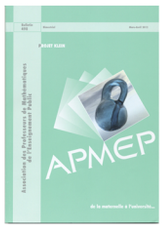
Probabilités au collège :
ne pas laisser l'enseignement des probabilités au hasard…

Commission Inter-IREM Collège
Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités
Brochure APMEP n°198
ISBN 978-2-912846-73-0

L'APMEP vous propose



Le BULLETIN VERT (5 numéros par an), avec ses dossiers et ses rubriques : dans nos classes, pour chercher et approfondir, matériaux pour une documentation, les problèmes de l'APMEP...

Le BGV (6 numéros par an) : pour être vite et bien informé sur l'actualité de l'enseignement des mathématiques, la vie de l'association,...

PLOT (4 numéros par an) destiné plus particulièrement aux « jeunes » collègues, enseignants en école, collège et lycée.

Son SITE INTERNET www.apmep.asso.fr : tout sur l'APMEP, ses positions, son espace d'échange entre adhérents, ses Régionales,...

Ses BROCHURES : une centaine de titres mis à la disposition des adhérents à des prix très attractifs (voire le site et quelques exemples en troisième page de couverture).

Ses JOURNÉES NATIONALES annuelles : trois jours de conférences, débats, ateliers, expositions, échanges proposés aux 800 participants.

Ses JOURNÉES RÉGIONALES : lieux pribvilégiés cde débats et d'échanges pédagogiques.

Base de données bibliographiques APMEP-IREM sur l'enseignement des mathématiques riche de plus de 10 000 fiches.

Professeurs de l'enseignement public, agricole ou privé, n'hésitez pas, ADHÉREZ !

Sommaire

Présentation
Brigitte Chaput, Fabienne Lanata et Vincent Paillet (Responsables des Commissions).....2

Préface : le jeu de l'amour et du hasard
Jean-Pierre Raoult (Président du comité scientifique des IREM).....3

À propos de l'introduction aux probabilités en Troisième
Brigitte Chaput - IREM de Toulouse
et Claudine Vergne - IREM de Montpellier.....6

Des statistiques aux probabilités. Un lieu privilégié pour la modélisation
Jean-Claude Duperret - APMEP, IREM de Reims, IUFM Champagne-Ardenne.....18

Quelle définition pour la probabilité au collège ?
Jean-Paul Girard - IREM de Lyon.....41

Les activités.....49

Autour du mot « hasard » : des représentations initiales des élèves
Georges Pons - IREM des Pays de la Loire.....50

Le sac de bonbons
Groupe Collège - IREM de Lyon.....53

Lancer d'une pièce, d'un osselet
Christian Judas, Georges Pons - IREM des Pays de la Loire
et Vincent Paillet - IREM d'Orléans.....60

Le dernier est-il désavantagé ?
Nathalie Ben Moussa et Fabienne Lanata - IREM de Rouen.....78

Activités « BIBERON »
Jean-Claude Fenice - IREM de Reims
et Dominique Poiret - IREM d'Orléans.....84

Pari sur la somme de deux dés
Béatrice Legoupil - IREM de Lyon
et Laurianne Foulquier - IREM d'Aquitaine.....94

Inégalité triangulaire. Notion de fréquence en classe de cinquième
Monique Maze, Aurélie Roux - IREM de Clermont-Ferrand
et Guillaume François - IREM des Pays de la Loire.....105

Lexique
Brigitte Chaput - IREM de Toulouse
et Claudine Vergne - IREM de Montpellier.....113

Présentation

La Commission Inter-IREM *Collège* a pour mission première de mener une réflexion sur tout sujet de fond ou d'actualité concernant l'enseignement des mathématiques au collège. Les travaux de la Commission Inter-IREM *Statistique et Probabilités* ont un objectif plus transversal sur l'enseignement de la statistique et des probabilités du collège à l'université.

Contrairement à ce qui existe depuis longtemps dans d'autres pays, l'enseignement des probabilités est une nouveauté au niveau du collège en France. C'est dans ce cadre que les membres des deux commissions se sont engagés dans la réalisation d'une brochure sur l'introduction des probabilités au collège.

Les activités proposées dans cette brochure par la CII *Collège* ont pour vocation de présenter diverses introductions des probabilités au collège. Ces approches préparent à un enseignement qui sera ensuite développé au lycée. Elles visent donc plus à faire appréhender des concepts, dans des situations expérimentales, qu'à les formaliser trop tôt. Il nous a semblé important de ne pas empiéter sur le programme de seconde.

Par ailleurs, pour beaucoup d'enseignants de collège, la formation aux probabilités est lointaine, voire inexistante. Il nous a donc paru nécessaire de proposer aussi des articles de fond sur le sujet. Ces articles ont essentiellement été pris en charge par la CII *Statistique et Probabilités* qui, forte de son expérience, a proposé une mise en perspective des notions de probabilités et une réflexion sur leur enseignement en classe de Troisième en lien avec le lycée.

Cette brochure n'aurait pu être écrite sans l'investissement de tous les membres des deux commissions. Aussi tenons-nous à remercier tous ceux qui ont participé à sa réalisation.

Nous terminerons en soulignant l'intérêt de la collaboration avec l'APMEP qui nous a fait profiter de son expérience en matière de publication.

Fabienne LANATA et Vincent PAILLET

Responsables de la Commission Inter-IREM Collège,

Brigitte CHAPUT

Responsable de la Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

Préface

le jeu de l'amour et du hasard

Jean-Pierre RAOULT[1]

L'amour : connaissez-vous beaucoup de livres de mathématiques, ou d'enseignement des mathématiques, où on trouve quelque part ce mot ? Eh bien, cet ouvrage à plusieurs voix, s'élevant de deux instances du réseau des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (les Commissions Inter-IREM « Collège » et « Statistique et Probabilités ») en est un ! Dans le chapitre intitulé « *Autour du mot « hasard » : des représentations initiales des élèves* », nous apprenons que, dans une classe de troisième invitée, à titre de première approche de la partie « probabilités » du programme, à faire des associations de mots à partir du vocable « hasard » écrit au tableau par le professeur, le mot « amour » a été, nous dit l'auteur, âprement défendu par une moitié (surtout féminine) des élèves, le débat ayant donné l'explication : « l'amour, c'est le hasard des rencontres ».

Cet exemple me ravit à plus d'un titre (et je demande l'indulgence du lecteur s'il trouve que je « pousse » parfois un peu trop mes interprétations).

Tout d'abord je réagirai en tant que mathématicien dit « appliqué » moi-même : je me suis réjoui que les programmes actuels de la classe de troisième des collèges en France introduisent un premier contact avec les probabilités tout en étant aussi conscient des difficultés inhérentes à l'initiation que cela implique à la démarche de modélisation. Mais j'ai toujours été sensible à ce que ce mot de « appliquées » a de réducteur ; j'aurais préféré qu'on prenne l'habitude de parler de mathématiques « motivées » (comme le proposait le mathématicien et épistémologue français Jean-Pierre Aubin) et par ailleurs, bien sûr, d'applications des mathématiques. Quoi de moins appliqué et de plus motivant dans l'existence que l'amour ? Que des "ados" gardent le souvenir que, lors de la première séance du cours de probabilités, on a parlé d'amour m'enchante.

Ensuite, ces jeunes ont introduit le mot « rencontres » ; ils lui ont donné bien sûr une acception fort restreinte mais ceci m'a rappelé que mon professeur de philosophie au lycée, en classe de terminale (on disait alors « Maths Elem »), nous avait défini le hasard comme "la rencontre inopinée de deux séries causales". Franchement, je ne sais pas trop quel était le caractère opérationnel d'une telle définition, dont le seul avantage est, me semble-t-il, de ne pas opposer trop fortement le déterminisme et l'aléatoire, mais d'introduire un pont entre eux. Je crois que, si cette phrase m'est restée en mémoire, c'est parce que j'avais déjà été frappé par son aspect circulaire : est-on bien avancé si pour définir le hasard on a recours à l'inopiné ? Mais n'est-ce pas que, pas plus que l'amour, le hasard ne se définit mais qu'il s'éprouve ? Et je dirai que, dans l'ouvrage qui nous est proposé ici, riche de sa diversité, ce qui me convainc le moins ce sont certaines des occasions où sont proposées des « définitions » de la probabilité (alors que la critique de certaines telles « définitions » qu'on peut trouver dans des manuels, souvent aberrantes, y est tout à fait pertinente) ou des typologies de différents types de hasard (quoique, au sein du Lexique qui clôt l'ouvrage on trouve des distinctions historiquement fondées susceptibles de donner au lecteur des éléments de culture intéressants, même si leur répercussion dans la pratique scolaire n'est ni évidente ni même

1 jean-pierre.raoult@univ-mlv.fr, Président du comité scientifique des IREM (http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique4), Co-rédacteur en chef de la revue Statistique et Enseignement (http://www.statistique-et-enseignement.fr)

parfois indispensable). Mais j'ai apprécié dans leur totalité les sept descriptions d'activités, bien détaillées, agrémentées d'indications précieuses de mise en œuvre en classe, qui amènent progressivement et naturellement l'élève à l'emploi de la terminologie qui permet de "dire l'aléatoire" et à la nécessité de veiller à sa cohérence.

Comme je viens de le dire, le hasard, à l'instar de l'amour, s'éprouve mieux qu'il ne se définit. Dans « éprouver » il y a « épreuve » ; c'est à travers la réalisation d'épreuves aléatoires que nombre des situations présentées dans ce livre familiarisent l'élève avec la nécessité de dépasser le contexte traditionnel du cours de mathématiques, où l'on sait nécessairement (en tout cas le professeur, lui le sait) ce qui va arriver : le bon théorème à utiliser, la bonne réponse à l'exercice proposé et même souvent le bon cheminement pour y accéder. Dans cet ouvrage, nombre de situations donnent lieu à la présentation d'approches multiples : pratique expérimentale (par exemple des jets d'osselets), simulation sur ordinateur, calcul à partir d'hypothèses telles qu'une équiprobabilité à situer « quelque part » dans le processus de l'épreuve). Il arrive même, et c'est heureux, que des situations mathématiquement analogues se retrouvent sous les plumes de plusieurs auteurs (voir ainsi les spaghettis du chapitre « *Un lieu privilégié pour la modélisation et les triangles* » du chapitre « *Inégalités triangulaires, notion de fréquence en classe de cinquième* »).

L'amour est le domaine du verbe, de la poésie. Et ce n'est pas la moindre difficulté qu'éprouvent les enseignants de mathématiques quand ils abordent les chapitres de probabilités que cette polysémie (comme disent les auteurs de l'un des chapitres de l'ouvrage) et que cet usage de mots issus du vocabulaire courant. Que le professeur qui a suscité (et il dit lui-même son étonnement) ce surgissement du mot « amour » dans sa classe ait pris ce problème à bras le corps en faisant librement courir, comme le font des psychologues, les associations verbales chez ses élèves, me semble donc tout à fait réjouissant. Il a là à la fois donné une ouverture vers des liens (dont je suis pour ma part très friand) avec l'enseignement du français (je ne sais s'il a convié son collègue à participer à ce jeu non sans rapport avec celui des cadavres exquis des surréalistes, mais il aurait pu !) et, la suite de son chapitre le prouve, créé le besoin d'aller au-delà de ces représentations des élèves pour faire un premier pas dans l'étude des probabilités en commençant à préciser dans quels champs s'exerce ou ne s'exerce pas le hasard.

Une situation analogue d'appel aux liaisons sémantiques surgissant spontanément dans l'esprit des élèves figure dans un autre chapitre, inspiré d'une activité figurant sur le très utile site internet Statistix, que je suis heureux de voir évoqué ici (www.statistix.fr, qui se définit comme un centre de ressources, lieu de partage et de mutualisation pour l'enseignement de la statistique). Ce chapitre est intitulé « *Le dernier est-il désavantagé ?* » (je rassure le lecteur : je ne pousserai pas ici l'allégorie de l'amour trop loin en imaginant que ceci pourrait s'appliquer à des soupirants). L'article nous soumet des expressions libres d'élèves sur la possibilité même de donner un sens à cette question, dont ils seront amenés à « découvrir » (ou du moins, pour certains, à apprendre) qu'elle peut signifier qu'on se demande, dans le cadre d'un jeu de hasard où plusieurs joueurs interviennent successivement, si le dernier à entrer en lice aurait une probabilité plus faible que les autres de gagner. Comme toujours en pareil cas, on lit dans certains écrits d'élèves : on ne peut rien dire car c'est le hasard. Une fois dépassée cette conviction de l'indicible (qui, pour d'aucuns, serait aussi un apanage de l'amour) un grand pas est franchi pour convaincre les élèves du bien-fondé du calcul des probabilités (je me garde bien ici de parler de « théorie des probabilités » : nous sommes en classe de troisième !) et donc du fait qu'on va effectivement « faire des maths ».

Mais « faire des maths », c'est à un moment donné codifier un vocabulaire (et ici il faut, pédagogiquement, faire des choix entre des vocabulaires concurrents et tous légitimés par d'anciennes pratiques), encadrer son usage et le mettre en œuvre dans des calculs. D'où la question

centrale, qui fait le titre de l'une des sections du chapitre initial « *A propos de l'introduction aux probabilités en troisième* » : que dire aux élèves ? Et là j'ose le parallèle avec une question que se sont posée tous les parents, à propos de l'amour à nouveau : que dire aux enfants ? L'un des attraits de ce livre choral est de mettre en évidence que, pas plus qu'il ne peut y avoir de voie toute tracée en matière d'éducation sexuelle, il ne peut y avoir de réponse absolue en matière d'apprentissage des probabilités. Au professeur de faire ses choix, à partir de cet ouvrage mais aussi à partir de multiples autres corpus disponibles (sites tel que « Statistix », déjà cité, documents d'accompagnement du ministère de l'Éducation Nationale, certains manuels...) et de s'appuyer sur ce qui est pour lui le plus évocateur et le plus stimulant. Après tout, peut-il y avoir d'amour sans liberté ? Et qu'on me permette de faire enfin une dernière allusion à l'amour en disant aussi combien l'amour évident de leur métier, mis en pratique sur leurs lieux d'enseignement mais aussi par leur travail au sein des Commissions Inter-IREM « Collège» et « Statistique et Probabilités », a servi aux auteurs de cette œuvre collective pour en faire cet outil, riche et le plus souvent, à mon sens, fort pertinent, dont nous disposons ici et que j'ai, je dois le dire, bien aimé !

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Le 21 septembre 2011

À propos de l'introduction aux probabilités en Troisième

Brigitte CHAPUT et Claudine VERGNE
Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités

HASARD	**vient de l'arabe**	**AZ-ZAHR**	**qui signifie**	**JET de DÉ**
ALEA	**vient du latin**	**ALEA**	**qui signifie**	**DÉ, JEU de DÉ, JEU de HASARD**
CHANCE	**vient du latin**	**CADERE**	**qui signifie**	**CHOIR, TOMBER**

L'objectif de cet article est de proposer aux professeurs quelques éclairages et quelques pistes pour l'introduction aux probabilités en Troisième. Les propositions n'ont pas de caractère officiel et n'engagent que les auteurs. Le document s'adresse aux enseignants et n'est pas destiné à être transmis directement aux élèves. Nous nous restreignons au cas d'espaces probabilisés finis.

Programme de statistique et probabilités en classe de Troisième (publié le 28 août 2008)

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.3. Statistique Caractéristiques de position.	- Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau ou par une représentation graphique) : • *déterminer une valeur médiane de cette série et en donner la signification ;*	Le travail est conduit aussi souvent que possible en liaison avec les autres disciplines dans des situations où les données sont exploitables par les élèves. L'utilisation d'un tableur permet d'avoir accès à des situations plus riches que celles qui peuvent être traitées « à la main »
Approche de caractéristiques de dispersion.	• *déterminer des valeurs pour les premier et troisième quartiles et en donner la signification ;* • *déterminer son étendue.* - Exprimer et exploiter les résultats de mesures d'une grandeur.	La notion de dispersion est à relier, sur des exemples, au problème posé par la disparité des mesures d'une grandeur, lors d'une activité expérimentale, en particulier en physique et chimie.
1.4. Notion de probabilité	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes,etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves.*

Dans la version 2007 de ce programme, on pouvait lire dans **1.4 Notion de probabilité**, (colonne Commentaires), la phrase supplémentaire : *Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités).*

Cette phrase, loin d'être anodine, engageait à favoriser une approche fréquentiste des probabilités et le document ressource mis à disposition des enseignants (Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège - Probabilités au collège - mars 2008) y fait encore référence (pages 5 à 7 par

exemple). Sa disparition dans la version du programme la plus récente (28 août 2008) n'est pas anodine non plus. Elle n'a pas toujours été remarquée ou prise en compte : cela contribue à jeter le trouble et à créer des disparités importantes dans les interprétations et les mises en œuvre du programme.

Soulignons que le programme incite à *observer des fréquences* et que le mot *modéliser* apparaît. Notre approche didactique s'appuie sur ces prescriptions.

La brièveté du libellé du programme sur le thème *Notion de probabilité* ne doit pas cacher que de nombreuses précisions et mises au point sont nécessaires pour faire comprendre les notions en jeu.

1. Conceptions du hasard

La *notion de probabilité* est indissociable de celle de hasard, car elle a pour objet de quantifier l'attente d'un évènement[2] dont la réalisation est considérée comme dépendante du hasard. À leur arrivée en Troisième, les élèves ont déjà été confrontés à plusieurs conceptions du hasard dans leur vie quotidienne. Il convient, pour cette première rencontre avec les phénomènes aléatoires dans le cadre des mathématiques, de clarifier ceux qui, en mathématiques, permettront d'introduire des probabilités.

Au niveau du programme de Troisième, deux conceptions du hasard sont abordées : celle de *hasard du tirage au sort* dans une population statistique[3], avec équiprobabilité garantie par le générateur de hasard, et celle du *hasard bénin*, cause des fluctuations observées lors de la répétition d'une même expérience aléatoire ; ce dernier s'oppose au *hasard sauvage* de la réalisation fortuite d'un évènement accidentel (la tuile qui tombe du toit au moment où vous passez dessous, selon l'exemple donné par Cournot). L'élève arrive avec des conceptions personnelles relatives au hasard et au tirage au sort, qu'il s'est forgées au quotidien dans son entourage, sous l'influence des médias, etc. Il est important de faire émerger ces conceptions de façon à lever les ambiguïtés, les malentendus qui pourraient faire obstacle à la compréhension de l'approche mathématique de la notion de probabilité. Il s'agit de passer d'un hasard *subi* (dont on subit les effets) à un hasard *construit* auquel on peut rationnellement associer une quantification.

C'est au professeur de mathématiques qu'il revient :

- d'assurer transitions et ruptures entre les conceptions personnelles des élèves et l'approche scientifique ;
- de faire observer des phénomènes aléatoires de manière rationnelle par le biais de protocoles expérimentaux ;
- d'installer un vocabulaire qui permette de décrire ces phénomènes et de formuler des observations et des propriétés.

2. Définir la notion de *probabilité* en Troisième ?

Il s'agit d'expliciter en restant à un niveau élémentaire la *notion* de probabilité installée progressivement, et non pas d'envisager le *concept* de probabilité, ce qui nécessiterait de définir un nouvel objet mathématique.

Dans certains manuels scolaires, les auteurs se sont essayés à donner des *définitions* qui se révèlent des plus fantaisistes.

- Certains ont fait un mélange incompréhensible entre deux approches de la notion : *La probabilité d'un évènement A est la proportion probable, parmi tous les cas possibles, des cas où A sera réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience* (Dimathème, p. 184).
- D'autres ont escamoté la difficulté : *La probabilité d'un évènement A représente les chances*

2 L'accentuation *évènement* est conforme à la dernière réforme de l'orthographe ; l'écriture plus ancienne *événement* est encore acceptée.

3 Cf. Lahanier-Reuter, D.

que l'évènement se réalise lors d'une expérience aléatoire (Diabolo, p. 168).

- D'autres ont privilégié une approche fréquentiste, d'autres encore ont choisi de s'en tenir à la conception laplacienne restrictive : rapport du nombre de *cas favorables* au nombre de *cas possibles*.

Avec les chercheurs contemporains en didactique des probabilités, nous pensons qu'il vaut mieux s'abstenir de donner une définition[4] plutôt que de tomber dans de telles dérives[5]. Au niveau qui nous intéresse, c'est-à-dire dans le cas discret fini où les issues d'une expérience aléatoire sont énumérables, la seule manière de définir formellement la probabilité serait axiomatique et consisterait à donner comme probabilités des issues une famille de nombres de l'intervalle [0 ; 1] dont la somme est égale à 1.

S'abstenir de donner une définition formelle de la probabilité n'affranchit pas d'être précis dans le choix des termes utilisés : ceux-ci ne doivent pas être en contradiction avec les définitions qui seront données dans les classes ultérieures. Nous proposons plus loin un ensemble de formulations qui pourraient être adoptées en Troisième.

Notons aussi que l'on rencontre dans certains ouvrages des énoncés tels que *deux évènements sont incompatibles s'ils ne peuvent se produire en même temps* ou *l'évènement contraire de A est celui qui se réalise quand A n'a pas lieu* qui ne peuvent pas être pris comme définitions : cette façon de s'exprimer introduit une notion de temporalité qui risque de brouiller la perception des notions abordées.

Quels que soient les choix du professeur, l'approche doit être expérimentale, l'institutionnalisation de quelques notions, du vocabulaire ou de propriétés peut se faire en cours d'étude ou en fin de chapitre, mais pas en préalable.

3. Expérience aléatoire

Précisons d'abord que dans le cadre des exercices de probabilités proposés aux élèves, il est fondamental de décrire l'expérience aléatoire associée. Cette remarque n'est pas inutile puisqu'on rencontre encore certains exercices ou même sujets d'examens où rien n'indique le caractère aléatoire de la situation, c'est le cas par exemple de l'énoncé de l'exercice de probabilité du Brevet 2009 (centre de Pondichéry).

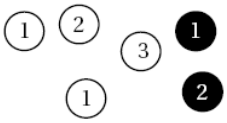
EXERCICE 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule est exacte. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

Pour chacune des trois questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

Énoncé :

Un sac contient six boules : quatre blanches et deux noires. Ces boules sont numérotées :
Les boules blanches portent les numéros 1 ; 1 ; 2 et 3 et les noires portent les numéros 1 et 2.



Numéro	Question	Réponse A	Réponse B
1	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{4}$
2	Quelle est la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 ?	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
3	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche numérotée 1 ?	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$

Dans la description d'une expérience aléatoire, d'un point de vue conceptuel et didactique, on

4 En mathématiques, une définition est la délimitation précise d'un concept dans un cadre théorique en utilisant d'autres concepts et des propriétés caractéristiques.

5 Cf. aussi, dans cette brochure, l'article de Jean-Claude GIRARD, *QUELLE DÉFINITION POUR LA PROBABILITÉ AU COLLÈGE ?*

peut distinguer trois niveaux.

- Le premier niveau est celui de l'*expérience réelle*. Par exemple, on lance une pièce de 1 € en l'air et on observe son comportement : la pièce peut tomber sur le côté Pile ou sur le côté Face ou sur la tranche ou rouler et se coincer sous un meuble (auquel cas le jeu s'arrête), etc. ; on peut ainsi envisager de nombreux *résultats* de l'expérience, certains farfelus mais pas impossibles. Un autre exemple consiste à lancer en l'air un dé cubique rouge et à observer son comportement : le dé peut retomber sur une des six faces ou cogner un obstacle et rester en équilibre sur une arête (dé cassé) ou se briser[6], etc. ; là-aussi on peut envisager de nombreux résultats possibles.
- Le deuxième niveau, celui de l'*expérience pseudo-concrète*, est une première étape dans la simplification et la modélisation de la réalité. Des objets qui produisent du hasard, on ne retient que certaines propriétés. De la multitude de résultats envisageables, on ne retient que ceux qui sont considérés comme pertinents d'un point de vue probabiliste et qui vont être objets d'étude, et on les interprète en termes d'*issues*.
  Par exemple, on lance en l'air une pièce (peu importe sa valeur, sa matière) et on observe si elle tombe sur Pile ou sur Face ; le résultat possible « *la pièce tombe sur la tranche* » n'est pas interprété en termes d'issues. Ou bien on lance un dé cubique (peu importe sa matière, sa couleur) et on observe le nombre de points de la face supérieure. Le résultat est interprété par l'issue 1, le résultat est interprété par l'issue 2, etc.
- Le troisième niveau est celui du *modèle mathématique* ou *modèle probabiliste*. Les objets, générateurs de hasard, sont idéalisés : *la* pièce est dite *équilibrée* (on s'intéressera plus loin au sens que l'on peut donner à cela), *le* dé est *homogène* et *régulier.* On introduit un ensemble d'*éventualités*, chacune étant affectée d'un nombre compris entre 0 et 1 (le rôle et les propriétés de ces nombres seront précisés plus loin). Cet ensemble d'éventualités représente en général les issues considérées dans le modèle pseudo-concret. L'ensemble des éventualités est appelé *univers* ou *ensemble fondamental* ou encore *référentiel*, il est noté Ω ou E. Par exemple, on peut modéliser les issues Pile et Face du lancer d'une pièce bien équilibrée par le choix des éventualités 0 et 1 et attribuer à chacune la probabilité $\frac{1}{2}$. Pour modéliser le lancer d'un dé cubique régulier dont les 6 faces sont les issues considérées, on peut choisir comme éventualités 1, 2, 3, 4, 5 et 6, chacune étant associée à la probabilité $\frac{1}{6}$.

Une *expérience aléatoire* est un processus :

- où le hasard intervient pour produire un effet parmi d'autres possibles ;
- qui est susceptible d'être décrit par un *protocole expérimental*, lequel en permet, au moins par la pensée, la reproductibilité dans les mêmes conditions.

Le *protocole expérimental* est l'ensemble des instructions à suivre pour réaliser l'expérience aléatoire. Il est donc indissociable de celle-ci. Il doit :

- décrire clairement et avec précision les conditions de réalisation de l'expérience de façon à la caractériser et à pouvoir la reproduire dans les mêmes conditions ;
- décrire les observations qui peuvent être attendues d'un point de vue expérimental et présenter la liste des issues (on disait aussi les *cas possibles*) qui peuvent se présenter.

Le respect du protocole garantit que l'issue d'une expérience ne peut être ni prévue, ni calculée, ni influencée : à notre échelle, elle dépend du hasard. C'est la reproductibilité du protocole qui permet de reproduire l'expérience dans les mêmes conditions ; c'est la non-prédictibilité de l'issue qui confère à l'expérience son caractère aléatoire[7].

Par exemple, pour le jet d'un dé, le protocole peut être le suivant :

6 Cf. Ekeland, I.
7 Cf. *Autour de la modélisation en probabilités*.

- le dé est placé dans un cornet que l'on secoue avant de le lancer ;
- le dé doit choir et rebondir sur un plateau à bord haut ;
- le dé ne doit pas être touché avant son immobilisation ;
- une fois le dé immobilisé, on regarde la face supérieure ;
- les six issues retenues sont notées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le mot *évènement* au sens probabiliste (pas au sens médiatique !) recouvre plusieurs acceptions suivant le degré d'abstraction, tout comme en géométrie, le mot *cube* désigne à la fois un objet réel référent, un dessin en perspective sur un papier (le signifiant), un solide de la géométrie aux propriétés idéales (le signifié).

- Dans la description de l'expérience aléatoire réelle, un évènement est décrit par une assertion. Par exemple, pour le jet d'un dé, on peut s'intéresser à l'évènement « *la face supérieure du dé montre un nombre pair* ». Lorsqu'on réalise concrètement l'expérience, on obtient un résultat que l'on interprète en terme d'issue. Alors l'assertion se révèlera vraie, auquel cas on dit que l'évènement est réalisé, ou fausse.
- Dans le cadre d'un modèle pseudo-concret, un évènement est caractérisé par la liste des issues qui le réalisent (on disait aussi *cas favorables*). Par exemple, pour le jet d'un dé, l'évènement « *obtenir un nombre pair* » est réalisé par les issues 2, 4 et 6.
- Dans le modèle probabiliste, le mot évènement désigne un sous-ensemble de Ω ; par exemple, pour le jet d'un dé, l'évènement « *obtenir un nombre pair* » est $A = \{2 , 4 , 6\}$. Les singletons de Ω sont appelés *évènements élémentaires* (on distingue ainsi en toute rigueur, l'éventualité e_i de l'évènement élémentaire $\{e_i\}$ qui lui est canoniquement associé)[8].

4. Observation des fréquences

Le programme précise que *la notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières*. De fait, il convient de ne pas dissocier la description statistique et les probabilités : les outils de la statistique[9] permettent de décrire et de résumer des résultats d'expériences aléatoires, les probabilités permettent de modéliser les phénomènes aléatoires.

Que peut signifier *observer les fréquences* et en quoi cette observation peut-elle déboucher sur la notion de probabilité ?

a) Distribution de fréquences

On considère une expérience aléatoire donnant lieu à r issues possibles $e_1, e_2,\dots e_r$. En répétant n fois cette expérience aléatoire et en faisant la liste des n issues obtenues, on obtient un échantillon de taille n. Si, dans cet échantillon, l'issue e_i apparaît k fois, on dira que la fréquence de e_i dans l'échantillon est $f(e_i)=\frac{k}{n}$. Après avoir constitué un tel échantillon de taille n, on détermine la fréquence observée de chacune des issues $e_1, e_2,\dots e_r$, puis on établit la distribution de ces fréquences :

Issues	e_1	e_2	...	e_r	
Fréquences	f_1	f_2	...	f_r	1

Distribution des fréquences des issues observées sur un échantillon de taille *n*

On voit facilement que la somme des fréquences est égale à 1.

Si l'on produit 3 échantillons de taille 50 du lancer d'un même dé cubique, les distributions de

8 Dans un exposé élémentaire, le modèle pseudo-concret est confondu avec le modèle probabiliste abstrait, les mots *issue* et *éventualité* deviennent alors synonymes.

9 Au sens donné à ce terme dans le programme de Troisième, il s'agit en fait de la statistique descriptive, qui est une branche de la science *Statistique*.

fréquences peuvent être par exemple :

Distribution 1

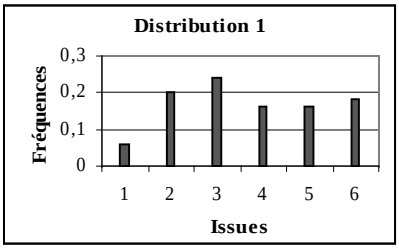
Issues	1	2	3	4	5	6	
Fréquences	$\frac{3}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	1

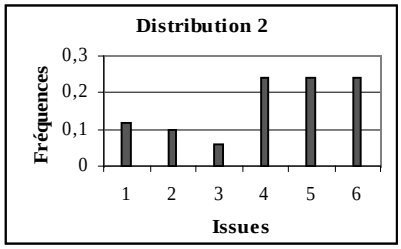
Distribution 2

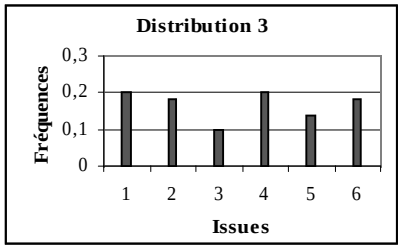
Issues	1	2	3	4	5	6	
Fréquences	$\frac{6}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{12}{50}$	1

Distribution 3

Issues	1	2	3	4	5	6	
Fréquences	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	1







Lancer d'un dé : distribution des fréquences des issues observées sur trois échantillons de taille 50

La première observation fondamentale est celle de la *variabilité* des fréquences d'un échantillon à l'autre : elle est inhérente au caractère aléatoire de l'expérience.

Le constat de l'inévitable variabilité ne va pas de soi et ne doit pas être occulté ; il constitue une rupture épistémologique et didactique dans la classe de mathématiques où, habituellement, il est considéré que chacun doit donner la même réponse à une question posée. La prise de conscience de la variabilité est nécessaire pour saisir la nature des questions et des réponses qui sont en jeu dans le calcul de probabilités ainsi que les formulations que l'on adopte pour rendre compte des résultats des calculs.

Dans l'exemple ci-dessus, y a-t-il une distribution *meilleure* que les autres ? L'obtention de la distribution 3 rend-elle caduque celle de la distribution 1 produite antérieurement ? Sur quelle distribution s'appuyer pour prendre une décision, par exemple, relative à la qualité du dé utilisé ?

Comment gérer la diversité et la volatilité des données ? Cette problématique peut motiver la recherche d'un *modèle* de l'expérience aléatoire qui, à la fois, rende compte du phénomène aléatoire et s'affranchisse de la variabilité. Par exemple pour le *lancer d'un dé cubique*, si l'on considère qu'il est régulier et homogène, il n'y a pas plus de raison d'obtenir le 1 que le 2 ou que tout autre nombre. Les nombres positifs affectés à 1, à 2, ..., à 6 doivent être égaux, de somme 1. Pour ces raisons, le modèle probabiliste attaché peut, sans surprise, être décrit par la distribution de probabilité :

Éventualités	1	2	3	4	5	6	
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Dans la culture courante, ce modèle existe, au moins de manière implicite. On peut être tenté de le poser *a priori*. Toutefois, on enrichit considérablement son sens et sa portée si on le propose après avoir travaillé sur la variabilité des fréquences pour des échantillons de taille donnée et après avoir remarqué que, pour certaines tailles d'échantillons, le nombre $\frac{1}{2}$, admis par tous, ne peut *jamais* être une fréquence observée (par exemple, pour des échantillons de taille 50, les fréquences observées sont toutes de la forme $\frac{k}{50}$, k entier entre 0 et 50).

b) Analogie entre distribution de fréquences et loi de probabilité

Un deuxième type d'observations concerne les calculs de fréquences. Ceux-ci correspondent assez bien à l'intuition des élèves et si l'on s'en tient aux programmes en vigueur, ils pourraient être travaillés depuis la classe de Cinquième, à partir de l'étude de populations dans le cadre du chapitre *Gestion de données*.

Par exemple, à partir de la distribution des fréquences des issues d'un échantillon de taille 150 du lancer d'un dé cubique ci-dessous, demander de compléter la distribution, de calculer la fréquence

d'un nombre pair, d'en déduire la fréquence d'un nombre impair... permet de mettre en œuvre des propriétés des fréquences telles que : la somme des fréquences est 1 ; la fréquence d'un évènement est la somme des fréquences des issues réalisant cet évènement, le complémentaire à 1 de la fréquence d'un évènement donne la fréquence de l'évènement contraire...

Issues	1	2	3	4	5	6
Fréquences	$\frac{23}{150}$	$\frac{23}{150}$	$\frac{27}{150}$	...	$\frac{30}{150}$	$\frac{24}{150}$

L'objectif est d'exploiter les analogies entre *Distribution des fréquences des issues observées sur un échantillon de taille donnée* et *Loi de probabilité sur un ensemble fini* de façon à donner du sens à la modélisation. Dans le cas fini qui nous intéresse, la définition mathématique (pour le professeur) du concept de probabilité peut être la suivante :

> Dans un modèle probabiliste fini, une loi de probabilité P sur l'ensemble fini $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ est une application définie sur l'ensemble des parties de Ω, à valeurs dans [0 ; 1]. La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires de Ω est égale à 1. La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

De fait, P est déterminée dès que l'on connait les éventualités e_i et les probabilités correspondantes $P(\{e_i\})$, c'est-à-dire dès que l'on connaît la distribution de probabilité :

Éventualités	e_1	e_2	...	e_r	
Probabilités	$P(\{e_1\})$	$P(\{e_2\})$	...	$P(\{e_r\})$	1

En pratique, par abus d'écriture, on écrit le plus souvent $P(e_i)$ au lieu de $P(\{e_i\})$ et plus simplement encore p_i.[10]

Les analogies sont résumées dans le tableau suivant, restreint au cas où les éventualités de l'univers correspondent aux issues du modèle pseudo-concret.

Distribution des fréquences des issues observées sur un échantillon de taille donnée	**Loi de probabilité *P* sur un ensemble fini Ω**
Issues: e_1, e_2, ..., e_r Fréquences: f_1, f_2, ..., f_r, 1	Éventualités: e_1, e_2, ..., e_r Probabilités: p_1, p_2, ..., p_r, 1
• Pour tout $i \in [1, r]$, $f_i \geq 0$	• Pour tout $i \in [1, r]$, $p_i \geq 0$
• $\sum_{i=1}^{r} f_i = 1$	• $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$
• Pour un évènement A, la fréquence de A est : $f(A) = \sum_{e_i \text{ réalisant } A} f_i$	• Pour un évènement A, la probabilité de A est : $P(A) = \sum_{e_i \in A} p_i$
• non$A$ (ou bien A) désignant l'évènement contraire de A : $f(\text{non}A) = 1 - f(A)$.	• A désignant l'évènement contraire de A, complémentaire de A dans Ω : $P(\text{A}) = 1 - P(A)$.
• Si A et B sont incompatibles (sans issues	• Si A et B sont incompatibles (i.e. $A \cap B = \varnothing$) :

10 On rencontre parfois la notation Prob(A) pour désigner la probabilité d'un évènement A. Cette notation, qui s'apparente à une abréviation, n'est pas opportune pour désigner l'image de l'évènement A par une loi de probabilité donnée, car cette loi variant d'un exercice à l'autre, l'écriture Prob laisserait imaginer qu'elle pourrait revêtir un caractère absolu, indépendamment de l'expérience considérée.

communes) : $f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Rq : La notation A *pour l'évènement contraire de A est recommandée dans le programme.*

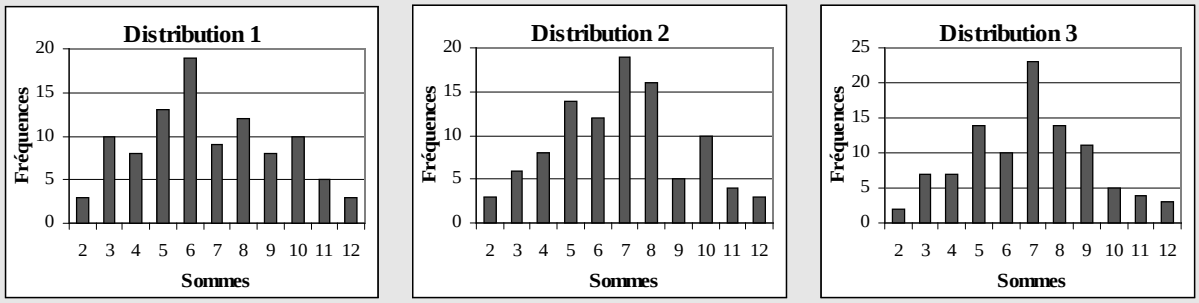
c) Validité d'un modèle

Dans certains cas, l'observation des fréquences peut jouer le rôle de *contrôle* de la validité d'un modèle.

