

Le sac de bonbons

« [...] Alors pour le dernier tour il a dit : « Kiwi » avec une petite voix qui intensifie l'espace-temps et influence le piochage du kiwi. » *Et il a gagné...*

(Citation d'élève)

Groupe Collège, IREM de Lyon

Présentation

Avant la troisième, les élèves ont rencontré maintes fois des situations aléatoires. Ils ont joué à des jeux de dés, de cartes, de loto... Ils ont lu des contes, entendu des histoires, regardé des fictions...

À travers ces expériences, ils se sont construit des représentations personnelles du hasard. Certains croient être nés (ou non) sous une bonne étoile et disposer (ou non) d'un certain capital « chance ». D'autres s'imaginent disposer de « pouvoirs » et essaient de favoriser le destin ou de prévoir ce qui va se passer. D'autres encore, dans une approche plus statistique, évoquent « la loi des séries » ou, au contraire, considèrent qu'un événement ne peut pas se produire deux fois de suite.

Ces différentes conceptions sont autant d'obstacles à la compréhension des probabilités.

La situation présentée ici propose de faire émerger ces conceptions et de commencer à les confronter pour mieux les dépasser. Elle doit être proposée en amont et peut être détachée du chapitre.

Objectifs

- Faire émerger le rapport que les élèves ont avec le hasard et commencer à mettre leurs conceptions à l'épreuve des statistiques.
- Faire ressortir le vocabulaire spontanément utilisé dans l'action par les élèves pour commencer à investir le langage des probabilités : hasard/chance, nombres de chances/sur, sûr/certain, événement, événement certain, événement impossible...
- Éventuellement, faire ressortir la nécessité d'un protocole clair pour rendre une expérience aléatoire ou garantir qu'une expérience est aléatoire.
- Réfléchir à la notion d'événement probable en relation avec celle d'événement effectivement réalisé.
- Engager les élèves à mobiliser des éléments d'analyse statistique pour tenter de répondre à un problème.

Prérequis

- Aucun

Matériel envisagé

- Un sac opaque contenant environ cent cinquante bonbons de même type (forme, aspect au toucher) de six ou sept parfums, dans des proportions variées.

Scénario

Les temps 1 à 4 sont réalisés en une séance de 50 minutes.

Temps 1 : émergence des conceptions / distribution et remise des bonbons non gagnés/ jeu individuel.

- Présentation du problème

Le professeur montre le sac opaque aux élèves et donne la consigne :

« Ce sac contient des bonbons de parfums différents.

À tour de rôle, chacun d'entre vous devra annoncer le parfum du bonbon que je vais tirer au hasard. Si le parfum correspond à celui annoncé, vous gagnez le bonbon, sinon le bonbon sera remis dans le sac. »

Si des questions émergent avant ou pendant l'activité, le professeur ou la classe y répondent au fur et à mesure.

- Premier tour

Chaque élève propose un parfum en justifiant ou non son choix.

- Premier bilan

Il est oral. Il pointe la difficulté de prévoir le résultat des tirages et incite les élèves à améliorer la performance de la classe ; ceci doit naturellement les conduire à s'intéresser, si ce n'est déjà fait, à la répartition des différents parfums dans le sac.

Temps 2 : exploitation statistique / distribution et remise dans le sac des bonbons non gagnés / jeu individuel.

Les modalités sont similaires à celles du temps 1 (second tour) mais dans le but que la classe gagne le maximum de bonbons. Les élèves sont invités cette fois-ci à justifier leur choix.

On garde au tableau ou dans un tableur une trace des issues pour avoir des éléments concrets de débat, constater l'amélioration ou non de la performance et en analyser les causes.

Temps 3 : réinvestissement / tirage sans remise des bonbons / en groupe.

Le but est de découvrir un maximum de fois le parfum du bonbon tiré au sort pour faire gagner l'équipe et remporter un lot fixe de plusieurs bonbons. Cette fois-ci les bonbons non gagnés sont déposés à côté du sac. C'est un même élève représentant le groupe qui annonce à chaque tour le parfum choisi par l'équipe.

Il devient pertinent de s'intéresser à l'évolution des effectifs.

Temps 4 : retour individuel sur l'activité.

Les élèves écrivent ce qu'ils ont retenu ou appris de l'activité.

Temps 5 : synthèse.

Elle est commune à la classe et élaborée à partir des productions précédentes.

