Le dernier est-il désavantagé ?

D'après une activité du même nom trouvée sur le site Statistix

Nathalie BEN MOUSSA et Fabienne LANATA, IREM de Rouen

Présentation

Une activité à faire sur une séance, simple et ludique, qui permet une première approche des probabilités par la notion de « chance » en brisant des idées reçues et pour laquelle l'arbre des choix est introduit pour modéliser la situation.

Les réactions des élèves face à la question posée dépendent énormément du degré de socialisation du public, ce qui rend cette activité plus pertinente en ZEP.

Objectifs

- Apprendre aux élèves à prendre du recul par rapport à une situation en passant d'une réaction affective à une réflexion objective.
- Confronter les élèves à une situation où l'intuition risque d'être contraire à la vérité.
- Montrer que les mathématiques sont un moyen non pas de prédire mais de prévoir un résultat.
- Introduire l'outil « arbre de choix ».

Prérequis

Aucun.

Matériel

- Transparents et feutres pour transparents.
- Rétroprojecteur.
- Éventuellement enveloppes et billets factices.

Scénario

Trois enveloppes identiques et opaques sont mises à disposition de trois personnes.
L'une de ces enveloppes contient un billet de 100 €, une autre un billet de 20 € et la troisième un billet de 5 €.
Une première personne choisit une enveloppe, la seconde en prend une parmi les deux restantes et la troisième personne ouvre la dernière enveloppe.

La troisième personne est-elle désavantagée ?

1er temps : individuel pendant 5 min.
2nd temps : par groupes de quatre pendant 15 à 20 min.
Vous répondrez à la question sur un transparent en justifiant et exposant vos arguments.
Ce transparent vous servira de support pour votre présentation orale.

<u>Première phase</u> : 5 min

Un premier temps est laissé en travail individuel pour que chaque élève s'approprie l'énoncé sans se faire influencer par ses camarades.

<u>Deuxième phase</u> : 15 à 20 min

Dans un deuxième temps, une mise en groupes de 3 à 4 personnes est organisée pour qu'un échange de points de vue puisse se faire ainsi que la production finale d'un transparent.

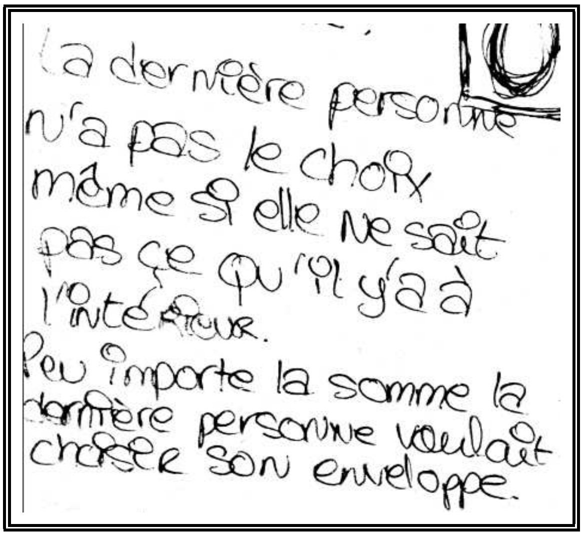
Une liberté d'approche est laissée aux groupes.

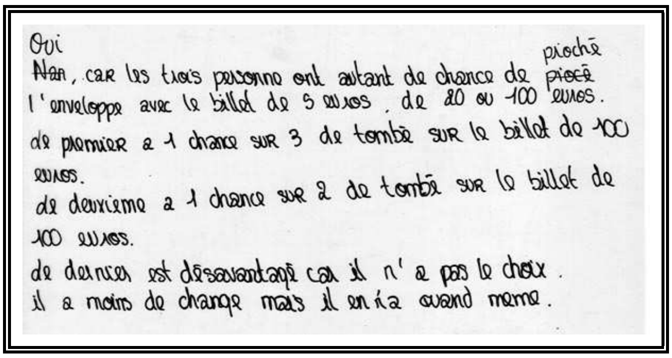
Les élèves peuvent expérimenter et simuler la situation ; ils ont éventuellement à leur disposition des enveloppes et billets factices.

