

Activités « BIBERON »

Jean-Claude FENICE, IREM de Reims – Dominique POIRET, IREM d'Orléans

Présentation

Cette situation⁶² sert de support à deux séances distinctes.

La première est une introduction à la notion d'expérience aléatoire, et permet d'institutionnaliser le vocabulaire associé.

La seconde se situe à la fin de l'étude du thème ; elle donne l'occasion de mettre en œuvre une démarche expérimentale s'appuyant sur une étude statistique pour conjecturer la composition d'un biberon contenant des billes de différentes couleurs.

Les expérimentations de ces activités ont été effectuées dans plusieurs classes de l'académie d'Orléans-Tours, dans le cadre d'une recherche IREM.

Objectifs

Activité 1 : amener les élèves à se questionner par rapport à une situation où intervient le hasard. À travers ce questionnement, faire émerger le vocabulaire spécifique : expérience aléatoire, liste des résultats possibles (issues).

Activité 2 : placer les élèves en situation de résolution de problème, où ils doivent conjecturer la composition d'un biberon (opaque) contenant des billes de couleurs différentes, en choisissant un outil mathématique adapté.

Prérequis

Première séance : aucun.

Seconde séance : avoir réactivé la notion de fréquence ; avoir constaté la stabilisation de la fréquence d'apparition d'une issue vers la fréquence théorique connue, après un grand nombre d'expériences (voir par exemple, dans cette brochure, les deux premières activités dans « Lancer d'une pièce, d'un osselet » de Vincent PAILLET, Georges PONS, Christian JUDAS, et « Le sac de bonbons » du Groupe Collège IREM de Lyon, qui peuvent utilement précéder celle-ci).

Matériel envisagé

- Biberons opaques numérotés à tétine transparente incolore (flacons de lait ou de crème liquide, en aménageant dans le bouchon vissant une ouverture circulaire permettant de passer la tétine).
- Billes en terre, de couleurs différentes (10 par biberon). On peut en trouver par exemple sur le site « bille en brousse » <http://billebrousse.com/> (on peut également utiliser des boules « cotillon » : la manipulation est plus silencieuse).

Pour l'activité 1, la composition des biberons varie de 3 à 5 couleurs différentes ; pour l'activité 2, on a fait le choix d'une composition unique de 2 couleurs seulement (6 billes d'une couleur, 4 d'une autre).

⁶² Inspirée de la situation dite « de la bouteille », expérimentée par Guy Brousseau à l'école élémentaire. Voir bibliographie.



Scénario

Activité 1

Élèves répartis en groupes de deux, un biberon par groupe. La composition des biberons varie de 3 à 5 couleurs différentes, avec 10 billes dans chaque.

« Voici un biberon ; vous n'avez pas le droit de l'ouvrir. Quelles questions pouvez-vous vous poser ? Écrivez-les, puis essayez d'y répondre ».

On laisse environ 15 min de temps de manipulation, puis vient le questionnement ; on fait ensuite un bilan.

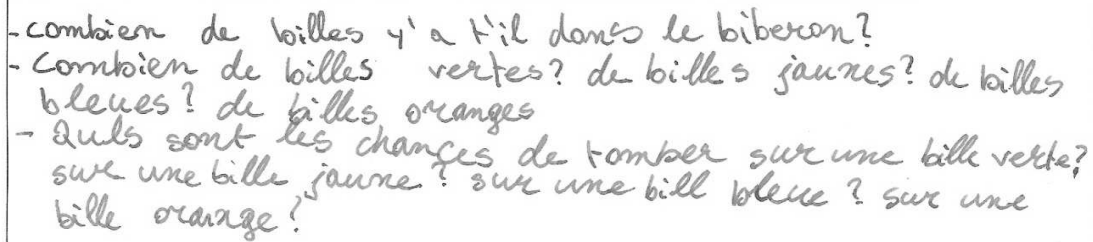
1. Le professeur liste au tableau les questions écrites par les élèves.
2. Il anime ensuite le débat des élèves autour des réponses apportées.

L'enseignant fait formuler une synthèse aux élèves, comportant au moins le vocabulaire : *expérience aléatoire, issue, évènement*.

