

Pari sur la somme de deux dés

Béatrice LEGOUPIL, IREM de Lyon – Laurianne FOULQUIER, IREM d'Aquitaine

Présentation

Lancer deux dés et calculer leur somme semble une situation simple.

Cependant, l'observation des résultats de cette expérimentation surprend : elle met en défaut l'intuition première de certains élèves qui est d'accorder la même probabilité à l'obtention de chaque somme possible.

Dans cette activité, chaque binôme doit mettre en place une organisation pour relever et comptabiliser les différentes sommes. Puis, en groupes, ils s'interrogent sur la ou les sommes qui ont le plus de raisons de sortir. Enfin, la mise en commun permet de mettre en place le vocabulaire sur les probabilités, donner la loi de probabilité et débattre sur la notion de « hasard ».

Durée de l'activité

Deux séances.

Séance 1 : expérimentation en binômes.

Première phase : pari (5 min).

Deuxième phase : expérimentation et organisation des relevés (40 min).

Séance 2 : recherche en groupes.

Première phase : recherche en groupes avec production d'un transparent par groupe (25 min).

Deuxième phase : mise en commun en classe entière à partir de la présentation des transparents (25 min).

Troisième phase : institutionnalisation.

Prérequis

Cette activité ne nécessite aucun prérequis particulier, elle peut donc être donnée en début de chapitre sur les probabilités.

Objectifs principaux

- Confronter les élèves à une situation où l'intuition peut être mise en défaut.
- S'organiser pour collecter des données.
- Introduire ou mettre en œuvre le vocabulaire de base des probabilités.
- Donner de l'importance à l'expérimentation.
- Débattre de la notion de hasard.

Matériel nécessaire

- Deux dés par binôme.
- Un transparent par groupe d'élèves.

Description et analyse de ce qui s'est passé dans la classe (*a posteriori*)

Première séance

Le professeur explique la règle du jeu.

« On lance deux dés. On calcule la somme des deux nombres visibles. On relance les dés jusqu'à ce qu'une des sommes soit apparue 20 fois. »

Il distribue la fiche élève (voir annexe 1) ainsi que deux dés par binôme.

Première phase : pari

Le professeur précise la consigne oralement.

« À votre avis, quelle est la somme qui va apparaître en premier 20 fois ?
Vous avez 5 minutes pour vous mettre d'accord avec votre voisin sur le pari que vous désirez faire. »

Les élèves ont quelques minutes pour choisir leur pari en binôme. Ils peuvent faire usage de leurs dés s'ils en prennent l'initiative.

Faire ce pronostic leur permet de se poser des questions *a priori* et de faire naître des débats au sein des binômes. Il nous paraît important qu'émergent leurs intuitions initiales avant de se lancer dans l'expérimentation afin de pouvoir en discuter en fin d'activité.

Voici quelques exemples de pronostics :

- certains binômes donnent des raisons de l'ordre de la préférence :
 - « 8 c'est mon chiffre fétiche »
 - « 6 car je suis née le 6 juillet »
- d'autres décident de lancer les dés pour observer quelles sont les sommes qui sortent le plus :
 - « 4 car en essayant, il est sorti le plus de fois »
 - « 6 parce qu'on a sélectionné au hasard en lançant les dés »
- d'autres encore proposent une explication en raisonnant sur les nombres :
 - « 6 car c'est la moitié de 12 »
 - « 8 car c'est un nombre pair et que les nombres pairs apparaissent plus souvent »
 - « 7 car c'est un nombre impair »
 - « 12 car c'est le plus grand nombre »
- quelques binômes ont déjà l'idée de compter les décompositions possibles pour une somme :
 - « 7 c'est le chiffre qui a le plus de combinaisons »
 - « 7 car il y a plus de chances avec deux dés de faire 7 au total »
 - « 7 nous avons choisi ce chiffre car c'est l'un des seuls qui a le plus de solutions (3 possibilités avec deux dés) »

Il nous semble intéressant, à la fin de cette phase, de faire énoncer à l'oral les différents paris de la classe sans justification. Ceci afin d'assouvir la curiosité des élèves, de relever leurs *a priori* et de motiver le passage à l'expérimentation. Le professeur peut les relever pour en garder une trace.