Il est à remarquer que l'énoncé du sujet prête à une certaine ambivalence : par rapport à quoi est-on désavantagé ? Par rapport au choix ou par rapport au gain ?

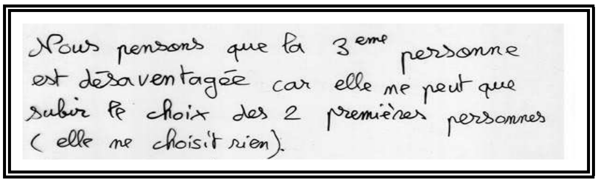
Pour certains élèves, l'avantage porte sur le montant du gain du troisième joueur ; c'est le problème mathématique attendu par le professeur.

Pour d'autres, l'avantage est d'avoir ou non le choix de l'enveloppe sans se préoccuper de son contenu. Le désavantage se porte alors sur le fait que leur choix est non exaucé, quelque soit le gain. Dans ce cas, le « problème » est purement affectif. La réponse est d'ordre subjectif et constitue un obstacle à la réflexion mathématique, comme par exemple dans les travaux élèves ci-dessous.

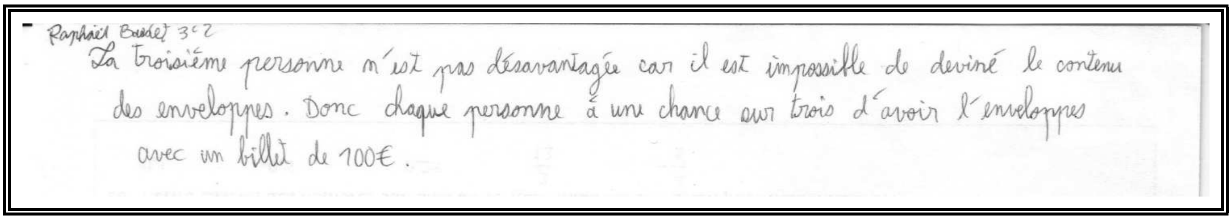

La dernière personne n'a pas le choix même si elle ne sait pas ce qu'il y'a à l'intérieur.
Peu importe la somme la dernière personne voulait choisir son enveloppe.


Oui
~~Non~~, car les trois personne ont autant de chance de piochè l'enveloppe avec le billet de 5 euros, de 20 ou 100 euros.
Le premier a 1 chance sur 3 de tombè sur le billet de 100 euros.
Le deuxieme a 1 chance sur 2 de tombè sur le billet de 100 euros.
Le dernier est désavantagè car il n'a pas le choix.
il a moins de change mais il en n'a quand meme.