Exemples de questions produites par les élèves (et leurs réponses en italique) :

- Que contient le biberon ? *Des billes (et peut-être autre chose...)*
- Combien pèsent les biberons ?
- Quel est le volume de la bouteille ? *(25 cL ; 250 mL)*
- Quel est le volume d'une bille ? *(environ 1 cm³)*
- Combien de billes ? *(On ne peut pas le savoir sans ouvrir la bouteille ; environ 10 ; environ 15.)*
- Quelle place prennent-elles dans la bouteille ? *(environ 1/3)*
- De quelles couleurs sont les billes ? *(rouge, bleu, jaune et vert)*
- Combien y a-t-il de couleurs différentes ? *(5 couleurs ; 3 couleurs ; au moins 3 : bleu, jaune, orange ; 4 couleurs)*
- Est-ce possible qu'il y ait deux billes de la même couleur ?
- Peut-on prévoir la couleur qui va sortir ?
- Combien de chances avons-nous d'avoir une bille orange dans la tétine ? *(33 %⁶³)*
- Est-ce que à chaque fois la couleur change ?
- Est-on certain d'avoir observé toute les couleurs des billes de la bouteille ?
- ...

⁶³ Il y avait 3 couleurs dans ce biberon, d'après cet élève.

- 
- combien de billes y'a t'il dans le biberon?
 - Combien de billes vertes? de billes jaunes? de billes bleues? de billes oranges
 - Quels sont les chances de tomber sur une bille verte? sur une bille jaune? sur une bille bleue? sur une bille orange?

Remarque : on peut noter une différence de nature de ces réponses avec celles obtenues dans un collège de secteur ZEP.

- Qu'y a-t-il dans le biberon ? (*Des billes « en terre ».*)
- Pourquoi ne peut-on pas l'ouvrir ? (*Car je vous le demande et aussi pour la surprise.*)
- Pourquoi vous nous avez donné un biberon ? (*Aucune réponse.*)
- De quelles couleurs sont les billes ? (*Il y a en des rouges, des jaunes et des bleues.*)
- Est-ce des bonbons ? (*Non.*)
- Pourquoi est-ce mouillé ? (*On ne sait pas.*)
- À quoi servent les trucs à l'intérieur ? (*On ne sait pas.*)
- À quoi cela va-t-il servir ? (*À étudier une nouvelle notion.*)
- Que va-t-on faire avec ? (*On ne sait pas ; sûrement une expérience.*)
- Quelle forme ça a ? (*On ne sait pas.*)
- Est-ce dur ou mou ? (*Dur.*)
- Y a-t-il une odeur ? (*On ne sait pas.*)
- Pourquoi cela fait du bruit ? (*Les billes s'entrechoquent.*)
- Que peut-il nous apprendre ? (*On ne sait pas.*)
- Combien pèsent les biberons ? (*On ne sait pas.*)
- Pourquoi les billes sont-elles vertes ? (*On ne sait pas.*)
- Qui l'a bu ? (*Sûrement vous mais on ne sait pas.*)
- Pourquoi n'est-ce pas un biberon transparent ? (*On ne sait pas.*)
- Combien de billes y-a-t-il ? (*On ne sait pas.*)
- Est-ce comestible ? (*Non.*)

Les questions sont plus pragmatiques, moins orientées « scolairement » que celles des élèves précédents, qui placent presque tous d'emblée le questionnement dans le contexte d'une expérimentation orientée vers un savoir mathématique.

Quelques pistes pour le débat.

- Amener les élèves à distinguer, parmi les questions de la classe, celles qui relèvent de l'aléatoire et les autres : pour cela, on peut exploiter les réponses en faisant débattre celles pour lesquelles on « peut être sûr », et **comment**.

Quelques exemples.

- Est-on certain d'avoir observé toutes les couleurs des billes de la bouteille ? *Les amener à exprimer qu'on ne peut pas en être sûr ; mais qu'il faut renouveler la « manipulation » dans des conditions identiques, si on veut que chaque bille ait « la même chance » de sortir (certaines façons de (peu) pencher la bouteille, sans l'agiter, permettent de sortir plusieurs fois de suite la même bille !). Faire alors décrire précisément cette manipulation (i.e. définir un protocole d'expérimentation) : « bien remuer la bouteille, la retourner, et faire apparaître une bille ; noter sa couleur » ; le*

mot expérience peut déjà être proposé par des élèves ; sinon, le professeur l'introduira à la fin du débat.