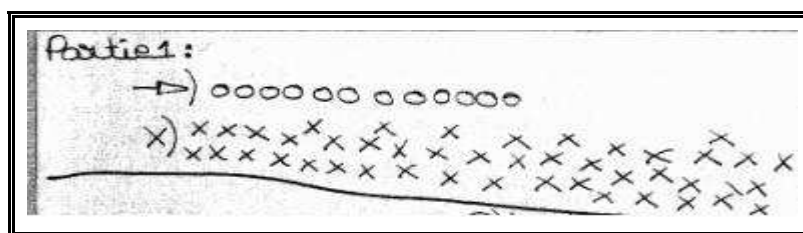
Deuxième phase : expérimentation et organisation des relevés

Pendant cette deuxième phase, les élèves expérimentent le jeu.

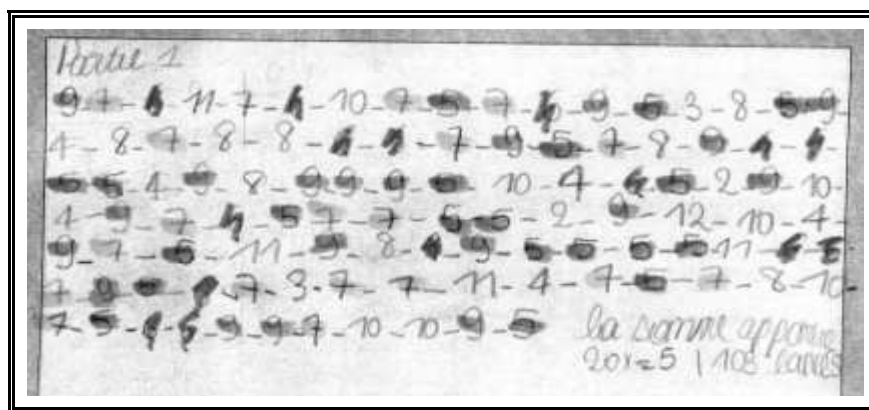
Le professeur donne la consigne suivante.

« Vous avez 30 minutes pour jouer autant de parties que vous voulez. Une partie s'arrête dès qu'une même somme est sortie 20 fois, même si ce n'est pas votre pari. Utilisez le cadre pour relever vos résultats, n'oubliez pas de noter, à la fin de chaque partie, la somme apparue 20 fois et le nombre de lancers. »

Le professeur, tout en laissant une totale autonomie aux élèves dans l'organisation des relevés des données, s'assure de la bonne compréhension de la consigne. En effet, certains binômes ne comptabilisent que la somme pariée ; ils font une liste avec deux symboles, du type « réalisé » et « non réalisé ». Le professeur doit leur préciser à nouveau que n'importe quel nombre peut apparaître 20 fois, il n'y a donc pas que le pari à prendre en compte.



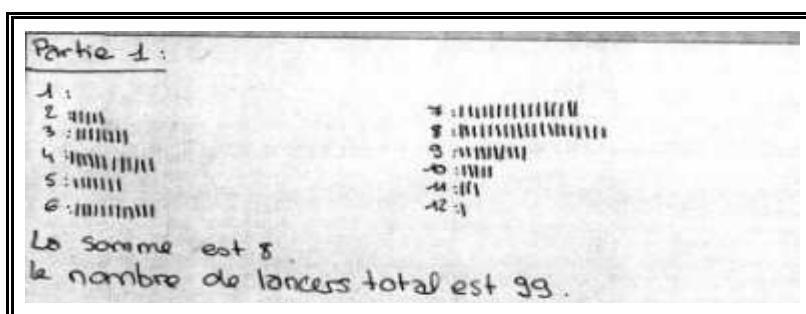
Une fois la consigne comprise, les élèves doivent s'organiser pour relever les sommes des deux dés. Peu d'élèves pensent à s'organiser en tableau dès leur première partie. Beaucoup d'entre eux écrivent les résultats comme ils viennent sous forme de liste, ce qui est assez délicat pour savoir quand le jeu s'arrête et quelle somme est sortie la première vingt fois.



Il est important de laisser le temps aux élèves de construire leur propre relevé. Il faut effectivement noter toutes les sommes et mettre en place une organisation pour comptabiliser chacune d'entre elles, au fur et à mesure.

