Lancer d'une pièce, d'un osselet

Vincent PAILLET, IREM d'Orléans -
Christian JUDAS et Georges PONS, IREM des Pays de la Loire

Présentation

Cette activité est une introduction aux probabilités en classe de 3e, même s'il n'est pas inutile d'avoir fait émerger les représentations initiales des élèves auparavant.

Le nouveau programme de troisième[43] demande d'introduire la notion de probabilité par la dualité de ses approches : classique[44], valable uniquement dans les cas d'équirépartition, et fréquentiste.

Pour mettre en évidence les liens mais aussi les différences entre la probabilité et les fréquences observées lors d'une expérience aléatoire, il nous semble important de partir d'une situation suffisamment simple pour que les élèves aient une intuition de la probabilité : d'où l'idée du lancer d'une pièce.

Mais il fallait aussi trouver une situation motivante pour que les élèves proposent d'expérimenter en lançant la pièce. C'est ce qui nous a amené à faire le « détour » d'un questionnaire sur des expériences aléatoires de complexité croissante, la probabilité de la dernière ne pouvant pas *a priori* être calculée.

Le but de cette activité est donc de faire émerger le concept même de probabilité.

Objectifs

- Introduire la notion de probabilité.
- Mettre en place une expérience aléatoire.
- Montrer la nécessité de décider d'un protocole expérimental.
- Faire percevoir que la probabilité est parfois calculable *a priori* mais pas toujours.
- Faire percevoir le lien et les différences entre la probabilité et les fréquences observées lors d'une expérience aléatoire.
- Introduire un vocabulaire de base : issue, évènement, probabilité.

Prérequis

Savoir ce qu'est une fréquence.

Matériel envisagé

- Une pièce de 2 centimes par groupe de deux élèves (soit une quinzaine).
- Une quinzaine d'osselets.
- Une quinzaine de « pistes » pour lancer (couvercles de boîtes à chaussure, de boîtes de ramette de papier, tapis, etc.)
- Une quinzaine de gobelets pour secouer avant de lancer.

---

43 Bulletin Officiel du 28 août 2008 : http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html

44 Définition de Laplace : « La probabilité est le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles », Théorie analytique des probabilités, 1812.

- Une classe avec ordinateur et vidéoprojecteur.
- quelques dés au cas où.

Déroulement

Cette activité s'étale sur six à sept séances, mais la première séance n'occupe que peu de temps et ne monopolise pas toujours une heure de cours complète. Ce découpage est donc indicatif et toutes les parties ne sont pas forcément à faire à la suite les unes des autres.

<u>Première phase (10 minutes)</u>
Le professeur distribue le questionnaire 1 sur une feuille A4.

Les quatre énoncés sont progressifs. Si les trois premiers ne posent pas de problème, le quatrième, concernant des lancers d'osselets, doit amener à un blocage ou faire apparaître des contradictions lors du bilan.

Le professeur laisse suffisamment de temps (environ 10 min) pour que les élèves complètent <u>individuellement</u> leur questionnaire puis il les ramasse.

Questionnaire 1

Énoncé 1
Je jette une pièce de monnaie. Combien ai-je de chances d'avoir « pile » ?

Peux-tu répondre à la question posée ? Oui Non
Si oui réponds : ....
Si non pourquoi ? ....

Énoncé 2
Je lance un dé classique à six faces
1) Combien ai-je de chances d'avoir « 2 » ?
2) Combien ai-je de chances d'avoir un nombre pair ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? Oui Non
Si oui réponds : ....
Si non pourquoi ? ....

Peux-tu répondre à la question 2) ? Oui Non
Si oui réponds : ....
Si non pourquoi ? ....

Énoncé 3

Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges. Je tire une boule (sans regarder !)

1) Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?

2) Combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? Oui Non

Si oui réponds : ....

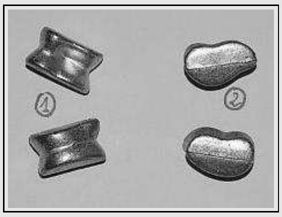
Si non pourquoi ? ....

Peux-tu répondre à la question 2) ? Oui Non

Si oui réponds : ....

Si non pourquoi ? ....

Énoncé 4



Je lance un osselet.

Combien ai-je de chances de le voir retomber position 1 (deux cas possibles) ?

Peux-tu répondre à la question ? Oui Non

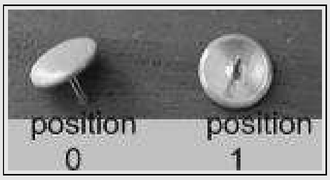
Si oui réponds : ....

Si non pourquoi ? ....

Il est possible de remplacer l'énoncé 4 par un autre de votre choix.

Par exemple :

Énoncé 4



Je lance une punaise.

Combien ai-je de chances que la punaise tombe sur sa tête (position 1) ?

Peux-tu répondre à la question ? Oui Non

Si oui réponds : ....

Si non pourquoi ? ....

Cependant le lancer des osselets nous semble plus approprié car des jeux liés au hasard leur ont été associés dès l'antiquité. De plus le fait que les différentes positions ne soient pas équiprobables semble rapidement évident pour les élèves même si cela n'enlève pas toutes les difficultés.

<u>Deuxième phase</u>

En fonction de ce qu'il a trouvé dans les questionnaires, le professeur réalise une présentation qu'il projette aux élèves avec comme consigne :

Voici les différentes réponses et justifications proposées par les élèves de la classe. Nous allons en débattre ensemble afin de voir celles qui nous paraissent acceptables et si oui ou non nous pouvons répondre à la question posée.

