plus la fréquence semble se stabiliser.

## Analyse a posteriori

### Activité 1

Les élèves sont sans doute surpris mais semblent amusés, pour ne pas dire intéressés.

Les élèves effectuent la tâche qu'ils semblent avoir très bien comprise.

Le professeur apporte une aide pour la construction dans certains groupes.

Ici, un seul triangle est demandé pour chaque lancer mais le professeur, s'il le juge utile pour sa classe, peut rappeler l'existence des 4 triangles possibles.

Certains élèves interpellent leur professeur lorsqu'ils trouvent un cas particulier. Celui-ci doit leur répondre d'attendre le débat au cours duquel ils pourront prendre la parole pour présenter leurs interrogations.

### Activité 2

Cette activité a été menée dans deux classes différentes, avec deux professeurs n'ayant pas choisi la même progression. Dans la 5<sup>e</sup> Athènes, la notion de fraction quotient a été revue juste avant lors d'activités mentales. En 5<sup>e</sup> 2, cette notion a été étudiée plus tôt dans l'année, entretenue, mais aucune révision n'a été faite juste avant. Voici les deux comptes rendus de séances.

## Classe de 5<sup>e</sup> Athènes

« Vous souvenez-vous de l'activité sur les triangles construits avec les dés ? Eh bien j'ai une nouvelle question : en utilisant ce procédé de construction, a-t-on plus de chances de pouvoir construire le triangle que de ne pas pouvoir ? »

Après s'être mis d'accord sur le fait qu'un triangle plat est un triangle, le professeur dit :

« Je vous propose de refaire des essais en relançant les dés. Je vous laisse deux minutes pour les effectuer. »

Les résultats sont résumés dans un tableau, vidéoprojeté.

| Groupes | Nombre d'essais | Nombre de triangles constructibles | Nombre de triangles non constructibles |
|---------|-----------------|------------------------------------|----------------------------------------|
| 1       | 1               | 0                                  | 1                                      |
| 2       | 4               | 3                                  | 1                                      |
| 3       | 2               | 0                                  | 2                                      |
| 4       | 6               | 1                                  | 5                                      |
| 5       | 1               | 0                                  | 1                                      |
| 6       | 2               | 1                                  | 1                                      |
| 7       | 6               | 4                                  | 2                                      |
| 8       | 1               | 1                                  | 0                                      |
| 9       | 4               | 4                                  | 0                                      |
| 10      | 2               | 1                                  | 1                                      |
| 11      | 10              | 7                                  | 3                                      |

Le groupe 11 a fait beaucoup plus de lancers de dés que les autres groupes. Ceci est dû au fait que c'est le seul groupe n'ayant pas construit les triangles. Il explique pourquoi il n'a pas effectué la construction à l'aide de l'inégalité triangulaire. L'argument a semblé convainquant pour la classe.

À la question : « Quel groupe a obtenu le plus de cas favorables, c'est-à-dire le plus grand nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle ? », les élèves ont tout de suite répondu : « C'est le groupe 11, mais c'est normal ils ont fait beaucoup plus d'essais. »

Un élève dit : « Le nombre de cas favorables sera plus grand si on fait plus de lancers ».

Le professeur demande alors : « Comment peut-on comparer les résultats ? ».

Un élève propose de procéder par soustraction :

« Si on compare le groupe 2 et le groupe 7 : pour le groupe 7, on a 4 réussites sur 6. En enlevant 2, ça fait 2 réussites sur 4, c'est moins bien que le groupe 2 qui a 3 réussites sur 4. »

L'argument est réfuté par le raisonnement suivant, donné par un élève : « ce n'est pas possible, car 4 réussites sur 6 essais, c'est mieux qu'une fois sur 2 alors que 2 réussites sur 4 essais c'est comme une fois sur 2. »

Après adhésion de la classe sur le fait qu'on ne puisse pas comparer les résultats des groupes à l'aide de soustractions, l'enseignant réitère sa question : « *Comment peut-on comparer les résultats ?* ».

La classe reste muette.

On passe alors à la deuxième phase :

« *Prenez vos dés, je vous laisse 10 min pour faire ces expériences, puis on verra comment on peut comparer les résultats.* »

Les résultats sont résumés dans un tableau, vidéoprojeté.

| Groupes | Nombre d'essais | Nombre de triangles constructibles | Nombre de triangles non constructibles |
|---------|-----------------|------------------------------------|----------------------------------------|
| 1       | 8               | 6                                  | 2                                      |
| 2       | 70              | 50                                 | 20                                     |
| 3       | 84              | 21                                 | 43                                     |
| 4       | 75              | 46                                 | 29                                     |
| 5       | 69              | 44                                 | 25                                     |
| 6       | 77              | 49                                 | 28                                     |
| 7       | 106             | 64                                 | 42                                     |
| 8       | 110             | 67                                 | 43                                     |
| 9       | 81              | 48                                 | 33                                     |
| 10      | 81              | 50                                 | 31                                     |
| 11      | 66              | 36                                 | 30                                     |

Une première remarque : le groupe 1 n'a effectué que huit lancers. Ces élèves avaient encore besoin de tracer les triangles. Au bout de 8 min 30, ils ont décidé d'eux-mêmes, sans que l'enseignant intervienne, de ne plus faire les tracés.

Après avoir rempli le tableau avec leurs résultats, le professeur leur redemande alors : « *Comment peut-on comparer les résultats ?* ».

Un élève annonce « Pour les groupes 9 et 10, c'est facile, car on a le même nombre d'essais. ».

L'idée de procéder par soustraction est proposée à nouveau, mais rapidement rejetée par la classe.

Ensuite, des élèves se demandent s'ils ont plus ou moins d'une chance sur deux de pouvoir construire les triangles. Ainsi, petit à petit, les phrases du type « On a pu construire 50 triangles sur 81. » se sont transformées en « notre réussite est de 50 sur 81 ».