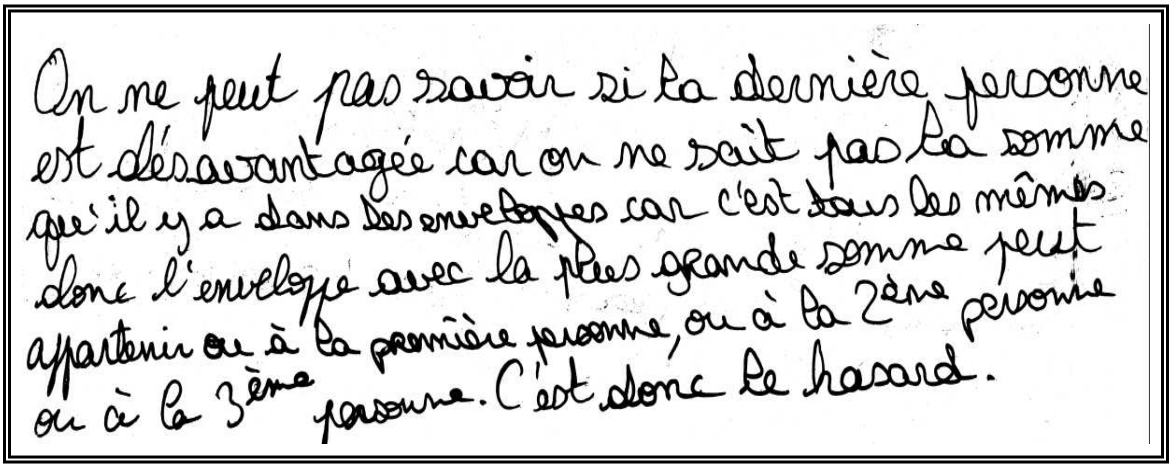
Le rôle de l'enseignant, en passant d'un groupe à l'autre, sera alors de faire émerger la distinction entre subjectivité et objectivité : la question pertinente à se poser est de savoir si le dernier à choisir l'enveloppe aura moins de « chance » d'avoir un gain important que le premier à avoir choisi. Dans ce cas, on gomme la volonté initiale des joueurs. Pour certains élèves, ne pas avoir le choix de l’enveloppe revient à subir une contrainte, ce qui, à leurs yeux, est difficile à accepter ; c'est une frustration insupportable. Dans ce cas, l'objectif : « apprendre aux élèves à prendre du recul par rapport à une situation en passant d’une réaction affective à une réflexion objective » prend tout son sens et peut, selon le public et le stade de développement des élèves, s’avérer un réel saut sociocognitif.


Nous pensons que la 3ème personne est désaventagée car elle ne peut que subir le choix des 2 premières personnes (elle ne choisit rien).

Ayant testé cette activité dans un établissement dit « facile », nous avons constaté que cet obstacle était déjà franchi par la quasi-totalité des élèves.


Raphaël Budet 3e2
La troisième personne n'est pas désavantagée car il est impossible de deviné le contenu des enveloppes. Donc chaque personne à une chance sur trois d'avoir l'enveloppes avec un billet de 100€.

Dans certains groupes, la réflexion se heurte rapidement à : « C’est le hasard, on ne peut rien dire ».


On ne peut pas savoir si la dernière personne est désavantagée car on ne sait pas la somme qu'il y a dans les enveloppes car c'est tous les mêmes donc l'enveloppe avec la plus grande somme peut appartenir ou à la première personne, ou à la 2ème personne ou à la 3ème personne. C'est donc le hasard.

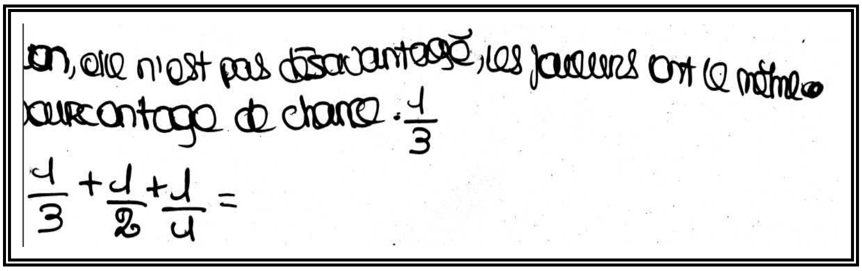
L’enseignant sera alors amené à relancer le groupe en question de la façon suivante : « Il est faux de penser que l’on ne peut rien dire. Même si c’est le hasard et que l’on ne peut pas savoir qui va gagner les 100 €, on peut tout de même savoir si l’un des joueurs est désavantagé. »

Troisième phase : 20 min

Chaque groupe présente son transparent à la classe et un débat s'ensuit. Un examen critique des procédures proposées a lieu.