Temps 6 : prolongements possibles

- Dans un même contexte : proposer aux élèves de choisir entre deux sacs contenant plus ou moins de bonbons de parfums différents pour obtenir un parfum donné. La situation les conduit à comparer les effectifs relatifs des parfums désirés.
- Dans un contexte différent : le problème « la main dans le sac »⁴² proposé au rallye ARMT 2008 peut permettre, une fois installée la notion d'aléatoire, d'évaluer la capacité des élèves à mobiliser leurs connaissances en proportionnalité dans la résolution de ce type d'exercices.

Notes diverses

Temps 1

Pour justifier leur choix, les élèves évoquent leur parfum préféré, leur chance (« Cerise car je vais avoir de la chance. » ou « Y'a du bol. ») ou leur capacité à prévoir l'issue du tirage (« J'ai un don. »), soit en interprétant l'évolution des issues précédentes (« À force de dire citron, ça va bien venir. »), soit en raisonnant en termes d'effectifs (« Il y a plus d'orange. ») ou de fréquences (« Il y a 60 chances sur 176 de tirer orange. »).

Les motivations des élèves sont diverses ; certains ne demandent pas le parfum le plus représenté simplement parce qu'ils ne l'aiment pas, d'autres pensent qu'il n'a pas plus de chance de sortir qu'un autre.

Certains élèves peuvent accuser l'enseignant de tricherie au moment du tirage. C'est alors l'occasion de s'interroger sur le protocole de tirage, d'essayer de définir avec la classe quelles conditions doivent être respectées pour qu'il soit le plus aléatoire, le plus « au hasard », possible. Il conviendra ensuite de l'appliquer.

Temps 2

La nouvelle consigne donnée à l'issue du bilan a modifié l'enjeu. Il ne s'agit plus de gagner pour soi-même mais de faire gagner la classe. On incite ainsi les élèves qui cherchaient à obtenir leur parfum préféré à changer leur vision du problème pour chercher plutôt à prévoir l'issue de chaque tirage.

Les élèves raisonnent davantage en termes de statistiques. Certains s'appuient sur la répartition des bonbons dans le sac, parlant spontanément de « pourcentages » au sens de « proportion ». D'autres interprètent les résultats des tirages précédents : « Même parfum parce que je l'ai pas eu au 1^{er} tour », « Y a plus de chance de l'avoir car il est sorti plus de fois. ». Ces arguments suscitent souvent des désaccords propices au débat entre élèves.

En situation, l'enseignant peut rebondir sur d'éventuelles propositions atypiques (« un bonbon de n'importe quel parfum » ou au contraire un bonbon dont le parfum n'est pas dans le sac)

⁴² Voir l'énoncé et l'analyse du problème en annexe 1

pour évoquer les notions d'évènement certain ou d'évènement impossible.

Temps 3

L'enjeu est une nouvelle fois modifié, il s'agit de faire gagner le groupe, donc de choisir ensemble et de tester une stratégie pertinente pour deviner l'issue des tirages. Le travail en groupe oblige les élèves à formaliser leurs stratégies personnelles et à les soumettre au contrôle du groupe. Le tirage étant sans remise, la question se pose à chaque tour.

Temps 4

L'écrit oblige les élèves à prendre un peu de recul sur l'activité, à synthétiser leur pensée et à la formaliser. À partir de ces productions, le professeur peut mesurer l'évolution des conceptions des élèves. Il pourra s'appuyer sur elles pour construire la synthèse et envisager les activités futures.

Les écrits des élèves sont souvent plus riches que ce qui a pu être exprimé à l'oral pendant la séance.

Certains montrent la persistance de conceptions « obstacles » qui devront encore être mises à l'épreuve dans des activités complémentaires.

« J'ai rien eu : j'ai pas de chance. »

Dans le cas d'un tirage avec remise : « Plus on est nombreux à jouer et à parier sur le même goût à un jeu de hasard, plus on a de chances de gagner, même si le nombre de bonbons est faible. »

« Alors que Quentin persistait sur le parfum orange il tombait systématiquement sur le parfum kiwi. Alors pour le dernier il a dit : « Kiwi. » avec une petite voix qui intensifie l'espace-temps et influence le piochage du kiwi. »

D'autres témoignent d'approches plus statistiques ou évoquent des événements en termes de probabilités.