Considérons, par exemple, l'expérience qui consiste à lancer en même temps deux dés cubiques réguliers et à observer la somme des points des faces supérieures. On se persuade vite que les issues que l'on peut raisonnablement attacher à cette expérience aléatoire sont 2, 3, …, 12. Un néophyte en calcul de probabilités est souvent tenté alors de modéliser cette expérience aléatoire par la distribution de probabilité (biais psychologique d'équiprobabilité) :

Éventualités	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

Or la production de quelques échantillons de taille donnée (pas trop petite) va conduire à mettre en doute sa validité. Il faut alors rechercher un nouveau modèle, qui sera plus en accord avec les résultats de l'expérimentation et, si possible, explicatif.



Lancer de deux dés : distribution des fréquences des sommes observées sur trois échantillons de taille 100

Des problèmes de ce type, soulevant un désaccord entre un modèle (implicite parfois) et les résultats de l'expérimentation ont joué historiquement un rôle important dans l'avancée des recherches et la formalisation de la théorie des probabilités[11]. Ils illustrent clairement la dialectique entre Statistique et Probabilité, qui s'alimentent l'une de l'autre. À l'origine, ces problèmes ont été résolus en considérant des modèles d'*équiprobabilité*.

5. Situations d'équiprobabilité

Pour les situations familières invoquées dans le programme, la modélisation pourra s'appuyer sur des raisons de symétries (de la pièce, du dé...) et conduire au choix du modèle d'équiprobabilité en considérant qu'il n'y a pas plus de raison d'obtenir une issue plutôt qu'une autre : c'est le *principe de raison insuffisante* invoqué par Laplace à propos d'issues *également possibles*[12]. Dans le cas où l'on peut supposer que les issues d'une expérience aléatoire sont *d'égale possibilité*, on est amené à

11 On peut penser au problème du Grand Duc de Toscane. Celui-ci avait observé que lorsqu'on lance trois dés et que l'on fait la somme des faces apparues, on obtient 10 un peu plus souvent que 9. Or, se disait-il, 10 se décompose de six façons en somme de trois entiers compris entre 1 et 6 (6+3+1, 6+2+2, 5+4+1, 5+3+2, 4+4+2, 4+3+3) et il en est de même pour 9 (6+2+1, 5+3+1, 5+2+2, 4+4+1, 4+3+2, 3+3+3). Le Duc de Toscane avait exposé ce paradoxe à Galilée qui rédigea vers 1620 un mémoire sur les jeux de dés pour lui répondre (ce mémoire n'a été publié qu'en 1718). Un poème attribué à Richard de Fournival, *De Vetula*, décrit dès 1260, les 216 *manières de tomber* équipossibles, correspondant aux 56 combinaisons observables sur 3 dés réalisant les 16 totaux possibles.

12 Début de l'Essai philosophique sur les probabilités de 1814.

attribuer à chaque éventualité la probabilité égale à $\frac{1}{cardinal(\Omega)}$. La probabilité d'un évènement *A* est alors obtenue en ajoutant ce nombre autant de fois qu'il y a d'éventualités dans *A*. C'est ainsi que l'on retrouve la formule que Laplace avait donnée comme premier principe du calcul des probabilités $P(A)=\frac{cardinal(A)}{cardinal(\Omega)}$ et qu'il énonçait sous la forme $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

Ainsi, pour le problème de la somme de 2 dés cubiques, on peut considérer que les 2 dés sont distincts, par exemple l'un est rouge, l'autre vert, et choisir comme univers l'ensemble des couples (x, y), x désignant le nombre obtenu sur le dé rouge, y celui obtenu sur le dé vert[13].

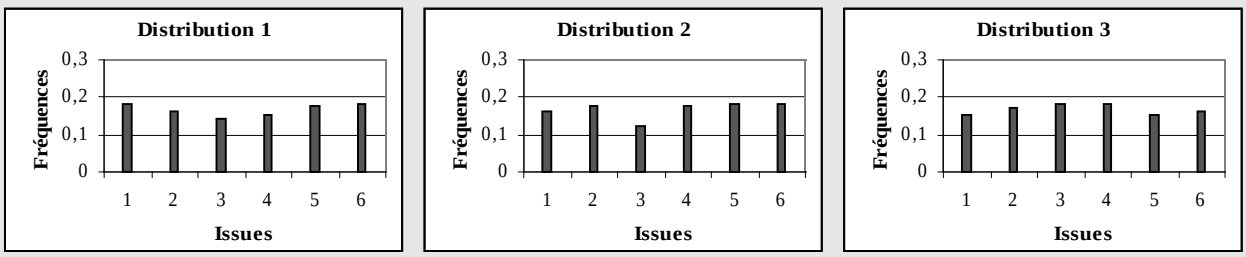
Dans ce cas, chaque couple est *également possible* et on attribue à chacun la probabilité $\frac{1}{36}$. L'évènement « *la somme est 7* » étant égal à $\{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$, sa probabilité est $\frac{6}{36}$. On obtient facilement les probabilités ci-dessous, plus en accord avec les distributions de fréquences représentées plus haut.

Sommes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Dans la plupart des exercices au niveau de la classe de Troisième, l'énumération des éventualités est très facile et il serait regrettable que la mention *Calculs de probabilités dans des contextes familiers* soit interprétée de telle sorte qu'elle conduise les professeurs à tomber dans l'ornière de calculs complexes de dénombrements. Il faut s'en tenir à des calculs très simples, soit directs, soit mettant en jeu la règle d'addition : *la probabilité que se réalise l'un au moins de deux évènements incompatibles (ou disjoints) est la somme de leurs probabilités*.

6. Stabilisation des fréquences

Malgré la restriction apportée dans la version du programme du 28 août 2008, *l'observation des fréquences des issues* peut bien sûr amener à constater que, pour des échantillons de très grande taille, la variabilité des fréquences observées d'un échantillon à l'autre est moindre : il y a une relative stabilisation des fréquences. La comparaison des distributions des fréquences pour les trois échantillons de taille 500 ci-dessous avec celles obtenues pour le même dé pour des échantillons de taille 50 (**4- a)**) illustre ce phénomène.



Lancer d'un dé : distribution des fréquences des issues observées sur trois échantillons de taille 500

On constate ainsi un effet du *hasard bénin*, cela sera précisé en classe de Seconde à l'aide de la notion d'*intervalle de fluctuation*. Mais en adoptant cette démarche, on évite de *définir* la probabilité d'une issue par des notions vagues de *limite de fréquences* qui posent des problèmes épistémologiques non pertinents à ce niveau et qui dépassent les enjeux de cette classe ; une

13 Il est intéressant de remarquer que l'attribut *couleur du dé*, considéré comme non pertinent pour la modélisation de l'expérience aléatoire *lancer d'un dé cubique équilibré* peut aider à la modélisation de l'expérience aléatoire *lancer de 2 dés cubiques équilibrés et somme des faces*. Mais d'autres distinctions peuvent être proposées : tailles différentes, jets successifs… Cette distinction de couleurs n'est là que pour aider la pensée, car les probabilités des évènements considérés dans cette expérience ne dépendent évidemment pas de la couleur des dés.

approche, même très vulgarisée de la loi des grands nombres n'est pas un objectif du programme de Troisième.

7. Que dire aux élèves ?

De tout ce qui précède, que peut-on communiquer à des élèves de Troisième ? Le vocabulaire lié à la notion de probabilité peut être introduit progressivement sur des exemples. Voici une proposition de formulations que l'on pourrait adopter en Troisième pour l'étude du lancer d'un dé équilibré.

- Chaque lancer d'un dé cubique produit un *résultat* comme ⚀, ⚁, …, dé cassé, dé perdu...

Dans l'étude expérimentale du lancer d'un dé cubique, on ne s'intéresse qu'à certains résultats ; on retient comme *issues* les résultats des faces supérieures que l'on note 1, 2, ... 6.

- Si l'on imagine le lancer d'un dé parfaitement régulier, les 6 issues sont des éventualités également possibles. On peut modéliser le lancer d'un dé équilibré par la donnée des éventualités et de probabilités qui leur sont attachées :

Éventualités	1	2	3	4	5	6	
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On dit : la probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{6}$, la probabilité d'obtenir 2 est $\frac{1}{6}$, etc.

- Un évènement est un ensemble d'éventualités.

Par exemple, l'évènement « *le nombre obtenu est impair* » est noté si nécessaire B = {1 , 3 , 5}.
On dit que 1 *réalise B*, de même 3 *réalise B*... On peut dire aussi *B est réalisé par* 1...
On dit aussi 4 *ne réalise pas B*.

- Pour calculer la probabilité d'un évènement, on effectue la somme des probabilités des éventualités qui le réalisent.

Par exemple : $P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$

Avec les élèves, en pratique, il n'y a pas lieu de se focaliser sur la distinction entre *issue* et *éventualité*, un mot est souvent employé à la place de l'autre. La nuance est qu'une éventualité est ce qu'on peut attendre comme issue quand on effectue l'expérience.

Nous évitons ainsi, en Troisième, de parler d'évènement élémentaire et d'énoncer la phrase connue de tous, explicitement au programme de Seconde : *la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent*. Notre choix est guidé par le souci de ne pas alourdir le vocabulaire en Troisième et justifié par l'abus d'écriture précité entre $P(\{e_i\})$ et $P(e_i)$. On pourra noter $P(1)=\frac{1}{6}$, $P(2)=\frac{1}{6}$, etc.

8. Chance ? Chances ?

Dans le chapitre *Probabilités* des manuels scolaires, on voit fleurir dans les activités d'introduction, et parfois dans les définitions, de nombreuses expressions utilisant le mot *chance*. Ce mot du langage courant est susceptible d'être connoté subjectivement en fonction de la personne qui l'emploie. En l'utilisant, quelle part d'affectivité risque-t-on de laisser passer dans les représentations qui vont s'installer chez les élèves ? Par ailleurs, dans les expressions qui l'utilisent couramment, le mot prend des sens différents.

Considérons par exemple l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard dans une urne un jeton parmi 10, indiscernables au toucher et marqués chacun d'un numéro de 1 à 10. On gagne si le numéro tiré est 9 ou 10, on perd dans les autres cas. Concernant les *chances* de gagner, on peut rencontrer plusieurs formulations.

- « Il y a 2 *chances* sur 10 de gagner ». Dans ce cas, le mot *chances* semble désigner les

différentes issues réalisant le gain, les cas favorables. Mais si l'on considère que 2 sur 10 exprime la proportion de numéros gagnants sur le nombre total de numéros, 2 *chances* sur 10 *chances* au total renvoie aux 10 issues ou cas possibles.

▪ Mathématiquement parlant, il est tout aussi acceptable de dire « Il y a une *chance* sur 5 de gagner ». Mais alors que représente le mot *chance* ?

▪ Si l'on énonce « Il y a 20 % de *chance* de gagner », le mot *chance* semble désigner la grandeur dont on prend 20 %, c'est-à-dire ici 1, la probabilité de l'univers.

▪ « Il y a 4 fois plus de *chance* de perdre que de gagner » exprime une comparaison entre la probabilité de perdre et celle de gagner.

▪ Sans compter qu'un élève, amené hors des mathématiques par sa perception du mot *chance*, peut s'exclamer : « Oh moi, je n'ai aucune *chance* de gagner, je ne gagne jamais ! ».

Ce simple exemple montre la polysémie attachée au mot *chance* dans des expressions courantes. Même en mathématiques, la polysémie existe (pensons au mot *cube* déjà évoqué), mais elle doit être évitée autant que possible. Selon nous, le mot *chance* doit être écarté du langage mathématique. Un des objectifs de l'enseignement des probabilités au niveau du collège est précisément de faire passer les élèves du langage familier des chances au langage mathématique rigoureux des probabilités. L'opportunité en est donnée au moment de la modélisation d'une expérience aléatoire. Une fois qu'un modèle est adopté, on effectue des calculs de probabilités (et non pas de *chances*) et on exprime les résultats des calculs en termes de probabilités. Par exemple, dans le tirage d'un jeton de l'urne, on dira que la probabilité de *tirer 9* est $\frac{1}{10}$ ou 0,1 ; que la probabilité de gagner est $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ ou 0,2. Ce passage d'un langage en termes de *chance* à un langage en termes de probabilité nous paraît être un enjeu important de la classe de Troisième.

9. Simulation ?

Le programme ne parle pas de simulation. La simulation d'échantillons est certes, pour le professeur, un outil efficient pour produire des données, illustrer des phénomènes... Peut-on, doit-on faire travailler les élèves sur la simulation instrumentée par une calculatrice ou un ordinateur dès la Troisième ? Les avis divergent sur la question. Quoiqu'il en soit, avant toute simulation d'une expérience aléatoire, il paraît indispensable de faire réaliser l'expérience concrètement plusieurs fois par les élèves pour qu'ils saisissent précisément où le hasard intervient.

Au-delà de l'introduction du calcul des probabilités, comme le soulignait en 2002 le rapport au Ministre de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, il est important de créer une culture de l'aléatoire chez les élèves, sans l'imposer de façon dogmatique.

Références bibliographiques

BELLHOUSE, D. R. (2000). *De Vetula : a medieval manuscript containing probability calculations*, International Statistical Review, 68 (2), 123-136.

Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2001). *Autour de la modélisation en probabilités.* M. Henry (éd.), Presses Universitaires Franc-Comtoises, col. Didactiques, Besançon.

Commission de Réflexion sur l'enseignement des mathématiques – Rapport d'étape – Statistique et probabilités (avril 2001)

- publié dans :
  KAHANE, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Rapport au ministre. - Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, sous la direction de Jean-Pierre Kahane. Odile Jacob.
- en ligne sur le site http://smf4.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/

RapportStatistiqueProba/RapportStatistiqueProba.pdf

EKELAND, I. (1991). *Au hasard. La chance, la science et le monde*. Seuil

LAHANIER-REUTER, D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques.* P.U.F.

LAPLACE, P. S. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition, 1825), préface de René THOM, postface de B. BRU, Editions Bourgois, 1986.

Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège - Probabilités au collège (mars 2008) : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/6/doc_acc_clg_probabilites_109176.pdf

Des statistiques aux probabilités Un lieu privilégié pour la modélisation

Jean-Claude DUPERRET
APMEP, IREM et IUFM Champagne-Ardenne

Introduction

On est passé, en 30 ans, d'un enseignement dit de **structure** à un enseignement dit de **modélisation**, sans que cette évolution n'ait été clairement explicitée. Cela renvoie à la question bien ambitieuse de la modélisation, surtout lorsqu'on la pose dans le cadre des mathématiques. Si la plupart des autres disciplines scientifiques ont pour objet de **décrire** et de **modéliser** un point de vue du *monde réel*, point de vue différent suivant ces disciplines, comment les mathématiques peuvent-elles s'inscrire dans ce rapport au monde réel ? Les mathématiques ont-elles pour objet de *décrire* la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? Y a-t-il unicité du modèle pour traduire une *réalité*, ou celui-ci n'est-il pas lié à *l'intention* de modélisation ? En quoi la connaissance du modèle permet-elle *d'éclairer* la réalité, voire de l'expliquer et d'avoir une attitude *opérationnelle* et *décisionnelle* ?

On peut choisir cet angle de la modélisation pour *revisiter* des notions que nous construisons dans nos classes. En effet, cette approche me paraît bien donner la philosophie de ce que devrait être un enseignement de mathématiques pour tous : donner un outil de pensée du monde dans lequel nous vivons en nous appuyant sur un processus intellectuel de description, d'investigation, d'action et de validation. C'est ce que je propose dans deux articles intitulés « *De la modélisation du monde au monde des modèles* » parus dans les numéros 484 et 486 du Bulletin Vert de l'APMEP, et que je reprends en très grande partie ici pour ce qui concerne les statistiques et les probabilités.

Mais le passage des statistiques aux probabilités est certainement le lieu privilégié dans notre enseignement pour illustrer ce qu'est un processus de modélisation, et c'est pourquoi j'ai choisi de développer plus particulièrement en fin d'article la « *situation des spaghettis* » car elle fut pour moi l'occasion de me confronter à cette question à un moment où mes connaissances et pratiques dans ce domaine étaient pour ainsi dire nulles !

Les situations que je proposerai pour éclairer mon propos vont de l'école au post-bac. Je les ai toutes vécues ou proposées, que ce soit dans le cadre de l'enseignement ou celui de la formation initiale ou continue des professeurs de mathématiques (voire professeurs des écoles pour certains).

Cet article reprend aussi en grande partie une conférence que j'ai faite lors du colloque : *« Les dés sont-ils à jeter ? »* organisé par les commissions Inter-IREM Collège et Statistique Probabilités, en juin 2008, à Périgueux (voir les actes correspondants).

1. **La modélisation**

1.1. Modélisation

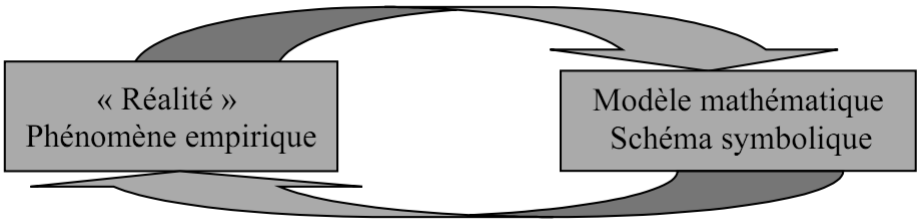
Comme je l'ai dit dans mon résumé, le mot **modélisation** a un sens lié aux différentes disciplines scientifiques. Pour ma part, dans le cadre d'un enseignement des mathématiques pour tous, j'utiliserai cette notion de modélisation comme un processus de « re-présentation » de situations d'une certaine *réalité* dans un modèle mathématique, « re-présenter » étant pris au sens de présenter cette situation avec une nouvelle description liée au modèle choisi.

Et j'attacherai à ce processus de représentation trois spécificités :

- représentation **fonctionnelle** des objets d'une certaine *réalité* par des objets *abstraits* ou *schématisés* dans un modèle où peut s'exercer un traitement théorique ;
- représentation **analogique** ou **métaphorique** : les processus naturels sont *imités* dans des conditions qui favorisent l'observation et l'étude ;
- représentation **sélective** : un travail de modélisation nécessite de *retenir* certaines caractéristiques de la situation et d'en *ignorer* d'autres.

1.2. Modélisation et modèle

Ce processus de modélisation s'illustre par le schéma ci-dessous :



Ce schéma fonctionne dans les deux sens :

- du réel vers le modèle : modèles descriptifs (transformer et interpréter des informations) ; ce sens correspond à une fonction **heuristique** ;
- du modèle vers le réel : modèles prédictifs (anticiper une action) ; ce sens correspond à une fonction **justificative**.

2. Modéliser l'information… ou « un modèle peut en cacher un autre »

2.1. Deux modèles

2.1.1. Miracle

Voici un article paru dans *Le Canard enchaîné* en juillet 2006 :

Sous le titre « Un bon cru au bac », « La République des Pyrénées » (13/7) s'extasie devant les résultats de la bonne ville de Lourdes : « 96 % de mentions très bien, bien et assez bien ». « Du jamais vu ! » Mazette ! La cité mariale serait-elle un paradis pour les surdoués ? En réalité, pour obtenir ces mirobolants 96 %, le confrère a eu un recours à un calcul simple. Il a ajouté le pourcentage du lycée public de La Serre de Sarsan (« toutes mentions confondues », 50 %), à celui du lycée privé Peyramale (« 46 % de mentions »). En additionnant ces deux nombres, il faudrait donc compter « 96 % de mentions » à Lourdes. Et ce n'est pas fini. Car un troisième lycée de la ville n'ayant pu être comptabilisé, la part de ces mentions au bac devrait, selon cette nouvelle arithmétique, dépasser largement les 100 %. Lourdes, ville de tous les miracles !

On peut dire que l'auteur de l'article incriminé maîtrise bien l'addition, mais qu'il s'est trompé de modèle !

2.1.2. Deux grands modèles dans l'enseignement

Deux grands modèles vont se construire entre l'école et le collège, avec leurs modes de traitement et de calcul spécifiques :

- le modèle **additif** : comparaison absolue ;
- le modèle **proportionnel** : comparaison relative.

Et, comme l'auteur de l'article ci-dessus, nos élèves vont faire des confusions entre ces deux modèles, comme en témoignent ces situations vécues dans mes classes.

2.1.3. Redoublants et doublements

Quand je proposais à mes élèves de sixième les résultats suivants sur le nombre de redoublants en troisième dans deux collèges de l'agglomération troyenne (chiffres fictifs) :

- *Albert Camus : 15 redoublants en 3e ;*
- *Paul Langevin : 12 redoublants en 3e.*

Leur première réaction était de dire que le collège Langevin était meilleur que le collège Camus, puisqu'il y avait moins de redoublants.

C'était une occasion de leur faire comprendre ces notions de comparaison **absolue** et **relative**, en leur proposant de calculer le taux de doublement, avec l'information ci-dessous sur les populations de référence :

- *Albert Camus : 125 élèves en 3e ;*
- *Paul Langevin : 80 élèves en 3e.*

Et ainsi de leur faire constater que leur conclusion s'inversait :

- taux de doublement à A. Camus : 12 % ;
- taux de doublement à P. Langevin : 15 %.

2.1.4. Plus de garçons ou de filles ?

Je leur proposais alors la situation suivante :

Dans une petite ville, tous les élèves de collège sont scolarisés dans l'un des deux collèges suivants, avec la proportion de garçons et filles correspondante :

- Pierre Brossolette : 45 % de garçons, 55 % de filles ;
- Gaston Bachelard : 60 % de garçons, 40 % de filles.

À ma question : « *Y a-t-il plus de garçons ou de filles scolarisés en collège dans cette ville ?* », il se trouvait toujours un certain nombre d'élèves pour répondre qu'il y avait plus de garçons, puisqu'il y en avait 105 % contre 95 % de filles !

C'était alors l'occasion de leur montrer que suivant les populations de référence, on pouvait aboutir à trois conclusions différentes :

- à Brossolette : 420 élèves ; à Bachelard : 360 élèves.

Soit 405 garçons et 375 filles.

- à Brossolette : 520 élèves ; à Bachelard : 260 élèves.

Soit 390 garçons et 390 filles.

- à Brossolette : 740 élèves ; à Bachelard : 300 élèves.

Soit 513 garçons et 527 filles.

Dans un monde d'information chiffrée comme le nôtre, pour armer nos élèves dans leur vie de futur citoyen, développer cette confrontation entre ces deux modèles me paraît fondamental.

2.1.5. Le modèle proportionnel

Le modèle proportionnel est particulièrement riche, avec la diversité des registres de représentations possibles d'une même situation :

- ***Registre numérique*** : suites proportionnelles, tableaux, règle de trois… Ce registre est celui de l'entrée dans ce modèle à l'école primaire.
- ***Registre algébrique*** : « $y = kx$ », propriétés de linéarité… On trouve ce registre dès l'école primaire avec l'utilisation en acte des propriétés de linéarité.
- ***Registre fonctionnel*** : application linéaire, traduction graphique… Ce registre est plus spécifique du collège.
- ***Registre géométrique*** : théorème de Thalès, lien entre parallélisme et proportionnalité… Là encore ce registre est présent en acte dès l'école primaire, avec par exemple le guide-âne au cycle 3 (réseau de parallèles qui permet de lire ou représenter des fractions).

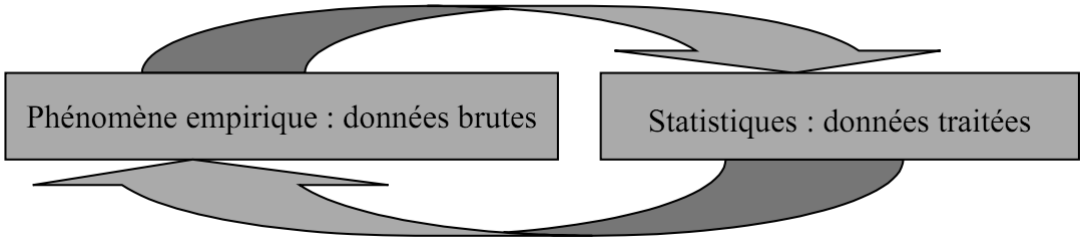
La conceptualisation, le traitement et la validation vont être spécifiques à chacun de ces registres. Notre enseignement doit à la fois travailler au maximum ces spécificités ainsi que les conversions d'un registre à l'autre pour donner des éclairages complémentaires d'une même situation.

2.2. *Les Statistiques*

2.2.1. La statistique, une pratique très ancienne !

Beaucoup d'activités humaines, comme le commerce, reposent sur l'observation de données, et en ce sens, on peut dire que la statistique est une discipline expérimentale que pratique l'homme depuis très longtemps, avec un objectif de prévision, comme la gestion de stock dans le commerce. Et, pour ce faire, l'homme a toujours essayé de « limiter » le hasard. Et pourtant ce hasard est omniprésent dans nos croyances et souvent dans nos décisions… comme nous le verrons plus loin.

2.2.2. La statistique descriptive



La statistique constitue le modèle mathématique de traitement de l'information. Cette modélisation présente, là encore, un aller-retour entre le monde réel et le monde mathématique comme l'illustre le schéma ci-dessus.

De la réalité vers les mathématiques, les statistiques vont transformer les données brutes en les représentant de façon **classée** pour pouvoir en faire des **résumés**.

En sens inverse, ces résumés vont conduire à des **interprétations** du phénomène empirique. Comprendre cette transformation synthétique des informations, pouvoir l'analyser correctement et donc prudemment, sont des enjeux d'une formation de l'individu dans la société. C'est pourquoi on caractérise souvent leur enseignement par le vocable « mathématiques du citoyen », c'est-à-dire :

- une formation à l'analyse des données et au traitement de l'information ;
- un développement des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations, critiquer un traitement ;
- en s'appuyant sur de fréquents changements de registre : texte, tableau, graphique, résultat numérique…

De manière plus précise, il faut faire comprendre aux élèves que le problème fondamental de la statistique descriptive est de résoudre le dilemme résultant de la transformation de données *brutes* en une *synthèse* qui parvienne à concilier le mieux possible deux pôles antagonistes : la **fidélité** et la **clarté** (voir article « *Heurs et malheurs du su et du perçu en statistique* » de Bernard Parzysz, dans Repères-IREM, n°35).

2.2.3. Une question épineuse

À partir d'une question qui se pose dans le monde « réel », un premier travail sera de préciser cette question en vue de mettre en place un protocole d'observation. Un passage par les statistiques va alors permettre un traitement mathématique conduisant à proposer une réponse à cette question.

Prenons la question : « *Les garçons sont-ils meilleurs en maths que les filles ?* ». Précisons-la : « *Les garçons réussissent-ils mieux en maths que les filles ?* »

Pour répondre à cette question, on propose de faire passer un test à 700 garçons et 600 filles de troisième d'une petite ville de province (en prenant comme hypothèse que cet échantillon est

représentatif !). On leur laisse le choix de passer ce test en algèbre ou en géométrie.

Voici les résultats à ce test, c'est-à-dire le nombre d'élèves qui ont réussi (avec par exemple comme indicateur une note supérieure ou égale à 10).

	Garçons	Filles
Algèbre	$\frac{23}{200}$	$\frac{85}{500}$
Géométrie	$\frac{400}{500}$	$\frac{90}{100}$

Les filles sont meilleures que les garçons !

Pour arriver à cette conclusion, on calcule le pourcentage respectif de réussite des garçons et des filles en algèbre et en géométrie :

	Garçons	Filles
Algèbre	11,5 %	17 %
Géométrie	80 %	90 %

Les filles sont « meilleures » (c'est-à-dire : ont mieux réussi) à la fois en algèbre et en géométrie… donc elles sont meilleures en maths.

Quoique !

On regroupe maintenant les résultats pour établir le pourcentage de réussite au test :

	Garçons	Filles
Total	$\frac{423}{700}$	$\frac{175}{600}$
En %	60,5 %	29,2 %

On arrive à la conclusion contraire : les garçons sont « meilleurs en maths » (c'est-à-dire qu'ils ont mieux réussi au test).

On joue ici sur un effet de structure des sous-populations, mais le fait qu'un traitement statistique d'un même problème puisse conduire à deux réponses opposées pose à la fois la question de la complexité du modèle et celle de la fiabilité des réponses pour une personne non avertie de ces subtilités.

2.2.4. Les « nombres » dans la société

Nous vivons dans un monde d'informations baigné de pourcentages et le citoyen peut avoir beaucoup de peine à s'y repérer, à la fois par le manque de référence aux populations et aussi parce qu'avec les mêmes données, on peut arriver à deux conclusions contradictoires comme ci-dessus. Les statistiques apparaissent alors au mieux comme une science de la manipulation, au pire comme une science du mensonge, comme en témoignent les trois citations ci-dessous.

Interprétation manipulatoire des résumés du modèle :

« *Il existe trois degrés dans le mensonge : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques.* »

(Benjamin DISRAELI)

Rétention d'une partie de l'information :
« *Les statistiques, c'est comme le bikini, ça donne une idée, mais ça cache l'essentiel.* »
(Louis ARMAND)

Caution intellectuelle :
« *Les statistiques sont formelles : il y a de plus en plus d'étrangers dans le monde.* »
(Pierre DESPROGES)

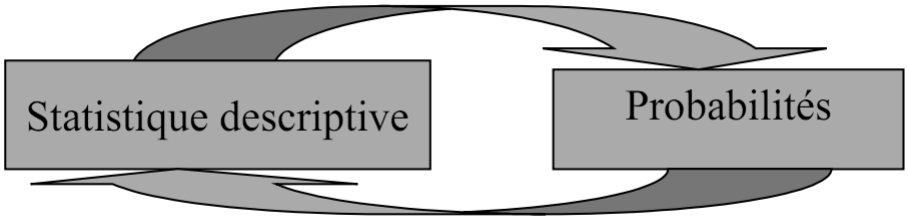
3. Le monde de l'incertitude : le modèle probabiliste

Nous vivons dans un monde empreint de hasard et d'incertitude. Comment le modéliser pour, à partir de données représentées et traitées, donner des conclusions **vraisemblables** et **probables** comme outils d'aide à la décision ? La réponse mathématique repose sur les probabilités, en nous amenant à nous interroger sur la pertinence du modèle choisi, sur la fiabilité des affirmations qu'on peut produire à partir de cette modélisation, sur l'interprétation qu'on peut en tirer.

3.1. Des statistiques aux probabilités

La statistique descriptive est une première mathématisation et donc une première abstraction du monde. Les probabilités vont offrir une modélisation de cette « réalité abstraite » intégrant et mathématisant une dimension fondamentale du monde de l'incertitude : le hasard. Le travail de modélisation va consister en un aller-retour entre les statistiques et les probabilités, répondant aux critères suivants :

- Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité.
- Les distributions de fréquences varient, mais le modèle est un invariant.
- La réalité est liée à la notion de variabilité, la modélisation a pour objectif de dégager ce qu'il y a d'intelligible et de prévisible dans cette variabilité.



Données observées	Données calculées
Résultats empiriques	Résultats théoriques
Distribution de fréquences	Loi de probabilité
Moyenne empirique	Espérance théorique
…	…

Le schéma ci-dessus traduit ce passage des statistiques aux probabilités, processus qui constitue ce qu'on appelle les statistiques **inférentielles** ou **inductives**.
Ce processus comprend trois étapes :

- On cherche, dans un premier temps, à modéliser les données expérimentales observées.
- Un modèle mathématique ayant été choisi, on peut recréer des données calculées.
- Un test peut alors permettre de mesurer l'adéquation du modèle choisi aux données observées.

3.1.1. Des statistiques aux probabilités : un problème historique

Le prince de Toscane demande à Galilée (1554-1642) pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés, alors que les nombres 9 et 10 ont autant de décompositions (à savoir 6) en somme de 3 nombres compris entre 1 et 6, obtient-on plus souvent 10 que 9 ?

« *… bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même probabilité, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12.* » (Galilée, œuvres)

9	**10**
1+2+6	1+3+6
1+3+5	1+4+5
1+4+4	2+2+6
2+2+5	2+3+5
2+3+4	2+4+4
3+3+3	3+3+4

Voici comment procède Galilée pour traiter ce problème : « *Les sorties des trois dés sont au nombre de six fois 36, soit 216, toutes différentes. Mais, puisque les sommes des tirages des trois dés ne sont qu'au nombre de 16, c'est-à-dire 3, 4, 5… jusqu'à 18, entre lesquelles on a à répartir les dites 216 sorties, il est nécessaire que pour quelques-unes de ces sommes on ait beaucoup de sorties et, si nous trouvons combien on a pour chacune, nous aurons ouvert la voie pour découvrir ce que nous cherchons* ». Il considère alors le nombre de triplets présentant chacune des 3 éventualités suivantes : 3 points égaux (1 manière pour chaque cas), 2 points égaux et un 3e différent (3 manières pour chaque cas), 3 points différents (6 manières pour chaque cas), et il additionne les cas correspondant à chacune des 6 décompositions de 9 et de 10. Il constate alors qu'il en obtient 25 pour 9 et 27 pour 10, ce qui conduit à 11,85 % de « chance » pour le 9, contre 12,5 % pour le 10.

Cette modélisation repose implicitement sur l'équiprobabilité de sortie des faces des dés et sur l'indépendance des jets de dés.

Mais ce qui m'a toujours fasciné, c'est le fait que le prince de Toscane ait pu émettre cette conjecture, alors que les résultats mathématiques sont si proches. Combien de fois avait-il dû jouer (ou regarder jouer) à ce jeu-là ! Et, d'une certaine manière, il pressentait la « loi des grands nombres ».

3.1.2. Des probabilités aux statistiques : anniversaires et football

Un calcul probabiliste montre que la probabilité que, dans un groupe, deux personnes aient le même jour anniversaire, devient supérieure à son contraire à partir d'un groupe de 23 personnes. Ce calcul repose sur l'équiprobabilité des jours d'une année pour les naissances.

Où trouver 23 personnes ? Sur un terrain de football, avec les 22 joueurs et l'arbitre (sans les juges de touche) !

Deux britanniques, Robert Matthews et Fiona Stones (*Teaching Statistics*, 1998), ont ainsi voulu vérifier de façon expérimentale ce résultat, en s'intéressant aux matchs de première division du Royaume-Uni joués le 19 avril 1997 : sur 10 rencontres, 6 présentaient une coïncidence (2 personnes nées le même jour de l'année) et 4 aucune.

On est ici dans la démarche inverse : contrôler un calcul probabiliste par une statistique. On mesure ici la fonction « justificative » du modèle vers la réalité et la formidable capacité d'anticipation qu'elle donne : sachant qu'il y a 365 jours dans une année, qui irait parier sur cette coïncidence dans les tribunes d'un stade ? … sinon les mathématiciens !

3.1.3. Quelle approche des probabilités ?

Les deux exemples ci-dessus montrent bien la double approche historique des probabilités.

L'approche laplacienne ou **déterministe**, qu'on trouve résumée dans le premier principe de l'« *Essai philosophique sur les probabilités* » de Laplace :

« *Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.* »

Cela suppose évidemment les divers cas également possibles (principe 2) et renvoie à la notion d'évènements élémentaires équiprobables en nombre fini. On parle alors de probabilité *a priori*.

L'approche fréquentiste développée par Jacques Bernoulli dans son « *Ars Conjectandi* », qui repose sur l'observation stabilisée de la fréquence d'un évènement dans une longue série d'expériences répétées « à l'identique ». Celle-ci repose sur la loi des grands nombres.

On parle alors de probabilité *a posteriori*.

Les exemples que je vais développer ci-dessous essaieront de faire le lien entre ces deux approches.

J'aborderai aussi, à l'occasion d'un exemple, la théorie ensembliste des probabilités de Kolmogorov, qui repose sur la théorie de la mesure.

3.2. Des pistes pour travailler l'aléatoire au cycle 3

Que ce soit dans le domaine des statistiques ou dans celui des probabilités, notre enseignement français accuse un certain retard par rapport à d'autres pays, en particulier les pays anglo-saxons.

Et pourtant, dès l'école primaire, on peut mener des activités mettant en jeu l'aléatoire, comme en témoigne la situation ci-dessous, proposée par Claudine Schwartz et Catherine Houdement.

3.2.1. Un exemple : Qui peut le plus ?

6	**4**
3	**2**
4	**5**
141	

Règles du jeu

Les élèves ont chacun la grille vide ci-contre. Ils sont par deux et lancent un dé à tour de rôle.

Au premier lancer de dé, chacun des deux élèves choisit de placer le nombre obtenu dans une des deux cases de la première ligne (à gauche ou à droite).

Au second lancer, chaque élève place alors le nouveau nombre obtenu dans la case restée vide de la première ligne.

Ils recommencent pour la deuxième et la troisième ligne.

Ils additionnent les trois nombres à deux chiffres obtenus et mettent le résultat dans la case du bas.

Objectif

Il s'agit d'obtenir le plus grand nombre possible dans la case inférieure.

3.2.2. Du hasard aux stratégies

Nous avons pu observer des classes de CM2 sur cette activité. Si, dans un premier temps, ils placent les chiffres un peu au hasard, très vite se dégagent :

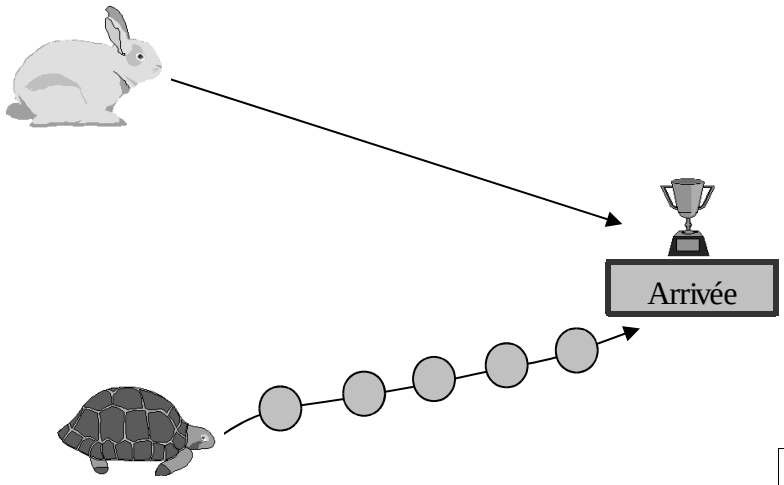
- des stratégies toujours gagnantes : le 6 à gauche et le 1 à droite (ex : le premier tirage est un 6 et il est mis à gauche).
- des stratégies fortement gagnantes : le 5 à gauche et le 2 à droite (ex : le troisième tirage est un 2 et il est mis à droite).
- des stratégies plus souvent gagnantes : le 4 à gauche et le 3 à droite (ex : le cinquième tirage est un 4 et il est mis à gauche… On ne peut pas gagner à tous les coups !