Exemple de résumé du questionnaire 1 réalisé à partir des réponses des élèves :

Énoncé 1
Je jette une pièce de monnaie. Combien ai-je de chances d'avoir « pile » ?
Peux-tu répondre à la question posée ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : Une chance sur deux ; $\frac{1}{2}$ = 1 chance sur 2 ; Une chance sur 2 car il y a deux côtés, deux faces
Si non pourquoi ? : ça dépend comment est lancé la pièce ; car la pièce est de même grandeur

Énoncé 2
Je lance un dé classique à six faces
1. Combien ai-je de chances d'avoir « 2 » ?
2. Combien ai-je de chances d'avoir un numéro pair ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : Une chance sur six ; $\frac{1}{6}$ = 1 chance sur 6 ; $\frac{1}{6}$
Si non pourquoi ? Il y a trop de nombres ; Car toutes les faces sont égales et tout dépend comment on le lance

Peux-tu répondre à la question 2) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : trois chances sur six ; $\frac{3}{6}$ = 3 chances sur 6 ; 1 chance sur 2 ; 1 chance sur 3 ; $\frac{1}{3}$
50 % de chance

Si non pourquoi ? C'est le hasard ; Car il y a autant de chance de faire un nombre impair 1, 3, 5

Énoncé 3
Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges . Je tire une boule (sans regarder !)
1. Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?
2. Combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 3 chances sur 7 ; $\frac{3}{7}$; une chance sur 3 ; une chance sur 7 ; 3 chances
Si non pourquoi ? Car c'est le hasard

Peux-tu répondre à la question 2) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 4 chances sur 7 ; $\frac{4}{7}$; une chance sur 4 ; une chance sur 7 ; 4 chance sur 3
Si non pourquoi ? Non mais il y aura plus de probabilité pour qu'on pioche une boule rouge car il y en a 4 pour 3 jaunes

Énoncé 4
Je lance un osselet.
Combien ai-je de chances de le voir retomber position 1 (deux cas possibles) ?

Questions : Peux-tu répondre à la question ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 2 chances sur 4 ; 1 chance sur 2 ; Il est plus grand que l'autre côté de l'osselet ; 2 chances ; $\frac{2}{4}$
Si non pourquoi ? On ne peut pas savoir ; car c'est le hasard ; car les côtés ne sont pas uniformes
Car les deux faces des positions n'ont pas la même grandeur de surface.
car ça doit dépendre de la façon dont il est lancé, mais je pense qu'il y a plus de chance de retomber en 1

Il ne nous semble pas souhaitable d'indiquer dans cette présentation le nombre d'élèves ayant proposé telle ou telle réponse afin de ne pas orienter le débat et pour que chaque réponse soit regardée sans *a priori* (c'est d'autant plus important pour l'énoncé 4).

Les trois premiers énoncés ne posent pas de problème et les élèves se mettent rapidement d'accord sur le fait qu'on peut y répondre et sur la ou les réponses à proposer. Il est néanmoins important de bien les traiter. En particulier les réponses du type « c'est le hasard » sont en général utilisées pour dire qu'on ne peut pas répondre aux questions. Le professeur doit faire ressortir que c'est justement le hasard des tirages qui implique les réponses comme « On a une chance sur deux d'avoir un nombre pair en lançant un dé » ou « on a trois chances sur sept de tirer une boule jaune dans l'urne ». Suivant les remarques des élèves on peut se poser des questions sur les conditions de réalisation des expériences afin de commencer à faire comprendre que les réponses n'ont de sens que si on se place dans des cas d'équiprobabilité. Il est cependant trop tôt pour introduire le concept de probabilité qui serait alors plaqué et ne prendrait sens que pour trop peu d'élèves. Les élèves saisissent très bien par exemple que si l'urne n'est pas opaque, on peut alors choisir sa boule et arriver à 100 % de chance de tirer celle que l'on souhaite. Le professeur peut faire le parallèle avec un bocal de bonbons. Si on regarde à l'intérieur, on prendra à coup sûr le parfum souhaité. On pourra préciser qu'il faut aussi qu'elles soient indiscernables au toucher. La discussion pourra alors remettre en cause le fait qu'on a « une chance sur deux d'obtenir « Pile » en lançant une pièce de monnaie » car les deux faces n'ont pas les mêmes motifs.

Pour l'énoncé 4, la plupart des élèves répondent « une chance sur deux », ce qui signifie pour eux qu'on est face à une expérience à deux issues possibles (position 1 ou position 2), dont une seule correspond à la position 1, sans se soucier de l'équiprobabilité de chaque issue. Ceux qui répondent deux chances sur quatre, font le même raisonnement en prenant pour issues les différentes faces de l'osselet. Le même type de raisonnement pourrait amener une personne à dire qu'on a une chance sur deux de rencontrer son meilleur ami en sortant se promener[45].
Il n'est donc pas étonnant que la classe souhaite conserver ces réponses dans un premier temps. Pour autant, les réponses du type « C'est le hasard », « On ne peut pas répondre car les côtés ne sont pas uniformes », « on ne peut pas répondre car les deux faces des positions n'ont pas la même surface », semblent aussi assez logiques aux élèves. Ces derniers tombent alors majoritairement d'accord sur le fait qu'on a plus de chance de retomber en position 1.

La question suivante peut alors être posée :

Quelles sont les caractéristiques communes aux trois premières situations, permettant de répondre aux questions ?

L'idée est de faire ressortir que, dans ces différents cas, les évènements élémentaires sont équiprobables[46] (on a autant de chance d'obtenir l'un ou l'autre de ces évènements élémentaires - le mot « équiprobable » n'est d'ailleurs pas d'un emploi obligatoire). Des élèves pourront néanmoins à nouveau faire remarquer que, pour la pièce, ce n'est pas évident car elle n'est pas gravée de la même manière de chaque côté et qu'il se peut aussi qu'on ait des tranches. Si ce n'est pas le cas il serait intéressant de soulever cette interrogation.

Se pose alors la question :

Que faire pour avoir quand même une idée de la chance d'être dans la position 1 en lançant un osselet ou pour savoir si on a réellement une chance sur deux d'obtenir Pile en lançant une pièce de monnaie ? Que proposez-vous ?

45 Voir ROSER Éric et SCHWARTZ Claudine, *L'esprit des probabilités de l'école au lycée*, Bulletin APMEP, n°484, septembre-octobre 2009, p.636.
46 À noter que pour l'urne il s'agit ici du fait que la probabilité de tirer une boule particulière parmi les 7 est égale à 1/7.