« On a observé que si, au premier tour, on donnait le nom du bonbon où il y avait le plus de pourcentage, on tombait facilement dessus. Au deuxième tour, vu qu'il restait moins de bonbons où il y en avait le plus, si on disait le nom du deuxième bonbon où il y avait le plus de pourcentage, on tombait plus facilement sur lui. »

« J'ai retenu que plus le nombre de bonbons d'un certain goût était important, plus on avait de chances de l'avoir. Mais on peut aussi tomber sur les autres car on a plus de chances de l'avoir, mais pas toutes les chances. »

« Il est très dur de deviner ce qui va se passer mais on peut essayer de demander le parfum où il y a plus de bonbons. »

Temps 5

Selon les classes, le déroulement de la séance peut être très différent : certaines demandent d'emblée la composition voire les proportions de chaque parfum, alors que d'autres, au contraire, ne voient même pas l'intérêt de demander les différents parfums possibles...

La faible taille de l'échantillon peut conduire à des tirages globalement surprenants (exemples : plusieurs élèves gagnants à la suite, un élève qui gagne systématiquement quel que soit le degré de représentation de son parfum).

Par conséquent, l'exploitation de l'activité peut aller d'une expression des différentes représentations (à réinterroger dans de nouvelles activités) à une formalisation plus aboutie, consensuelle, de l'analyse faite par la classe.

La synthèse peut s'articuler autour des éléments énoncés ci-dessous.

- Des événements semblent avoir plus de chances d'arriver que d'autres.

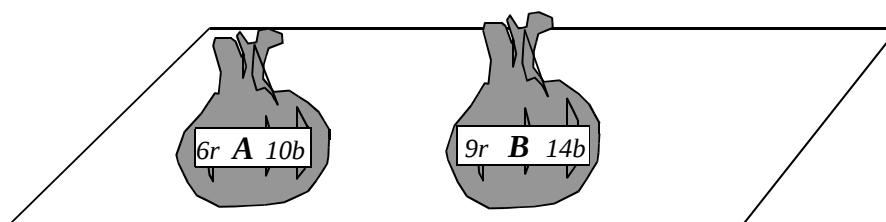
- Des évènements qui ont plus de chances de se produire, les « évènements les plus probables » ne sont pas toujours sûrs de se produire mais semblent se produire plus souvent que les autres.
- Un évènement qui se produirait à coup sûr est un évènement certain. Un évènement qui ne se produirait jamais, à coup sûr, est un évènement impossible.

« C'est pas mathématique le hasard. »
(Citation d'élève)

Annexe 1

La main dans le sac (CAT. 7, 8, 9 10)

©ARMT.2008



Pour 1 euro, tentez votre chance !!

*Si vous tirez une boule **rouge**, vous gagnez un ours !!*

À la fête du village, un forain propose aux passants le jeu suivant :

Donnez-moi un euro et tirez une seule boule dans le sac de votre choix.

Si la boule est rouge, vous gagnez un ours en peluche !

Dans le sac A, il y a 6 boules rouges et 10 boules blanches.

Dans le sac B, il y a 9 boules rouges et 14 boules blanches.

Toutes les boules sont de même grandeur, de même poids et de même matière.

Les sacs sont opaques et l'on ne peut pas voir les boules qu'ils contiennent, on ne peut qu'y plonger la main pour tirer une boule.

Vous n'avez qu'un euro en poche et vous aimeriez bien gagner un ours.

Dans quel sac préférez-vous tirer une boule ? Expliquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Probabilités intuitives
- Arithmétique : proportionnalité, rapports

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut choisir un des deux sacs (dont les contenus sont différents), qu'il faut espérer « tirer une boule rouge » dans le sac choisi, ce qui revient aussi à « ne pas tirer une boule blanche ».
- Comprendre qu'il ne faut pas simplement comparer les nombres de boules rouges ($9 > 6$) et choisir le sac B parce qu'elles y sont plus nombreuses ou les nombres de boules blanches ($14 > 10$) et choisir le sac A car on risque moins d'en tirer une boule blanche (perdante). L'abandon de cette conception devrait s'appuyer, par exemple, sur la contradiction entre les deux démarches qui en découlent :
 - « tirer une boule rouge dans le sac où il y en a le plus » conduit à choisir le sac B d'une part, et
 - « tirer une blanche dans le sac où il y en a le moins » conduit à choisir le sac A d'autre part.
- Tenir compte simultanément des quatre nombres de boules donnés (car il ne suffit pas de considérer séparément les couples (6 ; 9) et pas (10 ; 14) ou l'inverse.