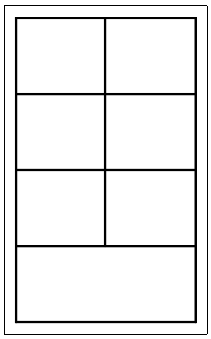
S'appuyant sur l'hypothèse de l'équiprobabilité de sortie des faces d'un dé, ces élèves dénombrent les évènements favorables. On peut donc s'appuyer sur cette conceptualisation précoce pour sensibiliser les élèves à l'entrée mathématique dans le monde de l'aléatoire.

3.3. Des pistes pour travailler l'aléatoire du collège au lycée

3.3.1. Un premier exemple : le lièvre et la tortue

Cette activité a été proposée lors des nouveaux programmes de seconde de 2000 par Claudine Schwartz. On la retrouve dans les documents d'accompagnement (Eduscol). Son adaptation au collège pose problème car elle comporte plus de deux épreuves. Pour ma part, n'ayant plus d'élèves, je l'ai menée en formation initiale (PLC2 maths) ou en formation continue.





Règle du jeu :

On jette un dé.
- Si le dé tombe sur 1, 2, 3, 4 ou 5, la tortue avance d'une case.

Elle a 5 cases à franchir avant d'atteindre l'arrivée ; la dernière case est l'arrivée, contrairement à ce que suggère le dessin ci-dessus (issu des documents d'accompagnement des programmes de 2nde de 2000).
La partie est alors terminée, la tortue a gagné.
- Si le dé donne 6, le lièvre atteint directement l'arrivée.
La partie est alors terminée, le lièvre a gagné.
Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou celle de la tortue ?

Les élèves (professeurs stagiaires pour ma part) font un certain nombre de parties puis on regroupe les résultats. Sur un grand nombre de parties, cela donne environ 40 % de parties gagnées par la tortue (donc environ 60 % pour le lièvre).

Cette expérience permet de montrer une certaine stabilisation des résultats en cumulant les échantillons (loi des grands nombres).

On peut alors *modéliser* mathématiquement le résultat par un calcul probabiliste (produit des probabilités sous l'hypothèse d'indépendance des lancers).

$$p(T)=\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}40 \quad \text{d'où} \quad p(L)\approx 0{,}60$$

Lorsqu'on propose cette activité, il est toujours bon de demander les pronostics de chacun avant de commencer l'expérience. Il apparaît alors qu'un certain nombre pense que le lièvre et la tortue ont autant de chances, sachant que la tortue a 5 numéros favorables et 5 cases, et le lièvre un numéro favorable et une case. On voit que les modèles *additifs* et *multiplicatifs* se télescopent encore.

On peut alors poursuivre cette réflexion en diminuant le nombre de cases pour la tortue.

- Si la tortue a 4 étapes à franchir :

  $p(T)=\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$ d'où $p(L)\approx 0{,}52$; le lièvre est toujours favori.

- Si la tortue a 3 étapes à franchir :

  $p(T)=\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}58$ d'où $p(L)\approx 0{,}42$; la tortue est enfin favorite.

3.3.2. Vous avez dit « hasard »

Une première conception répandue du hasard répond à un sentiment de « justice » et, pour cela, il doit être **proportionnel**. C'est le cas de tous les jeux de hasard comme le loto. Nul n'admettrait qu'il ne soit pas régi par une loi d'équiprobabilité. Mais cela se traduit par une grande confusion entre statistiques et probabilités, via une intuition de la loi des grands nombres, comme en témoignent les journaux spécialisés : « Le 7 est en bonne forme ; le 14 devrait rattraper son retard ; le 18 est en période noire ; jouez l'outsider, le 49 ! » Cela va plus loin : qui oserait jouer 1, 2, 3, 4, 5, 6 ? Cette grille ne paraît pas « normale » au niveau du hasard. Il faut cependant noter que, si toutes les grilles ont la même chance, le gain est, lui, lié au choix de la grille des autres joueurs. On touche ici à la notion de variable aléatoire : le vrai enjeu du loto n'est pas la chance de gagner, mais de gagner beaucoup ! Les renseignements statistiques, que se refuse évidemment à donner La Française des Jeux, pourraient aider à cette finalité.

Une seconde conception du hasard répond à un sentiment de « fatalité » : c'est la reproduction d'évènements dont la probabilité est très faible, généralement appelée « loi des séries ». On retrouve cette conception dans la croyance populaire sous la forme de dictons : « Jamais deux sans trois. » « Un malheur n'arrive jamais seul. »

Ces deux extrêmes rejoignent deux conceptions antagonistes de la notion de probabilité :

- L'une *déterministe* à l'excès, tel d'Alembert qui pensait que si, dans un jeu de pile ou face, *pile* était sorti trois fois, alors la probabilité de tirer *face* devenait supérieure à $\frac{1}{2}$.
- L'autre, *aléatoire* à l'excès, qui attribue une probabilité de $\frac{1}{2}$ à chacun des évènements : lorsque je traverse une route, soit je me fais écraser par une voiture, soit non.

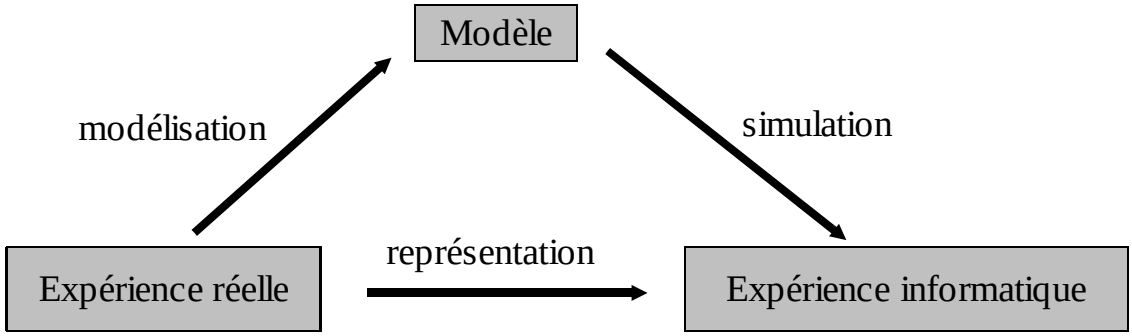
3.3.3. Le « hasard mathématique » et la place de la simulation

Le « hasard mathématique » est un modèle qui conceptualise l'équiprobabilité ou équirépartition. Exemples :

- En mathématiques, on utilise un modèle de dé qui attribue à chaque face la probabilité de $\frac{1}{6}$, de même qu'un modèle de pièce qui attribue à chaque face la probabilité de $\frac{1}{2}$.
- Pour représenter le hasard, on a créé des générateurs aléatoires qui donnent une équirépartition des nombres décimaux « formatés » comportant un nombre donné de chiffres.

La **simulation**, comme son nom l'indique, est une façon de représenter le problème de façon analogique, mais avec des outils mathématiques.

Pour comprendre la place de la simulation, j'utiliserai ce schéma ternaire que Bernard Parzysz propose dans son article « *Expérience aléatoire et simulation* », *Repères-IREM* n°66.



Pour simuler, il est nécessaire d'avoir modélisé le problème, c'est-à-dire d'en avoir fait une représentation qui permette de travailler avec des *générateurs aléatoires*, c'est-à-dire des modélisateurs du hasard. Mais cela ne veut pas dire qu'on connaisse une loi mathématique qui explique le phénomène étudié.

Ces générateurs aléatoires doivent avoir pour qualité essentielle l'équirépartition des nombres, comme ceux que j'ai cités ci-dessus.

Réaliser de « vraies » expériences aléatoires avant de les simuler est certes indispensable. Mais lancer les dés dans une classe de troisième ou de seconde peut avoir un côté infantilisant et, pour le moins, être une source de bruit et d'agitation difficile à contenir !

C'est pourquoi il peut être intéressant d'utiliser assez vite d'autres procédés de simulation ; les plus communément utilisés de nos jours étant les générateurs aléatoires des ordinateurs et des calculatrices (random).

Pour simuler un problème, on peut :

- soit faire des échantillons (par exemple de 100 tirages) et cumuler les résultats ;
- soit programmer et laisser tourner l'ordinateur, et constater une certaine stabilisation de la fréquence.

Les probabilités traitent avec le même modèle ces deux approches (voir mon article « *L'apprenti fréquentiste* » paru dans *Repère-IREM* n°21).

3.3.4. Un autre exemple : politique nataliste

Cette situation est aussi issue du document d'accompagnement de seconde de 2000 (Eduscol).
Supposons qu'une politique nataliste soit mise en place à partir de la règle suivante.
Les naissances au sein d'une famille s'arrêtent :

- *soit à la naissance du premier garçon ;*
- *soit lorsque la famille comporte quatre enfants.*

Quelle est l'influence d'une telle politique sur la répartition des sexes ?
Quelle est l'influence d'une telle politique sur la composition des familles ?
L'hypothèse de travail est l'équiprobabilité de naissance d'un garçon ou d'une fille.

Cette situation serait bien délicate à réaliser « en temps réel » dans le « monde réel », d'où la nécessité de *simuler les naissances*, après les avoir modélisées (équiprobabilité d'avoir un garçon ou une fille, indépendance des naissances). On a alors une grande panoplie de possibilités pour cette simulation : pièce (pile pour garçon, face pour fille), dé, touche random (avec par exemple le choix : impair pour les garçons, pair pour les filles), etc.

Là encore, il peut être intéressant de sonder les représentations *a priori* sur la répartition des sexes que peut entraîner une telle politique. Il apparaît souvent qu'il y aura davantage de filles, à cause du fait qu'on peut aller jusqu'à 4 dans une famille, alors que la naissance d'un garçon « termine » la famille.

L'activité peut se dérouler dans une classe en demandant à chaque élève de simuler 20 familles, ce qui conduit à noter par exemple : G/FFG/FG/G/FFFG/G/FFFF/G/FG/G/…

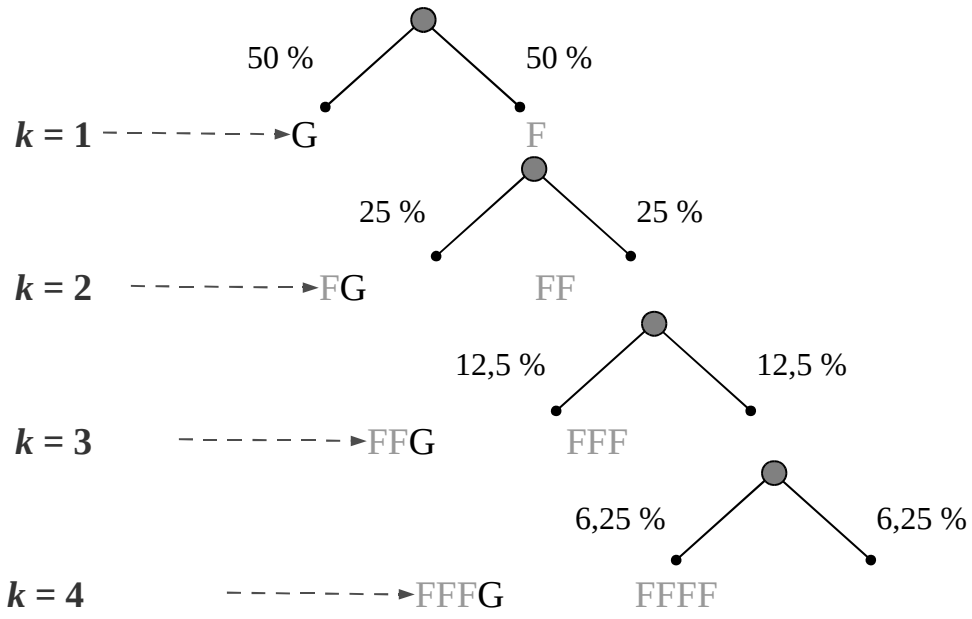
On cumule alors les résultats et on obtient « en moyenne » :

Proportion de filles (ou de garçons) : autour de 50 % ; ce qui était à prévoir et qui conforte que le générateur aléatoire est « bon », au sens de l'équirépartition !

Proportion de familles

- de 1 enfant : autour de 50 % ;
- de 2 enfants : autour de 25 % ;
- de 3 enfants : autour de 12 % ;
- de 4 enfants : autour de 12 %.

L'intérêt de cette situation est qu'on peut la modéliser mathématiquement en utilisant un outil important des probabilités : les arbres.



3.4. D'autres pistes qui ne sont plus pour le collège

3.4.1. Les bouteilles

Cette situation est due à Maurice Glaymann. Elle a été développée par François Huguet dans le numéro 36 de *Repères-IREM*. Elle exemplifie bien l'approche expérimentale par la simulation.

Un fabricant de bouteilles en verre dispose de 100 kg de verre liquide.
Avec 1 kg de verre liquide, on peut fabriquer une bouteille.
Dans les 100 kg de verre liquide, il y a 10 pierres ou impuretés que l'on ne peut pas enlever et qui sont réparties de manière aléatoire.
Le fabricant ne s'intéresse qu'à la fabrication de bouteilles de « haute qualité », c'est-à-dire sans impureté.
Si une bouteille contient au moins une pierre, elle est mise au rebut !
Combien peut-il espérer obtenir de bouteilles de haute qualité ?

Simulons cette expérience

Lorsque je mène cette activité avec des professeurs stagiaires, c'est l'occasion de réfléchir sur des procédures de simulation. Pour simuler cette expérience, on peut par exemple construire un tableau 10×10 avec repérage (voir ci-dessous) qui représente les 100 bouteilles. On procède alors à un tirage de 100 couples de chiffres, en utilisant un générateur aléatoire. Chaque couple de chiffres tiré représente une impureté dans la bouteille repérée par ce couple.

Le tableau ci-dessous est la réalisation d'une telle expérience : on trouve 37 bouteilles sans impureté.

Si on répète un certain nombre de fois cette simulation expérimentale, les résultats oscillent entre 33 et 41, de façon très stable (la modélisation mathématique que nous allons établir explique cette stabilité).

Si on prend l'angle d'approche **fréquentiste**, on peut donc dire, à partir de ces expériences, que la probabilité d'avoir une bouteille sans impureté est d'environ 37 % (probabilité *a posteriori*).

9	xx	x			x		x		x	xx
8	x		xxx	xx		xx		x		x
7	x	xx		x	xxx		xx	x		xxx
6		x	x	x		x			x	xx
5	xxx		xx	xx		x	xx	x		x
4	x		xx		x			xx		x
3		xx			xx					
2	x		xxx		x	x	xx		xxx	
1	xx		x	xx	x	x	x	xx	x	xx
0	x	x	xx	x		xxx	xx	x	xx	x
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Modélisons mathématiquement cette situation

Soit I l'ensemble des impuretés.
Soit B l'ensemble des bouteilles.
Soit $F(I,B)$ l'ensemble des applications de I dans B.

$F(I,B)$ représente l'ensemble des « cas possibles ».

Soit b_i une bouteille, *quelle est la probabilité que b_i soit sans impureté ?*

Soit $B_i = B - \{b_i\}$, $F(I,B_i)$ représente l'ensemble des « cas favorables » à l'évènement « b_i est sans impureté ».

Utilisons alors le calcul probabiliste déterministe de Laplace (probabilité *a priori*).

La probabilité que b_i soit sans impureté est :

$$p = \frac{\text{card}(F(I,B_i))}{\text{card}(F(I,B))} = \frac{99^{100}}{100^{100}} \approx 0{,}3665$$

Curiosité : $\frac{1}{0{,}3665} \approx 2{,}72\ldots$

Et… à quoi peut bien faire penser 2,72… ? … !

Généralisons le problème

On passe à n bouteilles et n impuretés. Le calcul précédent devient :

$$p = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Or $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} \approx 0{,}3678\ldots$

3.4.2. Probabilité que deux entiers naturels (non nuls) pris au hasard soient premiers entre eux

Si on prend ces entiers naturels entre 1 et 10, on a le tableau :

10	x		x				x		x	
9	x	x		x	x		x	x		x
8	x		x		x		x		x	
7	x	x	x	x	x	x		x	x	x
6	x				x		x			
5	x	x	x	x		x	x	x	x	
4	x		x		x		x		x	
3	x	x		x	x		x	x		x
2	x		x		x		x		x	
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

On constate que la proportion de couples premiers entre eux est de 63 %. On peut donc dire que la probabilité que deux entiers naturels compris entre 1 et 10, pris au hasard, soient premiers entre eux est 0,63.

Comment définir de manière générale cette probabilité « p » que deux entiers naturels non nuls soient premiers entre eux ?

Si on prend comme ensemble de référence les sous-ensembles $[1,n]\times[1,n]$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on peut déterminer le nombre de couples premiers entre eux. Ceci donne, comme ci-dessus, la probabilité p_n que deux entiers pris entre 1 et n soient premiers entre eux.

Si on passe à $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, la définition laplacienne des probabilités ne peut fonctionner, elle conduirait à un rapport d'infinis !

On définit donc la probabilité « p » cherchée comme la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini… si elle existe !

En utilisant cette démarche, on obtient que la probabilité qu'un nombre entier soit pair est $\frac{1}{2}$, qu'il soit multiple de 3 est $\frac{1}{3}$, etc.

Montrer l'existence de « p » n'est pas simple ; cela se fait avec du matériel mathématique un peu plus lourd ! Nous l'admettrons ici.

Supposons donc l'existence de « p ».

En utilisant la théorie de Kolmogorov et la remarque ci-dessus sur la probabilité qu'un entier soit un multiple de n, on obtient :

Soit $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/x\wedge y=1\}$ donc $p(A_1)=p$

Soit $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/x \text{ et } y \text{ divisibles par } 2 \text{ et } \frac{x}{2}\wedge\frac{y}{2}=1\}$ donc $p(A_2)=\frac{p}{4}$

…

Soit $A_n=\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/x \text{ et } y \text{ divisibles par } n \text{ et } \frac{x}{n}\wedge\frac{y}{n}=1\}$ donc $p(A_n)=\frac{p}{n^2}$

Or $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, où les A_n sont deux à deux disjoints.

D'où : $1=p(\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*)=p(\cup A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty} p(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p}{n^2}=p\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Or $1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ donc p est l'inverse de $\frac{\pi^2}{6}$ d'où $p\approx 0{,}607\ldots$

Probabilité qu'une fraction soit irréductible

Le calcul ci-dessus montre donc que si on prend une fraction au hasard, elle a 61 % de chances d'être irréductible.

Que veut alors dire prendre un échantillon de fractions au hasard. Si on prend la page d'un manuel de collège intitulée « *simplification des fractions* », elle a bien peu de chances d'être représentative… ou alors l'auteur du manuel s'est fourvoyé dans les exercices qu'il propose !

Tirer « au hasard » ???

On voit dans l'exemple ci-dessus que cela doit être précisé… comme je vais le montrer avec mes « spaghettis ».

3.5. Une histoire de spaghettis

J'ai commencé ma carrière d'enseignant de mathématiques au temps des « mathématiques modernes » ! À l'époque, ne se posait pas la question du rapport des mathématiques au réel : les mathématiques étaient un magnifique édifice qui se construisait de façon purement interne. C'était essentiellement un enseignement de structures.

Au contact des IREM, j'ai commencé à me poser la question de la pertinence de ces mathématiques modernes, à la fois dans leur rôle de sélection, mais aussi dans leur capacité de construction d'un vrai outil scientifique à la disposition des élèves et des autres disciplines.

Toutes ces questions fortement posées par différents instituts et associations, dont l'APMEP, ont conduit aux nouveaux programmes de 1986, où les mots-clés sont devenus, pour le collège « activités », et pour l'école « situations-problèmes », mettant en avant les problèmes concrets, quotidiens, issus du monde réel, et prônant une démarche expérimentale. Le mot de « modélisation » ne figure pas dans ces programmes.

Cette période fut pour moi une formidable bouffée d'air frais en tant qu'enseignant, et me donna la chance de pouvoir développer un travail en équipe aussi bien au niveau de mon collège qu'au niveau de la commission Inter-IREM Premier Cycle (maintenant : Collège) investie dans les « suivis scientifiques », commission dont je fus alors le responsable.

Des spaghettis réels…

Dans le cadre de ces nouveaux programmes, j'essayais au maximum de mettre les élèves en situation d'activité (versant parfois dans l'activisme), et pour introduire l'inégalité triangulaire en quatrième j'eus une idée que je trouvais *a priori* géniale : j'apportais des spaghettis en classe, j'en donnais quelques-uns à chaque élève, et leur demandais de les « casser » en trois morceaux « au hasard ». Ils devaient alors essayer de faire un triangle avec ces trois morceaux. Je leur demandais de mesurer la longueur de chacun des morceaux et de conjecturer à partir de cette mesure une règle qui permette de discriminer les cas où ils obtenaient des triangles. L'état de la classe à la fin de l'heure m'a déterminé à ne pas reconduire une telle expérience !

… aux spaghettis mathématiques

Dans notre collège, nous suivions les classes de quatrième en troisième. J'ai voulu revenir sur cette expérience pas très heureuse des spaghettis et, pour ce faire, j'ai inventé le « spaghetti mathématique ». C'était un spaghetti de longueur **1**, avec équiprobabilité de cassure (ce qui est évidemment inconcevable avec un spaghetti réel !). Et, pour faire ces cassures, j'ai utilisé la simulation. J'expliquais donc aux élèves ce nouveau contexte et leur proposais de faire ces cassures avec leur calculatrice en utilisant la touche « random » qui leur donnait, à l'époque, un nombre compris entre 0 et 1 avec 3 chiffres après la virgule. Avec 3 tirages aléatoires (ex : 0,167 **;** 0,534 **;** 0,435), ils simulaient la cassure de 3 spaghettis mathématiques. Pour donner un sens tangible à l'expérience, je leur proposais de multiplier par 100 chacun des nombres obtenus, ce qui leur donnait 3 mesures de longueur en mm. Ils pouvaient ainsi vérifier par construction s'ils avaient ou non « tiré » un triangle.

Vous aurez noté que cette nouvelle situation ne reproduit pas l'expérience précédente où je cassais un spaghetti en 3, alors que là je casse 3 spaghettis en 2 !

L'objectif de la séance était d'arriver à se passer de l'expérience physique pour décider simplement avec les 3 tirages si on obtenait un triangle ou non, via l'inégalité triangulaire immédiatement traduite par : « il ne faut pas qu'un des nombres soit plus grand que la somme des

deux autres ».

Forts de cette règle, les élèves effectuèrent alors 10 tirages et, sans avoir vraiment préparé ce passage aux statistiques, j'ai proposé de voir quel était le pourcentage des triangles obtenus… Devant le résultat (48 %), les élèves me demandèrent : « c'est bon ? ; c'est ça ? ; c'est juste ? », comme s'ils pensaient que je connaissais « ce résultat ». Leur questionnement pouvait être traduit par : existe-t-il un modèle mathématique qui me permette d'affirmer que ce résultat est « vraisemblable » ? Et j'étais bien incapable de leur répondre, sinon en faisant tourner mon ordinateur et en constatant qu'il y avait une certaine stabilisation de la fréquence autour de 50 %. Je crois que ce fut mon premier **vrai** contact avec la modélisation…

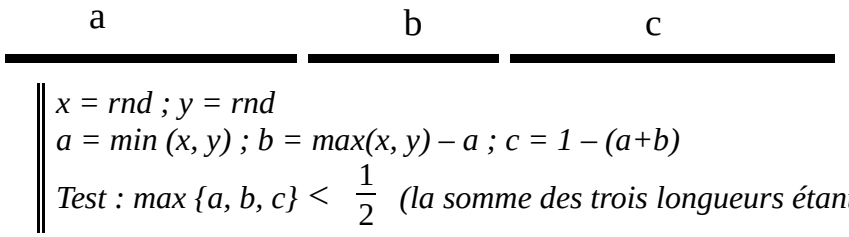
3.6. Une modélisation de cette expérience des spaghettis

Mes spaghettis de quatrième

Mon expérience malheureuse de quatrième consistait à couper un spaghetti en trois « au hasard » pour voir si les trois morceaux obtenus pouvaient « former » un triangle. Je suis bien incapable de modéliser cette expérience réelle. Mais elle va m'éclairer pour simuler. En observant les élèves, on constate deux grandes façons de faire : soit ils essaient de couper le spaghetti *d'un seul coup* en trois, avec peu de chances d'obtenir trois morceaux, soit ils font une première cassure, puis recassent l'un des deux morceaux obtenus.

Pour simuler cette expérience, je prends le « spaghetti mathématique » que j'avais proposé en troisième (de longueur **1**, avec équiprobabilité de cassure) et je décris en langage informatique chacune des deux expériences.

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »

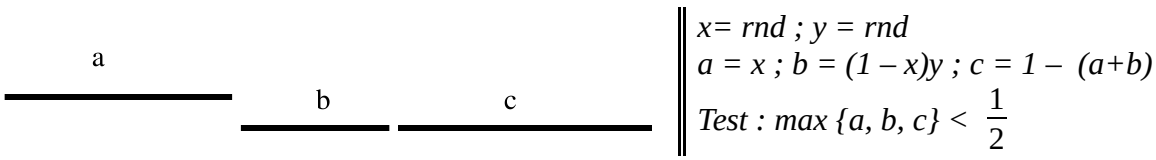


On peut alors :

- soit faire des « échantillons » (par exemple de 100 tirages) et on trouve comme fréquences de triangles : 0,26 ; 0,23 ; 0,25 ; 0,27 ; 0,24…
- soit programmer, laisser tourner l'ordinateur et constater une certaine stabilisation de la fréquence dans l'intervalle [0,24 ; 0,26]…

… en s'appuyant sur le fait que les probabilités traitent avec le même modèle ces deux approches (voir plus haut).

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2



- Le tirage d'échantillons donne comme fréquences de triangles : 0,22 ; 0,18 ; 0,19 ; 0,20 ; 0,21 ; 0,17 ; 0,17…

- La suite obtenue en faisant tourner l'ordinateur a une certaine stabilisation dans l'intervalle [0,18 ; 0,21].

Au-delà de montrer que la mesure de la fréquence est ici un intervalle, cette double expérience met en évidence que « au hasard » mérite d'être précisé. Dans les deux cas, on a coupé un spaghetti au hasard, mais ce sont les conditions de l'expérience qui permettent de modéliser ce hasard (cf. le paradoxe de Bertrand).

Modélisation géométrique

Comment alors trouver un modèle mathématique qui permette de calculer « **la** » probabilité d'obtenir un triangle dans les conditions d'expérience ci-dessus ? Il faut passer du modèle discret au modèle continu, et de l'équiprobabilité à la probabilité uniforme.

Chacun des tirages donne un couple (x ; y) qui peut être représenté par un point dans un repère. La probabilité cherchée est donc le rapport du nombre de points satisfaisant à l'obtention d'un triangle par rapport au nombre de points possibles.

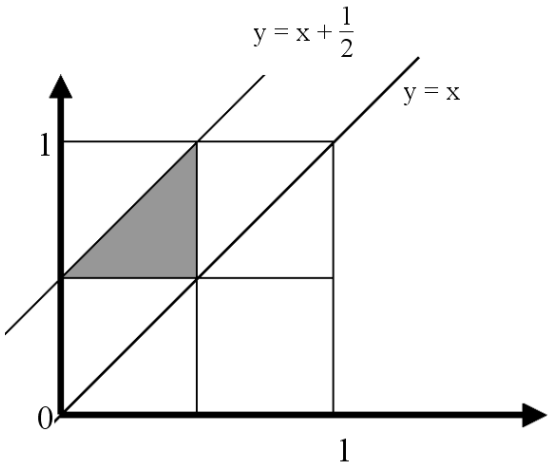
En plongeant dans le modèle continu, cela va se traduire par le rapport de l'aire de la surface où se trouvent ces points-solutions, à l'aire totale possible qui est ici celle du carré [0,1] × [0,1], c'est-à-dire **1** (la notion d'ouvert ou de fermé n'ayant pas d'importance compte tenu de la modélisation).

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »

Distinguons les deux cas : $x < y$ et $x > y$.

Si $x < y$, le test $\max\{a,b,c\} < 1/2$ donne :

- $x < 1/2$
- $y - x < 1/2$
- $1 - y < 1/2$
-



L'aire de la surface « solution » et donc la probabilité est : $\frac{1}{8}$.

Si $x > y$

On trouve comme surface solution le triangle symétrique de celui ci-dessus par rapport à la diagonale du carré (y = x), donc de nouveau une probabilité de $\frac{1}{8}$.

Ces deux cas étant exclusifs, la probabilité cherchée est donc :

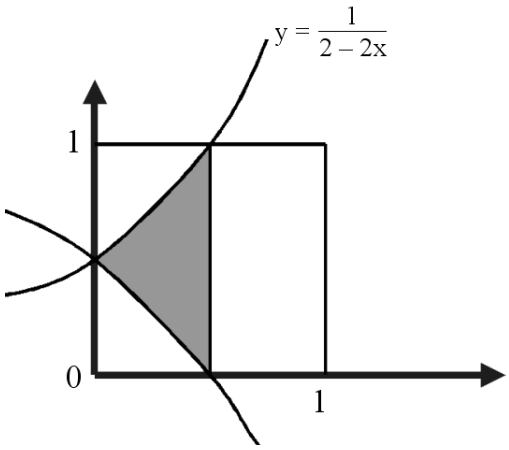
$$p = \frac{1}{4} \text{ , soit } 0{,}25$$

ce qu'on aurait pu pronostiquer compte tenu des fréquences obtenues !

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2

On traduit comme ci-dessus le test :
max {a,b,c} < $\frac{1}{2}$, ce qui donne :

- x < 1/2
- (1 – x)y < 1/2
- 1 - [x + (1 - x) y] < 1/2



Le calcul de l'aire de la surface solution donne, via le calcul intégral, la probabilité :
$p = \ln 2 - \frac{1}{2}$, soit environ 0,193 1
Là, c'était beaucoup plus difficile de pronostiquer un tel résultat à partir des fréquences !

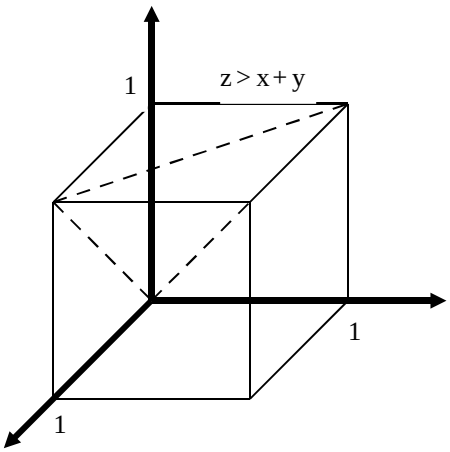
Et mes spaghettis de troisième ?

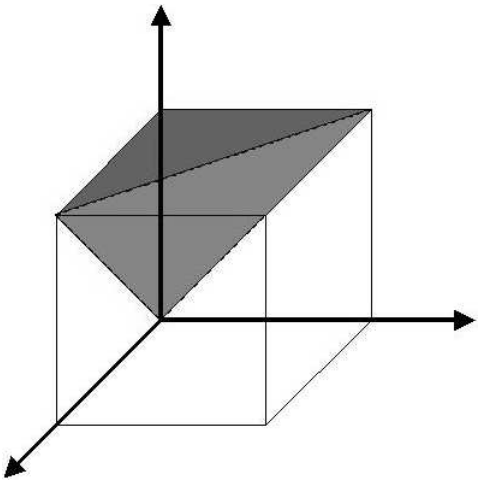
Je rappelle l'expérience : trois tirages aléatoires indépendants et un test pour savoir si on peut faire un triangle avec les trois longueurs obtenues. Il m'a fallu un certain temps pour quitter le plan et comprendre que je travaillais avec trois spaghettis indépendants, et que les trois cassures pouvaient être représentées par un triplet (x, y, z), coordonnées d'un point de l'espace. La modélisation géométrique donne alors comme solution le rapport du volume du solide solution sur le volume du solide possible, ici le cube [0,1] × [0,1] × [0,1], soit **1**.

Pour trouver ce solide solution, il suffit d'enlever le solide non-solution. Celui-ci se découpe en trois solides élémentaires du cube, donnés par les conditions :

z > x+y ; y > x+z ; x > y+z .

Le cas z > x+y





On trouve un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$.

Les deux autres cas donnent chacun un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$ et n'ont pas de parties solides communes.

La probabilité de non-solution est donc : $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, soit $\frac{1}{2}$.

Donc la probabilité d'obtenir un triangle dans mon expérience de troisième est :

$p=1-\frac{1}{2}$, soit $p=\frac{1}{2}$.

Lorsque j'ai trouvé cette modélisation et ce résultat, qui confirmait mon approche fréquentiste, j'étais heureux ! Ma pensée était devenue libre par rapport à ce problème et c'est avec confiance que je regardais tourner mon ordinateur ou répétais cette expérience par échantillon avec mes élèves.

Ce qu'apportent les mathématiques, c'est cette merveilleuse compétence d'anticipation et de contrôle !

4. À la recherche d'une loi modèle : la loi de Benford

Supposons une situation qui nous donne une grande quantité de nombres qui nous apparaissent tout à fait aléatoires et que l'on nous pose la question suivante :

« Prenons le premier chiffre de chacun de ces nombres : quelle est la répartition des 1, des 2, … , des 9 ? ».

En l'absence de toute autre connaissance, notre réflexe sera l'équiprobabilité, c'est-à-dire que nous supposerons que chaque chiffre a une probabilité d'apparition de $\frac{1}{9}$.

4.1. Trois références de données

La situation suivante nous a été proposée par Claudine Schwartz lors d'une réunion de la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques).

Le tableau ci-dessous donne la fréquence d'apparition du premier chiffre de nombres pris respectivement :

- colonne 2 : 1000 nombres *du Monde* daté du vendredi 23 avril 1999 ;
- colonne 3 : 914 nombres d'un historique de compte de la société Gilibert ;
- colonne 4 : nombres d'habitants de 1229 communes obtenus lors du recensement de 1992.

Premier chiffre	**Le Monde**	**Gilibert**	**Commune**
1	0,322	0,317	0,321
2	0,151	0,161	0,168
3	0,108	0,142	0,133
4	0,099	0,088	0,081
5	0,073	0,070	0,087
6	0,081	0,061	0,067
7	0,055	0,070	0,055
8	0,065	0,040	0,045
9	0,046	0,050	0,044

Deux constats s'imposent :

- on est bien loin de l'équiprobabilité (qui est pourtant notre premier réflexe) ;
- les trois expériences donnent des résultats vraiment proches.

4.2. La loi de Benford

Claudine Schwartz, en s'appuyant sur le constat que les résultats étaient invariants par changement d'échelle, a modélisé ces situations en utilisant la loi de Benford : *« La probabilité que le premier chiffre à gauche dans l'écriture en base 10 soit i = 1, … , 9 est log (1 + 1/i) (logarithme décimal) »*.

La dernière colonne du tableau ci-dessous donne les fréquences théoriques obtenues par calcul avec cette loi. La modélisation par cette loi apparaît comme très bonne d'un point de vue qualitatif.

Premier chiffre	Le Monde	Gilibert	Commune	Loi de Benford
1	0,322	0,317	0,321	0,301
2	0,151	0,161	0,168	0,176
3	0,108	0,142	0,133	0,125
4	0,099	0,088	0,081	0,097
5	0,073	0,070	0,087	0,080
6	0,081	0,061	0,067	0,067
7	0,055	0,070	0,055	0,058
8	0,065	0,040	0,045	0,051
9	0,046	0,050	0,044	0,046

Mais avoir modélisé mathématiquement nous donne-t-il le sens profond du phénomène ?
Cette question m'a conduit à deux pistes de réflexion.

4.3. Comment Benford a-t-il eu l'idée d'une telle loi ?

Benford a établi cette loi en 1938, à la suite d'étude de nombreuses données. Il s'appuyait sur les travaux d'un astronome américain, Simon Newcomb, qui en avait donné les prémisses en 1881, en s'appuyant sur un constat : la forte usure des premières pages des tables de logarithmes ! Dans le système à base 10, les logarithmes décimaux des nombres sont uniformément distribués, ce qui peut se traduire par le fait qu'un nombre a autant de chances d'être entre 100 et 1000 (log 2 et log 3) qu'entre 10 000 et 100 000 (log 4 et log 5). Cette répartition va s'appliquer aux phénomènes de type exponentiel.

4.4. Comment donner du sens à cette loi ?

Nous sommes devant des phénomènes *évolutifs*. Pour donner du sens à cette modélisation, j'ai essayé d'imaginer une simulation (qui ne peut reposer sur le tirage au hasard de nombres) : on écrit la suite des entiers naturels en déclenchant un chronomètre ; le chronomètre s'arrête au hasard et je fais mes comptes ! Il y a donc bien du hasard là-dedans, mais pas là où on croit !

4.5. Connaître le bon modèle, ça sert !

Tout cela, me direz-vous, n'est que jeu de mathématicien ! Ceux qui se sont fait « épingler » par le fisc, qui utilisait cette loi pour vérifier leur comptabilité, ne seront certainement pas d'accord !