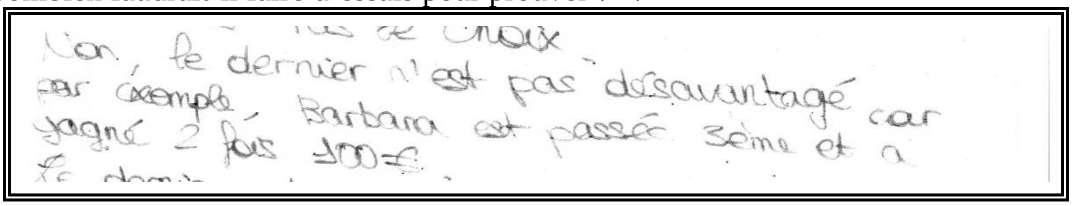
Voici quelques types de réponses.

- Les élèves vont parler de « 1 chance sur 3 pour le 1er joueur, 1 chance sur 2 pour le 2e joueur et 1 chance sur 1 pour le dernier » par analogie à « 1 choix sur 3, 1 choix sur 2 et 1 choix sur 1 ! » Ceci peut entraîner des écritures du type : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\cdots$ et le débat sur la somme attendue peut être houleux dans les groupes. Dans l'exemple ci-dessous, les élèves ont bien conscience que le raisonnement qu'ils traduisent par $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$ se heurte au résultat de ce calcul. Pour que leur raisonnement soit cohérent, ils souhaitaient 1 comme réponse.

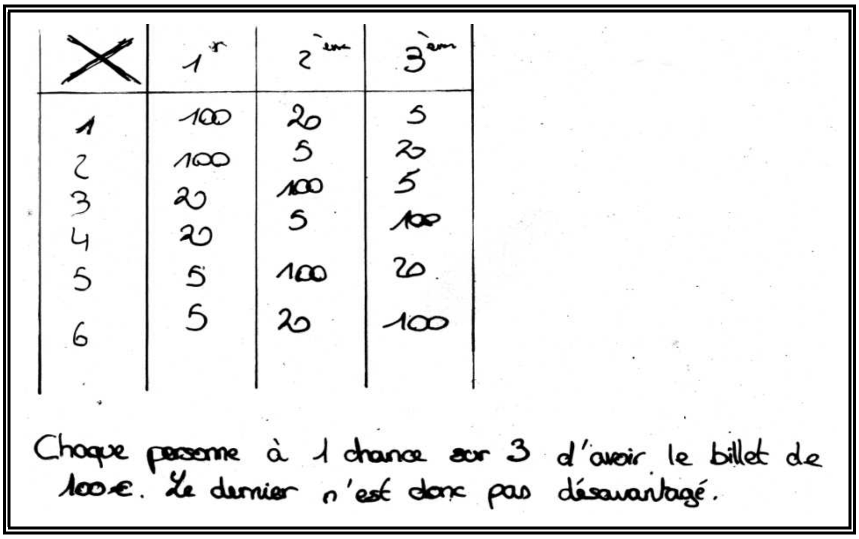

on, elle n'est pas désavantagé, les joueurs ont le même pourcentage de chance : $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=$

- Après deux expérimentations où le troisième a gagné 100 euros deux fois, ils pensent que le troisième est avantagé. La question se pose alors dans la classe : « Est-ce une preuve ? Combien faudrait-il faire d'essais pour prouver ? ».


Non, le dernier n'est pas désavantagé car par exemple, Barbara est passé 3ème et a gagné 2 fois 100 €.

- Certains élèves arrivent à s'organiser et réalisent d'eux-mêmes un tableau.



X	1er	2ème	3ème
1	100	20	5
2	100	5	20
3	20	100	5
4	20	5	100
5	5	100	20
6	5	20	100

Chaque personne à 1 chance sur 3 d'avoir le billet de 100 €. Le dernier n'est donc pas désavantagé.

L'enseignant veillera à l'ordre dans lequel il fait intervenir les groupes : du transparent le moins pertinent à celui qui est le plus riche et plus complet à la fin.

Parmi les procédures présentées, celle consistant à lister les triplets ordonnés (5 ; 20 ; 100) permet d'être sûr que tous les cas ont été envisagés puis de convaincre que chacune des occurrences a autant de chance de se produire.