Ceux qui le font listent les sommes de différentes façons :

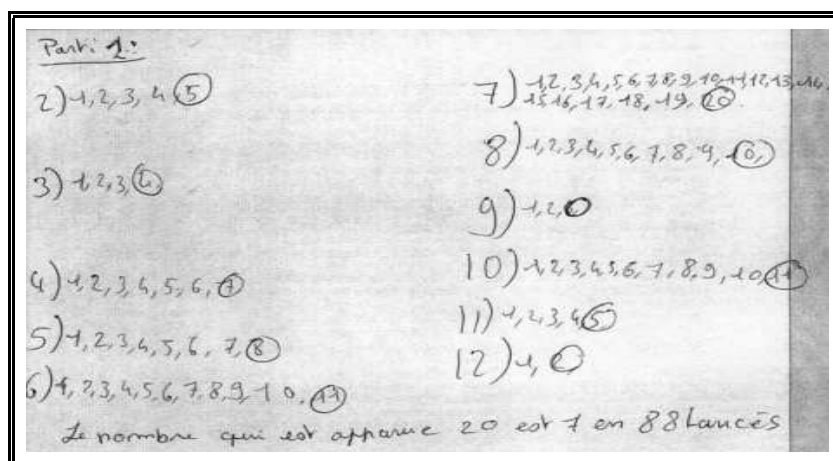
- en marquant les apparitions de chaque somme par un bâton ;



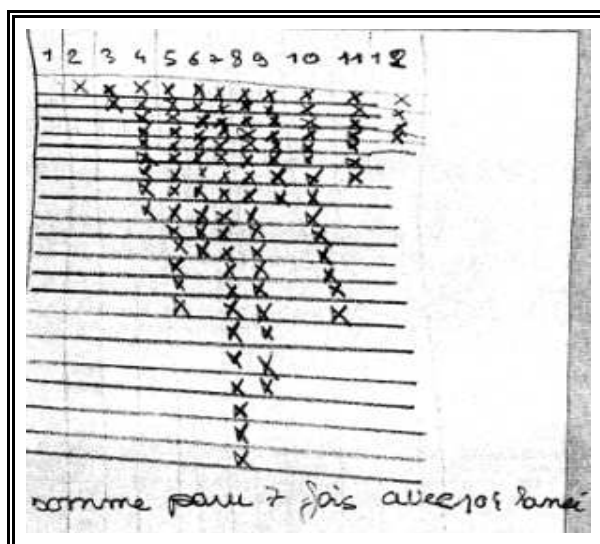
- en utilisant un comptage en base 5 ;

2:	2
3:	4
4:	3
5: 1	11
6:	13
7:	20
8:	19
9:	15
10:	9
11:	4
12: 1	5

- en cumulant les apparitions de chaque somme.



La plupart des groupes a opté pour une organisation sous forme de tableau au cours de la première partie. Dans le cas contraire, le professeur leur demande de trouver une organisation plus efficace. Les groupes expérimentent à des vitesses très différentes : au bout de quinze minutes, certains finissent leur première partie alors que d'autres en ont déjà fait trois. Trente minutes s'avèrent ainsi nécessaires pour que tous les élèves réalisent au moins un relevé pertinent.



Ensuite le professeur peut distribuer les tableaux (voir annexe 2) pour gagner du temps dans les relevés.

Cette expérimentation débute en classe et peut se terminer à la maison. Il est nécessaire de s'assurer que les élèves possèdent chez eux des dés, sinon il faut leur en prêter.

Durant cette phase, les élèves repèrent des événements possibles ou impossibles : « le 1 ne peut pas sortir », « la somme est comprise entre 2 et 12 » ; mais aussi que certaines sommes apparaissent plus ou moins que d'autres : « 2 et 12 n'ont qu'une seule composition possible, ils sortiront moins », « de 5 à 9, les sommes sortent plus souvent ».

Ils se rendent compte qu'il n'y a pas équiprobabilité entre les événements.

Deuxième séance

Première phase : travail en groupes

Dans la phase suivante, les élèves travaillent par groupes de trois ou quatre avec la consigne suivante .

« À votre avis, y a-t-il une somme qui a plus de raisons de sortir que les autres ? Sur un transparent, expliquez pourquoi. Vous avez 20 minutes. »

En circulant dans la classe, le professeur établira, selon le contenu des transparents, un ordre de passage pour le bilan en classe entière.

Deuxième phase : bilan en classe entière

Chaque groupe désigne un ou plusieurs rapporteurs qui viennent exposer leur travail à l'ensemble de la classe.