○ Peut-on prévoir la couleur qui va sortir ? *Non ; on ne voit pas a priori de méthode pour le savoir... On parlera d'expérience aléatoire pour exprimer que le résultat n'est pas toujours le même, bien que l'expérience soit réalisée dans les mêmes conditions. On peut alors mettre en parallèle l'utilisation du mot « expérience » dans la situation « mettre des glaçons dans un bol d'eau », où le résultat est toujours le même, lors des renouvellements de l'expérience. Faire donner d'autres exemples d'expériences aléatoires par les élèves.*

- Traiter les questions de nature non aléatoire, toujours dans le respect de la règle « ne pas ouvrir le biberon », soit en faisant expliciter une manière d'y répondre (par exemple : pour la masse du biberon, une pesée suffit), soit en les « mettant de côté pour plus tard » (masse ou volume d'une bille et composition du biberon qui exigent d'ouvrir le biberon).

Synthèse écrite dans le cahier de cours :

Définitions

Une *expérience aléatoire* est une expérience, qui, quand on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas toujours le même résultat.

Les résultats que l'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelés les *issues* de l'expérience.

Chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

Exemples

« On retourne le biberon et on note la couleur de la bille obtenue ». Les issues sont les différentes couleurs des billes du biberon.

« On lance une pièce de monnaie, et on regarde sur quelle face elle tombe ». Pile et Face sont les issues de cette expérience.

Etc.

Remarque : on peut, à partir de cette synthèse, prolonger le questionnement pour aboutir à la notion d'évènement lié à cette expérience aléatoire, ou la réserver pour une autre activité.

Activité 2

Les élèves sont groupés par deux (un expérimentateur, un secrétaire). On leur distribue un biberon numéroté.

« Ce biberon contient 10 billes de couleur. Vous n'avez pas le droit de l'ouvrir. Vous devez en trouver la composition et décrire votre démarche ».

Démarche attendue

On attend que les élèves fassent intuitivement une analogie entre le *cadre probabiliste* (théorique : connaissant la composition du biberon contenant n billes on peut calculer la probabilité de sortie d'une couleur) et le *cadre expérimental* (statistique) où on infère que les fréquences d'apparition des couleurs (sur un grand nombre de tirages) permettent d'estimer la composition du biberon (raisonnement abductif : « une fréquence d'apparition des billes bleues « se rapprochant » de 0,3 peut être due à une composition de 3 billes bleues sur 10 dans le biberon »). Cette

composition estimée pourra ensuite être validée ou invalidée après ouverture du biberon.

Temps alloué : 30 min.

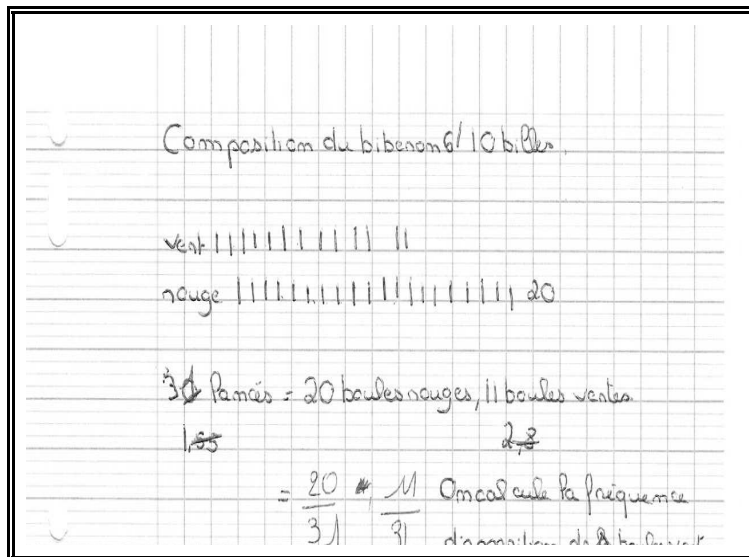
Déroulement

Le professeur distribue les biberons. Rapidement, dans chaque binôme, un élève manipule (selon le protocole établi séance 1), le second note les issues. À la fin de l'expérimentation, le professeur propose une mise en commun.

Certains binômes ont posé la question : « combien de fois on fait l'expérience ? ».

Le professeur : « c'est à vous de décider... ».