Finalement, les élèves se mettent à comparer des fractions.

La première trace écrite prévue est alors notée et le professeur propose de calculer les fréquences de tous les groupes, en travail à la maison.

À la séance suivante, après correction des fréquences, le professeur demande à chaque binôme d'effectuer 200 lancers de dés pour voir ce qui se passe.

| Groupes | Nombre d'essais | Nombre de triangles constructibles | Fréquence |
|---------|-----------------|------------------------------------|-----------|
| 1       | 200             | 110                                | 0,550     |
| 2       | 200             | 123                                | 0,615     |
| 3       | 200             | 99                                 | 0,495     |
| 4       | 200             | 123                                | 0,615     |
| 5       | 200             | 118                                | 0,59      |
| 6       | 200             | 120                                | 0,600     |
| 7       | 200             | 118                                | 0,590     |
| 8       | 200             | 119                                | 0,595     |
| 9       | 200             | 120                                | 0,600     |
| 10      | 200             | 113                                | 0,565     |
| 11      | 200             | 125                                | 0,625     |

On a remarqué que les fréquences variaient entre 0,5 et 0,6 pour 10 d'entre-elles. Ainsi, nous pouvons penser qu'il y a plus de chances de construire le triangle que de ne pas le construire avec une telle méthode.

Les élèves écrivent la deuxième trace écrite.

## Classe de 5<sup>e</sup> 2

Les élèves sont motivés pour répondre au problème posé, l'activité 1 semble les avoir marqués. Seulement un binôme d'élèves cherche à construire le triangle avec les instruments.

Le nombre de lancers réalisés est très variable d'un groupe à l'autre, certains binômes sont moins habiles concernant la manipulation de l'inégalité triangulaire.

Lors du débat à la fin de la première phase, certains lancent des réponses du type :

« On ne peut pas comparer, on n'a pas tous lancé autant de fois ! »

« On n'a qu'à comparer les groupes qui ont fait le même nombre de lancers ! »

« Justement, on peut pas répondre, c'est pas pareil pour les deux groupes qui ont fait 5 lancers ! Un des groupes a 3 triangles construits sur 5, un autre 2 sur 5 ! »

L'idée d'écrire les résultats sous forme de quotient est enfin proposée et les comparaisons se font, selon les cas, soit par mise au même dénominateur soit par passage à l'écriture décimale.

Lors de cette phase, il est effectivement difficile pour les élèves de répondre à la question de savoir pourquoi les résultats obtenus sont si différents. Ils évoquent beaucoup le « hasard » mais ne pensent pas nécessairement à relancer les dés un plus grand nombre de fois.

Comme dans la première classe, pour répondre au problème, l'enseignant les invite à réaliser un grand nombre de lancers.

|    | A         | B             | C                                                 | D                                                        | E                         | F                             |
|----|-----------|---------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1  |           | nb de lancers | nb de fois où l'on pouvait construire le triangle | nb de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle | fréquence de construction | fréquence de non construction |
| 2  | Groupe 1  | 10            | 5                                                 | 5                                                        | 0,50                      | 0,50                          |
| 3  | Groupe 2  | 30            | 21                                                | 9                                                        | 0,70                      | 0,30                          |
| 4  | Groupe 3  | 25            | 13                                                | 12                                                       | 0,52                      | 0,48                          |
| 5  | Groupe 4  | 17            | 9                                                 | 8                                                        | 0,53                      | 0,47                          |
| 6  | Groupe 5  | 29            | 20                                                | 9                                                        | 0,69                      | 0,31                          |
| 7  | Groupe 6  | 17            | 11                                                | 6                                                        | 0,65                      | 0,35                          |
| 8  | Groupe 7  | 12            | 6                                                 | 6                                                        | 0,50                      | 0,50                          |
| 9  | Groupe 8  | 14            | 7                                                 | 7                                                        | 0,50                      | 0,50                          |
| 10 | Groupe 9  | 10            | 4                                                 | 6                                                        | 0,40                      | 0,60                          |
| 11 | Groupe 10 | 31            | 19                                                | 12                                                       | 0,61                      | 0,39                          |
| 12 |           |               |                                                   |                                                          |                           |                               |

Un élève a ressenti le besoin de justifier ces résultats en listant tous les tirages possibles et en comptabilisant le nombre de cas favorables. Ceci a été fait et organisé sous forme de tableau :

| Dé n°1 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|--------|---|---|---|----|----|----|
| Dé n°2 |   |   |   |    |    |    |
| 1      | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2      | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3      | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4      | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5      | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6      | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Après avoir rempli le tableau en calculant la somme des deux nombres affichés par les dés, les élèves ont grisé les cases correspondant à des triangles que l'on peut construire. Il y a 21 cas favorables sur 36 cas possibles.

$\frac{21}{36} \approx 0,58$ , ce qui correspond aux calculs de fréquences.

## Conclusion

Cette activité nous a permis d'introduire la notion de fréquence. Dès la cinquième, nous parlons de « chance d'obtenir un évènement ». Ceci assure un aller-retour entre probabilité et fréquence, comme le suggère l'article « Quelle place pour l'aléatoire au collège ? » de J.C. GIRARD, M. HENRY, B. PARZYSZ et J.F. PICHARD dans le Repère-IREM n°42. Les auteurs s'interrogent notamment sur l'intérêt qu'il y aurait « à aborder en classe la notion d'aléatoire en parallèle avec l'initiation aux démarches statistiques, avant l'enseignement des probabilités ».

Elle nous permet aussi de se familiariser avec l'objet dé, et de commencer son étude, bien avant de l'utiliser comme objet « outil de simulation ».