La plupart des groupes établit sur leur transparent la liste des décompositions pour chaque somme de 2 à 12.

$1+1=2$ $1+2=3$ $5+6=11$ $6+6=12$ $2+2=4$ $1+3=4$ $4+1=5$ $3+2=5$ $3+6=9$ $4+5=9$ $4+6=10$ $5+5=10$ $5+1=6$ $4+2=6$ $3+3=6$ $6+1=7$ $5+2=7$ $3+4=7$ $4+4=8$ $5+3=8$ $6+2=8$	Donc 6, 7, 8 ont le plus de chance de ressortir car il existe plus de combinaison de dés pour eux que pour les autres
---	--

Ces groupes trouvent trois possibilités pour 6, 7 et 8, et une ou deux possibilités pour les autres nombres. Ils en déduisent que les nombres ayant le plus de raisons de sortir sont 6, 7 et 8. Ils ne distinguent pas $2 + 5$ et $5 + 2$.

Pour quelques groupes, le fait qu'il y ait un double ($3 + 3$) et ($4 + 4$) dans la liste des décompositions de 6 et 8 leur fait sentir que le 7 sort plus facilement mais ils n'arrivent pas à le justifier.

* On a choisi le chiffre 7, du fait :
il y a trois solutions de somme à deux dés et contrairement
à 8 et à 6 qui ont aussi trois solutions, il n'y a pas besoin
de faire un double pour obtenir ce résultat.

Exemples: $5+2=7$
 $3+4=7$
 $6+1=7$

Pour 8 et 6 :

8 = * Exemples: $4+4=8$ * Pour 6 = * Exemples: $3+3=6$ *

$6+2=8$ $4+2=6$
 $5+3=8$ $5+1=6$

Dans le même ordre d'idée, certains élèves disent qu'il est plus facile d'obtenir un nombre impair qu'un nombre pair en évoquant l'existence de ces doubles.

- On a plus de chance de tomber sur des nombres impaires que des nombres pairs car il est plus difficile de faire des doubles.
- De plus, il est compliqué de sortir des petits chiffres comme 2, 3, 4 puisque l'on a deux dés.
- On peut donc trouver en majorité des chiffres compris entre 5 et 9.

Des élèves donnent aussi comme argument la position centrale du nombre 7.

d'après notre théorie le chiffre qui revient le plus souvent est le 7 car il a beaucoup de combinaisons est que c'est le chiffre du milieu

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2 & = & 7 \\ 4 + 3 & = & 7 \\ 6 + 1 & = & 7 \end{array}$$

Pour donner une explication, certains groupes argumentent oralement.

« On peut obtenir une combinaison qui donne 7 avec le deuxième dé quelle que soit la valeur du premier dé (1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6/1), on a donc six chances d'obtenir 7 avec les deux dés. Pour le 6 et 8 on n'a que cinq chances. Si on obtient 6 avec le premier dé, on ne peut pas obtenir une somme inférieure à 7 ; si on obtient 1 avec le premier dé, on ne peut pas obtenir une somme supérieure à 7. »

ou bien

« Si le premier lancer donne 1 (plus petit nombre), quel que soit le deuxième lancer, les possibilités sont comprises entre 2 et 7. Si le premier lancer donne 6 (plus grand nombre), quel que soit le deuxième lancer, les possibilités sont comprises entre 7 et 12. 7 est dans les deux cas. »

ex:



Sa face opposée est



ou



Sa face opposée est



Avec toutes les faces du dé, nous avons la possibilité de trouver un chiffre égal à 7, or les autres chiffres n'ont pas possibilité.

Certains groupes ont voulu distinguer leurs deux dés en leur attribuant une couleur et ainsi expliciter que les sommes $1 + 6$ et $6 + 1$ par exemple ne sont pas les mêmes.

7 car avec 2 dés c'est la somme qui a le plus de combinaisons possible pour la former (6 combinaisons): si nous avions 2 dés de couleurs différents

R. rouge
V. vert

6+1 ou 1+6 pour le 6
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

5+2 ou 2+5 pour le 7
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

4+3 ou 3+4 pour le 7
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

Donc 6 façons pour le 7

5+1 ou 1+5 pour le 6
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

4+2 ou 2+4 pour le 6
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

3+3 pour le 6
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ R & V \\ \downarrow & \downarrow \\ R & V \end{matrix}$

Donc 3 façons

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il peut arriver qu'un groupe construise le tableau à double entrée des sommes de deux dés. Le 7 apparaît dans 6 cases des 36 du tableau, 6 et 8 dans 5 cases des 36, 5 et 9 dans 4 des 36...