On peut s'attendre (et on espère !) à des réponses du genre :

- lancer une pièce ou un osselet *x* fois ;
- lancer jusqu'à ce qu'on voie quelque chose.

Si ce n'est pas le cas, ce sera au professeur d'amener à cette expérimentation.

Le professeur annonce donc l'expérimentation du lancer d'une pièce[47] (car on a une idée de ce qu'on cherche) et, dans un échange avec la classe, le protocole expérimental se construit. Il faut préciser :

• la nature de la pièce ;
• la façon de jeter ;
• la surface sur laquelle on jette ;
• les issues que l'on prend en compte (les élèves peuvent évoluer sur le fait de prendre en compte la tranche ou pas mais il n'y pas de raison particulière de rejeter ce cas dès le départ).

Ce travail pourra se faire à partir de la question : « *Je lance une pièce de monnaie. Quels sont les résultats possibles ?* »

Il nous paraît important de faire écrire le protocole expérimental. Celui-ci pourra permettre d'éliminer des résultats du type « La pièce ne retombe pas ».

Le professeur donne alors la consigne :

Il s'agit de faire le plus de lancers possibles d'une pièce par groupe de deux pendant dix minutes et de noter P pour « Pile », F pour « Face », A pour « autres ». Je vous demanderai à la fin le nombre de « Pile », le nombre de « Face », le nombre de « Autres » et le nombre total de lancers.

Des feuilles sont alors distribuées sur lesquelles seront notés les résultats.[48]

Au bout de dix minutes, les résultats sont recueillis dans une feuille de calcul projetée au tableau.

Dans un premier temps, le professeur demande aux élèves s'ils ont des commentaires à faire sur l'ensemble des résultats.

Si les commentaires ne vont pas dans ce sens, il pose le problème de comparer les résultats des différents binômes, l'objectif étant d'arriver au calcul des fréquences exprimées par des nombres décimaux. Pour y parvenir se posera le problème de supprimer la catégorie « Autre » si les élèves ne l'ont pas proposé avant. Cette étape est importante car nous passons ici de l'observation des résultats de l'expérience à l'étude d'un modèle « pseudo-concret »[49] dans lequel il ne reste que deux issues possibles. Il est important de noter que si l'on avait demandé à tous les élèves de lancer 50 fois par exemple, la question du calcul des fréquences pour comparer les résultats ne se serait pas posée. De plus, les nombres totaux de lancers restant assez proches les uns des autres, l'utilisation des fréquences pour comparer les résultats est valable, ce qui n'aurait pas été le cas si par exemple un groupe avait lancé 10 fois et un autre 5 000.

Dans la mesure où une feuille de calcul vidéoprojetée est utilisée, les élèves trouveraient certainement « abusif » que le professeur leur demande de calculer les fréquences « à la main »... Il semble plus judicieux de demander quelle est la formule à saisir pour calculer les fréquences et d'envoyer un ou plusieurs élèves le faire. Ce sera aussi l'occasion de rappeler comment copier une formule.

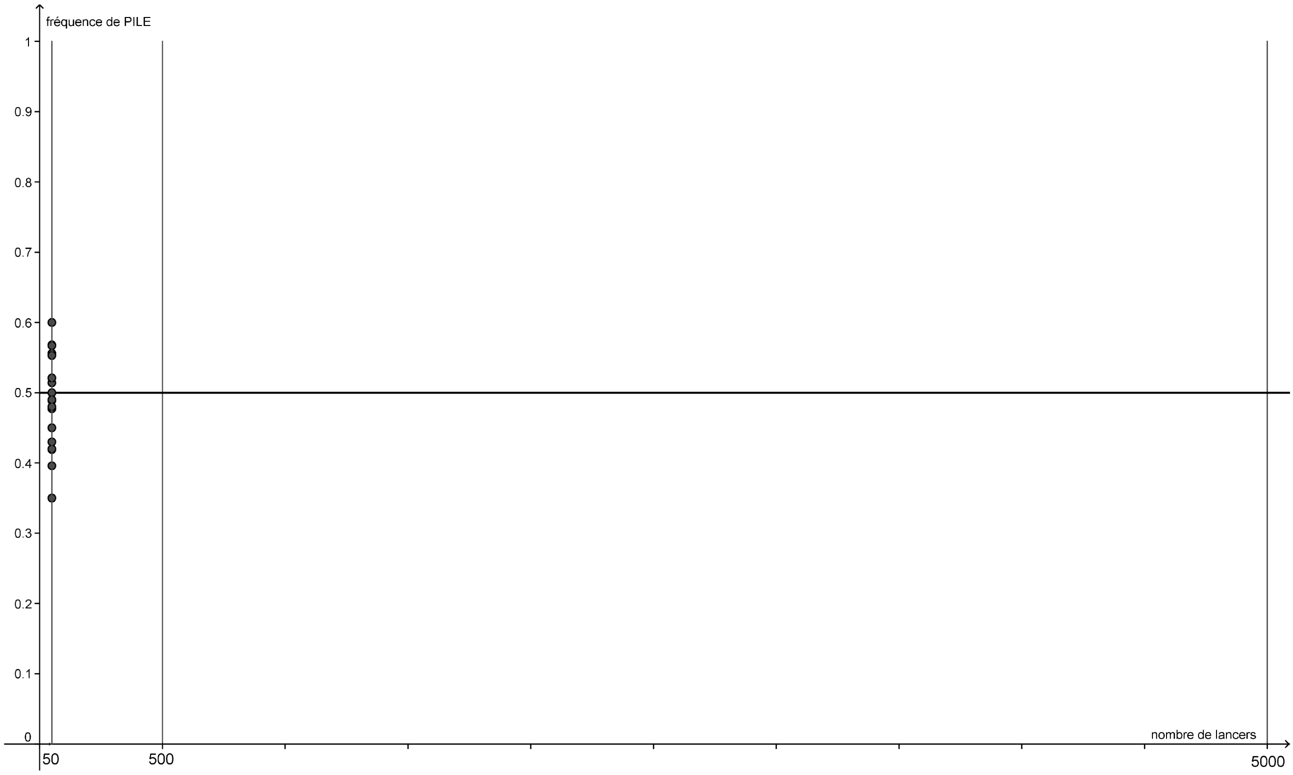
Le débat qui suivra doit mettre en évidence la différence des résultats entre les groupes. Des