5. Conclusion

En guise de conclusion 1…

J'avais été sollicité par l'IREM de Montpellier pour un séminaire sur les « probas/stat ». La conférence de clôture avait été assurée par un professeur de médecine du CHU de Montpellier et j'avais été très sensible à sa conclusion :

> **« Nous sommes tous les enfants du hasard. »**
>
> **« Le jour où le hasard n'existera plus, c'est l'homme qui n'existera plus, car c'est le hasard génétique qui sauve les espèces. »**

Cette conclusion illustre parfaitement la spécificité du « modèle mathématique du hasard » que j'ai développée dans ce texte, par rapport au « hasard » de la nature. Et, en vertu des éléments que j'ai donnés sur la perception des nombres par notre société, elle me conduit à affirmer :

> ***« La formation à la pensée statistique, ça n'est pas l'école du mensonge, c'est celle de l'humilité* ! »**

En guise de conclusion 2…

Les statistiques ont fait leur apparition dans le programme de collège en 1986. Il a fallu attendre 2008 pour que les probabilités y trouvent une première place. Et pourtant, dès 1812, Laplace affirmait :

> **« Et si l'on observe ensuite que dans les choses qui peuvent ou non être soumises au calcul, la théorie des probabilités apprend à se garantir des illusions, il n'est pas de science qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de la fonction publique. »**

Cela traduit, pour le moins, un grand retard dans notre enseignement dans ce domaine, beaucoup plus développé dans d'autres systèmes scolaires, comme les pays anglo-saxons.

En guise de conclusion 3…

Les mathématiques sont, au regard de l'histoire, un formidable outil intellectuel pour penser le monde qu'a créé l'homme, qu'il a enrichi au fil des siècles et des civilisations ! Et, si nous pouvions persuader nos élèves de cela, peut-être notre enseignement produirait-il moins « d'écorchés vifs des mathématiques » !

Nous avons le devoir de transmettre ce patrimoine de l'humanité ; Joseph Fourier résume bien cela en disant des mathématiques qu'elles sont ***« une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens ».***

Quelle définition pour la probabilité au collège ?

Jean Claude GIRARD
IREM de Lyon & Commission Inter IREM « Statistique et Probabilités »

Introduction

Poincaré affirmait dans l'introduction de l'un de ses ouvrages : *« On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité*[14] *»*. Essayer de le faire a pu conduire certains auteurs de manuels de Troisième à des extravagances du type suivant : *La probabilité d'un évènement A est la proportion probable, parmi tous les cas possibles, des cas où A sera réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience*[15]. Cette tentative me semble désespérée pour au moins deux raisons.

L'objectif du programme de Troisième est de mettre les élèves en face d'une « notion » et non de définir un « concept ». Une telle définition est prématurée au collège d'autant que, même si on peut le regretter, c'est la première rencontre des élèves avec le sujet, au moins dans le cadre scolaire. Il convient donc qu'avant de définir (puis calculer, mesurer, évaluer, approximer…) la probabilité d'un évènement, on explicite d'abord de quoi l'on parle, de la même façon que l'on travaille sur les grandeurs à l'école élémentaire (et même maternelle) avant de passer à leur mesure. Définir la probabilité d'un évènement avant tout travail sur les évènements eux-mêmes, les expériences aléatoires ou le hasard relève de la même tentative, aussi vaine qu'inutile, de définir le point avant tout travail de géométrie. Et ne pas pouvoir définir rigoureusement un point n'a jamais empêché les élèves de faire de la géométrie. Les difficultés viennent d'ailleurs… et elles ne manquent pas.

D'autre part, puisqu'il est vain d'espérer donner une définition axiomatique rigoureuse à ce niveau et, même avant longtemps, autant essayer de donner une idée naïve de la notion que l'on manipule. On peut trouver maints exemples où l'on attribue des probabilités à certains évènements et ceci de manière très empirique ou subjective. Un des rôles de l'enseignement des probabilités est de montrer la limite de cette pratique mais il est illusoire de nier qu'elle existe. De la même manière, ne pas disposer d'une définition rigoureuse d'un nombre entier (ou de l'ensemble) n'a jamais empêché les enfants de compter, ni d'apprendre les tables d'addition ou de multiplication. La tentative d'une définition plus rigoureuse, comme à l'époque dite des *mathématiques modernes* a conduit aux catastrophes pédagogiques que l'on connaît. Évitons de retomber dans les mêmes errements dans le domaine des probabilités.

La probabilité comme mesure d'une grandeur

Mathématiquement parlant, la définition axiomatique de la Probabilité par Kolmogorov[16] se place dans le cadre de la théorie de la mesure. À un niveau plus élémentaire, il s'agit, comme pour la longueur, de mesurer une certaine « grandeur » par un nombre.

Les probabilités doivent être regardées comme analogues à la mesure des grandeurs physiques, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent jamais être connues exactement mais seulement avec une certaine approximation[17].

14 Henri Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1908
15 Collection Dimathème, Ed. Didier, 2008
16 Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung* 1933, Traduction anglaise *Foundations of the Theory of Probability,* New York, Chelsea Publishing Company, 1950
17 Émile Borel, *Probabilités et certitude*, Editions PUF, Paris, 1950

Quelle approche didactique les programmes de l'école primaire proposent-ils pour la mesure de certaines grandeurs physiques comme la longueur, l'aire ou le volume ?

Les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne[18]*… Dans un second temps, les comparaisons amènent à pointer des rapports de grandeur : il faut savoir que les élèves ont accès à la compréhension des relations entre grandeurs (égalités, inégalités, rapports simples) avant d'être capables de mesurer ces grandeurs*[19].

Dans tous les cas, la première rencontre des élèves se situe au niveau de la grandeur elle-même. Pour la longueur, par exemple, le travail porte dans un premier temps sur le classement, la comparaison ou le rangement d'objets avec utilisation éventuelle d'un intermédiaire dans le cas d'objets non déplaçables ou non comparables directement. Ce n'est que plus tard qu'est définie la mesure de la longueur à partir du report d'une longueur étalon et ensuite qu'elle peut être obtenue par l'utilisation d'un instrument de mesure ou par un calcul (périmètre d'une figure, par exemple). Le programme insiste : *Il est souhaitable que les élèves apprennent à estimer la mesure avant de procéder au mesurage, soit à l'œil … soit à partir de longueurs connues*[20].

Pour l'exemple de la longueur, qui semble être le cas le plus simple, on voit que la route devrait être longue avant d'obtenir un nombre pour résultat de la mesure d'un segment. Aller trop vite pour les aires et les volumes peut conduire à la confusion bien connue entre *aire* et *périmètre* ou à des questions du genre : « Qu'est-ce qui est le plus grand : 1 m^2 ou 1 m^3 ? »

Pourquoi en serait-il autrement pour la probabilité ? Pourquoi ce qui se fait sur plusieurs années pour la longueur (du cycle 2 au début de collège) devrait-il se faire en un an (voire en deux semaines, la durée moyenne d'un chapitre) ? En attendant que le travail indispensable soit fait bien plus tôt comme c'est le cas dans de nombreux pays, il conviendrait de prendre un peu de temps en Troisième pour expliciter de quoi on parle, avant de penser à donner un nombre pour le mesurer[21].

En supposant fait ce travail sur la nature et l'existence de la probabilité d'un évènement qui, seul, peut donner du sens à la suite et, puisque l'approche axiomatique ne saurait être retenue, quelle idée de la probabilité veut-on construire chez les élèves de collège ?

Quelle définition pour la probabilité ?

Les programmes et les manuels de Troisième « fluctuent » entre l'approche classique dite de Laplace ou cardinaliste (nombre de cas favorables/nombre de cas possibles) qui suppose l'hypothèse préalable d'équiprobabilité sur les issues de l'expérience aléatoire considérée et l'approche fréquentiste qui assimile une fréquence observée à la « probabilité théorique » sans que l'on sache la précision de cette approximation. Dans les deux cas, on ne se soucie pas réellement de l'existence de la probabilité ni du sens à donner à ce terme. Par ailleurs, aucune des deux « définitions » ne semble suffisante pour un élève, ni même la combinaison des deux. La première est circulaire et la deuxième ne donne pas la précision de la mesure obtenue. Alors, faut-il désespérer ?

Bruno de Finetti n'écrivait-il d'ailleurs pas « LA PROBABILITÉ N'EXISTE PAS »[22] ? Dans son esprit, il s'agissait de dire que la probabilité n'existe pas dans l'absolu, que les valeurs que l'on peut lui attribuer ne sont pas indépendantes de l'observateur et de ses connaissances. Autrement dit, toute probabilité est subjective.

De même, Keynes ne pouvait envisager de probabilité d'une proposition ou d'un jugement que

---

18 « Grandeurs et mesure à l'école primaire » in *Documents d'accompagnement des programmes de Mathématique*, CNDP, 2005.

19 ibid.

20 ibid

21 On trouvera des propositions d'activités dans le dernier paragraphe de cet article.

22 Bruno de Finetti, *Theory of Probability*, Wiley, New York, 1974

par rapport à un champ de connaissances. La valeur de la probabilité peut alors être différente d'un observateur à un autre ou évoluer dans le temps pour un même observateur. *En ce sens,* ajoutait-il, *la Probabilité peut être qualifiée de « subjective »*[23] ce qui n'autorise toutefois pas à dire n'importe quoi car *au sens de la logique, la probabilité n'est pas subjective, c'est-à-dire qu'elle n'est pas sujette aux caprices humains*[24].

Sans aller jusqu'à proposer une introduction précoce des probabilités conditionnelles ou du théorème de Bayes comme on a pu le suggérer[25], on ne saurait ignorer cette conception subjective ou personnelle de la probabilité qui, d'un certain point de vue, englobe les deux autres approches. En effet, ce n'est que par ce que je sais du protocole mis en place dans la conduite d'une expérience aléatoire, par ma connaissance sur l'équiprobabilité éventuelle des issues ou par l'observation que j'ai pu faire de la fréquence de réalisation d'un évènement dans la répétition de l'expérience, que je suis capable d'attribuer à cet évènement une probabilité qui m'apparaisse comme réaliste, mais qui peut se révéler comme n'étant pas adaptée.

Par exemple, dans le dénombrement des issues lors du lancer de deux dés, faut-il considérer (1 ; 3) et (3 ; 1) comme un seul résultat ou comme deux résultats différents ? Quelle distribution de probabilités choisir dans chacun des deux cas ? Dans la situation des urnes de Pólya (voir plus loin), poursuivre l'expérience 10 000 fois fera apparaître une fréquence limite mais celle-ci ne nous renseignera en rien sur la probabilité du même évènement dans la répétition de l'expérience : pourquoi ? Quel statut scientifique peut-on donner à des résultats qui dépendent de jugements qui peuvent varier suivant l'observateur[26] ? Chacune des trois méthodes peut ainsi conduire à des résultats erronés ou contestables.

D'autre part, il ne faut pas confondre la dimension opératoire qui donne un moyen d'attribuer une valeur à une probabilité et l'aspect sémantique qui donne un sens à cette valeur[27]. La « définition » classique (quotient du nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles) est une définition opératoire parce qu'elle donne un algorithme pour obtenir une valeur de la probabilité mais, en aucun cas, une définition sémantique. À l'opposé, la définition fréquentiste et la définition subjective (bayésienne) vont dans la direction d'une définition sémantique car dans ces deux définitions se précise le signifié du terme « probabilité ».

Alors, comment définir la probabilité d'un évènement ? Tout n'est pas si simple : chacune des méthodes peut être utile et on peut faire l'hypothèse que le concept de probabilité se construit chez l'élève comme synthèse des ces différents aspects. Sans aller plus loin au collège, on peut se souvenir d'une remarque de Leonard Savage : *Il doit bien y avoir une douzaine d'interprétations de la Probabilité… et des personnes faisant autorité en la matière soutiennent que différentes interprétations peuvent être utiles, c'est-à-dire que le concept de probabilité peut avoir des sens différents dans des contextes différents*[28].

Pour finir, il ne faut par ailleurs pas oublier que : *Le but principal du calcul des probabilités est de calculer les probabilités d'évènements complexes en fonction des supposées connues, de phénomènes plus simples*[29]. Bien entendu, il convient que les probabilités de ces derniers soient obtenues de manière pertinente.

---

23 John Maynard Keynes, *A Treatise on Probability*, Macmillan, Londres, 1921 http://www.archive.org/details/treatiseonprobab007528mbp

24 ibid.

25 Jim Albert, « Interpreting Probabilities and Teaching the Subjective Viewpoint » in *Thinking and Reasoning with Data and Chance*, 68th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2006

26 C. Batanero, M. Henry, B. Parzysz, The nature of chance and probability *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning*, Graham A. Jones (ed.), 20-42, Springer, New York, 2005

27 Pablo Carranza, *La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique. Une expérience en classe de BTS*. Thèse en didactique des mathématiques, Université de Paris 7, juin 2009

28 Leonard J. Savage, *The Foundations of Statistics*, Dover publications Inc., New York, 1954

29 Émile Borel¸ *Probabilités et certitude*, Editions PUF, Paris, 1950

Confusion Modèle-Réalité

Une des difficultés spécifiques de l'enseignement des probabilités[30] réside dans le fait que c'est la seule partie des mathématiques où l'on s'intéresse à la réalité (du moins dans la phase d'apprentissage). Un des dangers qui en résultent est la confusion entre modèle et réalité[31].

La plupart des situations aléatoires rencontrées au niveau de la classe de Troisième se ramènent au modèle de dé à n faces (équiprobabilité) ou à un modèle d'urne (probabilités proportionnelles à des effectifs, des aires ou autres). Lorsqu'on énonce « on lance un dé équilibré… », cela signifie « on considère une expérience aléatoire dont les 6 résultats possibles 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont la même probabilité… ». Alors pourquoi ne pas le dire ? Pourquoi ne pas poser en définition : « on appelle *dé équilibré* un dé virtuel tel que, dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer ce dé, chacune des 6 faces a la même probabilité de sortie » ? Le fait qu'une face donnée ait une fréquence qui « tend » vers $\frac{1}{6}$ résulte d'un théorème mathématique appelé « loi des grands nombres ». Ce n'est pas cette valeur limite qui « définit » la probabilité de sortie puisque celle-ci figurait déjà dans la définition du dé équilibré. En revanche, on peut se poser la question de savoir, pour un dé réel avec lequel je joue, si la fréquence d'apparition observée pour chaque face (ou pour une face donnée) s'approche de cette probabilité et donc tester si le dé peut être considéré comme bien équilibré ou, pour le dire autrement, si le modèle de « dé équilibré » est pertinent pour ce dé.

D'une manière identique, on peut poser comme définition : « on appelle *urne de Bernoulli*, une urne virtuelle contenant n boules dont n_1 boules d'une couleur et n_2 boules d'une autre couleur avec l'hypothèse que dans le tirage au hasard d'une boule de l'urne, chacune des n boules a la même probabilité d'être choisie ». Comme dans le cas du dé, il est intéressant d'observer dans quels cas concrets ce modèle est pertinent. Le tirage d'une boule dans une urne paraît moins sujet à des différences par rapport à un tirage idéal (c'est-à-dire respectant l'équiprobabilité). Mais, peut-on être sûr que les boules sont bien indiscernables au toucher ou que la main innocente qui procède au tirage l'est autant qu'on veut bien le dire ? Et quand bien même on disposerait d'un système sophistiqué, comme peut en avoir la Française des Jeux, pour effectuer le tirage, la machine nous assure-t-elle de l'adéquation à ce modèle ? Pour la machine, comme pour le dé, la construction est censée garantir l'équiprobabilité mais rien ne prouve que ce soit le cas en réalité. Des vérifications périodiques permettent de valider cette hypothèse et ce n'est que par comparaison avec les résultats d'un tirage virtuel que l'on pourra faire « comme si », c'est-à-dire admettre que le modèle choisi est pertinent. Il convient donc de savoir si on étudie un modèle théorique pour lui-même ou si l'objet de l'étude est une certaine réalité et, dans ce cas, on ne doit pas prendre le modèle pour la réalité.

Ce qui se pratique dans l'industrie pour contrôler une production permet d'illustrer ces va-et-vient entre Modèle et Réalité. Considérons une machine programmée pour produire des pièces d'un diamètre précis. Supposons qu'on accepte, au vu d'une production passée (réelle), l'hypothèse que le diamètre d'une pièce, assimilé à une variable aléatoire, est distribué suivant une loi normale dont les paramètres peuvent être estimés. Cette hypothèse devient en quelque sorte la définition d'une machine (virtuelle) bien réglée. On peut calculer dans ce modèle les bornes d'un intervalle qui doit contenir les diamètres des pièces à venir avec une probabilité supérieure à 99 % si la machine ne se dérègle pas, c'est-à-dire si le modèle normal continue à représenter correctement la réalité. On définit ainsi ce qu'on appelle les limites de contrôle[32]. S'il survient dans la suite de la production une valeur à l'extérieur de cet intervalle, on arrête la production pour régler la machine. C'est le principe du contrôle de qualité[33].

---

30 J. C. Girard « Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités » in *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM Statistique-Probabilités, IREM de Reims, 1997

31 J. C. Girard, B. Parzysz, *Les maths, c'est pas la réalité*, Bulletin APMEP n°418, Septembre-Octobre 1998

32 En pratique, on prélève plutôt un échantillon de pièces et on calcule les limites de contrôle pour la moyenne des diamètres de l'échantillon.

33 L'inférence statistique. Deux exemples d'applications du calcul des probabilités : estimations et tests d'hypothèse,

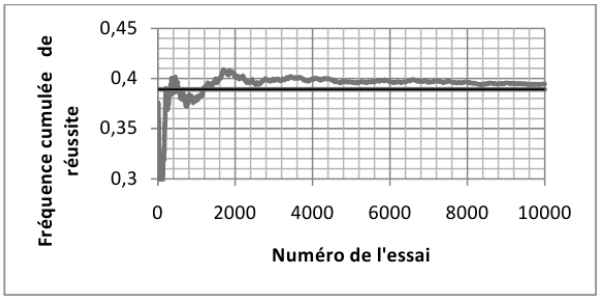
Intérêts et limites de la simulation.

Un des intérêts de la simulation est de rendre visibles les conséquences du choix d'un modèle. Si on définit un dé équilibré comme il est proposé dans le paragraphe précédent, on peut alors considérer l'instruction ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ou ENT(6*ALEA()+1) d'un tableur comme le lancer d'un dé équilibré et les résultats observés permettent alors de visualiser la stabilisation des fréquences et les fluctuations d'échantillonnage dans ce qui peut être considéré comme le modèle, autrement dit quand le dé est supposé équilibré. De la même façon, on peut construire une urne de Bernoulli sur un tableur ou une calculatrice. Dans ce schéma, on n'a plus besoin, comme c'était le cas dans la situation qui prévalait jusque-là en Seconde, de définir le modèle sous-jacent à une épreuve aléatoire avant de pouvoir la simuler ou de remplacer une épreuve aléatoire par une autre qui relève du même modèle mais sans pouvoir l'expliciter. Ce qui n'élimine pas tous les problèmes liés à la simulation, en particulier dans son usage pour définir ou trouver la probabilité par une approche fréquentiste.

Le recours à la simulation (informatique ou non[34]) pour faire apparaître une fréquence limite peut avoir comme conséquence de renforcer la confusion entre la réalité que l'on veut étudier et le modèle que l'on utilise souvent sans avoir conscience que ce modèle n'est pas la réalité. La simulation permet souvent au professeur de ne pas être vraiment confronté avec cette réalité et à se limiter à des activités plus classiques dans le cours de mathématique[35] comme la programmation informatique, par exemple.

Comme on l'a dit, la simulation permet d'obtenir une approximation de la probabilité d'un évènement difficile à trouver autrement et la loi des grands nombres permet de le justifier. Pour cela, le modèle utilisé pour la simulation doit être pertinent mais ce n'est pas suffisant.

Par exemple, on choisit au hasard, simultanément ou l'un après l'autre sans remise, deux dominos d'un jeu de 28. Quelle est la probabilité qu'ils soient compatibles[36] c'est-à-dire qu'ils aient une moitié identique ? La simulation donne le résultat suivant alors que la probabilité calculée avec les formules de combinatoire et arrondie au millième est 0,389.



Si on répétait la simulation, on obtiendrait la même « limite » mais, en général, on ne le fait pas. Dans ce cas, la simulation a bien fonctionné et on espère que les élèves sont convaincus.

Si on prend maintenant la situation des urnes de Pólya, les résultats sont plus surprenants. Le cas le plus simple est celui d'une urne qui contient au départ une boule noire et une boule blanche. On tire au hasard une boule de l'urne. Si elle est noire, on la remet dans l'urne avec une nouvelle boule noire. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une nouvelle boule blanche. On cherche si la

Michel Henry et Jean Claude Girard, *Enseigner les probabilités au lycée*, 1997, IREM de Reims

34 Comme lorsqu'on simule la naissance d'une fille ou d'un garçon en lançant une pièce !

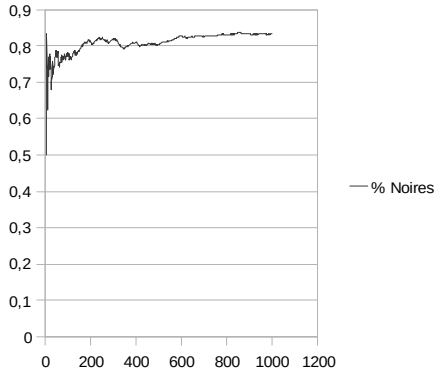
35 F. Wozniak, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*, Thèse de doctorat en didactique, Lyon 1, 2005

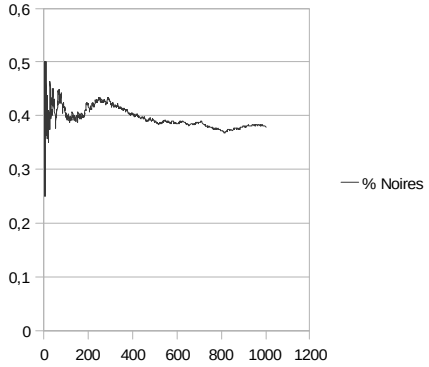
36 J. C. Girard, Utilisation pédagogique d'un logiciel de statistique, Enseigner les probabilités au lycée, Commission Inter-IREM Statistique et probabilités, IREM de Reims, 1997. D'après un exercice de la brochure *Les probabilités pour le Lycée*, IREM de Rouen, 1992

composition de l'urne tend à se stabiliser ou non ce qui revient à savoir si la probabilité de tirer une boule noire au bout d'un grand nombre de tirages tend à se stabiliser ou non.

La proportion de boules noires tend effectivement à se stabiliser vers une valeur mais si on recommence l'expérience la valeur obtenue n'est pas la même.

On peut démontrer[37] que toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; 1] sont équiprobables. Par exemple, la limite est 0,84 pour la première expérience et elle est de 0,38 pour la deuxième.





Une expérimentation de cette situation a été conduite en classe de seconde[38] ; elle a fait apparaître très clairement la confusion chez les élèves entre *stabilisation de la fréquence dans une expérience* et *variation de la fréquence d'une expérience à l'autre*. Le fait d'obtenir des résultats différents d'une expérience à l'autre ne pourrait-il pas être l'illustration des « fluctuations d'échantillonnage » ? On ne voit donc pas très bien sur quoi les élèves pourraient se mettre d'accord dans ce cas.

Et, par conséquent, on peut se demander si les autres démonstrations de la « fréquence limite », comme dans l'exemple des dominos, sont plus éclairantes. Mathématiquement, le professeur sait bien, d'après la loi des grands nombres, que la fréquence de succès « tend » vers la probabilité de tirer deux dominos compatibles à chaque essai. Et si on recommence l'expérience, cela ne peut que donner la même « limite ». Pourquoi n'obtient-on pas une même limite dans le deuxième cas ? La raison est plus subtile et la situation peut donner à réfléchir.

Il en va de la simulation comme de la démonstration en géométrie, les élèves font généralement confiance à leur professeur mais ils se demandent parfois à quel jeu il joue. Sachons donc rester modestes, dans les deux cas, sur notre pouvoir de conviction !

Conclusion

Pour résumer, l'introduction des probabilités en Troisième, tant que les élèves ne seront pas mis en situation de les rencontrer avant, devrait prendre en compte les points suivants :

- travail sur les situations aléatoires, pourquoi pas sur le hasard ou, au moins, sur les tirages au hasard ;
- exemples d'épreuves aléatoires, contre-exemples, ensemble des issues en fonction du protocole utilisé ;
- vocabulaire : certain, impossible, probable, plus ou moins probable ; liaison avec les résultats observés dans la répétition d'une épreuve aléatoire ;

37 On peut trouver la démonstration de ce résultat dans l'article *Les Urnes de Pólya*, P. Grihon, Bulletin de l'APMEP n° 485, Paris, 2009

38 *Les urnes de Pólya en classe de seconde*, Gilles Aldon, La feuille à problèmes n°11, IREM de Lyon, 2008 http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille11/dansnosclasses/article.pdf

- travail « naïf » sur la probabilité d'un évènement ; comparaison de probabilités[39] subjectives ou personnelles ;
- classements de probabilités sur une graduation (voir annexe 1) ou sur une échelle de 0 à 1 ou de 0% à 100% ;
- cas où l'on attribue culturellement une « probabilité » ou des chances de réalisation à un évènement, pari sur la réalisation d'un évènement, comparaison avec des données statistiques disponibles par ailleurs ou à des résultats obtenus dans la répétition d'une même expérience ;
- cas où le résultat varie en fonction de l'ensemble des connaissances de chacun ;
- cas où l'on peut se mettre d'accord sur « une probabilité » : situation de type « urne », approche fréquentiste, équiprobabilité des issues d'une expérience aléatoire ;
- construction de situations aléatoires conduisant à des évènements qui ont une probabilité donnée, par exemple inventer un jeu où la probabilité de gain est donnée[40];
- probabilités d'évènements plus « complexes ».

Le travail sur les probabilités en Seconde pourrait alors proposer une définition plus formelle (distribution de probabilités sur un ensemble, définition d'un évènement, propriétés élémentaires de la fonction de probabilité, probabilité d'un évènement comme somme des probabilités des éventualités qui le réalisent, réunion, intersection de deux évènements, etc.). Ce qui laisserait pour la classe de Première les probabilités conditionnelles et les lois discrètes (loi binomiale, par exemple). Et pour la Terminale, les lois continues (loi exponentielle, loi normale) et le test d'adéquation à une loi (équirépartie ou non).

Références

Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2001), *Autour de la modélisation en probabilités.* Michel Henry, éd., Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon.
Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2003), *Probabilités au lycée*. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds., Brochure 143, APMEP, Paris.
Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2005), *Statistique au lycée,* vol. 1. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds., Brochure 156, APMEP, Paris.
Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2007), *Statistique au lycée,* vol.2. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds., Brochure 163**,** APMEP, Paris.
EDUSCOL, (2008), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e. Probabilités au collège,* en particulier, l'annexe 1 : Différentes interprétations de la probabilité et l'annexe 2 : Éléments d'histoire de la notion de probabilité
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/6/doc_acc_clg_probabilites_109176.pdf
Henry M., (2009), *Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation,* Repères-IREM n° 74, Topiques éditions, Metz.
Henry M., (2010), Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités, *Statistique et Enseignement,* Vol. **1**, No 1, Société Française de Statistique.
http://www.statistique-et-enseignement.fr/ojs/index.php/StatEns/article/view/4/2

39 On trouvera des exemples dans *A comparison of learning subjective and traditionnal probability in middle grades*, Jeanne Rast, Ph.D. Dissertation, Georgia State University, 2005 http://etd.gsu.edu/theses/available/etd-11272005-211312/unrestricted/rast_jeanne_d_200512_phd.pdf

40 On trouvera des exemples dans l'article *Le chapitre « Probabilité» en Troisième*, T. Chevalarias, Repères-IREM n°78, Topiques éditions, Janvier 2010

ANNEXE 1

Extrait de *"Maths made easy, Key Stage 2, ages 9-10, Workbook 1"*, John Kennedy, Sean McArdle, DK Publishing

Probability

Mark these events on the probability line.

impossible | poor chance | even chance | good chance | certain

a) It will get dark tonight.
b) When I toss a coin it will be heads.
c) William the Conqueror will come to tea.

Mark these events on the probability line.

impossible | poor chance | even chance | good chance | certain

a) It will snow in August.
b) The sun will come up tomorrow.
c) A new baby will be a boy.
d) A dog will talk.
e) I will watch some television tonight.

Now try these.

impossible | poor chance | even chance | good chance | certain

a) I will roll a six on a dice.
b) I will not roll a six on a dice.
c) I will roll a number between one and six on a dice.
d) I will roll a seven on a dice.
e) I will either roll a one, two or three on a dice.

Mark these events on the probability line.

impossible | poor chance | even chance | good chance | certain

a) I will drink something today.
b) If I drop my book, it will fall face down.
c) The next book I read will have exactly 100 pages.
d) It will rain orange squash tomorrow.
e) I will see a white car today.

Les activités

Toutes les activités présentées font manipuler les élèves. En effet, nous estimons que ces derniers ont besoin d'expérimenter pour comprendre ultérieurement la simulation.
Ces activités ont été mises en pratique dans des classes de différents établissements de profils variés. Les productions d'élèves témoignent de ces expériences. Les feuilles de route permettent d'avoir un fil conducteur pour la mise en œuvre en classe.
Pour la classe de Troisième, les activités suivantes abordent les différents points du programme :
Autour du mot « hasard », *Sac de bonbons*, *Lancer d'une pièce*, *Le dernier est-il désavantagé ?*, *Biberon*, *Somme de deux dés*.
Enfin, pour la classe de Cinquième, *Inégalité triangulaire – Notion de fréquence en classe de cinquième* introduit les fréquences tout en familiarisant les élèves à l'aléatoire.

Extrait du programme officiel de la classe de Troisième :

Connaissances	capacités	commentaires
1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves.*

Extrait du programme officiel de la classe de seconde :

« [...]
Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :
• d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;
• de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples ;
• d'interpréter des évènements de manière ensembliste ;
• de mener à bien des calculs de probabilité.
Les situations étudiées concernent des expériences à une ou plusieurs épreuves.
◊ La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires) [...] »

Autour du mot « hasard » : des représentations initiales des élèves

Georges PONS, IREM des Pays de la Loire

Présentation

Cette activité se place en début d'apprentissage et vise à faire exprimer les conceptions spontanées des élèves concernant la notion de hasard.

Prérequis

Aucun

Matériel envisagé

Aucun

Scénario

Première partie

L'enseignant projette l'intégralité de la consigne suivante :

Je vous propose une activité qui servira d'introduction à une nouvelle partie du programme.
Cette activité s'appelle « Autour du mot... ».
Premier temps
Je vais écrire un mot au tableau, mais vous ne réagissez pas tout de suite même si le mot vous surprend...
Vous réfléchirez en silence puis, chacun à votre tour, vous direz un mot que vous associez au mot que j'aurai écrit et je le noterai au tableau.
Nous ferons ainsi un ou plusieurs tours de classe.
Deuxième temps
Parmi tous les mots au tableau, il y en aura sans doute :

- avec lesquels vous serez d'accord, c'est-à-dire que vous penserez qu'ils ont un rapport avec mon mot ;
- d'autres avec lesquels vous ne serez pas d'accord, c'est-à-dire que vous penserez qu'ils n'ont pas de rapport avec le mien.

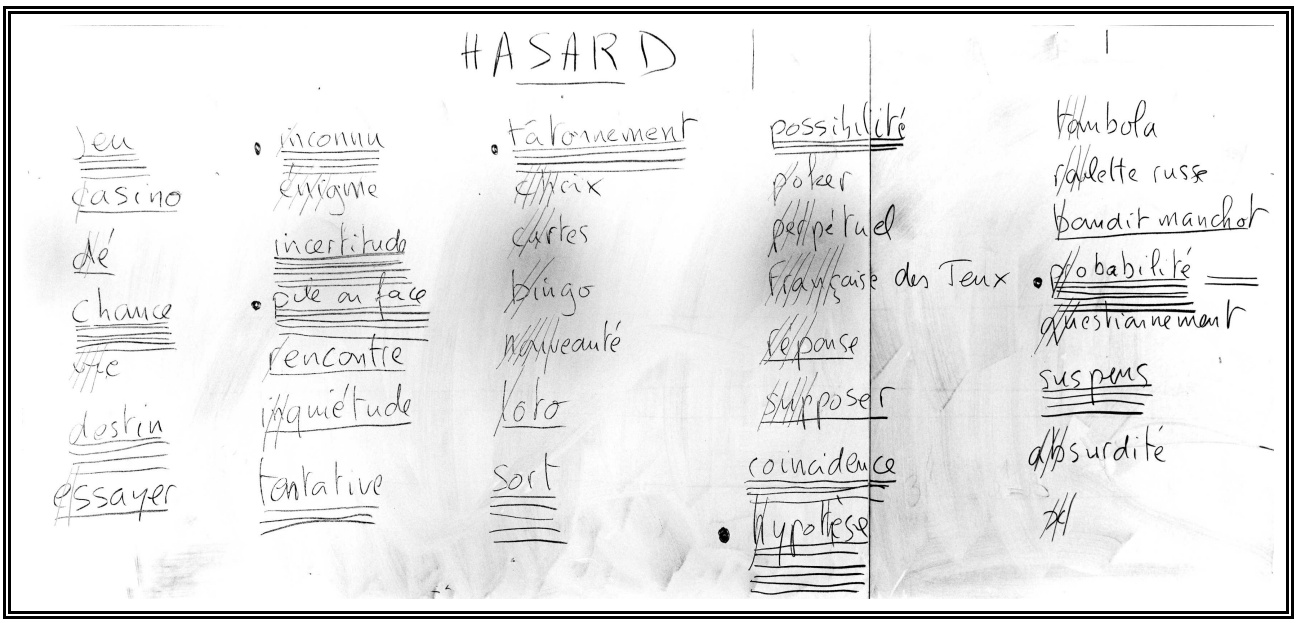
Chacun à votre tour, vous me direz :

- un mot que vous gardez, je le soulignerai ;
- un mot que vous rejetez, je le barrerai.

Nous ferons ainsi encore un ou plusieurs tours de classe.

Le professeur écrit le mot « HASARD » et l'activité commence.
Ci-dessous un exemple de tableau[41] produit par une classe :

41 Il est intéressant de garder une trace du tableau à la fin de l'activité, éventuellement pour le réutiliser ultérieurement. Il est tout à fait possible d'en prendre une photographie. Mais, pour les professeurs qui en disposent, le plus simple et le plus rapide est évidemment d'utiliser un TBI et de sauvegarder le tableau produit...



Deuxième partie

C'est le moment des demandes d'explicitation et du débat. Le professeur s'adresse à la classe :

> Parmi tous les mots écrits, il y en a sans doute qui vous posent question et pour lesquels vous voulez des explications. Il y en a sans doute aussi pour lesquels vous avez envie d'intervenir pour expliquer pourquoi il faut les barrer ou bien les garder.
> Allons-y !

Les questions et le débat arrivent toujours très vite !

À partir du tableau précédent, les demandes d'explicitation et le débat ont porté dans cette classe essentiellement sur trois points :

- sur le registre inconnu/incertitude/inquiétude, d'où il ressort que, pour la plupart des élèves de cette classe, le hasard est quelque chose d'inquiétant, un danger potentiel (le « *x* » est le fait d'un élève qui avait compris « inconnu » au sens mathématique, alors que les autres l'utilisaient au sens courant...) ;
- sur le registre tentative/tâtonnement/supposer/hypothèse (avec une confusion entre le sens courant et le sens physique), ce qui a permis de revenir sur ce qu'est une méthode par tâtonnement, ce qu'est une hypothèse en sciences physiques, etc.
- sur le registre des jeux, certains réagissant au mot « poker » pour affirmer qu'il n'était pas question de hasard, d'autres que oui, dans la distribution des cartes, ce qui a amené à essayer de préciser la place du hasard dans les jeux cités.

Naturellement, le débat sera en grande partie différent suivant les classes. Dans une autre classe, un mot assez inattendu est apparu, le mot « amour », âprement défendu par une moitié (surtout féminine) des élèves ! Le débat a donné l'explication : « l'amour, c'est au hasard des rencontres »... mais d'autres ont réagi « ce n'est pas vraiment le hasard, sur 150 élèves de troisième, c'est rien par rapport à tout le monde » !

Mais, même si les contextes de classe sont différents, certaines représentations des élèves se retrouvent :

- le hasard, c'est l'inconnu ou l'imprévisible ou le « n'importe quoi » ou le « tout est possible » ;
- quelle est la place du hasard ? Le débat a lieu souvent à partir des jeux de « hasard » et il

permet d'avancer vers la notion de protocole expérimental ;

- la confusion entre hasard et méthode de résolution par tâtonnement en mathématiques : nombre d'élèves disent que les essais d'une méthode de résolution par tâtonnement se font au hasard, même s'ils se rangent rapidement aux arguments de ceux qui en expliquent la logique.

La plupart des élèves, sinon tous, participe aux discussions, sans doute parce que le sujet les motive et ensuite parce que « ce n'est pas des maths ».

Mais il est important que ces représentations des élèves puissent s'exprimer et être discutées, dans la mesure où le débat va permettre de faire un premier pas dans l'étude des probabilités en commençant à préciser dans quels champs s'exerce ou ne s'exerce pas le hasard.

Les activités d'introduction à la notion d'expérience aléatoire en seront d'autant plus efficaces.

Le sac de bonbons

« […] Alors pour le dernier tour il a dit : « Kiwi » avec une petite voix qui intensifie l'espace-temps et influence le piochage du kiwi. » *Et il a gagné…*

(Citation d'élève)

Groupe Collège, IREM de Lyon

Présentation

Avant la troisième, les élèves ont rencontré maintes fois des situations aléatoires. Ils ont joué à des jeux de dés, de cartes, de loto… Ils ont lu des contes, entendu des histoires, regardé des fictions…

À travers ces expériences, ils se sont construit des représentations personnelles du hasard. Certains croient être nés (ou non) sous une bonne étoile et disposer (ou non) d'un certain capital « chance ». D'autres s'imaginent disposer de « pouvoirs » et essaient de favoriser le destin ou de prévoir ce qui va se passer. D'autres encore, dans une approche plus statistique, évoquent « la loi des séries » ou, au contraire, considèrent qu'un évènement ne peut pas se produire deux fois de suite.

Ces différentes conceptions sont autant d'obstacles à la compréhension des probabilités.

La situation présentée ici propose de faire émerger ces conceptions et de commencer à les confronter pour mieux les dépasser. Elle doit être proposée en amont et peut être détachée du chapitre.