1er joueur	2e joueur	3e joueur
5	20	100
5	100	20
20	5	100
20	100	5
100	5	20
100	20	5

Le « 1 chance sur 3 » trouvé par les élèves est à exploiter : pour eux, est-ce une simplification de fraction $\frac{2}{6}$ ou bien est-ce un raisonnement à partir des trois colonnes identiques ?

Tout l'enjeu de l'enseignement des probabilités est de passer de la conception « 1 chance sur 3 de gagner » au concept « la probabilité de gagner est le nombre $\frac{1}{3}$ ».

Ce saut conceptuel est du même ordre que celui que celui que l'on trouve en géométrie : le cercle est d'abord, à l'école primaire, un « rond » obtenu par la trace d'un cylindre, puis une épure au compas et enfin, à partir du collège, un ensemble de points équidistants d'un même point.

Quatrième phase : 10 min

Dans nos expérimentations, cette phase a souvent eu lieu à la séance suivante.

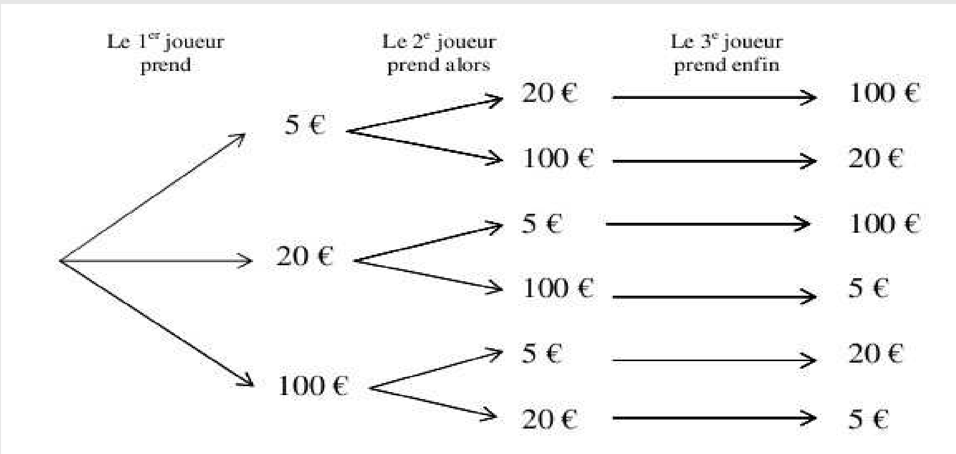
Phase d'institutionnalisation.

L'énoncé de l'activité est collé dans le cahier de leçon.

L'enseignant fera émerger le tableau listant les triplets s'il n'est pas apparu dans les transparents puis présentera une autre organisation du tableau avec l'arbre des choix.

Les élèves écriront dans leur cahier :

- L'intuition ne correspond pas toujours à la vérité. Les mathématiques sont un moyen de comprendre la réalité sans être trompé par des *a priori*...
- Les mathématiques ne vont pas permettre de « prédire » ce qui va se passer mais vont permettre de prévoir tous les possibles avec leur probabilité et donc de répondre de manière indiscutable à la question.
- Pour écrire toutes les possibilités d'une expérience on peut, soit lister tous les triplets, soit utiliser l'arbre comme outil :



Nous avons remarqué que l'arbre était mieux interprété si le tableau avait été écrit au préalable.

L’intérêt de l’arbre par rapport au tableau n’est pas évident pour la plupart des élèves. L’enseignant leur fera alors remarquer que, non seulement l’arbre liste tous les cas possibles, mais qu’il permet également de visualiser le fait que le premier joueur a trois choix, le deuxième deux choix et que le troisième n’a qu’une possibilité (ce qui est illustré par le nombre de flèches). De plus, l’arbre a l'avantage de mieux illustrer la chronologie du jeu.