47 Il se peut que la classe préfère lancer l'osselet. Dans ce cas il ne faut pas obligatoirement forcer les lancers de pièces.
48 Voir Annexe
49 HENRY Michel, *L'introduction des probabilités au Lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie*, dans Repères-IREM, n°36, p.26, juillet 1999.

remarques comme : « cela varie autour de 0,5 », peuvent apparaître. Il sera alors intéressant de calculer la moyenne et l'étendue[50] de la série de fréquences obtenue. C'est aussi l'occasion de faire remarquer que la somme des fréquences de « Pile » et de « Face » est toujours égale à 1, ce que les élèves pourront justifier. Ceci permet aussi d'expliquer que l'étendue des fréquences de « Pile » est égale à celle de « Face ».

Pour poursuivre la comparaison des différents groupes, le professeur propose, afin de calculer les fréquences, de prendre un même nombre de lancers pour tous les groupes (par exemple 50). Les élèves recomptent les 50 premiers lancers à partir de ceux qu'ils ont faits précédemment et la feuille de calcul est complétée.

Le professeur aura préparé un graphique vierge représentant la fréquence de « Pile » en fonction de la taille de l'échantillon, par exemple dans un fichier GeoGebra[51]. Les points correspondants à la fréquence de chaque groupe y sont placés.[52]



Les élèves disposent du même graphique sur papier. Ils y reportent les points obtenus. Ce graphique servira pour la suite de l'activité.

Le professeur sollicite les remarques des élèves sur le résultat global obtenu :

- différence des résultats pour les binômes ;
- centrage de l'ensemble des résultats autour de 0,5 ;
- existence ou non de résultats très différents ;
- ...

Il pose la question de ce que l'on pourrait faire pour avoir une idée plus précise de ce que l'on peut observer. L'idée est de se demander ce que l'on obtiendrait pour un nombre plus grand de

50 Cette dernière peut être introduite à ce moment précis. La médiane, si elle est connue, peut elle aussi être exprimée.
51 http://www.geogebra.org
52 Pour placer le point (50;0,45) il est préférable d'utiliser la barre de saisie du logiciel en entrant (50,0.45) plutôt que d'essayer de placer le point à la souris. Pensez aussi à décocher l'option « Étiquetage : automatique » pour lui préférer « Étiquetage : pas les nouveaux objets ».

lancers.

Deux options s'offrent alors :

- poursuivre les lancers à la main ;
- effectuer une simulation sur ordinateur en salle multimédia.

Troisième phase (option 1) : on poursuit les lancers à la main (à privilégier)

Les élèves complètent les feuilles de 500 lancers par groupes de deux.

On complète ensuite la feuille de calcul avec les valeurs de « Pile » et de « Face » pour 500 lancers. Les fréquences, les étendues et les moyennes sont calculées.

Les élèves complètent individuellement leur graphique et celui de la classe.

La question suivante est alors posée :

Que peut-on conclure à l'issue de ce travail ?

Un temps individuel de réflexion est laissé puis les élèves peuvent en discuter en groupe.

Troisième phase (option 2) : TP informatique en salle multimédia

Le professeur distribue la feuille de travail pour un TP en salle multimédia.

TP Informatique
À conserver ! Dans le tableur d'OpenOffice, **=ALEA.ENTRE.BORNES(valeur minimale;valeur maximale)** permet d'afficher de manière aléatoire et équiprobable (c'est-à-dire avec autant de chance d'obtenir l'un que l'autre) des nombres entiers compris entre la valeur minimale et la valeur maximale (comprises). **=NB.SI(Plage de données;valeur)** indique combien de fois on retrouve une valeur donnée dans une plage de cellules donnée. Rappel : La plage de cellules allant de A1 à A20 se note A1:A20 L'appui simultané des touches **MAJ+CTRL+F9** permet de réinitialiser l'affichage.
I. Comment utiliser la première fonction de l'encadré ci-dessus pour simuler un lancer de pièce ? Fais des essais et lève la main quand tu penses avoir la réponse. II. Fais apparaître 50 tirages. Utilise la deuxième fonction de l'encadré pour faire apparaître le nombre de tirages « Pile » et le nombre de tirage « Face ». Fais apparaitre ensuite la fréquence des tirages « Pile » et la fréquence des tirages « Face ». III. Effectue 6 séries de 50 tirages, en réinitialisant l'affichage à chaque fois, et note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

Séries de 50 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

IV. Fais apparaître 500 tirages, modifie les formules pour faire apparaître les fréquences et complète le tableau suivant :

Séries de 500 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

V. Fais apparaître 5000 tirages, modifie les formules pour faire apparaître les fréquences et complète le tableau suivant :

Séries de 5000 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

VI. Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?

Ce TP informatique est assez technique et les fonctions utilisées ne sont pas connues des élèves. Il peut donc être utile, après un temps court de recherche de la première question, et même si tous les élèves n'ont pas encore de réponse à proposer, de faire un point avec l'ensemble de la classe, de façon à ce que tous les élèves puissent débuter l'activité. La simulation d'une série de cinq lancers d'un dé[53] et le calcul de la fréquence d'apparition de « 2 » peuvent par exemple être présentés. Très peu d'élèves, voire aucun, connaissent la procédure permettant de réinitialiser les valeurs, leur tendance est plus de créer une nouvelle série de valeurs pour chaque série de tirages, il ne faut donc pas hésiter à présenter aussi cette fonctionnalité.

Pour la suite du travail, le professeur intervient éventuellement pour éviter les blocages liés à des problèmes techniques. Il peut être judicieux de bien indiquer quelles informations doivent être présentes sur la feuille de calcul. En particulier, l'élève doit-il créer de nouvelles formules pour 500 et 5000 tirages ou modifier les précédentes ?

Il est aussi important que le professeur veille à ce que les élèves aient bien complété leur graphique[54] avant de répondre à la dernière question.