Objectifs

- Faire émerger le rapport que les élèves ont avec le hasard et commencer à mettre leurs conceptions à l'épreuve des statistiques.
- Faire ressortir le vocabulaire spontanément utilisé dans l'action par les élèves pour commencer à investir le langage des probabilités : hasard/chance, nombres de chances/sur, sûr/certain, évènement, évènement certain, évènement impossible…
- Éventuellement, faire ressortir la nécessité d'un protocole clair pour rendre une expérience aléatoire ou garantir qu'une expérience est aléatoire.
- Réfléchir à la notion d'évènement probable en relation avec celle d'évènement effectivement réalisé.
- Engager les élèves à mobiliser des éléments d'analyse statistique pour tenter de répondre à un problème.

Prérequis

- Aucun

Matériel envisagé

- Un sac opaque contenant environ cent cinquante bonbons de même type (forme, aspect au toucher) de six ou sept parfums, dans des proportions variées.

Scénario

Les temps 1 à 4 sont réalisés en une séance de 50 minutes.

Temps 1 : émergence des conceptions / distribution et remise des bonbons non gagnés/ jeu individuel.

- Présentation du problème

Le professeur montre le sac opaque aux élèves et donne la consigne :

> « Ce sac contient des bonbons de parfums différents.
> À tour de rôle, chacun d'entre vous devra annoncer le parfum du bonbon que je vais tirer au hasard. Si le parfum correspond à celui annoncé, vous gagnez le bonbon, sinon le bonbon sera remis dans le sac. »

Si des questions émergent avant ou pendant l'activité, le professeur ou la classe y répondent au fur et à mesure.

- Premier tour

Chaque élève propose un parfum en justifiant ou non son choix.

- Premier bilan

Il est oral. Il pointe la difficulté de prévoir le résultat des tirages et incite les élèves à améliorer la performance de la classe ; ceci doit naturellement les conduire à s'intéresser, si ce n'est déjà fait, à la répartition des différents parfums dans le sac.

Temps 2 : exploitation statistique / distribution et remise dans le sac des bonbons non gagnés / jeu individuel.

Les modalités sont similaires à celles du temps 1 (second tour) mais dans le but que la classe gagne le maximum de bonbons. Les élèves sont invités cette fois-ci à justifier leur choix.

On garde au tableau ou dans un tableur une trace des issues pour avoir des éléments concrets de débat, constater l'amélioration ou non de la performance et en analyser les causes.

Temps 3 : réinvestissement / tirage sans remise des bonbons / en groupe.

Le but est de découvrir un maximum de fois le parfum du bonbon tiré au sort pour faire gagner l'équipe et remporter un lot fixe de plusieurs bonbons. Cette fois-ci les bonbons non gagnés sont déposés à côté du sac. C'est un même élève représentant le groupe qui annonce à chaque tour le parfum choisi par l'équipe.

Il devient pertinent de s'intéresser à l'évolution des effectifs.

Temps 4 : retour individuel sur l'activité.

Les élèves écrivent ce qu'ils ont retenu ou appris de l'activité.

Temps 5 : synthèse.

Elle est commune à la classe et élaborée à partir des productions précédentes.

Temps 6 : prolongements possibles

- Dans un même contexte : proposer aux élèves de choisir entre deux sacs contenant plus ou moins de bonbons de parfums différents pour obtenir un parfum donné. La situation les conduit à comparer les effectifs relatifs des parfums désirés.
- Dans un contexte différent : le problème « la main dans le sac »[42] proposé au rallye ARMT 2008 peut permettre, une fois installée la notion d'aléatoire, d'évaluer la capacité des élèves à mobiliser leurs connaissances en proportionnalité dans la résolution de ce type d'exercices.

Notes diverses

Temps 1

Pour justifier leur choix, les élèves évoquent leur parfum préféré, leur chance (« Cerise car je vais avoir de la chance. » ou « Y'a du bol. ») ou leur capacité à prévoir l'issue du tirage (« J'ai un don. »), soit en interprétant l'évolution des issues précédentes (« À force de dire citron, ça va bien venir. »), soit en raisonnant en termes d'effectifs (« Il y a plus d'orange. ») ou de fréquences (« Il y a 60 chances sur 176 de tirer orange. »).

Les motivations des élèves sont diverses ; certains ne demandent pas le parfum le plus représenté simplement parce qu'ils ne l'aiment pas, d'autres pensent qu'il n'a pas plus de chance de sortir qu'un autre.

Certains élèves peuvent accuser l'enseignant de tricherie au moment du tirage. C'est alors l'occasion de s'interroger sur le protocole de tirage, d'essayer de définir avec la classe quelles conditions doivent être respectées pour qu'il soit le plus aléatoire, le plus « au hasard », possible. Il conviendra ensuite de l'appliquer.

Temps 2

La nouvelle consigne donnée à l'issue du bilan a modifié l'enjeu. Il ne s'agit plus de gagner pour soi-même mais de faire gagner la classe. On incite ainsi les élèves qui cherchaient à obtenir leur parfum préféré à changer leur vision du problème pour chercher plutôt à prévoir l'issue de chaque tirage.

Les élèves raisonnent davantage en termes de statistiques. Certains s'appuient sur la répartition des bonbons dans le sac, parlant spontanément de « pourcentages » au sens de « proportion ». D'autres interprètent les résultats des tirages précédents : « Même parfum parce que je l'ai pas eu au 1er tour », « Y a plus de chance de l'avoir car il est sorti plus de fois. ». Ces arguments suscitent souvent des désaccords propices au débat entre élèves.

En situation, l'enseignant peut rebondir sur d'éventuelles propositions atypiques (« un bonbon de n'importe quel parfum » ou au contraire un bonbon dont le parfum n'est pas dans le sac)

42 Voir l'énoncé et l'analyse du problème en annexe 1

pour évoquer les notions d’évènement certain ou d’évènement impossible.

Temps 3

L'enjeu est une nouvelle fois modifié, il s'agit de faire gagner le groupe, donc de choisir ensemble et de tester une stratégie pertinente pour deviner l'issue des tirages. Le travail en groupe oblige les élèves à formaliser leurs stratégies personnelles et à les soumettre au contrôle du groupe. Le tirage étant sans remise, la question se pose à chaque tour.

Temps 4

L'écrit oblige les élèves à prendre un peu de recul sur l'activité, à synthétiser leur pensée et à la formaliser. À partir de ces productions, le professeur peut mesurer l'évolution des conceptions des élèves. Il pourra s'appuyer sur elles pour construire la synthèse et envisager les activités futures.

Les écrits des élèves sont souvent plus riches que ce qui a pu être exprimé à l’oral pendant la séance.

Certains montrent la persistance de conceptions « obstacles » qui devront encore être mises à l'épreuve dans des activités complémentaires.

« J’ai rien eu : j’ai pas de chance. »

Dans le cas d’un tirage avec remise : « Plus on est nombreux à jouer et à parier sur le même goût à un jeu de hasard, plus on a de chances de gagner, même si le nombre de bonbons est faible. »

« Alors que Quentin persistait sur le parfum orange il tombait systématiquement sur le parfum kiwi. Alors pour le dernier il a dit : « Kiwi. » avec une petite voix qui intensifie l’espace-temps et influence le piochage du kiwi. »

D'autres témoignent d'approches plus statistiques ou évoquent des évènements en termes de probabilités.

« On a observé que si, au premier tour, on donnait le nom du bonbon où il y avait le plus de pourcentage, on tombait facilement dessus. Au deuxième tour, vu qu’il restait moins de bonbons où il y en avait le plus, si on disait le nom du deuxième bonbon où il y avait le plus de pourcentage, on tombait plus facilement sur lui. »

« J’ai retenu que plus le nombre de bonbons d’un certain goût était important, plus on avait de chances de l’avoir. Mais on peut aussi tomber sur les autres car on a plus de chances de l’avoir, mais pas toutes les chances. »

« Il est très dur de deviner ce qui va se passer mais on peut essayer de demander le parfum où il y a plus de bonbons. »

Temps 5

Selon les classes, le déroulement de la séance peut être très différent : certaines demandent d’emblée la composition voire les proportions de chaque parfum, alors que d’autres, au contraire, ne voient même pas l’intérêt de demander les différents parfums possibles…

La faible taille de l’échantillon peut conduire à des tirages globalement surprenants (exemples : plusieurs élèves gagnants à la suite, un élève qui gagne systématiquement quel que soit le degré de représentation de son parfum).

Par conséquent, l’exploitation de l’activité peut aller d’une expression des différentes représentations (à réinterroger dans de nouvelles activités) à une formalisation plus aboutie, consensuelle, de l’analyse faite par la classe.

La synthèse peut s’articuler autour des éléments énoncés ci-dessous.

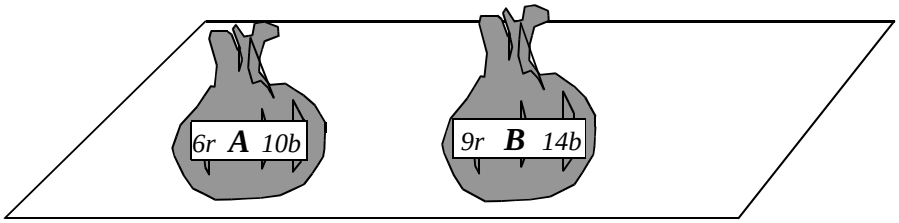
- Des évènements semblent avoir plus de chances d’arriver que d’autres.

- Des évènements qui ont plus de chances de se produire, les « évènements les plus probables » ne sont pas toujours sûrs de se produire mais semblent se produire plus souvent que les autres.
- Un évènement qui se produirait à coup sûr est un évènement certain. Un évènement qui ne se produirait jamais, à coup sûr, est un évènement impossible.

« C'est pas mathématique le hasard. »
(Citation d'élève)

Annexe 1

La main dans le sac (CAT. 7, 8, 9 10) ©ARMT.2008



Pour 1 euro, tentez votre chance !!

*Si vous tirez une boule **rouge**, vous gagnez un ours !!*

À la fête du village, un forain propose aux passants le jeu suivant :

Donnez-moi un euro et tirez une seule boule dans le sac de votre choix.

Si la boule est rouge, vous gagnez un ours en peluche !

Dans le sac A, il y a 6 boules rouges et 10 boules blanches.

Dans le sac B, il y a 9 boules rouges et 14 boules blanches.

Toutes les boules sont de même grandeur, de même poids et de même matière.

Les sacs sont opaques et l'on ne peut pas voir les boules qu'ils contiennent, on ne peut qu'y plonger la main pour tirer une boule.

Vous n'avez qu'un euro en poche et vous aimeriez bien gagner un ours.

Dans quel sac préférez-vous tirer une boule ? Expliquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Probabilités intuitives
- Arithmétique : proportionnalité, rapports

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut choisir un des deux sacs (dont les contenus sont différents), qu'il faut espérer « tirer une boule rouge » dans le sac choisi, ce qui revient aussi à « ne pas tirer une boule blanche ».
- Comprendre qu'il ne faut pas simplement comparer les nombres de boules rouges (9 > 6) et choisir le sac B parce qu'elles y sont plus nombreuses ou les nombres de boules blanches (14 > 10) et choisir le sac A car on risque moins d'en tirer une boule blanche (perdante). L'abandon de cette conception devrait s'appuyer, par exemple, sur la contradiction entre les deux démarches qui en découlent :

  « tirer une boule rouge dans le sac où il y en a le plus » conduit à choisir le sac B d'une part, et

  « tirer une blanche dans le sac où il y en a le moins » conduit à choisir le sac A d'autre part.
- Tenir compte simultanément des quatre nombres de boules donnés (car il ne suffit pas de considérer séparément les couples (6 ; 9) et pas (10 ; 14) ou l'inverse.

  Dans ce contexte, suivant les âges, les élèves se placent spontanément dans un cadre additif. On rencontre généralement deux démarches erronées :

  1- Calculer les écarts entre les nombres de boules d'un même sac (4 boules blanches de plus que de rouges pour A et 5 pour B). Conclure alors au choix de A, « car dans B il y a plus de boules blanches en plus que dans A ».

  2- Calculer les variations des nombres de boules d'une même couleur d'un sac à l'autre (+ 3 rouges et + 4 blanches de A à B). Conclure aussi au choix de A, « car de A à B, on ajoute plus de boules blanches que de rouges ».

  Dans ce cadre additif, la conclusion que le sac A est plus favorable peut sembler faire appel à une intuition probabiliste : en ajoutant plus de boules blanches que de rouges pour passer d'un sac à l'autre, on augmente le poids relatif des blanches et on a plus de « risques » de tirer une boule perdante. Mais ce raisonnement de nature pré-probabiliste n'est décelable que si l'élève explique comment il aboutit à sa conclusion, ce qui n'est pas fréquent.

  Ce raisonnement additif peut être invalidé en l'appliquant à d'autres exemples de sacs fictifs pour lesquels, par une approche intuitive, on peut estimer que les chances de gagner sont les mêmes.

  Par exemple, dans un sac A', « double-sac A », contenant 12 rouges et 20 blanches, il y a autant de chances de gagner qu'avec A. Mais, selon la démarche 1, il y aurait 8 « boules blanches en plus que de rouges », alors que dans le sac B il y en a 5. On opterait alors pour le sac B plutôt que A' ou que A, contrairement au choix précédent.

  La conclusion que A est plus favorable, reposant dans la démarche 2 sur les variations des boules de même couleur avec le sac B (+ 3 rouges dans B et + 4 blanches) et faisant également apparaître une augmentation supérieure des blanches par rapport aux rouges, est à rejeter comme précédemment.
- Se placer dans un cadre multiplicatif ou de proportionnalité et comprendre qu'il faut considérer

les quantités relatives des boules rouges par rapport aux blanches ou par rapport à l'ensemble des boules contenues dans chacun des sacs.

- Choisir le sac qui donne une meilleure « chance » de gagner, c'est-à-dire, dans une appréhension probabiliste, choisir celui qui contient la plus forte proportion de boules rouges.
- Deux types de rapports peuvent être considérés pour comparer les deux sacs.

  Soit, pour chacun des sacs, le rapport du nombre des boules rouges à celui des blanches : 6/10 dans A et 9/14 dans B. Pour les comparer, on peut les exprimer en décimaux : 0,6 pour A et 0,643 pour B, ou par fractions équivalentes : 42/70 pour A et 45/70 pour B ou en pourcentages : 60 % pour A et 64,3 % pour B. D'où le choix de B.

  Soit, pour chaque sac, le rapport du nombre des boules rouges parmi toutes (probabilité de tirer une boule rouge) : 6/16 = 0,375 = 138/368 = 37,5 % pour A et 9/23 = 0,391 = 144/368 = 39,1 % pour B.

  D'où encore le choix de B.
- Exprimer la réponse sans confondre une réponse probabiliste du genre « nombre de chances sur ... de tirer une boule rouge » avec une réponse se référant aux rapport rouges/blanches. Par exemple, il est correct de dire « ... car on a 37,5 chances sur 100 de tirer une boule rouge dans A et 39,1 chances sur 100 dans B », mais il n'est pas correct de dire « 60 chances sur 100 dans A et 64,3 chances sur 100 dans B ».

  Notons que l'usage du mot « chance » est source d'ambiguïtés. Il n'a pas le même sens dans « avoir plus de chance de tirer une boule rouge dans B que dans A » qui est une évaluation qualitative, et dans « j'ai 6 chances sur 16 de tirer une boule rouge dans A » qui est une appréciation quantitative de la probabilité dans laquelle les « chances » sont assimilées aux boules gagnantes, ce qui peut être source de confusions quand on énonce : « j'ai 37,5 chances sur 100 de tirer une boule rouge de A ».

Lancer d'une pièce, d'un osselet

Vincent PAILLET, IREM d'Orléans -
Christian JUDAS et Georges PONS, IREM des Pays de la Loire

Présentation

Cette activité est une introduction aux probabilités en classe de 3e, même s'il n'est pas inutile d'avoir fait émerger les représentations initiales des élèves auparavant.

Le nouveau programme de troisième[43] demande d'introduire la notion de probabilité par la dualité de ses approches : classique[44], valable uniquement dans les cas d'équirépartition, et fréquentiste.

Pour mettre en évidence les liens mais aussi les différences entre la probabilité et les fréquences observées lors d'une expérience aléatoire, il nous semble important de partir d'une situation suffisamment simple pour que les élèves aient une intuition de la probabilité : d'où l'idée du lancer d'une pièce.

Mais il fallait aussi trouver une situation motivante pour que les élèves proposent d'expérimenter en lançant la pièce. C'est ce qui nous a amené à faire le « détour » d'un questionnaire sur des expériences aléatoires de complexité croissante, la probabilité de la dernière ne pouvant pas *a priori* être calculée.

Le but de cette activité est donc de faire émerger le concept même de probabilité.

Objectifs

- Introduire la notion de probabilité.
- Mettre en place une expérience aléatoire.
- Montrer la nécessité de décider d'un protocole expérimental.
- Faire percevoir que la probabilité est parfois calculable *a priori* mais pas toujours.
- Faire percevoir le lien et les différences entre la probabilité et les fréquences observées lors d'une expérience aléatoire.
- Introduire un vocabulaire de base : issue, évènement, probabilité.

Prérequis

Savoir ce qu'est une fréquence.

Matériel envisagé

- Une pièce de 2 centimes par groupe de deux élèves (soit une quinzaine).
- Une quinzaine d'osselets.
- Une quinzaine de « pistes » pour lancer (couvercles de boîtes à chaussure, de boîtes de ramette de papier, tapis, etc.)
- Une quinzaine de gobelets pour secouer avant de lancer.

43 Bulletin Officiel du 28 août 2008 : http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html

44 Définition de Laplace : « La probabilité est le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles », Théorie analytique des probabilités, 1812.

- Une classe avec ordinateur et vidéoprojecteur.
- quelques dés au cas où.

Déroulement

Cette activité s'étale sur six à sept séances, mais la première séance n'occupe que peu de temps et ne monopolise pas toujours une heure de cours complète. Ce découpage est donc indicatif et toutes les parties ne sont pas forcément à faire à la suite les unes des autres.

Première phase (10 minutes)

Le professeur distribue le questionnaire 1 sur une feuille A4.

Les quatre énoncés sont progressifs. Si les trois premiers ne posent pas de problème, le quatrième, concernant des lancers d'osselets, doit amener à un blocage ou faire apparaître des contradictions lors du bilan.

Le professeur laisse suffisamment de temps (environ 10 min) pour que les élèves complètent individuellement leur questionnaire puis il les ramasse.

Questionnaire 1

Énoncé 1

Je jette une pièce de monnaie. Combien ai-je de chances d'avoir « pile » ?

Peux-tu répondre à la question posée ? Oui Non

Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Énoncé 2

Je lance un dé classique à six faces

1) Combien ai-je de chances d'avoir « 2 » ?

2) Combien ai-je de chances d'avoir un nombre pair ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? Oui Non

Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Peux-tu répondre à la question 2) ? Oui Non

Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Énoncé 3

Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges. Je tire une boule (sans regarder !)

1) Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?

2) Combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? Oui Non

Si oui réponds : .....

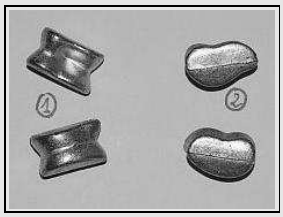
Si non pourquoi ? .....

Peux-tu répondre à la question 2) ? Oui Non

Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Énoncé 4



Je lance un osselet.

Combien ai-je de chances de le voir retomber position 1 (deux cas possibles) ?

Peux-tu répondre à la question ? Oui Non

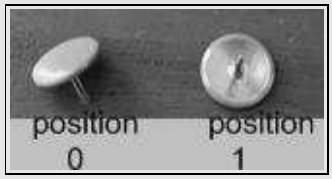
Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Il est possible de remplacer l'énoncé 4 par un autre de votre choix.

Par exemple :

Énoncé 4



Je lance une punaise.

Combien ai-je de chances que la punaise tombe sur sa tête (position 1) ?

Peux-tu répondre à la question ? Oui Non

Si oui réponds : .....

Si non pourquoi ? .....

Cependant le lancer des osselets nous semble plus approprié car des jeux liés au hasard leur ont été associés dès l'antiquité. De plus le fait que les différentes positions ne soient pas équiprobables semble rapidement évident pour les élèves même si cela n'enlève pas toutes les difficultés.

<u>Deuxième phase</u>

En fonction de ce qu'il a trouvé dans les questionnaires, le professeur réalise une présentation qu'il projette aux élèves avec comme consigne :

Voici les différentes réponses et justifications proposées par les élèves de la classe. Nous allons en débattre ensemble afin de voir celles qui nous paraissent acceptables et si oui ou non nous pouvons répondre à la question posée.

Exemple de résumé du questionnaire 1 réalisé à partir des réponses des élèves :

Énoncé 1
Je jette une pièce de monnaie. Combien ai-je de chances d'avoir « pile » ?
Peux-tu répondre à la question posée ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : Une chance sur deux ; $\frac{1}{2}$ = 1 chance sur 2 ; Une chance sur 2 car il y a deux côtés, deux faces
Si non pourquoi ? : ça dépend comment est lancé la pièce ; car la pièce est de même grandeur

Énoncé 2
Je lance un dé classique à six faces
1. Combien ai-je de chances d'avoir « 2 » ?
2. Combien ai-je de chances d'avoir un numéro pair ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : Une chance sur six ; $\frac{1}{6}$ = 1 chance sur 6 ; $\frac{1}{6}$
Si non pourquoi ? Il y a trop de nombres ; Car toutes les faces sont égales et tout dépend comment on le lance

Peux-tu répondre à la question 2) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : trois chances sur six ; $\frac{3}{6}$ = 3 chances sur 6 ; 1 chance sur 2 ; 1 chance sur 3 ; $\frac{1}{3}$
50 % de chance

Si non pourquoi ? C'est le hasard ; Car il y a autant de chance de faire un nombre impair 1, 3, 5

Énoncé 3
Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges . Je tire une boule (sans regarder !)
1. Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?
2. Combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?

Peux-tu répondre à la question 1) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 3 chances sur 7 ; $\frac{3}{7}$; une chance sur 3 ; une chance sur 7 ; 3 chances
Si non pourquoi ? Car c'est le hasard

Peux-tu répondre à la question 2) ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 4 chances sur 7 ; $\frac{4}{7}$; une chance sur 4 ; une chance sur 7 ; 4 chance sur 3
Si non pourquoi ? Non mais il y aura plus de probabilité pour qu'on pioche une boule rouge car il y en a 4 pour 3 jaunes

Énoncé 4
Je lance un osselet.
Combien ai-je de chances de le voir retomber position 1 (deux cas possibles) ?

Questions : Peux-tu répondre à la question ? **Oui** **Non**
Si oui réponds : 2 chances sur 4 ; 1 chance sur 2 ; Il est plus grand que l'autre côté de l'osselet ; 2 chances ; $\frac{2}{4}$
Si non pourquoi ? On ne peut pas savoir ; car c'est le hasard ; car les côtés ne sont pas uniformes
Car les deux faces des positions n'ont pas la même grandeur de surface.
car ça doit dépendre de la façon dont il est lancé, mais je pense qu'il y a plus de chance de retomber en 1

Il ne nous semble pas souhaitable d'indiquer dans cette présentation le nombre d'élèves ayant proposé telle ou telle réponse afin de ne pas orienter le débat et pour que chaque réponse soit regardée sans *a priori* (c'est d'autant plus important pour l'énoncé 4).

Les trois premiers énoncés ne posent pas de problème et les élèves se mettent rapidement d'accord sur le fait qu'on peut y répondre et sur la ou les réponses à proposer. Il est néanmoins important de bien les traiter. En particulier les réponses du type « c'est le hasard » sont en général utilisées pour dire qu'on ne peut pas répondre aux questions. Le professeur doit faire ressortir que c'est justement le hasard des tirages qui implique les réponses comme « On a une chance sur deux d'avoir un nombre pair en lançant un dé » ou « on a trois chances sur sept de tirer une boule jaune dans l'urne ». Suivant les remarques des élèves on peut se poser des questions sur les conditions de réalisation des expériences afin de commencer à faire comprendre que les réponses n'ont de sens que si on se place dans des cas d'équiprobabilité. Il est cependant trop tôt pour introduire le concept de probabilité qui serait alors plaqué et ne prendrait sens que pour trop peu d'élèves. Les élèves saisissent très bien par exemple que si l'urne n'est pas opaque, on peut alors choisir sa boule et arriver à 100 % de chance de tirer celle que l'on souhaite. Le professeur peut faire le parallèle avec un bocal de bonbons. Si on regarde à l'intérieur, on prendra à coup sûr le parfum souhaité. On pourra préciser qu'il faut aussi qu'elles soient indiscernables au toucher. La discussion pourra alors remettre en cause le fait qu'on a « une chance sur deux d'obtenir « Pile » en lançant une pièce de monnaie » car les deux faces n'ont pas les mêmes motifs.

Pour l'énoncé 4, la plupart des élèves répondent « une chance sur deux », ce qui signifie pour eux qu'on est face à une expérience à deux issues possibles (position 1 ou position 2), dont une seule correspond à la position 1, sans se soucier de l'équiprobabilité de chaque issue. Ceux qui répondent deux chances sur quatre, font le même raisonnement en prenant pour issues les différentes faces de l'osselet. Le même type de raisonnement pourrait amener une personne à dire qu'on a une chance sur deux de rencontrer son meilleur ami en sortant se promener[45].
Il n'est donc pas étonnant que la classe souhaite conserver ces réponses dans un premier temps. Pour autant, les réponses du type « C'est le hasard », « On ne peut pas répondre car les côtés ne sont pas uniformes », « on ne peut pas répondre car les deux faces des positions n'ont pas la même surface », semblent aussi assez logiques aux élèves. Ces derniers tombent alors majoritairement d'accord sur le fait qu'on a plus de chance de retomber en position 1.

La question suivante peut alors être posée :

Quelles sont les caractéristiques communes aux trois premières situations, permettant de répondre aux questions ?

L'idée est de faire ressortir que, dans ces différents cas, les évènements élémentaires sont équiprobables[46] (on a autant de chance d'obtenir l'un ou l'autre de ces évènements élémentaires - le mot « équiprobable » n'est d'ailleurs pas d'un emploi obligatoire). Des élèves pourront néanmoins à nouveau faire remarquer que, pour la pièce, ce n'est pas évident car elle n'est pas gravée de la même manière de chaque côté et qu'il se peut aussi qu'on ait des tranches. Si ce n'est pas le cas il serait intéressant de soulever cette interrogation.

Se pose alors la question :

Que faire pour avoir quand même une idée de la chance d'être dans la position 1 en lançant un osselet ou pour savoir si on a réellement une chance sur deux d'obtenir Pile en lançant une pièce de monnaie ? Que proposez-vous ?

45 Voir ROSER Éric et SCHWARTZ Claudine, *L'esprit des probabilités de l'école au lycée*, Bulletin APMEP, n°484, septembre-octobre 2009, p.636.
46 À noter que pour l'urne il s'agit ici du fait que la probabilité de tirer une boule particulière parmi les 7 est égale à 1/7.

On peut s'attendre (et on espère !) à des réponses du genre :

- lancer une pièce ou un osselet *x* fois ;
- lancer jusqu'à ce qu'on voie quelque chose.

Si ce n'est pas le cas, ce sera au professeur d'amener à cette expérimentation.

Le professeur annonce donc l'expérimentation du lancer d'une pièce[47] (car on a une idée de ce qu'on cherche) et, dans un échange avec la classe, le protocole expérimental se construit. Il faut préciser :

• la nature de la pièce ;
• la façon de jeter ;
• la surface sur laquelle on jette ;
• les issues que l'on prend en compte (les élèves peuvent évoluer sur le fait de prendre en compte la tranche ou pas mais il n'y pas de raison particulière de rejeter ce cas dès le départ).

Ce travail pourra se faire à partir de la question : « *Je lance une pièce de monnaie. Quels sont les résultats possibles ?* »

Il nous paraît important de faire écrire le protocole expérimental. Celui-ci pourra permettre d'éliminer des résultats du type « La pièce ne retombe pas ».

Le professeur donne alors la consigne :

Il s'agit de faire le plus de lancers possibles d'une pièce par groupe de deux pendant dix minutes et de noter P pour « Pile », F pour « Face », A pour « autres ». Je vous demanderai à la fin le nombre de « Pile », le nombre de « Face », le nombre de « Autres » et le nombre total de lancers.

Des feuilles sont alors distribuées sur lesquelles seront notés les résultats.[48]

Au bout de dix minutes, les résultats sont recueillis dans une feuille de calcul projetée au tableau.

Dans un premier temps, le professeur demande aux élèves s'ils ont des commentaires à faire sur l'ensemble des résultats.

Si les commentaires ne vont pas dans ce sens, il pose le problème de comparer les résultats des différents binômes, l'objectif étant d'arriver au calcul des fréquences exprimées par des nombres décimaux. Pour y parvenir se posera le problème de supprimer la catégorie « Autre » si les élèves ne l'ont pas proposé avant. Cette étape est importante car nous passons ici de l'observation des résultats de l'expérience à l'étude d'un modèle « pseudo-concret »[49] dans lequel il ne reste que deux issues possibles. Il est important de noter que si l'on avait demandé à tous les élèves de lancer 50 fois par exemple, la question du calcul des fréquences pour comparer les résultats ne se serait pas posée. De plus, les nombres totaux de lancers restant assez proches les uns des autres, l'utilisation des fréquences pour comparer les résultats est valable, ce qui n'aurait pas été le cas si par exemple un groupe avait lancé 10 fois et un autre 5 000.

Dans la mesure où une feuille de calcul vidéoprojetée est utilisée, les élèves trouveraient certainement « abusif » que le professeur leur demande de calculer les fréquences « à la main »... Il semble plus judicieux de demander quelle est la formule à saisir pour calculer les fréquences et d'envoyer un ou plusieurs élèves le faire. Ce sera aussi l'occasion de rappeler comment copier une formule.

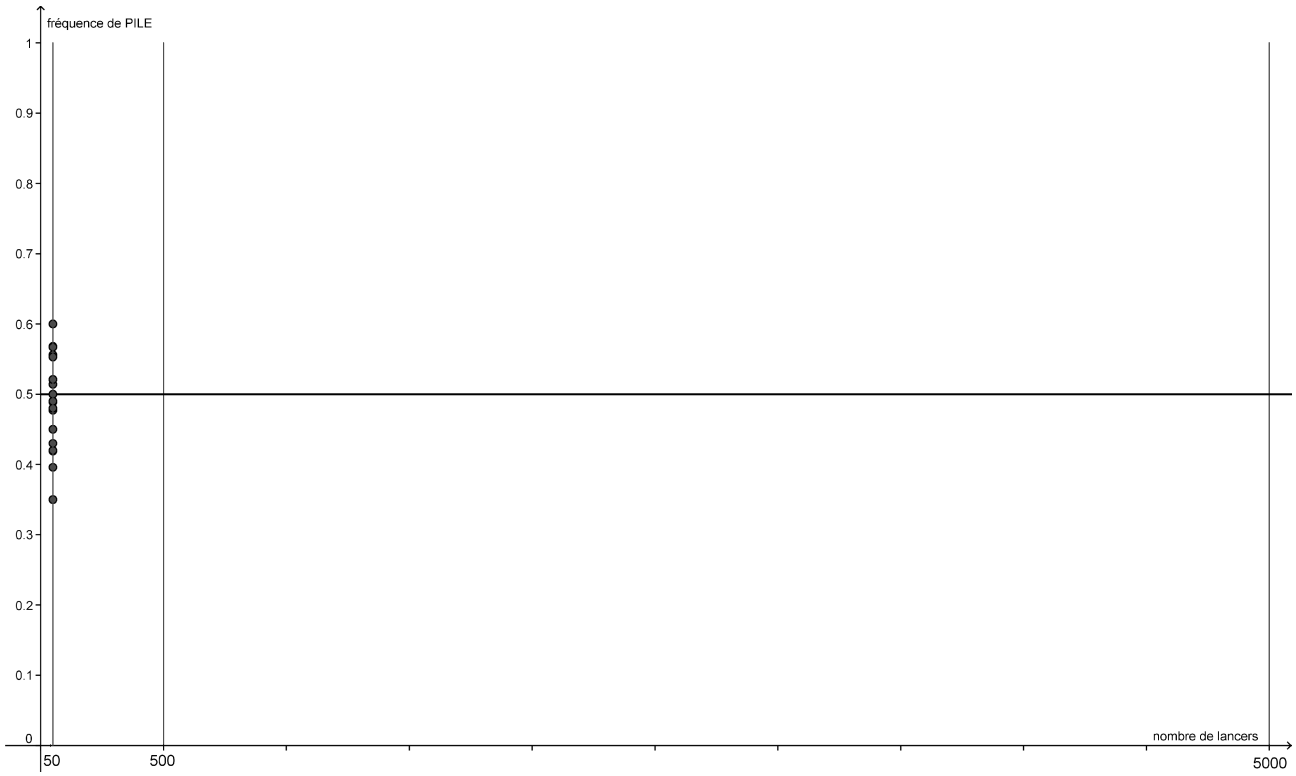
Le débat qui suivra doit mettre en évidence la différence des résultats entre les groupes. Des

47 Il se peut que la classe préfère lancer l'osselet. Dans ce cas il ne faut pas obligatoirement forcer les lancers de pièces.
48 Voir Annexe
49 HENRY Michel, *L'introduction des probabilités au Lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie*, dans Repères-IREM, n°36, p.26, juillet 1999.

remarques comme : « cela varie autour de 0,5 », peuvent apparaître. Il sera alors intéressant de calculer la moyenne et l'étendue[50] de la série de fréquences obtenue. C'est aussi l'occasion de faire remarquer que la somme des fréquences de « Pile » et de « Face » est toujours égale à 1, ce que les élèves pourront justifier. Ceci permet aussi d'expliquer que l'étendue des fréquences de « Pile » est égale à celle de « Face ».

Pour poursuivre la comparaison des différents groupes, le professeur propose, afin de calculer les fréquences, de prendre un même nombre de lancers pour tous les groupes (par exemple 50). Les élèves recomptent les 50 premiers lancers à partir de ceux qu'ils ont faits précédemment et la feuille de calcul est complétée.

Le professeur aura préparé un graphique vierge représentant la fréquence de « Pile » en fonction de la taille de l'échantillon, par exemple dans un fichier GeoGebra[51]. Les points correspondants à la fréquence de chaque groupe y sont placés.[52]



Les élèves disposent du même graphique sur papier. Ils y reportent les points obtenus. Ce graphique servira pour la suite de l'activité.

Le professeur sollicite les remarques des élèves sur le résultat global obtenu :

- différence des résultats pour les binômes ;
- centrage de l'ensemble des résultats autour de 0,5 ;
- existence ou non de résultats très différents ;
- ...

Il pose la question de ce que l'on pourrait faire pour avoir une idée plus précise de ce que l'on peut observer. L'idée est de se demander ce que l'on obtiendrait pour un nombre plus grand de

50 Cette dernière peut être introduite à ce moment précis. La médiane, si elle est connue, peut elle aussi être exprimée.
51 http://www.geogebra.org
52 Pour placer le point (50;0,45) il est préférable d'utiliser la barre de saisie du logiciel en entrant (50,0.45) plutôt que d'essayer de placer le point à la souris. Pensez aussi à décocher l'option « Étiquetage : automatique » pour lui préférer « Étiquetage : pas les nouveaux objets ».

lancers.

Deux options s'offrent alors :

- poursuivre les lancers à la main ;
- effectuer une simulation sur ordinateur en salle multimédia.

<u>Troisième phase (option 1) : on poursuit les lancers à la main (à privilégier)</u>

Les élèves complètent les feuilles de 500 lancers par groupes de deux.

On complète ensuite la feuille de calcul avec les valeurs de « Pile » et de « Face » pour 500 lancers. Les fréquences, les étendues et les moyennes sont calculées.

Les élèves complètent individuellement leur graphique et celui de la classe.

La question suivante est alors posée :

Que peut-on conclure à l'issue de ce travail ?

Un temps individuel de réflexion est laissé puis les élèves peuvent en discuter en groupe.

<u>Troisième phase (option 2) : TP informatique en salle multimédia</u>

Le professeur distribue la feuille de travail pour un TP en salle multimédia.

TP Informatique
À conserver ! Dans le tableur d'OpenOffice, **=ALEA.ENTRE.BORNES(valeur minimale;valeur maximale)** permet d'afficher de manière aléatoire et équiprobable (c'est-à-dire avec autant de chance d'obtenir l'un que l'autre) des nombres entiers compris entre la valeur minimale et la valeur maximale (comprises). **=NB.SI(Plage de données;valeur)** indique combien de fois on retrouve une valeur donnée dans une plage de cellules donnée. Rappel : La plage de cellules allant de A1 à A20 se note A1:A20 L'appui simultané des touches **MAJ+CTRL+F9** permet de réinitialiser l'affichage.
I. Comment utiliser la première fonction de l'encadré ci-dessus pour simuler un lancer de pièce ? Fais des essais et lève la main quand tu penses avoir la réponse. II. Fais apparaître 50 tirages. Utilise la deuxième fonction de l'encadré pour faire apparaître le nombre de tirages « Pile » et le nombre de tirage « Face ». Fais apparaitre ensuite la fréquence des tirages « Pile » et la fréquence des tirages « Face ». III. Effectue 6 séries de 50 tirages, en réinitialisant l'affichage à chaque fois, et note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

Séries de 50 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

IV. Fais apparaître 500 tirages, modifie les formules pour faire apparaître les fréquences et complète le tableau suivant :

Séries de 500 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

V. Fais apparaître 5000 tirages, modifie les formules pour faire apparaître les fréquences et complète le tableau suivant :

Séries de 5000 tirages	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
Fréquence de « Pile »						
Fréquence de « Face »						

Reporte la fréquence des « Pile » dans le graphique.

VI. Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?

Ce TP informatique est assez technique et les fonctions utilisées ne sont pas connues des élèves. Il peut donc être utile, après un temps court de recherche de la première question, et même si tous les élèves n'ont pas encore de réponse à proposer, de faire un point avec l'ensemble de la classe, de façon à ce que tous les élèves puissent débuter l'activité. La simulation d'une série de cinq lancers d'un dé[53] et le calcul de la fréquence d'apparition de « 2 » peuvent par exemple être présentés. Très peu d'élèves, voire aucun, connaissent la procédure permettant de réinitialiser les valeurs, leur tendance est plus de créer une nouvelle série de valeurs pour chaque série de tirages, il ne faut donc pas hésiter à présenter aussi cette fonctionnalité.