La mutualisation doit aider les élèves à se convaincre que la somme 7 est celle qui a le plus de raisons d'apparaître et à justifier ce fait.

Le professeur peut aussi revenir sur l'importance de savoir organiser la collecte des données lorsque l'on effectue un relevé, tant pour la clarté de l'information que pour l'exploitation des données.

Troisième phase : institutionnalisation

Cette activité peut être l'occasion de mettre en place le vocabulaire sur les probabilités : expérience aléatoire, issues, événements, événement impossible, probabilité d'un événement, événements équiprobables ou non équiprobables.

On peut définir ce qu'est une issue, constater qu'il y en a 36, ce qui *a priori* n'est pas évident pour beaucoup d'élèves. Ils proposent 11 issues (nombre de sommes réalisables) ou 12 issues (nombre de faces de deux dés).

* Sur chaque dé il y a une chance sur 6 d'avoir deux dés il y a une chance sur 12 pour que il y a deux nombres qui tombent .

Il est possible de mettre en place la distinction entre événement et issue. L'événement « obtenir 7 comme somme de deux dés » est réalisé par six issues. L'événement « obtenir 6 comme somme de

deux dés » est réalisé par cinq issues, etc.

On peut institutionnaliser : la probabilité de l'évènement « obtenir 7 comme somme de deux dés » est le nombre $\frac{6}{36}$, etc. La loi de probabilité peut être ainsi définie. Les évènements n'ayant pas la même probabilité d'être réalisés, ils ne sont pas équiprobables.

Il est intéressant ensuite de revenir sur les paris faits en début d'activité et sur leurs justifications ; c'est l'occasion de débattre avec les élèves de la notion de hasard.

L'expérimentation permet de montrer que ce n'est pas parce que le 7 est la somme la plus probable qu'elle apparaît le plus souvent sur un petit nombre de lancers. Cependant les élèves constatent que, plus le nombre de lancers augmente, plus la fréquence d'apparition des sommes ayant les plus faibles probabilités diminue mais « toute issue reste possible ».

Grâce aux mathématiques, il est possible d'étudier le hasard : on peut faire la liste des issues possibles, leur attribuer une probabilité, avoir un regard critique sur une situation, sans pour autant pouvoir prédire quoi que ce soit.

Réflexion, prolongement

Cette activité peut être prolongée par l'une des situations suivantes : la différence de deux dés, la somme de trois dés. Ces situations peuvent être traitées sous la forme d'une narration de recherche à effectuer à la maison, par exemple.

La question de la différenciation des deux dés peut se poser : faut-il ou non donner des dés de couleurs différentes, des dés de tailles différentes ? L'introduction de dés de tailles différentes est plus problématique, les élèves risquent ne pas être tous convaincus que ces deux dés suivent la même loi de probabilité.

Le lancer de dé étant une situation familière pour les élèves, le débat autour du choix du protocole de lancer n'a pas été soulevé, il nous semble donc important de proposer ensuite une autre activité où le problème se pose (exemple : lancer de pièce).

Annexe 1

Fiche élève

Règle du jeu

On lance deux dés. On calcule la somme des deux nombres des faces du dessus. On continue de lancer les dés jusqu'à ce qu'une des sommes soit apparue 20 fois.

1) Le pari

Nous parions sur la somme :

Pourquoi ?

.....
.....
.....

2) À vous de jouer

Vous avez 30 minutes pour jouer autant de parties que vous voulez. Une partie s'arrête dès qu'une même somme est sortie 20 fois, même si ce n'est pas votre pari.

Pour chaque partie, il faudra donner les deux informations suivantes :

la somme qui est apparue 20 fois est

le nombre total de lancers est

Cadre pour écrire

ANNEXE 2

Partie n°

Tableau des résultats

2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				

La somme qui est apparue 20 fois dans votre partie est : ...

Le nombre total de lancers est de :

Partie n°

Tableau des résultats

2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				

La somme qui est apparue 20 fois dans votre partie est : ...

Le nombre total de lancers est de :