Enfin, si des élèves ont fini le TP avant la fin de la séance, il peut leur être demandé de venir reporter sur le graphique vidéoprojeté commencé en classe leurs fréquences de « Pile ». Les autres valeurs pourront être entrées par le professeur à partir des feuilles des élèves.

Il est important de comprendre que, dans ce TP informatique, on n'observe plus des lancers de pièces réels mais ceux d'une pièce mathématique modélisée par le tableur possédant une probabilité 0,5 d'avoir « Pile » et une probabilité 0,5 d'avoir « Face ». On est déjà dans un modèle et non plus dans l'expérience. **De notre point de vue, l'option 1 est donc celle qu'il convient de privilégier.**

53 Petit rappel : La copie d'une formule peut se faire à la souris mais pour un grand nombre de cellules il est préférable de le faire au clavier. Pour cela : sélectionnez la cellule à copier (par exemple A1) et copiez-la. Sélectionnez ensuite les cellules cibles : allez pour cela dans la zone de nom et entrez par exemple A2:A5000. Collez ensuite la cellule que vous avez copiée. Pour ce TP il ne nous semble pas indispensable de l'indiquer aux élèves dès le départ.

54 Voir un exemple de graphique en Annexe I

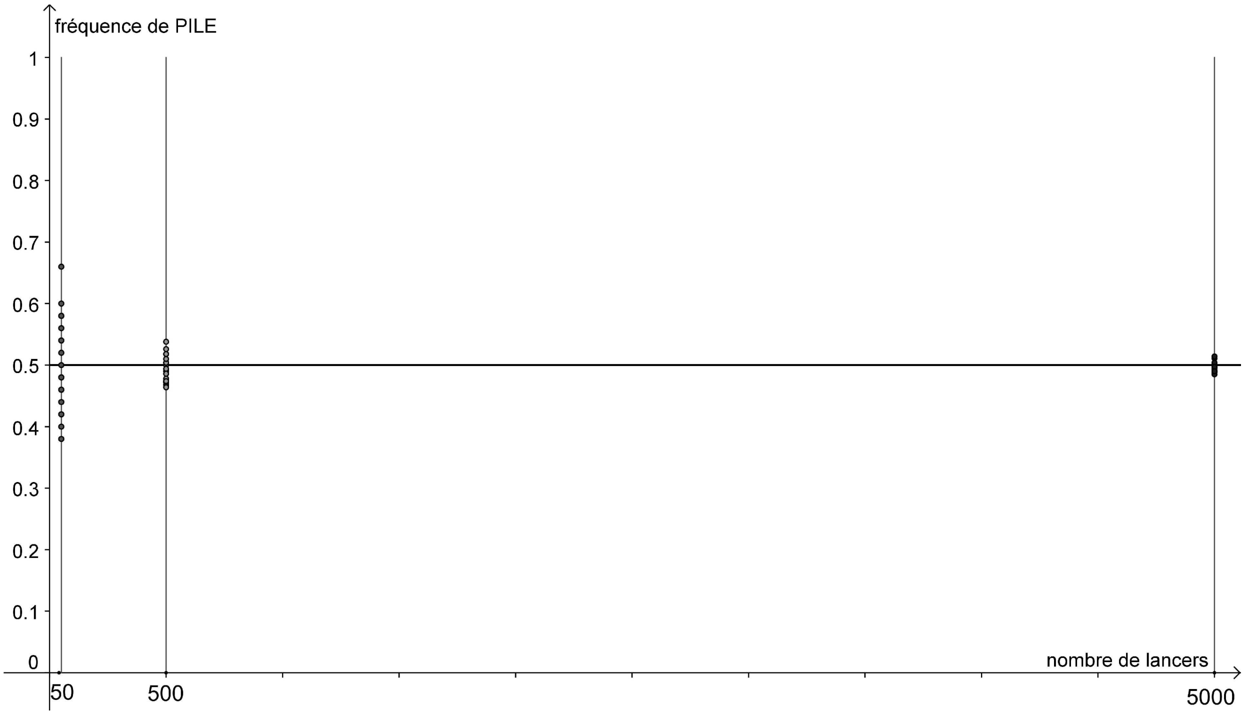
Quatrième phase : salle de classe avec ordinateur et vidéoprojecteur

Le professeur projette le graphique de la séance précédente et fait état des réponses proposées à la question VI[55] (Si l'on est dans l'option 1, les groupes viennent présenter leur réponse).

Les interventions, les réponses des élèves à la question VI[56] et le débat mettront en évidence que :

- l'étendue des résultats des séries se réduit en même temps que le nombre de lancers augmente ;
- plus le nombre de tirages est élevé et plus les fréquences de « Pile » des séries se rapprochent de 0,5 ;
- la fréquence 0,5 est mise en évidence ;
- cela n'exclut *a priori* pas des résultats extrêmes (non visible avec le TP informatique).

Dans le cas de l'option 1, on pourra regrouper les lancers de tous les élèves afin de proposer une série de 5 000 ou 6 000 lancers que l'on pourra, pourquoi pas, comparer avec d'autres classes. Il est aussi possible de créer des séries intermédiaires.



À la suite de ce bilan, le professeur peut définir la probabilité 0,5 à partir d'une pièce « idéale » - on pourra parler de pièce mathématique - pour laquelle aucune des deux faces n'a plus de raison que l'autre de sortir. Il fait le lien entre cette probabilité calculée *a priori* et la fréquence de 0,5 sur laquelle sont centrées et vers laquelle convergent les fréquences de « Pile » des différentes séries de lancers.

On peut proposer comme « définition » :

La **PROBABILITÉ** d'un évènement est un nombre qui permet d'indiquer ses possibilités de réalisation.

55 La question est : Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?

56 Voir en annexe II

Ce nombre est une valeur théorique qui ne donne qu'une indication globale. Il ne peut prédire ce qui va réellement se passer si on fait une seule expérience.
C'est un nombre compris entre 0 et 1.
Il peut être soit calculé *a priori* (uniquement dans les cas où les évènements élémentaires ont la même probabilité), soit estimé en faisant des expériences et en calculant des fréquences.