Pour la suite du travail, le professeur intervient éventuellement pour éviter les blocages liés à des problèmes techniques. Il peut être judicieux de bien indiquer quelles informations doivent être présentes sur la feuille de calcul. En particulier, l'élève doit-il créer de nouvelles formules pour 500 et 5000 tirages ou modifier les précédentes ?

Il est aussi important que le professeur veille à ce que les élèves aient bien complété leur graphique[54] avant de répondre à la dernière question.

Enfin, si des élèves ont fini le TP avant la fin de la séance, il peut leur être demandé de venir reporter sur le graphique vidéoprojeté commencé en classe leurs fréquences de « Pile ». Les autres valeurs pourront être entrées par le professeur à partir des feuilles des élèves.

Il est important de comprendre que, dans ce TP informatique, on n'observe plus des lancers de pièces réels mais ceux d'une pièce mathématique modélisée par le tableur possédant une probabilité 0,5 d'avoir « Pile » et une probabilité 0,5 d'avoir « Face ». On est déjà dans un modèle et non plus dans l'expérience. **De notre point de vue, l'option 1 est donc celle qu'il convient de privilégier.**

53 Petit rappel : La copie d'une formule peut se faire à la souris mais pour un grand nombre de cellules il est préférable de le faire au clavier. Pour cela : sélectionnez la cellule à copier (par exemple A1) et copiez-la. Sélectionnez ensuite les cellules cibles : allez pour cela dans la zone de nom et entrez par exemple A2:A5000. Collez ensuite la cellule que vous avez copiée. Pour ce TP il ne nous semble pas indispensable de l'indiquer aux élèves dès le départ.

54 Voir un exemple de graphique en Annexe I

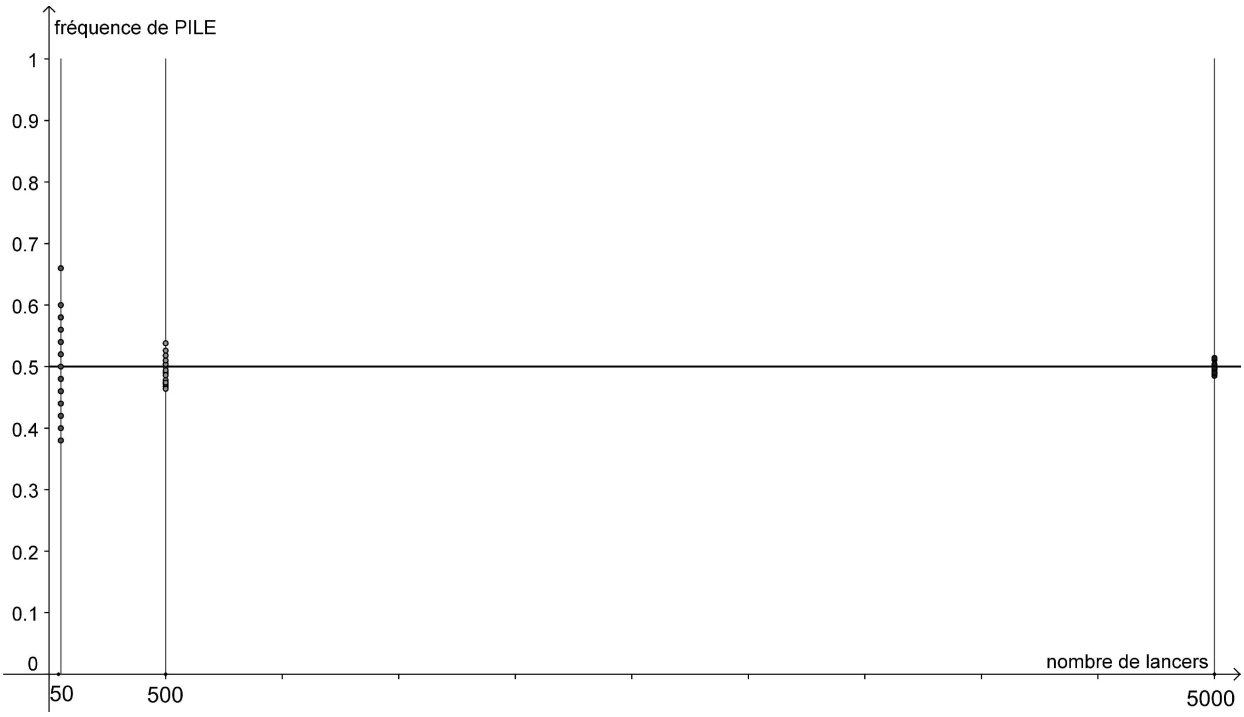
Quatrième phase : salle de classe avec ordinateur et vidéoprojecteur

Le professeur projette le graphique de la séance précédente et fait état des réponses proposées à la question VI[55] (Si l'on est dans l'option 1, les groupes viennent présenter leur réponse).

Les interventions, les réponses des élèves à la question VI[56] et le débat mettront en évidence que :

- l'étendue des résultats des séries se réduit en même temps que le nombre de lancers augmente ;
- plus le nombre de tirages est élevé et plus les fréquences de « Pile » des séries se rapprochent de 0,5 ;
- la fréquence 0,5 est mise en évidence ;
- cela n'exclut *a priori* pas des résultats extrêmes (non visible avec le TP informatique).

Dans le cas de l'option 1, on pourra regrouper les lancers de tous les élèves afin de proposer une série de 5 000 ou 6 000 lancers que l'on pourra, pourquoi pas, comparer avec d'autres classes. Il est aussi possible de créer des séries intermédiaires.



À la suite de ce bilan, le professeur peut définir la probabilité 0,5 à partir d'une pièce « idéale » - on pourra parler de pièce mathématique - pour laquelle aucune des deux faces n'a plus de raison que l'autre de sortir. Il fait le lien entre cette probabilité calculée *a priori* et la fréquence de 0,5 sur laquelle sont centrées et vers laquelle convergent les fréquences de « Pile » des différentes séries de lancers.

On peut proposer comme « définition » :

La **PROBABILITÉ** d'un évènement est un nombre qui permet d'indiquer ses possibilités de réalisation.

55 La question est : Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
56 Voir en annexe II

Ce nombre est une valeur théorique qui ne donne qu'une indication globale. Il ne peut prédire ce qui va réellement se passer si on fait une seule expérience.
C'est un nombre compris entre 0 et 1.
Il peut être soit calculé *a priori* (uniquement dans les cas où les évènements élémentaires ont la même probabilité), soit estimé en faisant des expériences et en calculant des fréquences.

Exemple :
On s'intéresse à l'expérience : « Je jette une pièce de monnaie ».

Pour trouver la probabilité de l'évènement : « Pile »
1. On peut RAISONNER *a priori* et calculer la probabilité :
On considère que l'on utilise une pièce mathématique pour laquelle :
les deux seules issues possibles sont « Pile » et « Face » ;
la probabilité d'avoir « Pile » est égale à celle d'avoir « Face ». On considère qu'on a autant de chance d'obtenir « Pile » que « Face ».
On a donc : P (« Pile ») = $\frac{1}{2}$ = 0,5
2. On peut FAIRE L'EXPERIENCE et calculer la fréquence de « Pile » :
On effectue plusieurs séries de lancers en parallèles avec une pièce de monnaie
On remarque que plus on lance de fois et :
- plus chaque fréquence d'avoir « Pile » est proche de 0,5 ;
- plus les fréquences obtenues dans chaque série sont proches entre-elles (l'étendue est de plus en plus petite).
Avec cette méthode on trouve au mieux une approximation de la probabilité.

Plus qu'une définition en tant que telle, nous avons regroupé ici ce qui nous semble important de comprendre de la notion de probabilité.

Ce bilan sera aussi l'occasion de définir le vocabulaire minimum des probabilités : expérience aléatoire, issue, évènement.

Cinquième phase : Retour sur le questionnaire

Le questionnaire 2 est distribué.
Les élèves doivent calculer les probabilités correspondant aux évènements proposés.

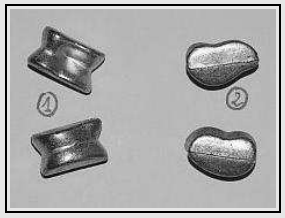
Questionnaire 2

Énoncé 1
Je jette une pièce de monnaie.
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *avoir Pile* » ?

Énoncé 2
Je lance un dé classique à six faces
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « 2 » ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *avoir un nombre pair* » ?

Énoncé 3
Une urne opaque contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges . Je tire une boule (sans regarder !)
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *tirer une boule jaune* » ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *tirer une boule rouge* » ?

Énoncé 4
Je lance un osselet.
Quelles sont les issues possibles ?
Quelle est la probabilité de l'évènement « *voir retomber l'osselet en position 1* » ?



Les trois premiers énoncés ne posent pas de problème une fois de plus même si beaucoup d'élèves répondent encore en terme « d'un nombre de chance sur ».

Il est tout de même intéressant de noter que, pour la pièce, beaucoup d'élèves proposent « Tranche » comme issue possible, ce qui n'est pas étonnant puisque, dans nos classes, nous en avons obtenu et ce, alors même que nous avons lancé sur des tapis sans bord ! Pour autant, peu d'élèves en tiennent compte dans le calcul de la probabilité de l'évènement « Pile ». Ce paradoxe est à relever. Les élèves proposent les issues en se référant à l'expérience réelle et calculent une probabilité en raisonnant sur une pièce mathématique.

Lors du compte rendu il pourra être intéressant de mettre en évidence :
- que la somme des probabilités des évènements élémentaires est 1 ;
- que la probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.
- Concernant l'équiprobabilité, si le terme n'est certainement pas à introduire si tôt, il est intéressant de préciser dans les trois premiers énoncés que l'on considère qu'il y a autant de chance d'obtenir « Pile » que « Face », ou d'obtenir chaque face du dé, ou encore de tirer chacune des boules dans l'urne. On pourra faire remarquer que, dans ce dernier cas, ce ne sont pas les couleurs mais les boules qui ont autant de chance d'être tirées.

Pour les osselets, un nombre non négligeable d'élèves pense toujours que la probabilité est égale à 0,5 et certains argumentent en disant que, pour eux, il y a autant de chance d'avoir l'une ou l'autre des positions. D'autres sont convaincus du contraire et qu'on ne peut donc pas déterminer la probabilité *a priori*. Le débat doit alors permettre d'opposer les différents avis et de voir comment se départager. Avec en conclusion : « Il faut donc lancer. »

Se pose alors le problème de l'organisation des lancers.

Des élèves peuvent proposer d'utiliser le tableur comme outil de simulation (cela n'est pas obligatoire). Le professeur demandera alors quelle est la formule à saisir. La réponse de certains élèves, « la même que l'autre fois », sera l'occasion de revenir sur l'équiprobabilité des issues qui rendait son utilisation possible. Sur le tableur, on ne fait plus l'expérience réelle, on valide ou on observe un modèle. Le problème est qu'ici on n'a pas de modèle.

La classe devra donc définir le protocole de l'expérience en s'appuyant sur les observations faites avec la pièce :

– il s'agit de faire le plus de lancers d'osselets possible et de noter « 1 » pour la « position 1 », « 2 » pour la « position 2 » et peut-être aussi « 3 » pour les deux dernières positions verticales

suivant le débat[57] ;

– et de calculer les fréquences d'apparition de la « position 1 » pour 100 et pour 500 lancers.

L'idée est de voir si l'on observe un resserrement des valeurs. Un graphique identique à celui fait avec la pièce sera à nouveau construit.

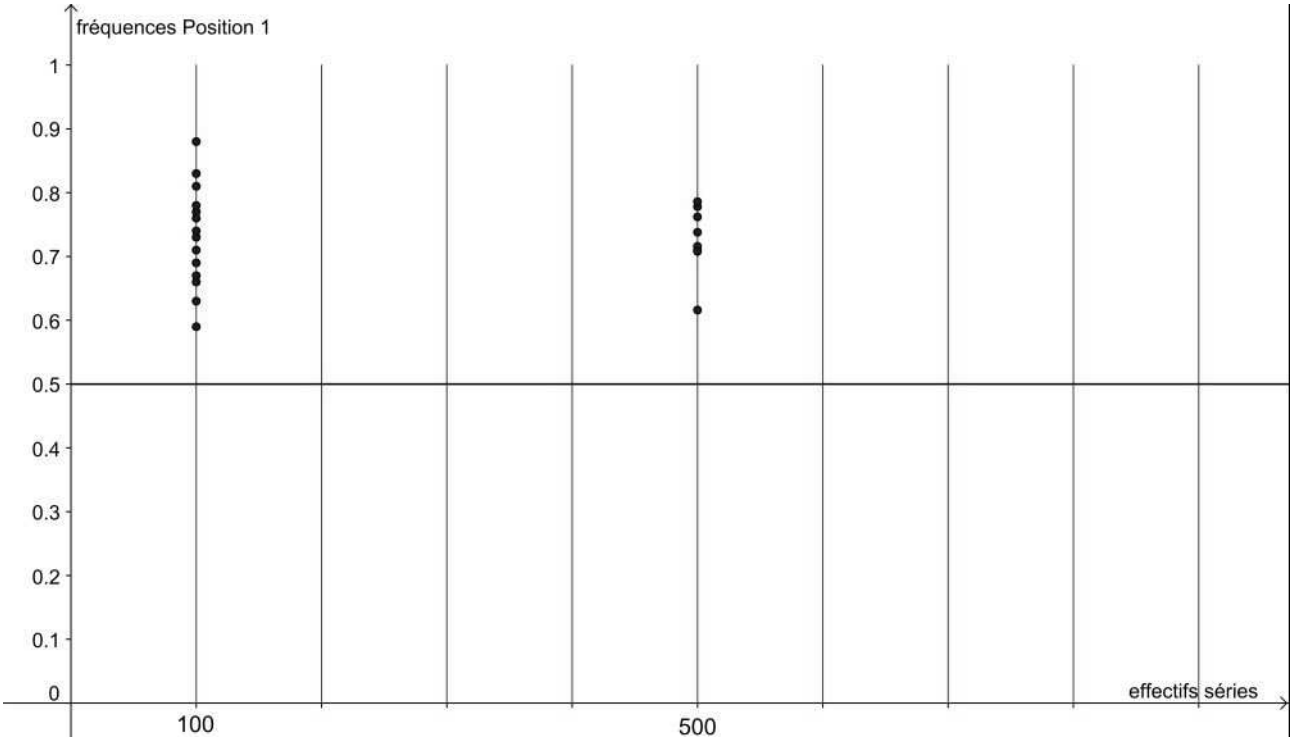
Des groupes de deux élèves sont constitués avec un lanceur et un élève qui note les résultats. Chaque groupe a à effectuer un minimum de 500 lancers ce qui prend environ un quart d'heure.

Avant même de commencer à calculer les fréquences, il est intéressant d'observer les grilles où sont notées les séries de « 1 » et « 2 » et de redemander aux élèves s'ils pensent que la probabilité est égale à 0,5. La réponse est alors clairement non.[58]

Les résultats des différents groupes sont ensuite entrés dans une feuille de calcul et les fréquences calculées.

Il est ensuite demandé aux élèves de construire individuellement leur graphique et de venir compléter sur GeoGebra celui qui est projeté.

Une discussion pourra s'engager sur l'existence ou non de valeurs trop éloignées des autres et de voir si cela est dû à la façon de lancer ou autre.



Les élèves sont ensuite placés par groupes de trois ou quatre avec pour consigne de répondre à la question :

Quelle conclusion peut-on faire concernant la probabilité d'avoir la position 1 ?

57 Cette dernière position, où l'osselet est vertical, n'est apparue que deux fois lors des lancers.

58 Voir en annexe III une grille complétée.

Les réponses des groupes sont de différents types[59] :

– des groupes indiquent simplement qu'avoir la position 1 est plus probable que d'avoir la 2 et, parmi ceux-ci, certains essaient de trouver des raisons physiques à ce fait ;

– d'autres le justifient :

  – en calculant la moyenne des fréquences pour donner une estimation de la probabilité ou pour montrer qu'elle est supérieure à 0,5 ;

  – ou en indiquant que plus il y a de lancers plus les valeurs s'approchent de 0,75[60] ;

  – ou encore en remarquant que l'étendue des séries diminue lorsqu'on augmente le nombre de lancers, et de proposer une estimation ou un encadrement de la probabilité.

– des groupes enfin remarquent que certaines fréquences sortent du lot.

On notera au final qu'on ne peut pas répondre à l'énoncé 4 en terme de « combien de chance... ». Au mieux, on pourra se mettre d'accord sur une estimation ou un encadrement des fréquences. On pourra revenir sur le fait que l'on n'a pas travaillé avec un osselet « mathématique » et que l'on ne peut donc pas conclure en comparant les résultats avec une probabilité calculée.

Il sera aussi important de bien revenir sur le vocabulaire utilisé par les élèves et la structure des phrases lors de la présentation des conclusions de chaque groupe.

Un prolongement possible[61]

Un osselet « mathématique » présente quatre faces auxquelles on associe les numéros de position 1, 3, 4 et 6 avec les probabilités p_1, p_3, p_4 et p_6.
Des expériences statistiques ont permis de définir cet osselet tel que : $p_1=p_3$, $p_4=p_6$ et $p_1=4p_4$.
1) Associer chacune des faces d'un osselet avec les valeurs proposées.
2) Calculer les probabilités associées à chacune des faces de l'osselet.

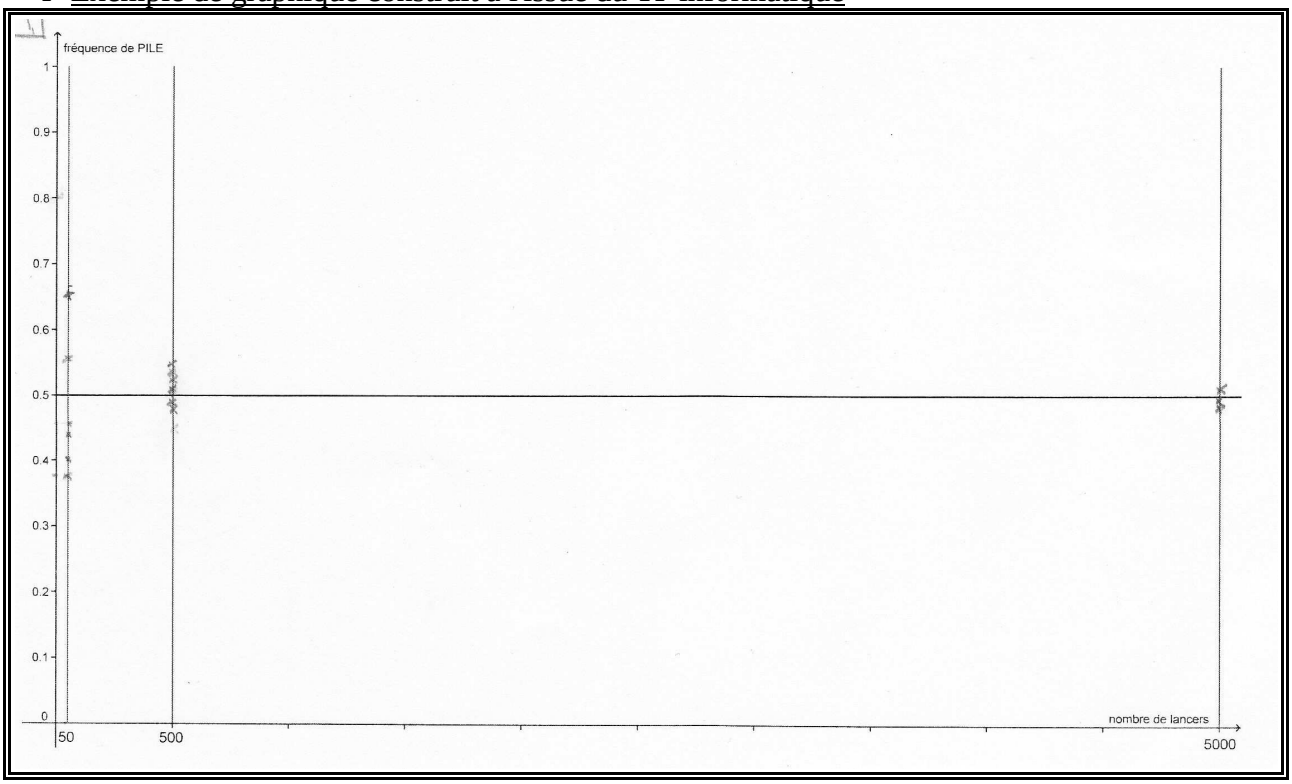
59 Voir annexe IV.

60 On trouve dans les livres une probabilité égale à 0,8 mais dans nos classes nous avons obtenu des fréquences inférieures (plus proches de 0,75). On peut se demander si le fait de lancer les osselets avec un gobelet n'y est pas pour quelque chose. En effet, si on le lance à la main, l'osselet part toujours de la même position, ce qui aurait peut-être tendance à favoriser la position 1. Nous l'avons testé hors de la classe et avons trouvé des fréquences proches de 0,8. Une autre raison est que nous avons lancé des osselets en métal et non de vrais os.

61 MASSELIN Blandine et VIVIEN Frédéric, *Une initiation aux probabilités par le jeu*, IREM de Rouen, septembre 2009.

ANNEXES

I- Exemple de graphique construit à l'issue du TP informatique



II- Différentes réponses à la question posée à l'issue des lancers de pièce :

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
Plus le nombre de tirage est grand, plus l'écart entre les séries se réduit. et il se rapproche sur 0,5.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
Que plus il y a d'essaie plus les resultat sont proche de 0,5.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ? On remarque que les fréquences sont plus rapproché dans la série de 5000 que de 500.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ? La possibilité d'avoir autant de chance d'avoir pile ou face est cosiment $\frac{1}{2}$ chance.

VI.Que peux-tu conclure à la fin de ce travail ?
plus le nombre de tirage est élevé, plus la frequence de toutes les série se rapproche de 0,5

III- Exemple de grille de 500 lancers d'osselets

2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2
1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	2	2	1	2	1	1
1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2
1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1
2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1
1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1
1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1
2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2

On voit ici clairement qu'il y a plus de positions 1 que de positions 2.

IV- Réponses des groupes à la question : « Quelle conclusion peut-on faire concernant la probabilité d'avoir la position 1 lorsqu'on lance un osselet ? »

Ici il y a beaucoup plus de position 1 que de position 2 donc l'oslet dois avoir quelque chose qui le force à atterrire sur la position 1 que sur la position 2. Nous pensons que la surface 2 à un poids plus lourd que ~~ij~~ il y fait stabiliser sur la position 1 de plus que la position 2 est plus arrondie que la position 1 alors que elle joue le rôle de deux pilier.

position 2 : position 1 :

La probabilité d'avoir la position 1 est plus élevée que d'avoir la position 2.

La moyenne de la probabilité est d'environ 0,726.

no

Concernant la probabilité d'avoir la position 1 la conclusion est que l'on a plus de chance de tomber sur la position 1. que la 2.

Il y a 1 valeur qui sort du lot.

La moyenne de 100 lancers : 0,6321428571

La moyenne de 500 lancers : 0,72675.

en cherchant la moyenne de toutes ces fréquence (0,7474), on contraste que l'effet est largement au dessus de 0,5 (la moitié)

Expérience :

Moyenne pour 100 : 0,72

Moyenne pour 500 : 0,74

Donc plus il y a de lancés plus la probabilité s'approche de 0,75. De plus on l'observe sur le graphique.

En lançant 100 et 500 fois un osselet on a obtenu des fréquences de position 1 allant de 0,714 à 0,792. On a une étendue de 0,078.
Toutes ces valeurs restent néanmoins entre 0,7 et 0,8.

→ ⊕ Le nombre de lancers est grand, ⊖ l'écart entre les valeurs est grand et se resserre. Les valeurs se rapprochent de 0,75 pour la position 1.

Il y a une plus forte probabilité de tomber sur la position 1 que sur la position 2.
Il y a jusqu'à 0,83 de probabilité de tomber sur la position 1 pour 100 lancer alors que pour 500 lancer l'étendue est de 0.792 à 0,714
L'étendue est plus petite pour 500 lancers

Donc, plus le nombre de lancers est important plus l'étendue est petite et il y a de probalités d'obtenir la position 1.

Le dernier est-il désavantagé ?

D'après une activité du même nom trouvée sur le site Statistix

Nathalie BEN MOUSSA et Fabienne LANATA, IREM de Rouen

Présentation

Une activité à faire sur une séance, simple et ludique, qui permet une première approche des probabilités par la notion de « chance » en brisant des idées reçues et pour laquelle l'arbre des choix est introduit pour modéliser la situation.

Les réactions des élèves face à la question posée dépendent énormément du degré de socialisation du public, ce qui rend cette activité plus pertinente en ZEP.

Objectifs

- Apprendre aux élèves à prendre du recul par rapport à une situation en passant d'une réaction affective à une réflexion objective.
- Confronter les élèves à une situation où l'intuition risque d'être contraire à la vérité.
- Montrer que les mathématiques sont un moyen non pas de prédire mais de prévoir un résultat.
- Introduire l'outil « arbre de choix ».

Prérequis

Aucun.

Matériel

- Transparents et feutres pour transparents.
- Rétroprojecteur.
- Éventuellement enveloppes et billets factices.

Scénario

Trois enveloppes identiques et opaques sont mises à disposition de trois personnes.
L'une de ces enveloppes contient un billet de 100 €, une autre un billet de 20 € et la troisième un billet de 5 €.
Une première personne choisit une enveloppe, la seconde en prend une parmi les deux restantes et la troisième personne ouvre la dernière enveloppe.

La troisième personne est-elle désavantagée ?

1er temps : individuel pendant 5 min.
2nd temps : par groupes de quatre pendant 15 à 20 min.
Vous répondrez à la question sur un transparent en justifiant et exposant vos arguments.
Ce transparent vous servira de support pour votre présentation orale.

Première phase : 5 min

Un premier temps est laissé en travail individuel pour que chaque élève s'approprie l'énoncé sans se faire influencer par ses camarades.

Deuxième phase : 15 à 20 min

Dans un deuxième temps, une mise en groupes de 3 à 4 personnes est organisée pour qu'un échange de points de vue puisse se faire ainsi que la production finale d'un transparent.

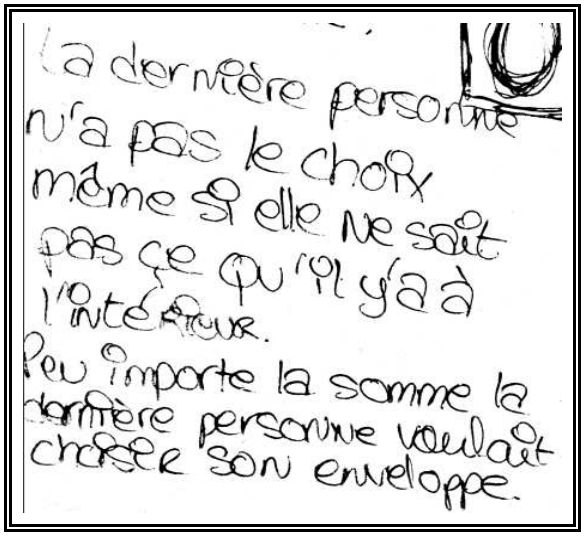
Une liberté d'approche est laissée aux groupes.

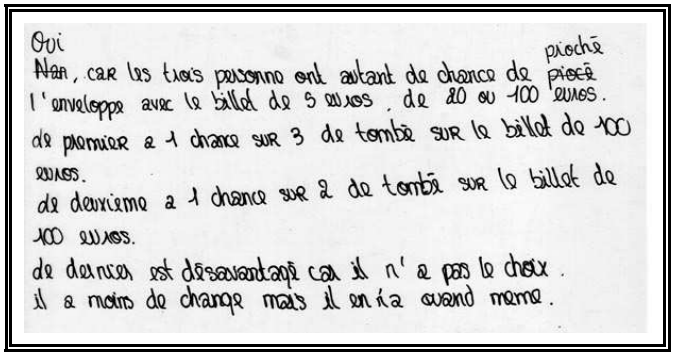
Les élèves peuvent expérimenter et simuler la situation ; ils ont éventuellement à leur disposition des enveloppes et billets factices.

Il est à remarquer que l'énoncé du sujet prête à une certaine ambivalence : par rapport à quoi est-on désavantagé ? Par rapport au choix ou par rapport au gain ?

Pour certains élèves, l'avantage porte sur le montant du gain du troisième joueur ; c'est le problème mathématique attendu par le professeur.

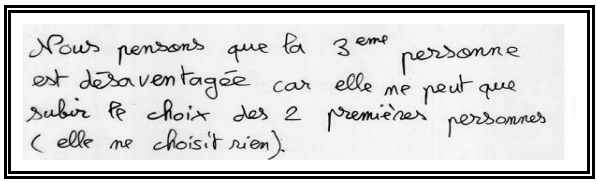
Pour d'autres, l'avantage est d'avoir ou non le choix de l'enveloppe sans se préoccuper de son contenu. Le désavantage se porte alors sur le fait que leur choix est non exaucé, quelque soit le gain. Dans ce cas, le « problème » est purement affectif. La réponse est d'ordre subjectif et constitue un obstacle à la réflexion mathématique, comme par exemple dans les travaux élèves ci-dessous.


La dernière personne n'a pas le choix même si elle ne sait pas ce qu'il y'a à l'intérieur.
Peu importe la somme la dernière personne voulait choisir son enveloppe.

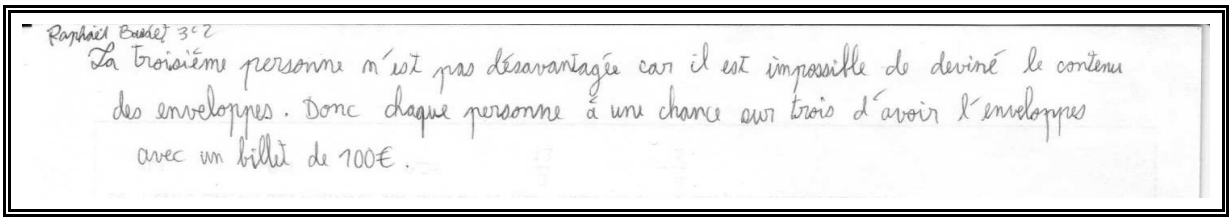

Oui
Non, car les trois personne ont autant de chance de prochè pioché l'enveloppe avec le billet de 5 euros, de 20 ou 100 euros.
le premier a 1 chance sur 3 de tombé sur le billet de 100 euros.
le deuxieme a 1 chance sur 2 de tombé sur le billet de 100 euros.
le dernier est désavantagé car il n'a pas le choix.
il a moins de chance mais il en ira quand meme.

Le rôle de l'enseignant, en passant d'un groupe à l'autre, sera alors de faire émerger la distinction entre subjectivité et objectivité : la question pertinente à se poser est de savoir si le dernier à choisir l'enveloppe aura moins de « chance » d'avoir un gain important que le premier à

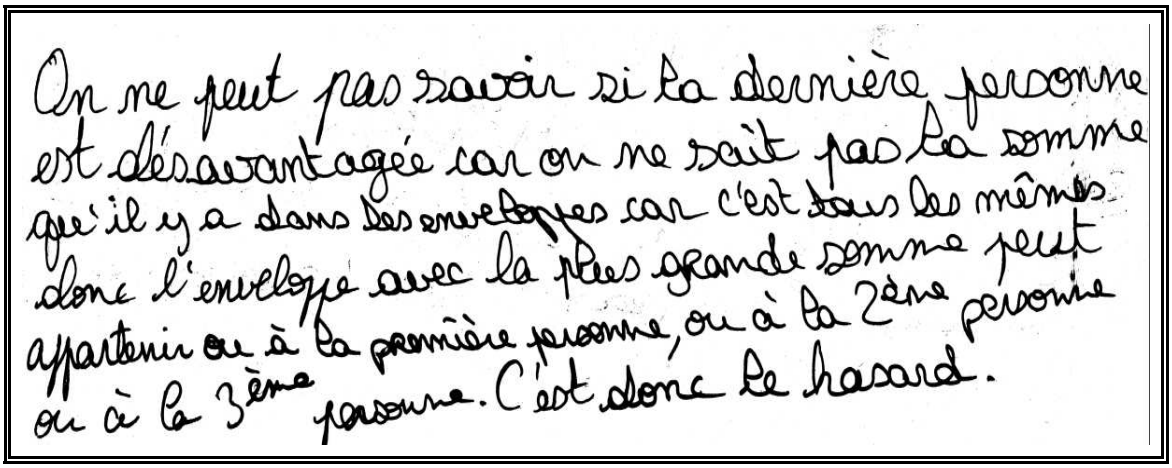
avoir choisi. Dans ce cas, on gomme la volonté initiale des joueurs. Pour certains élèves, ne pas avoir le choix de l'enveloppe revient à subir une contrainte, ce qui, à leurs yeux, est difficile à accepter ; c'est une frustration insupportable. Dans ce cas, l'objectif : « apprendre aux élèves à prendre du recul par rapport à une situation en passant d'une réaction affective à une réflexion objective » prend tout son sens et peut, selon le public et le stade de développement des élèves, s'avérer un réel saut sociocognitif.


Nous pensons que la 3ème personne est désavantagée car elle ne peut que subir le choix des 2 premières personnes (elle ne choisit rien).

Ayant testé cette activité dans un établissement dit « facile », nous avons constaté que cet obstacle était déjà franchi par la quasi-totalité des élèves.


Raphaël Buedet 3e2
La troisième personne n'est pas désavantagée car il est impossible de deviné le contenu des enveloppes. Donc chaque personne à une chance sur trois d'avoir l'enveloppes avec un billet de 100€.

Dans certains groupes, la réflexion se heurte rapidement à : « C'est le hasard, on ne peut rien dire ».


On ne peut pas savoir si la dernière personne est désavantagée car on ne sait pas la somme qu'il y a dans les enveloppes car c'est tous les mêmes donc l'enveloppe avec la plus grande somme peut appartenir ou à la première personne, ou à la 2ème personne ou à la 3ème personne. C'est donc le hasard.

L'enseignant sera alors amené à relancer le groupe en question de la façon suivante : « Il est faux de penser que l'on ne peut rien dire. Même si c'est le hasard et que l'on ne peut pas savoir qui va gagner les 100 €, on peut tout de même savoir si l'un des joueurs est désavantagé. »

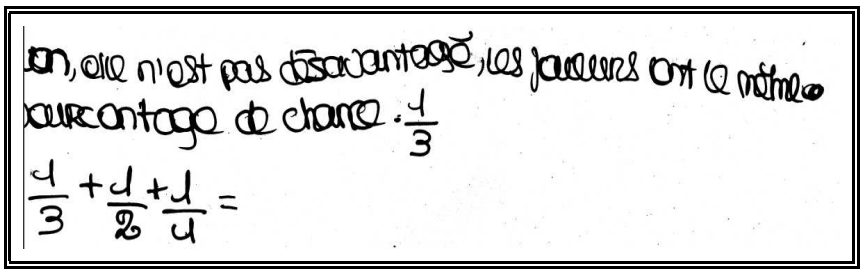
<u>Troisième phase</u> : 20 min

Chaque groupe présente son transparent à la classe et un débat s'ensuit. Un examen critique des procédures proposées a lieu.

Voici quelques types de réponses.

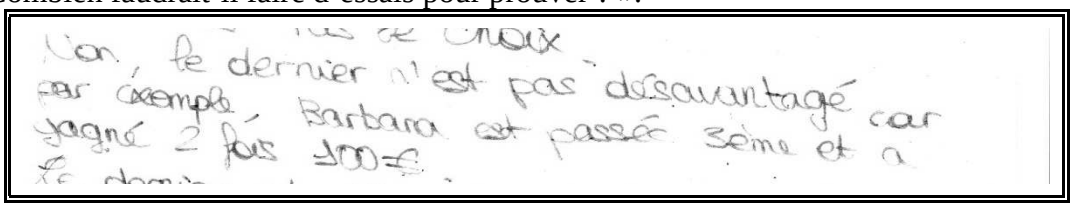
- Les élèves vont parler de « 1 chance sur 3 pour le 1er joueur, 1 chance sur 2 pour le 2e joueur et 1 chance sur 1 pour le dernier » par analogie à « 1 choix sur 3, 1 choix sur 2 et 1

choix sur 1 ! » Ceci peut entraîner des écritures du type : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\cdots$ et le débat sur la somme attendue peut être houleux dans les groupes. Dans l'exemple ci-dessous, les élèves ont bien conscience que le raisonnement qu'ils traduisent par $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}$ se heurte au résultat de ce calcul. Pour que leur raisonnement soit cohérent, ils souhaitaient 1 comme réponse.

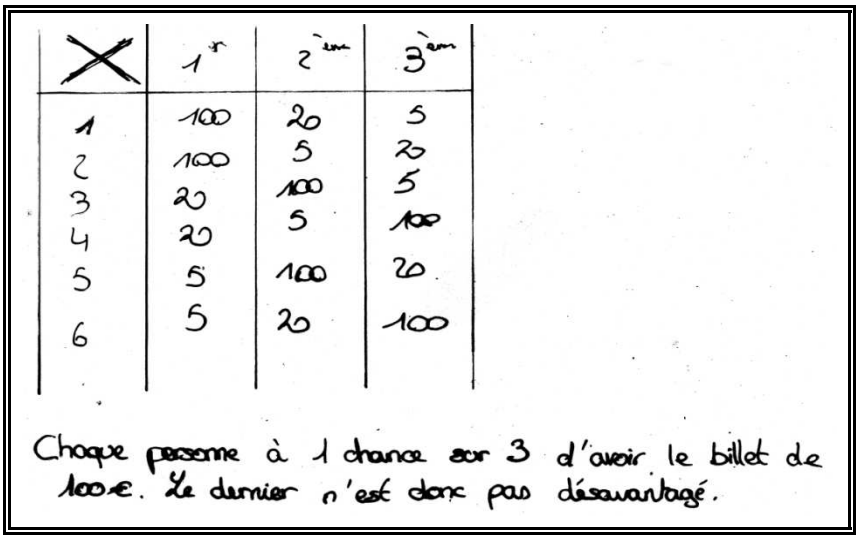

Non, elle n'est pas désavantagé, les joueurs ont le même pourcentage de chance. $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

- Après deux expérimentations où le troisième a gagné 100 euros deux fois, ils pensent que le troisième est avantagé. La question se pose alors dans la classe : « Est-ce une preuve ? Combien faudrait-il faire d'essais pour prouver ? ».