Presque tous les binômes ont produit un échantillon unique de taille variant entre 30 et 120 expériences à partir de laquelle ils ont calculé la fréquence d'apparition des différentes couleurs. Selon les cas, elle a été dénommée fréquence, pourcentage, voire probabilité et a été utilisée ou non, pour inférer la composition du biberon :



Ici, le binôme s'est limité à l'expression de la fréquence en pourcentage.

Il y a plus de billes vertes que sur des jaunes. Il y a plus de billes vertes.

Il y a au moins 2 billes jaunes.

Sur 10 lancers :

V . V . V . J . V . J . J . V . V . V = 7V 3J Prob = 0,7V 0,3J

Sur 20 lancers :

V . V . V . V . V . J . V . V . J . J . J . J . J . V . V . V . J . V . V . V

^{12V 8J} Prob = 0,6V 0,4J

Sur 30 lancers :

J . J . J . V . J . V . V . V . V . V . V . J . J . V . V . J . V . V . V . V . V . V

- V . V . J . J . J . V . V . V

20V 10J Prob = 0,4V 0,6J

Ce binôme assimile la fréquence d'apparition avec sa probabilité... et n'en déduit pas une possible composition du biberon.

Deux binômes ont effectué d'abord un petit nombre de tirages, puis ont augmenté la taille de leur échantillon.

Deux binômes ont produit deux échantillons successifs de 100 tirages, le second infirmant (binôme « Clara ») ou confirmant (binôme « Arlette », voir plus loin) la conclusion du premier.

Clara

Bouteille n°2

2 couleurs → orange et vert

10 bifts

O - V - O - O - V - O - V - V - O - V - V - V - V - V

O - O - O - V - V - V - O - V - O - O - V - V - V - O - V

V - O - V - O - V - O - O - O - O - V - O - O - O - O

O - O - O - O - V - V - V - V - V - V - O - O - V - O - V

V - V - V - O - O - O - V - V - O - V - O - V - O - O

O - O³³ - V - O - O - O - V - O - V - V - O - O - V - O -

V - O - O - O - V - V - O - O - O - V - V - O - V - V

V

O = $\frac{51}{100}$ V = $\frac{49}{100}$

0,51 0,49

O - O - O - O - V - O - V - O - V - V - O - O - O -

V - V - V - V - O - O - O - O - O - O - O - O -

O - O - O - O - O - O - V - O - V - V - O - V - V

V - O - V - V - O - O - V - V - O - O - O - V - O

V - V - O - O - O - O - O - O - V - O - V - O - O - O

V - V - O - O - O - V - O - O - O - O - O - V - O

V - V - O - O - O - O - V - O - O - O - O - V - O -

O - O - O

V = $\frac{31}{100}$ O = $\frac{69}{100}$

0,31 0,69

Pour tous les binômes, le raisonnement a effectivement suivi la démarche explicitée ci-dessus, mais le passage de la fréquence observée à la composition du biberon n'est pas toujours explicité.

- Démarche 3 : la taille de l'échantillon n'est pas fixée *a priori*, mais les fréquences calculées sont « vérifiées » sur de nouveaux échantillons (de taille croissante (Jeanne), constante (Clara ; Arlette), voire décroissante (Cynthia) !)

Jeanne

Remarques : on tombe le plus souvent sur des billes vertes.
Il y a au moins 1 bille rouge.

Sur 10 lancers
V-V-V-V-V-V-V-V-V-V $H=1$ la possibilité d'avoir des verts

Sur 20 lancers :
V-R-V-V-R-R-R-V-R-R-~~R~~ $1/20 = 0,05$ c'est la possibilité d'avoir des verts.
R-V-V-V-V-V-R-R-V-V $8/20 = 0,4$ c'est la possibilité d'avoir des rouges.

Sur 30 lancers :
V-R-V-R-V-V-R-R-R-V $16/30 = 0,53$ la possibilité d'avoir des verts
V-V-V-V-R-V-R-R-V-V $14/30 = 0,47$ la possibilité d'avoir des rouges

Clara et Arlette

Il y a des billes vertes et blanches.