Exemple :
On s'intéresse à l'expérience : « Je jette une pièce de monnaie ».

Pour trouver la probabilité de l'évènement : « Pile »
1. On peut RAISONNER *a priori* et calculer la probabilité :
On considère que l'on utilise une pièce mathématique pour laquelle :
les deux seules issues possibles sont « Pile » et « Face » ;
la probabilité d'avoir « Pile » est égale à celle d'avoir « Face ». On considère qu'on a autant de chance d'obtenir « Pile » que « Face ».
On a donc : P (« Pile ») = $\frac{1}{2}$ = 0,5
2. On peut FAIRE L'EXPERIENCE et calculer la fréquence de « Pile » :
On effectue plusieurs séries de lancers en parallèles avec une pièce de monnaie
On remarque que plus on lance de fois et :
- plus chaque fréquence d'avoir « Pile » est proche de 0,5 ;
- plus les fréquences obtenues dans chaque série sont proches entre-elles (l'étendue est de plus en plus petite).
Avec cette méthode on trouve au mieux une approximation de la probabilité.

Plus qu'une définition en tant que telle, nous avons regroupé ici ce qui nous semble important de comprendre de la notion de probabilité.

Ce bilan sera aussi l'occasion de définir le vocabulaire minimum des probabilités : expérience aléatoire, issue, évènement.

Cinquième phase : Retour sur le questionnaire

Le questionnaire 2 est distribué.
Les élèves doivent calculer les probabilités correspondant aux évènements proposés.

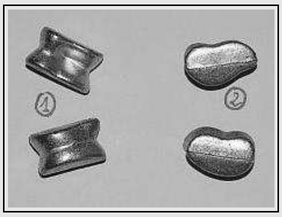
Questionnaire 2

Énoncé 1
Je jette une pièce de monnaie.
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *avoir Pile* » ?

Énoncé 2
Je lance un dé classique à six faces
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *2* » ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *avoir un nombre pair* » ?

Énoncé 3
Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges . Je tire une boule (sans regarder !)
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *tirer une boule jaune* » ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *tirer une boule rouge* » ?

Énoncé 4
Je lance un osselet.
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *voir retomber l'osselet en position 1* » ?



Les trois premiers énoncés ne posent pas de problème une fois de plus même si beaucoup d'élèves répondent encore en terme « d'un nombre de chance sur ».

Il est tout de même intéressant de noter que, pour la pièce, beaucoup d'élèves proposent « Tranche » comme issue possible, ce qui n'est pas étonnant puisque, dans nos classes, nous en avons obtenu et ce, alors même que nous avons lancé sur des tapis sans bord ! Pour autant, peu d'élèves en tiennent compte dans le calcul de la probabilité de l'évènement « Pile ». Ce paradoxe est à relever. Les élèves proposent les issues en se référant à l'expérience réelle et calculent une probabilité en raisonnant sur une pièce mathématique.

Lors du compte rendu il pourra être intéressant de mettre en évidence :
- que la somme des probabilités des évènements élémentaires est 1 ;
- que la probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.
- Concernant l'équiprobabilité, si le terme n'est certainement pas à introduire si tôt, il est intéressant de préciser dans les trois premiers énoncés que l'on considère qu'il y a autant de chance d'obtenir « Pile » que « Face », ou d'obtenir chaque face du dé, ou encore de tirer chacune des boules dans l'urne. On pourra faire remarquer que, dans ce dernier cas, ce ne sont pas les couleurs mais les boules qui ont autant de chance d'être tirées.

Pour les osselets, un nombre non négligeable d'élèves pense toujours que la probabilité est égale à 0,5 et certains argumentent en disant que, pour eux, il y a autant de chance d'avoir l'une ou l'autre des positions. D'autres sont convaincus du contraire et qu'on ne peut donc pas déterminer la probabilité *a priori*. Le débat doit alors permettre d'opposer les différents avis et de voir comment se départager. Avec en conclusion : « Il faut donc lancer. »

Se pose alors le problème de l'organisation des lancers.

Des élèves peuvent proposer d'utiliser le tableur comme outil de simulation (cela n'est pas obligatoire). Le professeur demandera alors quelle est la formule à saisir. La réponse de certains élèves, « la même que l'autre fois », sera l'occasion de revenir sur l'équiprobabilité des issues qui rendait son utilisation possible. Sur le tableur, on ne fait plus l'expérience réelle, on valide ou on observe un modèle. Le problème est qu'ici on n'a pas de modèle.

La classe devra donc définir le protocole de l'expérience en s'appuyant sur les observations faites avec la pièce :

– il s'agit de faire le plus de lancers d'osselets possible et de noter « 1 » pour la « position 1 », « 2 » pour la « position 2 » et peut-être aussi « 3 » pour les deux dernières positions verticales suivant le débat[57] ;

– et de calculer les fréquences d'apparition de la « position 1 » pour 100 et pour 500 lancers. L'idée est de voir si l'on observe un resserrement des valeurs. Un graphique identique à celui fait avec la pièce sera à nouveau construit.