Dans ce contexte, suivant les âges, les élèves se placent spontanément dans un cadre additif. On rencontre généralement deux démarches erronées :

1- Calculer les écarts entre les nombres de boules d'un même sac (4 boules blanches de plus que de rouges pour A et 5 pour B). Conclure alors au choix de A, « car dans B il y a plus de boules blanches en plus que dans A ».

2- Calculer les variations des nombres de boules d'une même couleur d'un sac à l'autre (+ 3 rouges et + 4 blanches de A à B). Conclure aussi au choix de A, « car de A à B, on ajoute plus de boules blanches que de rouges ».

Dans ce cadre additif, la conclusion que le sac A est plus favorable peut sembler faire appel à une intuition probabiliste : en ajoutant plus de boules blanches que de rouges pour passer d'un sac à l'autre, on augmente le poids relatif des blanches et on a plus de « risques » de tirer une boule perdante. Mais ce raisonnement de nature pré-probabiliste n'est décelable que si l'élève explique comment il aboutit à sa conclusion, ce qui n'est pas fréquent.

Ce raisonnement additif peut être invalidé en l'appliquant à d'autres exemples de sacs fictifs pour lesquels, par une approche intuitive, on peut estimer que les chances de gagner sont les mêmes.

Par exemple, dans un sac A', « double-sac A », contenant 12 rouges et 20 blanches, il y a autant de chances de gagner qu'avec A. Mais, selon la démarche 1, il y aurait 8 « boules blanches en plus que de rouges », alors que dans le sac B il y en a 5. On opterait alors pour le sac B plutôt que A' ou que A, contrairement au choix précédent.

La conclusion que A est plus favorable, reposant dans la démarche 2 sur les variations des boules de même couleur avec le sac B (+ 3 rouges dans B et + 4 blanches) et faisant également apparaître une augmentation supérieure des blanches par rapport aux rouges, est à rejeter comme précédemment.

- Se placer dans un cadre multiplicatif ou de proportionnalité et comprendre qu'il faut considérer

les quantités relatives des boules rouges par rapport aux blanches ou par rapport à l'ensemble des boules contenues dans chacun des sacs.

- Choisir le sac qui donne une meilleure « chance » de gagner, c'est-à-dire, dans une appréhension probabiliste, choisir celui qui contient la plus forte proportion de boules rouges.
- Deux types de rapports peuvent être considérés pour comparer les deux sacs.

Soit, pour chacun des sacs, le rapport du nombre des boules rouges à celui des blanches : $6/10$ dans A et $9/14$ dans B. Pour les comparer, on peut les exprimer en décimaux : 0,6 pour A et 0,643 pour B, ou par fractions équivalentes : $42/70$ pour A et $45/70$ pour B ou en pourcentages : 60 % pour A et 64,3 % pour B. D'où le choix de B.

Soit, pour chaque sac, le rapport du nombre des boules rouges parmi toutes (probabilité de tirer une boule rouge) : $6/16 = 0,375 = 138/368 = 37,5 \%$ pour A et $9/23 = 0,391 = 144/368 = 39,1 \%$ pour B.

D'où encore le choix de B.

- Exprimer la réponse sans confondre une réponse probabiliste du genre « nombre de chances sur ... de tirer une boule rouge » avec une réponse se référant aux rapport rouges/blanches. Par exemple, il est correct de dire « ... car on a 37,5 chances sur 100 de tirer une boule rouge dans A et 39,1 chances sur 100 dans B », mais il n'est pas correct de dire « 60 chances sur 100 dans A et 64,3 chances sur 100 dans B ».

Notons que l'usage du mot « chance » est source d'ambiguïtés. Il n'a pas le même sens dans « avoir plus de chance de tirer une boule rouge dans B que dans A » qui est une évaluation qualitative, et dans « j'ai 6 chances sur 16 de tirer une boule rouge dans A » qui est une appréciation quantitative de la probabilité dans laquelle les « chances » sont assimilées aux boules gagnantes, ce qui peut être source de confusions quand on énonce : « j'ai 37,5 chances sur 100 de tirer une boule rouge de A ».