Non, le dernier n'est pas désavantagé car par exemple, Barbara est passée 3ème et a gagné 2 fois 100€.

- Certains élèves arrivent à s'organiser et réalisent d'eux-mêmes un tableau.



X	1er	2ème	3ème
1	100	20	5
2	100	5	20
3	20	100	5
4	20	5	100
5	5	100	20
6	5	20	100

Chaque personne à 1 chance sur 3 d'avoir le billet de 100€. Le dernier n'est donc pas désavantagé.

L'enseignant veillera à l'ordre dans lequel il fait intervenir les groupes : du transparent le moins pertinent à celui qui est le plus riche et plus complet à la fin.

Parmi les procédures présentées, celle consistant à lister les triplets ordonnés (5 ; 20 ; 100) permet d'être sûr que tous les cas ont été envisagés puis de convaincre que chacune des occurrences

a autant de chance de se produire.

1er joueur	2e joueur	3e joueur
5	20	100
5	100	20
20	5	100
20	100	5
100	5	20
100	20	5

Le « 1 chance sur 3 » trouvé par les élèves est à exploiter : pour eux, est-ce une simplification de fraction $\frac{2}{6}$ ou bien est-ce un raisonnement à partir des trois colonnes identiques ?

Tout l'enjeu de l'enseignement des probabilités est de passer de la conception « 1 chance sur 3 de gagner » au concept « la probabilité de gagner est le nombre $\frac{1}{3}$ ».

Ce saut conceptuel est du même ordre que celui que celui que l'on trouve en géométrie : le cercle est d'abord, à l'école primaire, un « rond » obtenu par la trace d'un cylindre, puis une épure au compas et enfin, à partir du collège, un ensemble de points équidistants d'un même point.

Quatrième phase : 10 min

Dans nos expérimentations, cette phase a souvent eu lieu à la séance suivante.

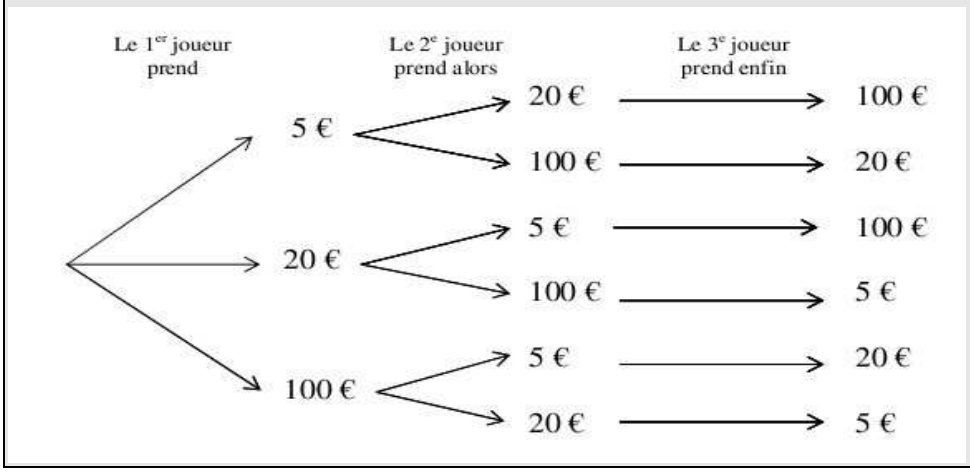
Phase d'institutionnalisation.

L'énoncé de l'activité est collé dans le cahier de leçon.

L'enseignant fera émerger le tableau listant les triplets s'il n'est pas apparu dans les transparents puis présentera une autre organisation du tableau avec l'arbre des choix.

Les élèves écriront dans leur cahier :

- L'intuition ne correspond pas toujours à la vérité. Les mathématiques sont un moyen de comprendre la réalité sans être trompé par des *a priori*...
- Les mathématiques ne vont pas permettre de « prédire » ce qui va se passer mais vont permettre de prévoir tous les possibles avec leur probabilité et donc de répondre de manière indiscutable à la question.
- Pour écrire toutes les possibilités d'une expérience on peut, soit lister tous les triplets, soit utiliser l'arbre comme outil :



Nous avons remarqué que l'arbre était mieux interprété si le tableau avait été écrit au préalable.

L’intérêt de l’arbre par rapport au tableau n’est pas évident pour la plupart des élèves. L’enseignant leur fera alors remarquer que, non seulement l’arbre liste tous les cas possibles, mais qu’il permet également de visualiser le fait que le premier joueur a trois choix, le deuxième deux choix et que le troisième n’a qu’une possibilité (ce qui est illustré par le nombre de flèches). De plus, l’arbre a l'avantage de mieux illustrer la chronologie du jeu.

Activités « BIBERON »

Jean-Claude FENICE, IREM de Reims – Dominique POIRET, IREM d'Orléans

Présentation

Cette situation[62] sert de support à deux séances distinctes.

La première est une introduction à la notion d'expérience aléatoire, et permet d'institutionnaliser le vocabulaire associé.

La seconde se situe à la fin de l'étude du thème ; elle donne l'occasion de mettre en œuvre une démarche expérimentale s'appuyant sur une étude statistique pour conjecturer la composition d'un biberon contenant des billes de différentes couleurs.

Les expérimentations de ces activités ont été effectuées dans plusieurs classes de l'académie d'Orléans-Tours, dans le cadre d'une recherche IREM.

Objectifs

Activité 1 : amener les élèves à se questionner par rapport à une situation où intervient le hasard. À travers ce questionnement, faire émerger le vocabulaire spécifique : expérience aléatoire, liste des résultats possibles (issues).

Activité 2 : placer les élèves en situation de résolution de problème, où ils doivent conjecturer la composition d'un biberon (opaque) contenant des billes de couleurs différentes, en choisissant un outil mathématique adapté.

Prérequis

Première séance : aucun.

Seconde séance : avoir réactivé la notion de fréquence ; avoir constaté la stabilisation de la fréquence d'apparition d'une issue vers la fréquence théorique connue, après un grand nombre d'expériences (voir par exemple, dans cette brochure, les deux premières activités dans « Lancer d'une pièce, d'un osselet » de Vincent PAILLET, Georges PONS, Christian JUDAS, et « Le sac de bonbons » du Groupe Collège IREM de Lyon, qui peuvent utilement précéder celle-ci).

Matériel envisagé

- Biberons opaques numérotés à tétine transparente incolore (flacons de lait ou de crème liquide, en aménageant dans le bouchon vissant une ouverture circulaire permettant de passer la tétine).
- Billes en terre, de couleurs différentes (10 par biberon). On peut en trouver par exemple sur le site « bille en brousse » http://billebrousse.com/ (on peut également utiliser des boules « cotillon » : la manipulation est plus silencieuse).

Pour l'activité 1, la composition des biberons varie de 3 à 5 couleurs différentes ; pour l'activité 2, on a fait le choix d'une composition unique de 2 couleurs seulement (6 billes d'une couleur, 4 d'une autre).

62 Inspirée de la situation dite « de la bouteille », expérimentée par Guy Brousseau à l'école élémentaire. Voir bibliographie.

Scénario

Activité 1

Élèves répartis en groupes de deux, un biberon par groupe. La composition des biberons varie de 3 à 5 couleurs différentes, avec 10 billes dans chaque.

> « Voici un biberon ; vous n'avez pas le droit de l'ouvrir. Quelles questions pouvez-vous vous poser ? Écrivez-les, puis essayez d'y répondre ».

On laisse environ 15 min de temps de manipulation, puis vient le questionnement ; on fait ensuite un bilan.

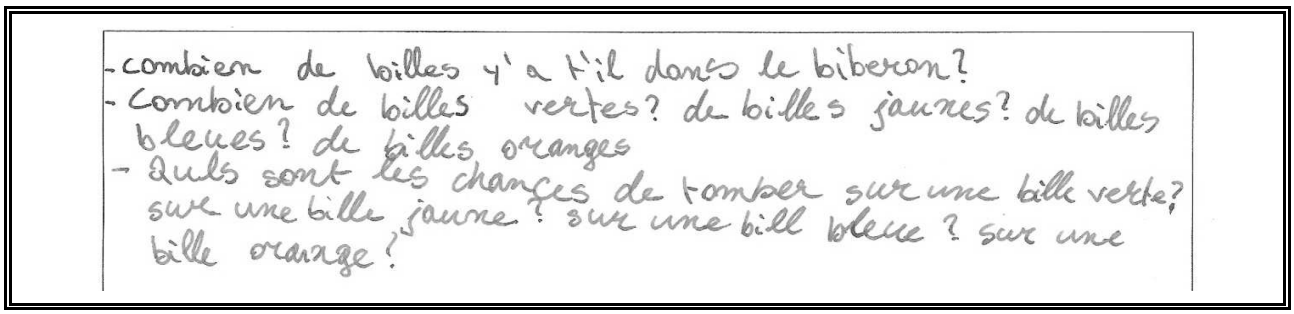
1. Le professeur liste au tableau les questions écrites par les élèves.
2. Il anime ensuite le débat des élèves autour des réponses apportées.

L'enseignant fait formuler une synthèse aux élèves, comportant au moins le vocabulaire : *expérience aléatoire, issue, évènement*.

Exemples de questions produites par les élèves (et leurs réponses en italique) :

- Que contient le biberon ? *Des billes (et peut-être autre chose...)*
- Combien pèsent les biberons ?
- Quel est le volume de la bouteille ? *(25 cL ; 250 mL)*
- Quel est le volume d'une bille ? *(environ 1 cm^3)*
- Combien de billes ? (*On ne peut pas le savoir sans ouvrir la bouteille ; environ 10 ; environ 15.)*
- Quelle place prennent-elles dans la bouteille ? *(environ 1/3)*
- De quelles couleurs sont les billes ? *(rouge, bleu, jaune et vert)*
- Combien y a-t-il de couleurs différentes ? *(5 couleurs ; 3 couleurs ; au moins 3 : bleu, jaune, orange ; 4 couleurs)*
- Est-ce possible qu'il y ait deux billes de la même couleur ?
- Peut-on prévoir la couleur qui va sortir ?
- Combien de chances avons-nous d'avoir une bille orange dans la tétine ? *(33 %*[63]*)*
- Est-ce que à chaque fois la couleur change ?
- Est-on certain d'avoir observé toute les couleurs des billes de la bouteille ?
- …

63 Il y avait 3 couleurs dans ce biberon, d'après cet élève.


- combien de billes y'a t'il dans le biberon?
- Combien de billes vertes? de billes jaunes? de billes bleues? de billes oranges
- Quels sont les chances de tomber sur une bille verte? sur une bille jaune? sur une bill bleue? sur une bille orange?

Remarque : on peut noter une différence de nature de ces réponses avec celles obtenues dans un collège de secteur ZEP.

- Qu'y a-t-il dans le biberon ? (*Des billes « en terre ».)*
- Pourquoi ne peut-on pas l'ouvrir ? (*Car je vous le demande et aussi pour la surprise.)*
- Pourquoi vous nous avez donné un biberon ? (*Aucune réponse.)*
- De quelles couleurs sont les billes ? (*Il y a en des rouges, des jaunes et des bleues.)*
- Est-ce des bonbons ? (*Non.)*
- Pourquoi est-ce mouillé ? (*On ne sait pas.)*
- À quoi servent les trucs à l'intérieur ? (*On ne sait pas.)*
- À quoi cela va-t-il servir ? (*À étudier une nouvelle notion.)*
- Que va-t-on faire avec ? (*On ne sait pas ; sûrement une expérience.)*
- Quelle forme ça a ? (*On ne sait pas*.)
- Est-ce dur ou mou ? (*Dur.)*
- Y a-t-il une odeur ? (*On ne sait pas.)*
- Pourquoi cela fait du bruit ? (*Les billes s'entrechoquent.)*
- Que peut-il nous apprendre ? (*On ne sait pas*.)
- Combien pèsent les biberons ? (*On ne sait pas*.)
- Pourquoi les billes sont-elles vertes ? (*On ne sait pas*.)
- Qui l'a bu ? (*Sûrement vous mais on ne sait pas.)*
- Pourquoi n'est-ce pas un biberon transparent ? (*On ne sait pas*.)
- Combien de billes y-a-t-il ? (*On ne sait pas*.)
- Est-ce comestible ? (*Non.)*

Les questions sont plus pragmatiques, moins orientées « scolairement » que celles des élèves précédents, qui placent presque tous d'emblée le questionnement dans le contexte d'une expérimentation orientée vers un savoir mathématique.

Quelques pistes pour le débat.

- Amener les élèves à distinguer, parmi les questions de la classe, celles qui relèvent de l'aléatoire et les autres : pour cela, on peut exploiter les réponses en faisant débattre celles pour lesquelles on « peut être sûr », et **comment**.
  Quelques exemples.
  - Est-on certain d'avoir observé toutes les couleurs des billes de la bouteille ? *Les amener à exprimer qu'on ne peut pas en être sûr ; mais qu'il faut renouveler la « manipulation » dans des conditions identiques, si on veut que chaque bille ait « la même chance » de sortir (certaines façons de (peu) pencher la bouteille, sans l'agiter, permettent de sortir plusieurs fois de suite la même bille !). Faire alors décrire précisément cette manipulation (i.e. définir un protocole d'expérimentation) : « bien remuer la bouteille, la retourner, et faire apparaître une bille ; noter sa couleur » ; le*

mot expérience peut déjà être proposé par des élèves ; sinon, le professeur l'introduira à la fin du débat.

- Peut-on prévoir la couleur qui va sortir ? *Non ; on ne voit pas a priori de méthode pour le savoir... On parlera d'expérience aléatoire pour exprimer que le résultat n'est pas toujours le même, bien que l'expérience soit réalisée dans les mêmes conditions. On peut alors mettre en parallèle l'utilisation du mot « expérience » dans la situation « mettre des glaçons dans un bol d'eau », où le résultat est toujours le même, lors des renouvellements de l'expérience. Faire donner d'autres exemples d'expériences aléatoires par les élèves.*

- Traiter les questions de nature non aléatoire, toujours dans le respect de la règle « ne pas ouvrir le biberon », soit en faisant expliciter une manière d'y répondre (par exemple : pour la masse du biberon, une pesée suffit), soit en les « mettant de côté pour plus tard » (masse ou volume d'une bille et composition du biberon qui exigent d'ouvrir le biberon).

Synthèse écrite dans le cahier de cours :

Définitions
Une *expérience aléatoire* est une expérience, qui, quand on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas toujours le même résultat.
Les résultats que l'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelés les *issues* de l'expérience.
Chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

Exemples
« On retourne le biberon et on note la couleur de la bille obtenue ». Les issues sont les différentes couleurs des billes du biberon.
« On lance une pièce de monnaie, et on regarde sur quelle face elle tombe ». Pile et Face sont les issues de cette expérience.
Etc.

Remarque : on peut, à partir de cette synthèse, prolonger le questionnement pour aboutir à la notion d'évènement lié à cette expérience aléatoire, ou la réserver pour une autre activité.

Activité 2

Les élèves sont groupés par deux (un expérimentateur, un secrétaire). On leur distribue un biberon numéroté.

« Ce biberon contient 10 billes de couleur. Vous n'avez pas le droit de l'ouvrir. Vous devez en trouver la composition et décrire votre démarche ».

Démarche attendue
On attend que les élèves fassent intuitivement une analogie entre le *cadre probabiliste* (théorique : connaissant la composition du biberon contenant *n* billes on peut calculer la probabilité de sortie d'une couleur) et le *cadre expérimental* (statistique) où on infère que les fréquences d'apparition des couleurs (sur un grand nombre de tirages) permettent d'estimer la composition du biberon (raisonnement abductif : « une fréquence d'apparition des billes bleues « se rapprochant » de 0,3 peut être due à une composition de 3 billes bleues sur 10 dans le biberon »). Cette

composition estimée pourra ensuite être validée ou invalidée après ouverture du biberon.

Temps alloué : 30 min.

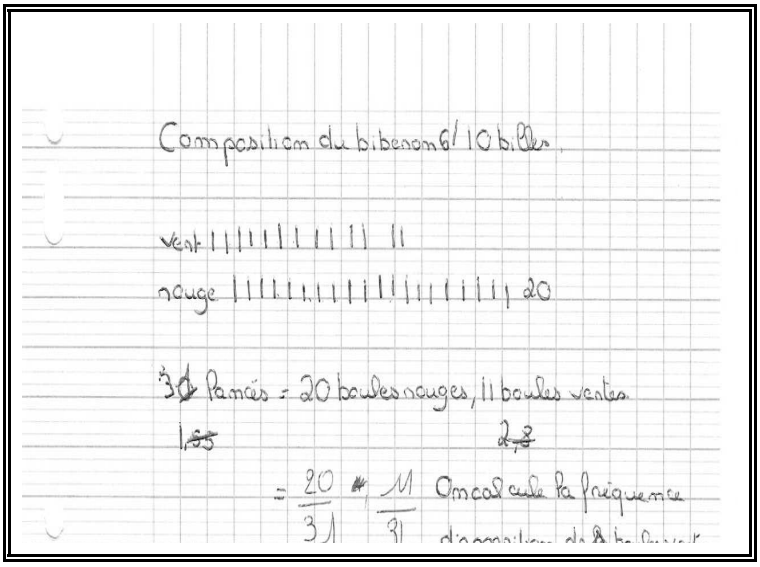
Déroulement

Le professeur distribue les biberons. Rapidement, dans chaque binôme, un élève manipule (selon le protocole établi séance 1), le second note les issues. À la fin de l’expérimentation, le professeur propose une mise en commun.

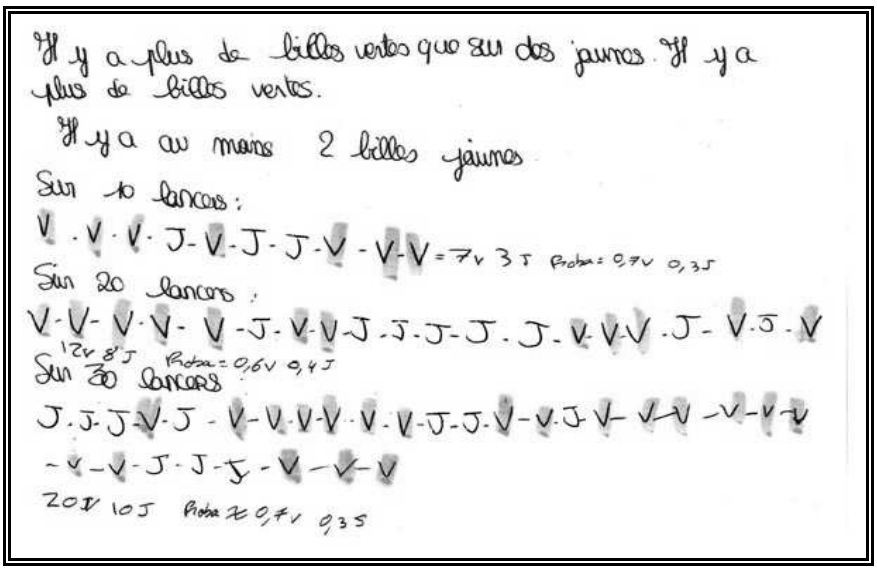
Certains binômes ont posé la question : « combien de fois on fait l'expérience ? ».

Le professeur : « c'est à vous de décider... ».

Presque tous les binômes ont produit un échantillon unique de taille variant entre 30 et 120 expériences à partir de laquelle ils ont calculé la fréquence d'apparition des différentes couleurs. Selon les cas, elle a été dénommée fréquence, pourcentage, voire probabilité et a été utilisée ou non, pour inférer la composition du biberon :



Ici, le binôme s'est limité à l'expression de la fréquence en pourcentage.


Il y a plus de billes vertes que sur des jaunes. Il y a plus de billes vertes.

Il y a au moins 2 billes jaunes

Sur 10 lancers :

V - V - V - J - V - J - J - V - V - V = 7V 3J Proba = 0,7V 0,3J

Sur 20 lancers :

V - V - V - V - V - J - V - V - J - J - J - J - J - V - V - V - J - V - J - V

12V 8J Proba = 0,6V 0,4J

Sur 30 lancers :

J - J - J - V - J - V - V - V - V - V - V - J - J - V - V - J - V - V - V - V - V - V

- V - V - J - J - J - V - V - V

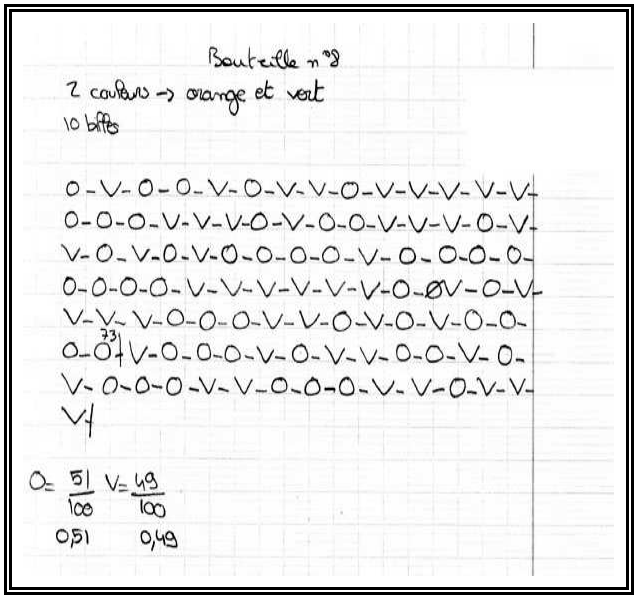
20V 10J Proba ≈ 0,7V 0,3J

Ce binôme assimile la fréquence d'apparition avec sa probabilité... et n'en déduit pas une possible composition du biberon.

Deux binômes ont effectué d'abord un petit nombre de tirages, puis ont augmenté la taille de leur échantillon.

Deux binômes ont produit deux échantillons successifs de 100 tirages, le second infirmant (binôme « Clara ») ou confirmant (binôme « Arlette », voir plus loin) la conclusion du premier.

Clara


Bouteille n°2

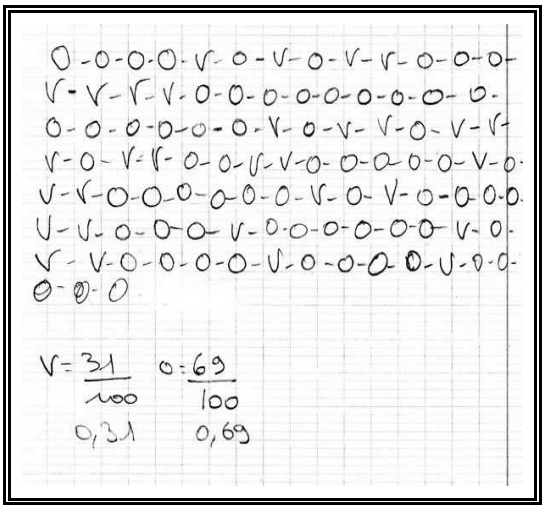
2 couleurs -> orange et vert

10 billes

O - V - O - O - V - O - V - V - O - V - V - V - V - V -
O - O - O - V - V - V - O - V - O - O - V - V - V - O - V -
V - O - V - O - V - O - O - O - O - V - O - O - O - O -
O - O - O - O - V - V - V - V - V - V - O - O V - O - V -
V - V - V - O - O - O - V - V - O - V - O - V - O - O -
O - O 33 V - O - O - O - V - O - V - V - O - O - V - O -
V - O - O - O - V - V - O - O - O - V - V - O - V - V -
V

O = 51/100 V = 49/100

0,51 0,49


O - O - O - O - V - O - V - O - V - V - O - O - O -
V - V - V - V - O - O - O - O - O - O - O - O - O -
O - O - O - O - O - O - V - O - V - V - O - V - V -
V - O - V - V - O - O - V - V - O - O - O - O - O - V - O -
V - V - O - O - O - O - O - O - V - O - V - O - O - O - O -
V - V - O - O - O - V - O - O - O - O - O - O - V - O -
V - V - O - O - O - O - V - O - O - O - O - V - O - O -
O - O - O

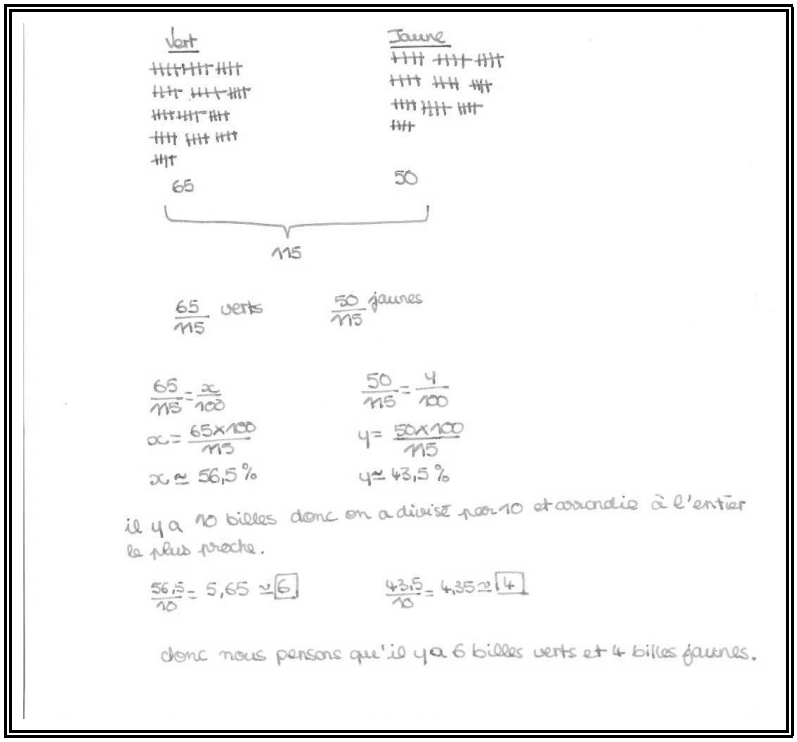
V = 31/100 O = 69/100

0,31 0,69

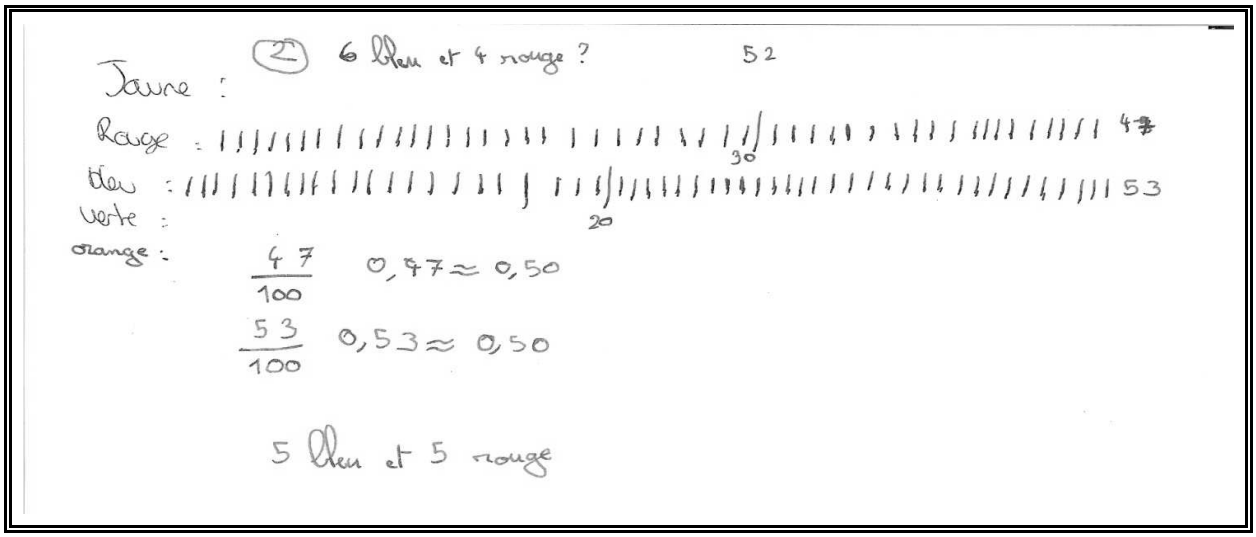
Pour tous les binômes, le raisonnement a effectivement suivi la démarche explicitée ci-dessus, mais le passage de la fréquence observée à la composition du biberon n'est pas toujours explicité.

Quelques exemples de démarches, qui semblent révéler des représentations différentes :

- <u>Démarche 1</u> : « un grand nombre de tirages permet d'approcher la probabilité de sortie d'une couleur »

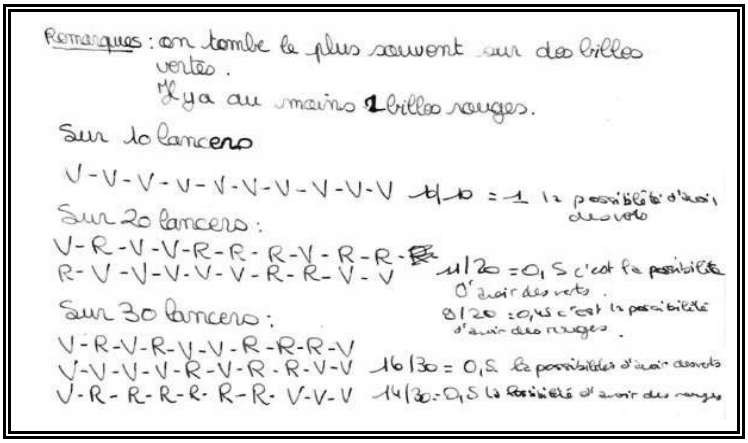


- <u>Démarche 2</u> : un échantillon de 100 tirages permet de déterminer sans calcul (et avec une fiabilité suffisante ?) la composition « sur 100 », facilement convertible en « sur 10 ».



- <u>Démarche 3</u> : la taille de l'échantillon n'est pas fixée *a priori*, mais les fréquences calculées sont « vérifiées » sur de nouveaux échantillons (de taille croissante (Jeanne), constante (Clara ; Arlette), voire décroissante (Cynthia) !)

Jeanne


Remarques : on tombe le plus souvent sur des billes vertes.
Il y a au moins 1 billes rouges.

Sur 10 lancers

V-V-V-V-V-V-V-V-V-V 10/10 = 1 la possibilité d'avoir des verts

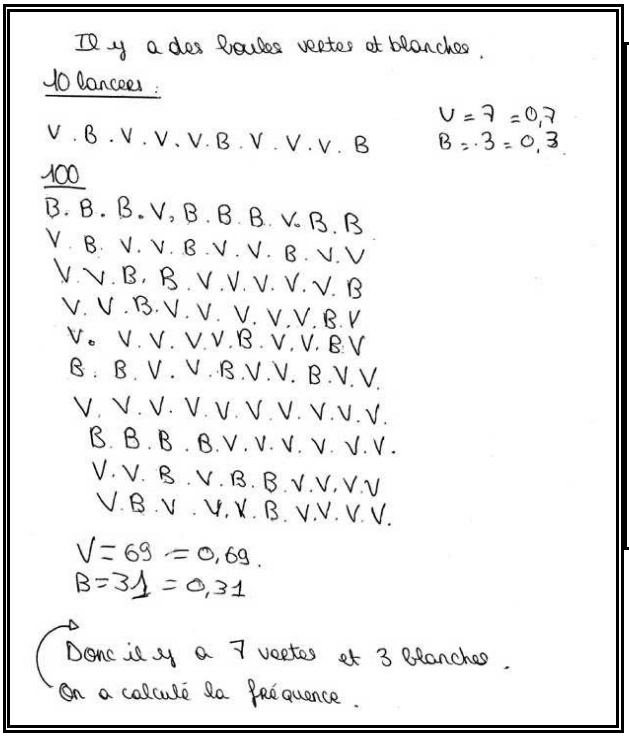
Sur 20 lancers :

V-R-V-V-R-R-R-V-R-R-
R-V-V-V-V-V-R-R-V-V 11/20 = 0,5 c'est la possibilité d'avoir des verts.
8/20 = 0,45 c'est la possibilité d'avoir des rouges.

Sur 30 lancers :

V-R-V-R-V-V-R-R-R-V
V-V-V-V-R-V-R-R-V-V 16/30 = 0,5 la possibilités d'avoir des verts
V-R-R-R-R-R-R-V-V-V 14/30 = 0,5 la possibilité d'avoir des rouges

Clara et Arlette


Il y a des boules vertes et blanches.

10 lancers :

V . B . V . V . V . B . V . V . V . B

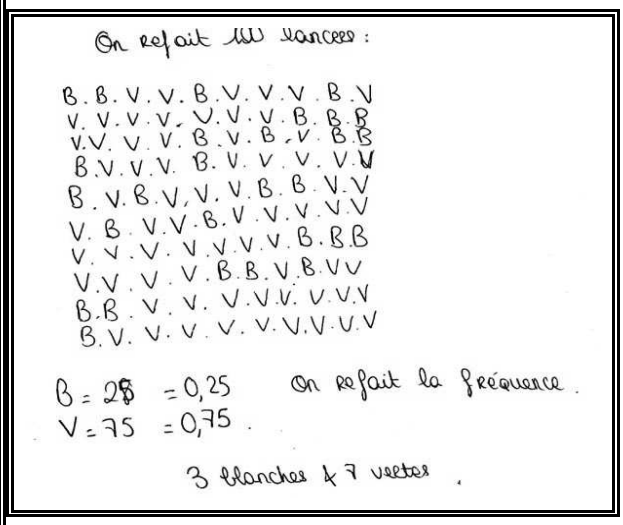
V = 7 = 0,7
B = 3 = 0,3

100

B . B . B . V , B . B . B . V . B . B
V . B . V . V . B . V . V . B . V . V
V . V . B , B . V . V . V . V . V . B
V . V . B . V . V . V . V . V . B . V
V . V . V . V . V . B . V . V . B . V
B . B . V . V . B . V . V . B . V . V
V . V . V . V . V . V . V . V . V . V
B . B . B . B . V . V . V . V . V . V .
V . V . B . V . B . B . V . V . V . V
V . B . V . V . V . B . V . V . V . V .

V = 69 = 0,69.
B = 31 = 0,31

Donc il y a 7 vertes et 3 blanches.
On a calculé la fréquence.


On refait 100 lancers :

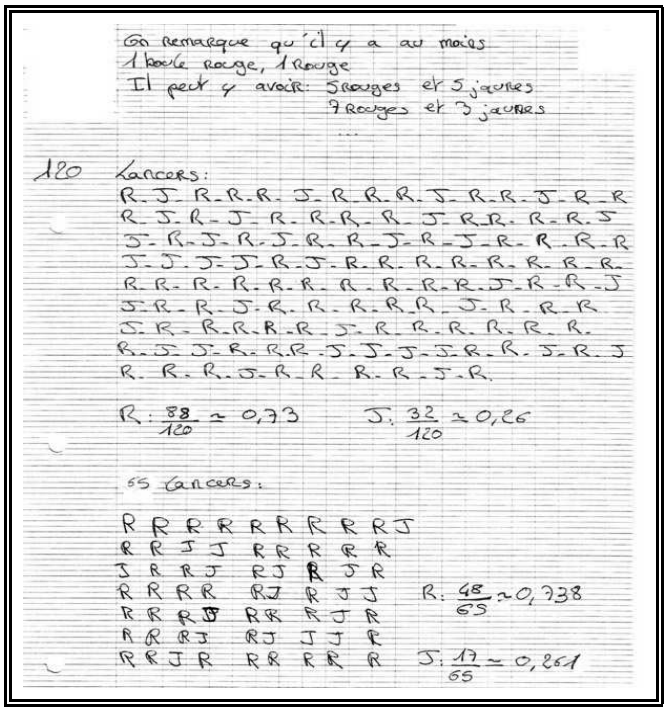
B . B . V . V . B . V . V . V . B . V
V . V . V . V . V . V . V . B . B . B
V . V . V . V . B . V . B . V . B . B
B . V . V . V . B . V . V . V . V . V
B . V . B . V , V . V . B . B . V . V
V . B . V . V . B . V . V . V . V . V
V . V . V . V . V . V . V . B . B . B
V . V . V . V . B . B . V . B . V . V
B . B . V . V . V . V . V . V . V . V
B . V . V . V . V . V . V . V . V . V

B = 25 = 0,25
V = 75 = 0,75.

On refait la fréquence.

3 blanches & 7 vertes.

Cynthia



<u>Synthèse écrite dans le cahier de cours</u>

En répétant plusieurs fois cette expérience aléatoire, on a calculé la fréquence des évènements suivants : obtenir une boule verte ; obtenir une boule jaune.

Par exemple (binôme 1) :

Sur 115 tirages	*Observer une boule verte*	*Observer une boule jaune*
Fréquence	*0,57*	*0,44*

On a vu précédemment que, lorsqu'on répétait un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'un résultat se stabilisait autour d'un nombre qu'on appelle « probabilité de ce résultat ». On en déduit que 0,57 devrait être proche de la probabilité d' « observer une boule verte ».

D'où 0,57 ≈ (nombre de boules vertes)/10.

Donc : nombre de boules vertes ≈ 5,7.

Le biberon contient alors peut-être 6 boules vertes, et 4 boules jaunes.

Pour vérifier, on ouvre le biberon...

<u>Prolongement possible</u> : provoquer un questionnement des élèves autour des compositions éventuellement différentes trouvées dans les différents binômes et de la plus ou moins « bonne approche » de cette composition.

Notes diverses :

Activité présentée et expérimentée par l'IREM d'Orléans de 2008 à 2010.

Bibiographie :

Brousseau G & N, Ginger W, « Une expérience de premier enseignement des statistiques et de probabilités », article publié en anglais dans *The journal of mathematical behavior of children*, 2001.

DUCEL Yves et SAUSSEREAU Bruno, « Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en troisième ? », Repères IREM n°77, p. 53-65, octobre 2009.

Pari sur la somme de deux dés

Béatrice LEGOUPIL, IREM de Lyon – Laurianne FOULQUIER, IREM d'Aquitaine

Présentation

Lancer deux dés et calculer leur somme semble une situation simple.
Cependant, l'observation des résultats de cette expérimentation surprend : elle met en défaut l'intuition première de certains élèves qui est d'accorder la même probabilité à l'obtention de chaque somme possible.
Dans cette activité, chaque binôme doit mettre en place une organisation pour relever et comptabiliser les différentes sommes. Puis, en groupes, ils s'interrogent sur la ou les sommes qui ont le plus de raisons de sortir. Enfin, la mise en commun permet de mettre en place le vocabulaire sur les probabilités, donner la loi de probabilité et débattre sur la notion de « hasard ».