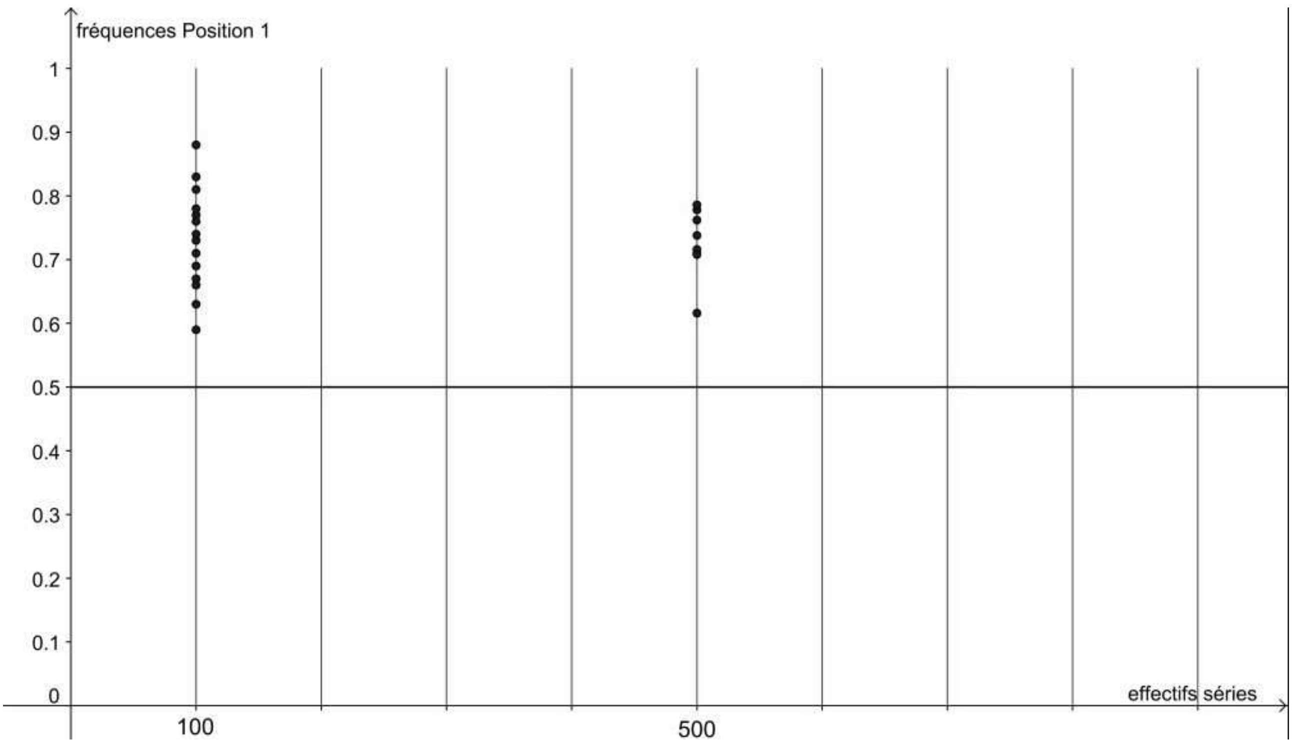
Des groupes de deux élèves sont constitués avec un lanceur et un élève qui note les résultats. Chaque groupe a à effectuer un minimum de 500 lancers ce qui prend environ un quart d'heure.

Avant même de commencer à calculer les fréquences, il est intéressant d'observer les grilles où sont notées les séries de « 1 » et « 2 » et de redemander aux élèves s'ils pensent que la probabilité est égale à 0,5. La réponse est alors clairement non.[58]

Les résultats des différents groupes sont ensuite entrés dans une feuille de calcul et les fréquences calculées.

Il est ensuite demandé aux élèves de construire individuellement leur graphique et de venir compléter sur GeoGebra celui qui est projeté.

Une discussion pourra s'engager sur l'existence ou non de valeurs trop éloignées des autres et de voir si cela est dû à la façon de lancer ou autre.



Les élèves sont ensuite placés par groupes de trois ou quatre avec pour consigne de répondre à la question :

Quelle conclusion peut-on faire concernant la probabilité d'avoir la position 1 ?

57 Cette dernière position, où l'osselet est vertical, n'est apparue que deux fois lors des lancers.
58 Voir en annexe III une grille complétée.

Les réponses des groupes sont de différents types[59] :

– des groupes indiquent simplement qu'avoir la position 1 est plus probable que d'avoir la 2 et, parmi ceux-ci, certains essaient de trouver des raisons physiques à ce fait ;

– d'autres le justifient :
  - en calculant la moyenne des fréquences pour donner une estimation de la probabilité ou pour montrer qu'elle est supérieure à 0,5 ;
  - ou en indiquant que plus il y a de lancers plus les valeurs s'approchent de 0,75[60] ;
  - ou encore en remarquant que l'étendue des séries diminue lorsqu'on augmente le nombre de lancers, et de proposer une estimation ou un encadrement de la probabilité.

– des groupes enfin remarquent que certaines fréquences sortent du lot.

On notera au final qu'on ne peut pas répondre à l'énoncé 4 en terme de « combien de chance... ». Au mieux, on pourra se mettre d'accord sur une estimation ou un encadrement des fréquences. On pourra revenir sur le fait que l'on n'a pas travaillé avec un osselet « mathématique » et que l'on ne peut donc pas conclure en comparant les résultats avec une probabilité calculée.

Il sera aussi important de bien revenir sur le vocabulaire utilisé par les élèves et la structure des phrases lors de la présentation des conclusions de chaque groupe.

Un prolongement possible[61]

Un osselet « mathématique » présente quatre faces auxquelles on associe les numéros de position 1, 3, 4 et 6 avec les probabilités p_1, p_3, p_4 et p_6. Des expériences statistiques ont permis de définir cet osselet tel que : $p_1=p_3$, $p_4=p_6$ et $p_1=4p_4$. 1) Associer chacune des faces d'un osselet avec les valeurs proposées. 2) Calculer les probabilités associées à chacune des faces de l'osselet.