10 lancers :
V . B . V . V . V . B . V . V . V . B $V=7=0,7$
 $B=3=0,3$

100
B . B . B . V . B . B . B . V . B . B
V . B . V . V . B . V . V . B . V . V
V . V . B . B . V . V . V . V . V . B
V . V . B . V . V . V . V . V . B . V
V . V . V . V . B . V . V . B . V
B . B . V . V . B . V . V . B . V . V
V . V . V . V . V . V . V . V . V . V
B . B . B . B . V . V . V . V . V . V
V . V . B . V . B . B . V . V . V . V
V . B . V . V . V . B . V . V . V . V

$V=69=0,69$
 $B=31=0,31$

Donc il y a 7 vertes et 3 blanches.
On a calculé la fréquence.

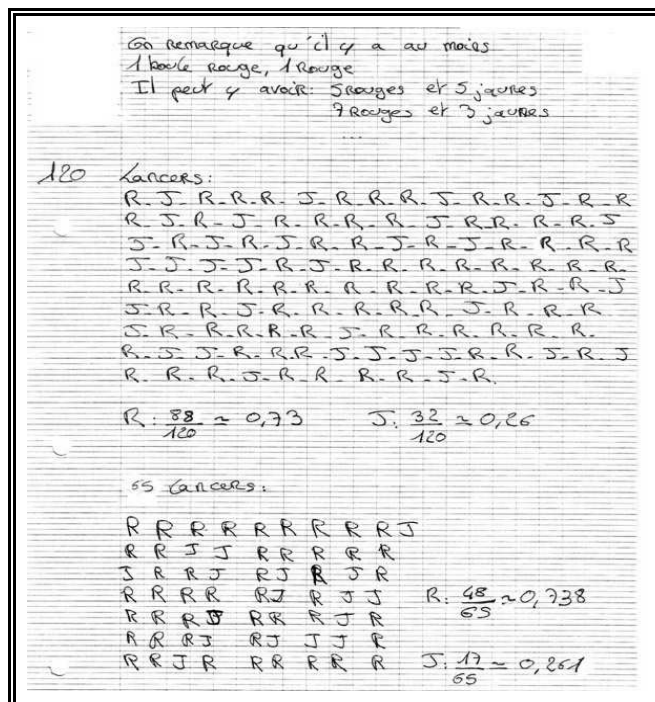
On refait 100 lancers :

B . B . V . V . B . V . V . V . B . V
V . V . V . V . V . V . V . B . B . B
V . V . V . V . B . V . B . V . B . B
B . V . V . V . B . V . V . V . V . V
B . V . B . V . V . V . B . B . V . V
V . B . V . V . B . V . V . V . V . V
V . V . V . V . V . V . V . B . B . B
V . V . V . V . B . B . V . B . V . V
B . B . V . V . V . V . V . V . V . V
B . V . V . V . V . V . V . V . V . V

$B=25=0,25$ On refait la fréquence.
 $V=75=0,75$

3 blanches & 7 vertes.

Cynthia



Synthèse écrite dans le cahier de cours

En répétant plusieurs fois cette expérience aléatoire, on a calculé la fréquence des évènements suivants : obtenir une boule verte ; obtenir une boule jaune.

Par exemple (binôme 1) :

<i>Sur 115 tirages</i>	<i>Observer une boule verte</i>	<i>Observer une boule jaune</i>
<i>Fréquence</i>	<i>0,57</i>	<i>0,44</i>

On a vu précédemment que, lorsqu'on répétait un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'un résultat se stabilisait autour d'un nombre qu'on appelle « probabilité de ce résultat ». On en déduit que 0,57 devrait être proche de la probabilité d' « observer une boule verte ».

D'où $0,57 \approx (\text{nombre de boules vertes})/10$.

Donc : nombre de boules vertes $\approx 5,7$.

Le biberon contient alors peut-être 6 boules vertes, et 4 boules jaunes.

Pour vérifier, on ouvre le biberon...

Prolongement possible : provoquer un questionnement des élèves autour des compositions éventuellement différentes trouvées dans les différents binômes et de la plus ou moins « bonne approche » de cette composition.

Notes diverses :

Activité présentée et expérimentée par l'IREM d'Orléans de 2008 à 2010.

Bibliographie :

Brousseau G & N, Ginger W, « Une expérience de premier enseignement des statistiques et de probabilités », article publié en anglais dans *The journal of mathematical behavior of children*, 2001.

DUCEL Yves et SAUSSEREAU Bruno, « Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en troisième ? », Repères IREM n°77, p. 53-65, octobre 2009.