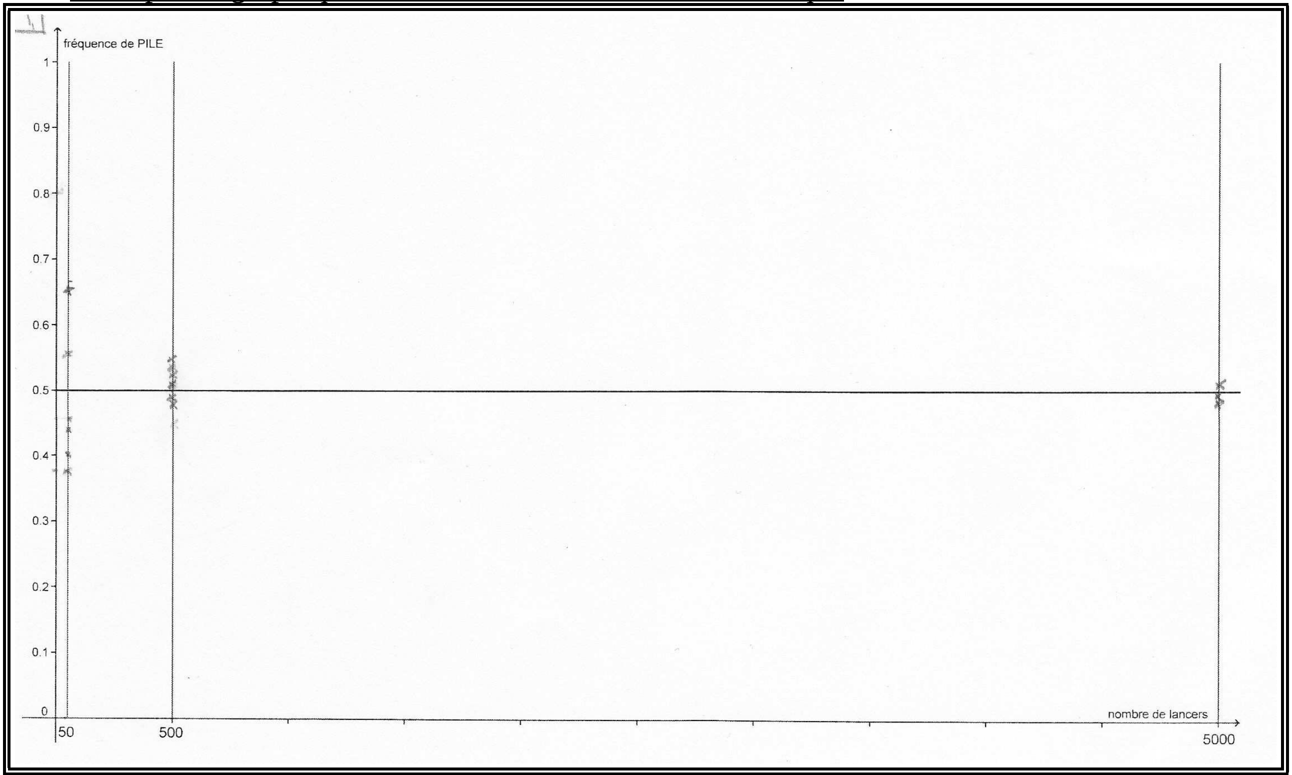
59 Voir annexe IV.

60 On trouve dans les livres une probabilité égale à 0,8 mais dans nos classes nous avons obtenu des fréquences inférieures (plus proches de 0,75). On peut se demander si le fait de lancer les osselets avec un gobelet n'y est pas pour quelque chose. En effet, si on le lance à la main, l'osselet part toujours de la même position, ce qui aurait peut-être tendance à favoriser la position 1. Nous l'avons testé hors de la classe et avons trouvé des fréquences proches de 0,8. Une autre raison est que nous avons lancé des osselets en métal et non de vrais os.

61 MASSELIN Blandine et VIVIEN Frédéric, *Une initiation aux probabilités par le jeu*, IREM de Rouen, septembre 2009.

ANNEXES

I- Exemple de graphique construit à l'issue du TP informatique



II- Différentes réponses à la question posée à l'issue des lancers de pièce :

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
Plus le nombre de tirage est grand, plus l'écart entre les séries se réduit. et il se rapproche sur 0,5.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
Que plus il y a d'essaie plus les resultat sont proche de 0,5.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ? On remarque que les fréquences sont plus rapproché dans la série de 5000 que de 500.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ? La possibilité d'avoir autant de chance d'avoir pile ou face est casiment $\frac{1}{2}$ chance.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
plus le nombre de tirage est élevé, plus la frequence de toutes les série se rapproche de 0,5

III- <u>Exemple de grille de 500 lancers d'osselets</u>

2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2
1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	2	2	1	2	1	1
1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2
1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1
2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1
1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1
1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1
2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2

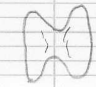
On voit ici clairement qu'il y a plus de positions 1 que de positions 2.

IV- Réponses des groupes à la question : « Quelle conclusion peut-on faire concernant la probabilité d'avoir la position 1 lorsqu'on lance un osselet ? »

il y a beaucoup plus de position 1 que de position 2 donc l'oslet dois avoir quelque chose qui le force à attérire sur la position 1 que sur la position 2. Nous penson que la surface 2 à un poids plus lourd que ~~is~~ il y fait stabiliser sur la position 1 de plus que la position 2 est plus arrondie que la position 1 alors que elle joue le rôle de deux pilier.

position 2 :

position 1 :



La probabilité d'avoir la position 1 est plus élevée que d'avoir la position 2.

La moyenne de la probabilité est d'environ 0,726.

Concernant la probabilité d'avoir la position 1 la conclusion est que l'on a plus de chance de tomber sur la position 1 que la 2.
Il y a 1 valeur qui sort du lot.
La moyenne de 100 lancers : 0,6321428571
La moyenne de 500 lancers : 0,72675.

---

en cherchant la moyenne de toutes ces fréquence (0,7474), on constate qu'elle est largement au dessu de 0,5 (la moitié)

Expérience :

Moyenne pour 100 : 0,72

Moyenne pour 500 : 0,74

Donc plus il y a de lancés plus la probabilité s'approche de 0,75. De plus on l'observe sur le graphique.

En lançant 100 et 500 fois un osselet on a obtenu des fréquences de position 1 allant de 0,714 à 0,792. On a une étendue de 0,078.
Toutes ces valeurs restent néanmoins entre 0,7 et 0,8.

---

xen.

→ ⊕ le nombre de lancers est grand, ⊖ l'écart entre les valeurs ~~est~~ grand et se resserent. les valeurs se rapprochent de 0,75 pour la positio 1.

Il y a une plus forte probabilité de tomber sur la position 1 que sur la position 2.
Il y a jusqu'à 0,83 de probabilité de tomber sur la position 1 pour 100 lancer alors que pour 500 lancer l'étendue est de 0.792 à 0,714
L'étendue est plus petite pour 500 lancers.

Donc, plus le nombre de lancers est important plus l'étendue est petite et il y a de probalités d'obtenir la position 1.