Durée de l'activité

Deux séances.

Séance 1 : expérimentation en binômes.
Première phase : pari (5 min).
Deuxième phase : expérimentation et organisation des relevés (40 min).

Séance 2 : recherche en groupes.
Première phase : recherche en groupes avec production d'un transparent par groupe (25 min).
Deuxième phase : mise en commun en classe entière à partir de la présentation des transparents (25 min).
Troisième phase : institutionnalisation.

Prérequis

Cette activité ne nécessite aucun prérequis particulier, elle peut donc être donnée en début de chapitre sur les probabilités.

Objectifs principaux

- Confronter les élèves à une situation où l'intuition peut être mise en défaut.
- S'organiser pour collecter des données.
- Introduire ou mettre en œuvre le vocabulaire de base des probabilités.
- Donner de l'importance à l'expérimentation.
- Débattre de la notion de hasard.

Matériel nécessaire

- Deux dés par binôme.
- Un transparent par groupe d'élèves.

Description et analyse de ce qui s'est passé dans la classe (*a posteriori*)

Première séance

Le professeur explique la règle du jeu.

« On lance deux dés. On calcule la somme des deux nombres visibles. On relance les dés jusqu'à ce qu'une des sommes soit apparue 20 fois. »

Il distribue la fiche élève (voir annexe 1) ainsi que deux dés par binôme.

Première phase : pari

Le professeur précise la consigne oralement.

« À votre avis, quelle est la somme qui va apparaître en premier 20 fois ? Vous avez 5 minutes pour vous mettre d'accord avec votre voisin sur le pari que vous désirez faire. »

Les élèves ont quelques minutes pour choisir leur pari en binôme. Ils peuvent faire usage de leurs dés s'ils en prennent l'initiative.

Faire ce pronostic leur permet de se poser des questions *a priori* et de faire naître des débats au sein des binômes. Il nous paraît important qu'émergent leurs intuitions initiales avant de se lancer dans l'expérimentation afin de pouvoir en discuter en fin d'activité.

Voici quelques exemples de pronostics :

- certains binômes donnent des raisons de l'ordre de la préférence :
  « 8 c'est mon chiffre fétiche »
  « 6 car je suis née le 6 juillet »
- d'autres décident de lancer les dés pour observer quelles sont les sommes qui sortent le plus :
  « 4 car en essayant, il est sorti le plus de fois »
  « 6 parce qu'on a sélectionné au hasard en lançant les dés »
- d'autres encore proposent une explication en raisonnant sur les nombres :
  « 6 car c'est la moitié de 12 »
  « 8 car c'est un nombre pair et que les nombres pairs apparaissent plus souvent »
  « 7 car c'est un nombre impair »
  « 12 car c'est le plus grand nombre »
- quelques binômes ont déjà l'idée de compter les décompositions possibles pour une somme :
  « 7 c'est le chiffre qui a le plus de combinaisons »
  « 7 car il y a plus de chances avec deux dés de faire 7 au total »
  « 7 nous avons choisi ce chiffre car c'est l'un des seuls qui a le plus de solutions (3 possibilités avec deux dés) »

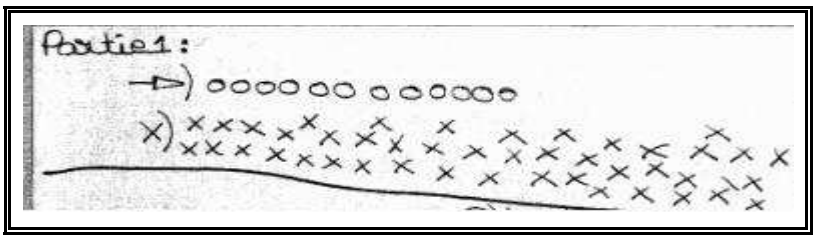
Il nous semble intéressant, à la fin de cette phase, de faire énoncer à l'oral les différents paris de la classe sans justification. Ceci afin d'assouvir la curiosité des élèves, de relever leurs *a priori* et de motiver le passage à l'expérimentation. Le professeur peut les relever pour en garder une trace.

Deuxième phase : expérimentation et organisation des relevés

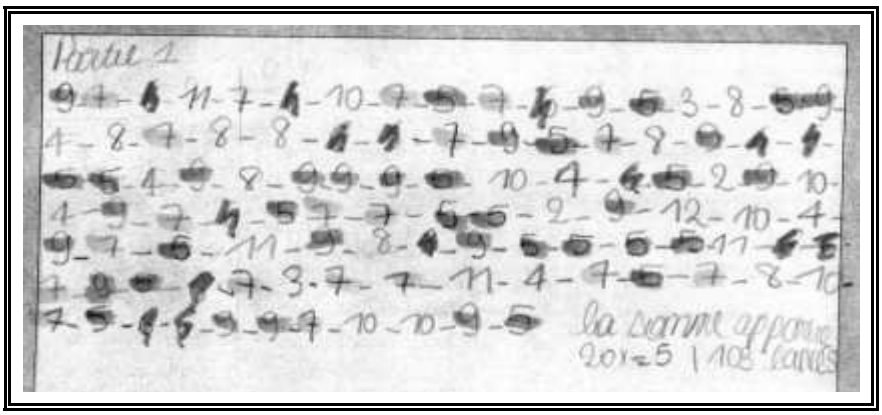
Pendant cette deuxième phase, les élèves expérimentent le jeu.
Le professeur donne la consigne suivante.

« Vous avez 30 minutes pour jouer autant de parties que vous voulez. Une partie s'arrête dès qu'une même somme est sortie 20 fois, même si ce n'est pas votre pari. Utilisez le cadre pour relever vos résultats, n'oubliez pas de noter, à la fin de chaque partie, la somme apparue 20 fois et le nombre de lancers. »

Le professeur, tout en laissant une totale autonomie aux élèves dans l'organisation des relevés des données, s'assure de la bonne compréhension de la consigne. En effet, certains binômes ne comptabilisent que la somme pariée ; ils font une liste avec deux symboles, du type « réalisé » et « non réalisé ». Le professeur doit leur préciser à nouveau que n'importe quel nombre peut apparaître 20 fois, il n'y a donc pas que le pari à prendre en compte.



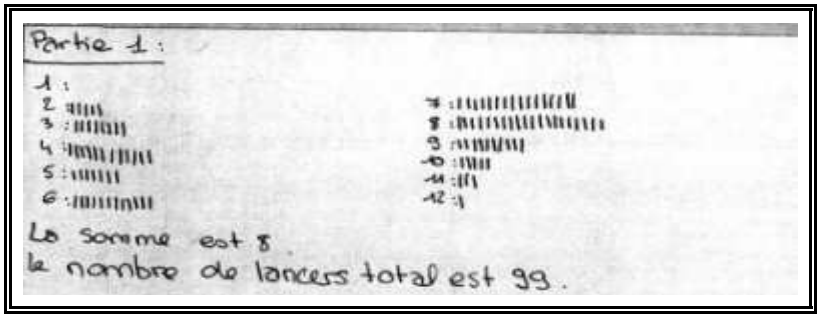
Une fois la consigne comprise, les élèves doivent s'organiser pour relever les sommes des deux dés. Peu d'élèves pensent à s'organiser en tableau dès leur première partie. Beaucoup d'entre eux écrivent les résultats comme ils viennent sous forme de liste, ce qui est assez délicat pour savoir quand le jeu s'arrête et quelle somme est sortie la première vingt fois.



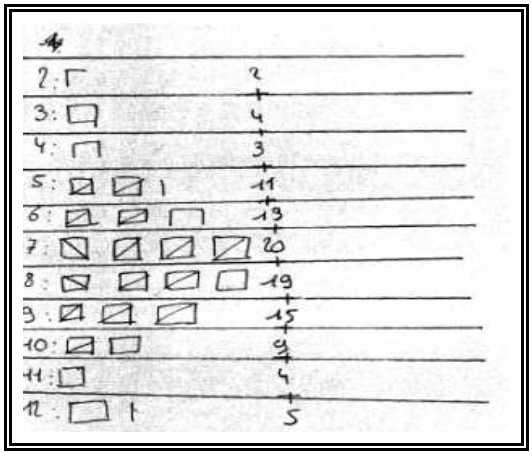
Il est important de laisser le temps aux élèves de construire leur propre relevé. Il faut effectivement noter toutes les sommes et mettre en place une organisation pour comptabiliser chacune d'entre elles, au fur et à mesure.

Ceux qui le font listent les sommes de différentes façons :

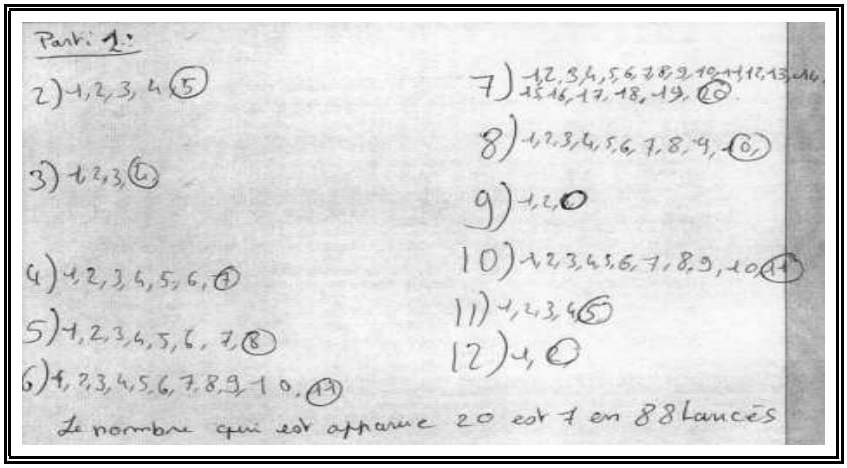
- en marquant les apparitions de chaque somme par un bâton ;



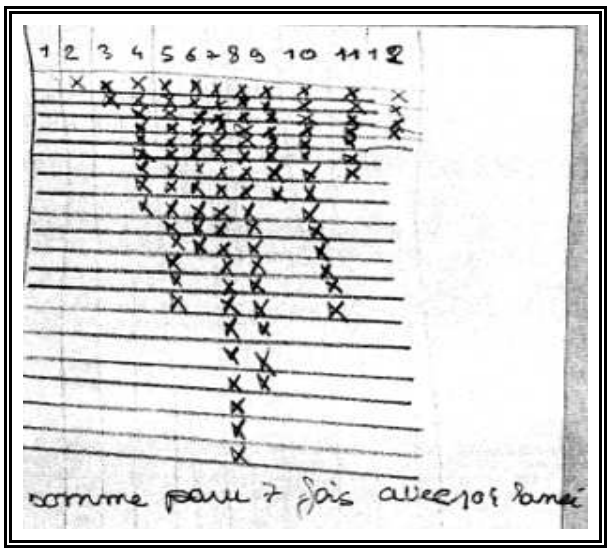
- en utilisant un comptage en base 5 ;



- en cumulant les apparitions de chaque somme.



La plupart des groupes a opté pour une organisation sous forme de tableau au cours de la première partie. Dans le cas contraire, le professeur leur demande de trouver une organisation plus efficace.
Les groupes expérimentent à des vitesses très différentes : au bout de quinze minutes, certains finissent leur première partie alors que d'autres en ont déjà fait trois. Trente minutes s'avèrent ainsi nécessaires pour que tous les élèves réalisent au moins un relevé pertinent.



Ensuite le professeur peut distribuer les tableaux (voir annexe 2) pour gagner du temps dans les relevés.
Cette expérimentation débute en classe et peut se terminer à la maison. Il est nécessaire de s'assurer que les élèves possèdent chez eux des dés, sinon il faut leur en prêter.

Durant cette phase, les élèves repèrent des évènements possibles ou impossibles : « le 1 ne peut pas sortir », « la somme est comprise entre 2 et 12 » ; mais aussi que certaines sommes apparaissent plus ou moins que d'autres : « 2 et 12 n'ont qu'une seule composition possible, ils sortiront moins », « de 5 à 9, les sommes sortent plus souvent ».
Ils se rendent compte qu'il n'y a pas équiprobabilité entre les évènements.

Deuxième séance

Première phase : travail en groupes

Dans la phase suivante, les élèves travaillent par groupes de trois ou quatre avec la consigne suivante .

« À votre avis, y a-t-il une somme qui a plus de raisons de sortir que les autres ? Sur un transparent, expliquez pourquoi. Vous avez 20 minutes. »

En circulant dans la classe, le professeur établira, selon le contenu des transparents, un ordre de passage pour le bilan en classe entière.

Deuxième phase : bilan en classe entière

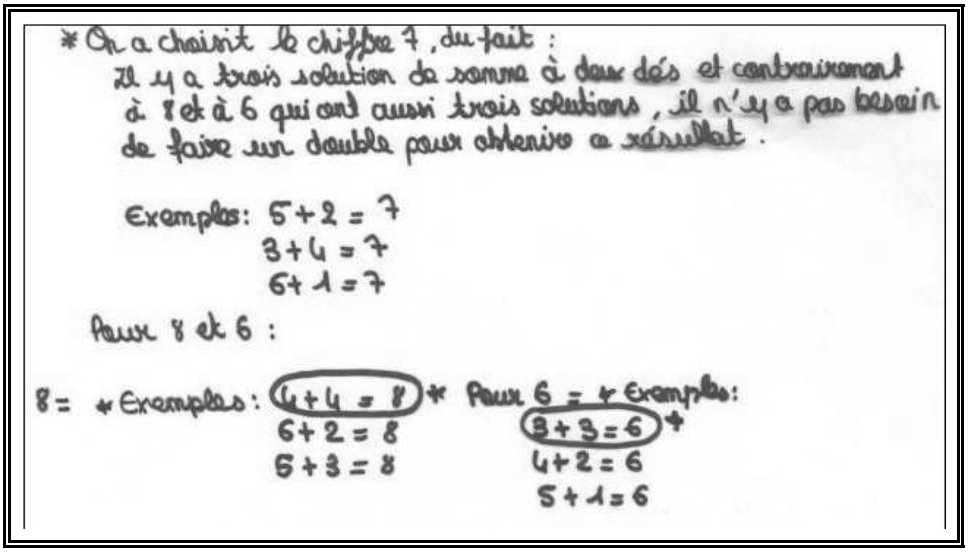
Chaque groupe désigne un ou plusieurs rapporteurs qui viennent exposer leur travail à l'ensemble de la classe.

La plupart des groupes établit sur leur transparent la liste des décompositions pour chaque somme de 2 à 12.

1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
5 + 6 = 11
6 + 6 = 12
2 + 2 = 4
1 + 3 = 4
4 + 1 = 5
3 + 2 = 5
3 + 6 = 9
4 + 5 = 9
4 + 6 = 10
5 + 5 = 10
5 + 1 = 6
4 + 2 = 6
3 + 3 = 6
6 + 1 = 7
5 + 2 = 7
3 + 4 = 7
4 + 4 = 8
5 + 3 = 8
6 + 2 = 8

Donc 6, 7, 8 ont le plus de chance de ressortir car il existe plus de combinaison de dés pour eux que pour les autres

Ces groupes trouvent trois possibilités pour 6, 7 et 8, et une ou deux possibilités pour les autres nombres. Ils en déduisent que les nombres ayant le plus de raisons de sortir sont 6, 7 et 8. Ils ne distinguent pas 2 + 5 et 5 + 2.
Pour quelques groupes, le fait qu'il y ait un double (3 + 3) et (4 + 4) dans la liste des décompositions de 6 et 8 leur fait sentir que le 7 sort plus facilement mais ils n'arrivent pas à le justifier.



* On a choisit le chiffre 7, du fait :
Il y a trois solution de somme à deux dés et contrairement à 8 et à 6 qui ont aussi trois solutions, il n'y a pas besoin de faire un double pour obtenir ce résultat.

Exemples : 5 + 2 = 7
3 + 4 = 7
6 + 1 = 7

Pour 8 et 6 :

8 = * Exemples : 4 + 4 = 8 *
6 + 2 = 8
5 + 3 = 8

Pour 6 = * Exemples :
3 + 3 = 6 *
4 + 2 = 6
5 + 1 = 6

Dans le même ordre d'idée, certains élèves disent qu'il est plus facile d'obtenir un nombre impair qu'un nombre pair en évoquant l'existence de ces doubles.

- On a plus de chance de tomber sur des nombres impaires que des nombres paires car il est plus difficile de faire des doubles.

- De plus, il est compliquer de sortir des petits chiffres comme 2, 3, 4 puisque l'on a deux dés.

- On peut donc trouver en majorité des chiffres compris entre 5 et 9.

Des élèves donnent aussi comme argument la position centrale du nombre 7.

Après notre théorie le chiffre qui revient le plus souvent est le 7 car il a beaucoup de combinaison est que c'est le chiffre du milieu

5 + 2 = 7
4 + 3 = 7
6 + 1 = 7

Pour donner une explication, certains groupes argumentent oralement.
« On peut obtenir une combinaison qui donne 7 avec le deuxième dé quelle que soit la valeur du premier dé (1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6/1), on a donc six chances d'obtenir 7 avec les deux dés. Pour le 6 et 8 on n'a que cinq chances. Si on obtient 6 avec le premier dé, on ne peut pas obtenir une somme inférieure à 7 ; si on obtient 1 avec le premier dé, on ne peut pas obtenir une somme supérieure à 7. »
ou bien
« Si le premier lancer donne 1 (plus petit nombre), quel que soit le deuxième lancer, les possibilités sont comprises entre 2 et 7. Si le premier lancer donne 6 (plus grand nombre), quel que soit le deuxième lancer, les possibilités sont comprises entre 7 et 12. 7 est dans les deux cas. »

ex:

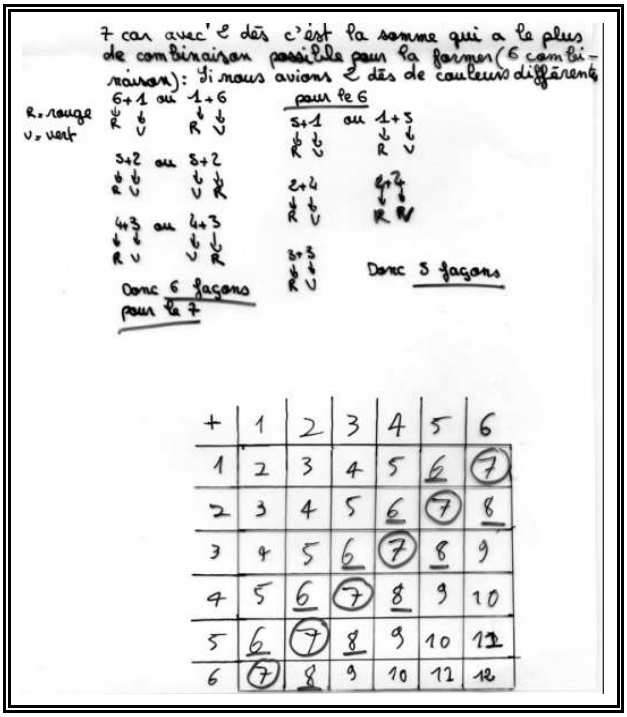
Sa face opposée est

ou

Sa face opposée est

Avec toutes les faces du dé, nous avons la possibilité de trouver un chiffre égal à 7, or les autres chiffres n'ont pas possibilité.

Certains groupes ont voulu distinguer leurs deux dés en leur attribuant une couleur et ainsi expliciter que les sommes 1 + 6 et 6 + 1 par exemple ne sont pas les mêmes.



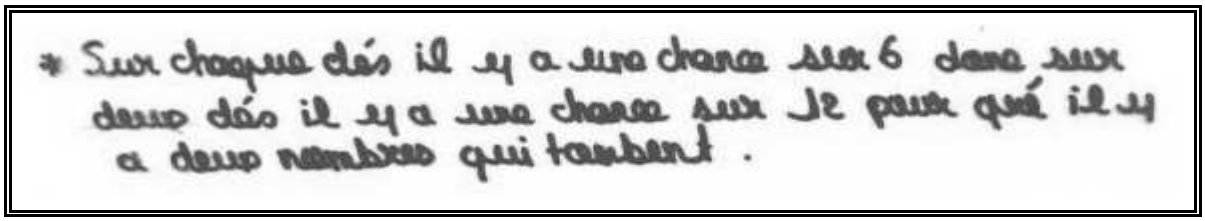
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il peut arriver qu'un groupe construise le tableau à double entrée des sommes de deux dés. Le 7 apparaît dans 6 cases des 36 du tableau, 6 et 8 dans 5 cases des 36, 5 et 9 dans 4 des 36...
La mutualisation doit aider les élèves à se convaincre que la somme 7 est celle qui a le plus de raisons d'apparaître et à justifier ce fait.

Le professeur peut aussi revenir sur l'importance de savoir organiser la collecte des données lorsque l'on effectue un relevé, tant pour la clarté de l'information que pour l'exploitation des données.

Troisième phase : institutionnalisation

Cette activité peut être l'occasion de mettre en place le vocabulaire sur les probabilités : expérience aléatoire, issues, évènements, évènement impossible, probabilité d'un évènement, évènements équiprobables ou non équiprobables.
On peut définir ce qu'est une issue, constater qu'il y en a 36, ce qui *a priori* n'est pas évident pour beaucoup d'élèves. Ils proposent 11 issues (nombre de sommes réalisables) ou 12 issues (nombre de faces de deux dés).



Il est possible de mettre en place la distinction entre évènement et issue. L'évènement « obtenir 7 comme somme de deux dés » est réalisé par six issues. L'évènement « obtenir 6 comme somme de

deux dés » est réalisé par cinq issues, etc.
On peut institutionnaliser : la probabilité de l'évènement « obtenir 7 comme somme de deux dés » est le nombre $\frac{6}{36}$, etc. La loi de probabilité peut être ainsi définie. Les évènements n'ayant pas la même probabilité d'être réalisés, ils ne sont pas équiprobables.

Il est intéressant ensuite de revenir sur les paris faits en début d'activité et sur leurs justifications ; c'est l'occasion de débattre avec les élèves de la notion de hasard.
L'expérimentation permet de montrer que ce n'est pas parce que le 7 est la somme la plus probable qu'elle apparaît le plus souvent sur un petit nombre de lancers. Cependant les élèves constatent que, plus le nombre de lancers augmente, plus la fréquence d'apparition des sommes ayant les plus faibles probabilités diminue mais « toute issue reste possible ».

Grâce aux mathématiques, il est possible d'étudier le hasard : on peut faire la liste des issues possibles, leur attribuer une probabilité, avoir un regard critique sur une situation, sans pour autant pouvoir prédire quoi que ce soit.

Réflexion, prolongement

Cette activité peut être prolongée par l'une des situations suivantes : la différence de deux dés, la somme de trois dés. Ces situations peuvent être traitées sous la forme d'une narration de recherche à effectuer à la maison, par exemple.

La question de la différenciation des deux dés peut se poser : faut-il ou non donner des dés de couleurs différentes, des dés de tailles différentes ? L'introduction de dés de tailles différentes est plus problématique, les élèves risquent ne pas être tous convaincus que ces deux dés suivent la même loi de probabilité.

Le lancer de dé étant une situation familière pour les élèves, le débat autour du choix du protocole de lancer n'a pas été soulevé, il nous semble donc important de proposer ensuite une autre activité où le problème se pose (exemple : lancer de pièce).

Annexe 1

Fiche élève

Règle du jeu

On lance deux dés. On calcule la somme des deux nombres des faces du dessus. On continue de lancer les dés jusqu'à ce qu'une des sommes soit apparue 20 fois.

1) Le pari

Nous parions sur la somme : .....
Pourquoi ?
.....
.....
.....

2) À vous de jouer

Vous avez 30 minutes pour jouer autant de parties que vous voulez. Une partie s'arrête dès qu'une même somme est sortie 20 fois, même si ce n'est pas votre pari.
Pour chaque partie, il faudra donner les deux informations suivantes :
la somme qui est apparue 20 fois est .....
le nombre total de lancers est .....
Cadre pour écrire

ANNEXE 2

Partie n°

Tableau des résultats

2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				

La somme qui est apparue 20 fois dans votre partie est : ...

Le nombre total de lancers est de : ....

Partie n°

Tableau des résultats

2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				

La somme qui est apparue 20 fois dans votre partie est : ...

Le nombre total de lancers est de : ....

Inégalité triangulaire. Notion de fréquence en classe de cinquième

Monique MAZE et Aurélie ROUX, IREM de Clermont-Ferrand - Guillaume FRANCOIS, IREM des Pays de la Loire

Présentation

En classe de troisième, les élèves utiliseront le dé comme outil de simulation. Il nous semble important qu'ils aient été familiarisés à l'utilisation de l'objet dé.

Les deux activités pourront être faites à des moments différents dans la programmation, tout en respectant l'ordre proposé.

La première activité permet d'introduire l'inégalité triangulaire. De la situation proposée dans cette activité, nait la nécessite d'introduire la notion de fréquence, ce qui sera fait dans la deuxième partie.

Objectifs

- Introduction de la notion : « inégalité triangulaire ».
- Familiarisation avec l'objet dé.
- Introduction de la notion de fréquence.

Prérequis

Pour l'activité 1

- Construction d'un triangle au compas. Ce savoir-faire est un objectif de la classe de 6e.

Pour l'activité 2

- Il faut avoir fait l'activité 1, mais pas forcément juste avant.
- La fraction quotient. La fraction en tant que quotient est un des objectifs de la classe de sixième. Deux choix sont possibles : avoir réactivé cette notion au préalable (activités mentales, devoir maison…) ou au contraire saisir cette occasion pour le faire.

Matériel envisagé

- Deux dés par binôme (pour les deux activités).
- Vidéoprojecteur : pour projeter un fichier « tableur » à remplir avec les élèves en classe (pour l'activité 2).

Scénarii

Activité 1 : (1 heure)

Organisation de la classe : les élèves travaillent en binômes. Le professeur propose un dispositif pour construire des triangles. Consigne orale.

« Vous allez construire des triangles. Pour cela, vous allez tous tracer un segment de 7 cm de long. Pour la longueur des deux autres côtés, je vous donne deux dés à jouer pour les déterminer ».

Pendant que les élèves tracent le segment de 7 cm, le professeur distribue deux dés par binôme.

Le professeur précise alors la façon de procéder.

« Chaque binôme lance les deux dés, note les résultats à côté du segment et construit son triangle. Il faut ensuite recommencer : tracer un segment de 7 cm, relancer les dés et construire le triangle ainsi déterminé. Il faut en construire au moins trois ; les plus rapides en feront plein d'autres ».

Après avoir laissé un temps suffisant pour que tous les binômes aient réalisé trois essais, le professeur lance l'une des deux questions suivantes.

« Qu'avez-vous obtenu ? » ou « Avez-vous des remarques à faire ? »

Le professeur lance ainsi le débat face à la classe entière : les élèves veulent tous participer pour rendre compte de ce qu'ils ont obtenu.

« Je n'ai rien remarqué ».

« Il y a un triangle que je n'ai pas pu construire. »

« Y'en a un qui est tout écrasé »

Certains élèves se sont lancés dans un débat sur le fait que le triangle était « presque écrasé » ou « complétement écrasé ».

En utilisant les nombres donnés par les dés, nombres entiers, la classe se rallie assez vite à l'idée que les points sont alignés. On a des arguments du type : 2 + 5 = 7, donc le point doit être sur le segment.

La question suivante se pose : dans la situation où les points sont alignés, peut-on dire que l'on a un triangle ?

Si la réponse est oui, on le nommera triangle plat (expression donnée par l'enseignant).

Sinon, on se contentera de parler de points alignés.

Cette question doit être impérativement tranchée avant d'aborder l'activité 2.

Les dés à jouer sont rangés.

On se pose maintenant la question :

« Si on prend trois nombres, peut-on prévoir si l'on peut construire un triangle dont les dimensions sont données par ces trois nombres ? »

Libre à l'enseignant de choisir la façon de faire vivre cette partie de l'activité dans sa classe. En effet l'objet de cette brochure ne porte pas sur la géométrie.

Il ne reste plus qu'à institutionnaliser l'inégalité triangulaire.

Activité 2 : (2 heures)

Organisation de la classe : les élèves travaillent en binômes. Consigne orale.

« Vous souvenez-vous de l'activité sur les triangles construits avec les dés ? J'ai une nouvelle question : a-t-on plus de chances de pouvoir construire le triangle que de ne pas pouvoir le construire ? »

Le cas du triangle plat a été évoqué dans la première activité. Il faut rappeler à la classe que ce cas fait partie des triangles constructibles.

« Je vous propose de refaire des essais en relançant les dés. Je vous laisse deux minutes pour les effectuer. »

Par binômes, ils expérimentent avec les dés.

Plutôt que de fixer le nombre de lancers, nous avons choisi de fixer la durée. Il est primordial que les élèves n'aient pas le même nombre d'essais. En effet, il est souhaitable que les quotients aient des dénominateurs différents afin que les comparaisons soient plus intéressantes. De plus, limiter la durée à 2 min permet en général d'obtenir des fréquences très différentes.

Nous passons ensuite au recensement des résultats et au débat. Éventuellement, certains groupes peuvent n'avoir fait qu'un tirage et avoir construit le triangle. Ce sera l'occasion de revenir sur l'utilité de l'inégalité triangulaire.

Les résultats des différents groupes sont relevés dans un tableau vidéoprojeté.

	Nombre d'essais	Nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle	Nombre de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle
Groupe 1			
...			
Groupe n			

L'enseignant peut demander :

« Quel groupe a obtenu le plus de cas favorables, c'est à dire le plus grand nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle ? »

On attend comme remarque des élèves : « On n'a pas le même nombre de lancers. »

L'enseignant demande alors :

« Comment peut-on comparer les résultats ? ».

Le débat devrait conduire à l'écriture des résultats sous forme de quotients et la comparaison pourrait se faire par un passage à l'écriture décimale. Ce premier débat se conclut par la définition de la notion de fréquence.

<u>Trace écrite :</u>

$$\text{fréquence de construction du triangle} = \frac{\text{nombre de fois où on a pu le construire}}{\text{nombre d'essais}}.$$

La fréquence mesure si le triangle peut être construit fréquemment.

L'enseignant relance le débat :

« *Pourquoi obtient-on des résultats si différents ?* »

Il faut s'attendre à ce que les élèves n'aient pas de réponse. L'enseignant propose de relancer les dés, de mesurer les fréquences de construction des triangles et d'essayer de répondre à cette question. Pour la même raison que précédemment, on fixera le temps de cette partie.

« *Prenez vos dés, je vous laisse 10 min pour faire ces expériences.* »

Les résultats des différents groupes sont relevés dans un tableau vidéoprojeté.

	Nombre d'essais	Nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle	Nombre de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle	Fréquence de « construction des triangles. »	Fréquence de « non construction des triangles. »
Groupe 1					
...					
Groupe n					

Trace écrite:

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de fois où l'on obtient...}}{\text{nombre d'expériences}}$$

Plus le nombre d'expériences augmente, plus la fréquence semble se stabiliser.

Analyse *a posteriori*

Activité 1

Les élèves sont sans doute surpris mais semblent amusés, pour ne pas dire intéressés.
Les élèves effectuent la tâche qu'ils semblent avoir très bien comprise.

Le professeur apporte une aide pour la construction dans certains groupes.

Ici, un seul triangle est demandé pour chaque lancer mais le professeur, s'il le juge utile pour sa classe, peut rappeler l'existence des 4 triangles possibles.

Certains élèves interpellent leur professeur lorsqu'ils trouvent un cas particulier. Celui-ci doit leur répondre d'attendre le débat au cours duquel ils pourront prendre la parole pour présenter leurs interrogations.

Activité 2

Cette activité a été menée dans deux classes différentes, avec deux professeurs n'ayant pas choisi la même progression. Dans la 5e Athènes, la notion de fraction quotient a été revue juste avant lors d'activités mentales. En 5e 2, cette notion a été étudiée plus tôt dans l'année, entretenue, mais aucune révision n'a été faite juste avant. Voici les deux comptes rendus de séances.

Classe de 5e Athènes

« Vous souvenez-vous de l'activité sur les triangles construits avec les dés ? Eh bien j'ai une nouvelle question : en utilisant ce procédé de construction, a-t-on plus de chances de pouvoir construire le triangle que de ne pas pouvoir ? »

Après s'être mis d'accord sur le fait qu'un triangle plat est un triangle, le professeur dit :

« Je vous propose de refaire des essais en relançant les dés. Je vous laisse deux minutes pour les effectuer. »

Les résultats sont résumés dans un tableau, vidéoprojeté.

Groupes	Nombre d'essais	Nombre de triangles constructibles	Nombre de triangles non constructibles
1	1	0	1
2	4	3	1
3	2	0	2
4	6	1	5
5	1	0	1
6	2	1	1
7	6	4	2
8	1	1	0
9	4	4	0
10	2	1	1
11	10	7	3

Le groupe 11 a fait beaucoup plus de lancers de dés que les autres groupes. Ceci est dû au fait que c'est le seul groupe n'ayant pas construit les triangles. Il explique pourquoi il n'a pas effectué la construction à l'aide de l'inégalité triangulaire. L'argument a semblé convainquant pour la classe.

À la question : « *Quel groupe a obtenu le plus de cas favorables, c'est-à-dire le plus grand nombre de fois où l'on pouvait construire le triangle ?* », les élèves ont tout de suite répondu : « C'est le groupe 11, mais c'est normal ils ont fait beaucoup plus d'essais. »

Un élève dit : « Le nombre de cas favorables sera plus grand si on fait plus de lancers ».

Le professeur demande alors : « *Comment peut-on comparer les résultats ?* ».

Un élève propose de procéder par soustraction :
« Si on compare le groupe 2 et le groupe 7 : pour le groupe 7, on a 4 réussites sur 6. En enlevant 2, ça fait 2 réussites sur 4, c'est moins bien que le groupe 2 qui a 3 réussites sur 4. »
L'argument est réfuté par le raisonnement suivant, donné par un élève : « ce n'est pas possible, car 4 réussites sur 6 essais, c'est mieux qu'une fois sur 2 alors que 2 réussites sur 4 essais c'est comme une fois sur 2. »

Après adhésion de la classe sur le fait qu'on ne puisse pas comparer les résultats des groupes à l'aide de soustractions, l'enseignant réitère sa question : « *Comment peut-on comparer les résultats ?* ».

La classe reste muette.

On passe alors à la deuxième phase :

> *« Prenez vos dés, je vous laisse 10 min pour faire ces expériences, puis on verra comment on peut comparer les résultats.»*

Les résultats sont résumés dans un tableau, vidéoprojeté.

Groupes	Nombre d'essais	Nombre de triangles constructibles	Nombre de triangles non constructibles
1	8	6	2
2	70	50	20
3	84	21	43
4	75	46	29
5	69	44	25
6	77	49	28
7	106	64	42
8	110	67	43
9	81	48	33
10	81	50	31
11	66	36	30

Une première remarque : le groupe 1 n'a effectué que huit lancers. Ces élèves avaient encore besoin de tracer les triangles. Au bout de 8 min 30, ils ont décidé d'eux-mêmes, sans que l'enseignant intervienne, de ne plus faire les tracés.

Après avoir rempli le tableau avec leurs résultats, le professeur leur redemande alors : « *Comment peut-on comparer les résultats ?* ».
Un élève annonce « Pour les groupes 9 et 10, c'est facile, car on a le même nombre d'essais. ».

L'idée de procéder par soustraction est proposée à nouveau, mais rapidement rejetée par la classe.

Ensuite, des élèves se demandent s'ils ont plus ou moins d'une chance sur deux de pouvoir construire les triangles. Ainsi, petit à petit, les phrases du type « On a pu construire 50 triangles sur 81. » se sont transformées en « notre réussite est de 50 sur 81 ».

Finalement, les élèves se mettent à comparer des fractions.

La première trace écrite prévue est alors notée et le professeur propose de calculer les fréquences de tous les groupes, en travail à la maison.

À la séance suivante, après correction des fréquences, le professeur demande à chaque binôme d'effectuer 200 lancers de dés pour voir ce qui se passe.

Groupes	Nombre d'essais	Nombre de triangles constructibles	Fréquence
1	200	110	0,550
2	200	123	0,615
3	200	99	0,495
4	200	123	0,615
5	200	118	0,59
6	200	120	0,600
7	200	118	0,590
8	200	119	0,595
9	200	120	0,600
10	200	113	0,565
11	200	125	0,625

On a remarqué que les fréquences variaient entre 0,5 et 0,6 pour 10 d'entre-elles. Ainsi, nous pouvons penser qu'il y a plus de chances de construire le triangle que de ne pas le construire avec une telle méthode.

Les élèves écrivent la deuxième trace écrite.

Classe de 5e 2

Les élèves sont motivés pour répondre au problème posé, l'activité 1 semble les avoir marqués.

Seulement un binôme d'élèves cherche à construire le triangle avec les instruments.

Le nombre de lancers réalisés est très variable d'un groupe à l'autre, certains binômes sont moins habiles concernant la manipulation de l'inégalité triangulaire.

Lors du débat à la fin de la première phase, certains lancent des réponses du type :

« On ne peut pas comparer, on n'a pas tous lancé autant de fois ! »

« On n'a qu'à comparer les groupes qui ont fait le même nombre de lancers ! »

« Justement, on peut pas répondre, c'est pas pareil pour les deux groupes qui ont fait 5 lancers ! Un des groupes a 3 triangles construits sur 5, un autre 2 sur 5 ! »

L'idée d'écrire les résultats sous forme de quotient est enfin proposée et les comparaisons se font, selon les cas, soit par mise au même dénominateur soit par passage à l'écriture décimale.

Lors de cette phase, il est effectivement difficile pour les élèves de répondre à la question de savoir pourquoi les résultats obtenus sont si différents. Ils évoquent beaucoup le « hasard » mais ne pensent pas nécessairement à relancer les dés un plus grand nombre de fois.

Comme dans la première classe, pour répondre au problème, l'enseignant les invite à réaliser un grand nombre de lancers.

	A	B	C	D	E	F
1		nb de lancers	nb de fois où l'on pouvait construire le triangle	nb de fois où l'on ne pouvait pas construire le triangle	fréquence de construction	fréquence de non construction
2	Groupe 1	10	5	5	0,50	0,50
3	Groupe 2	30	21	9	0,70	0,30
4	Groupe 3	25	13	12	0,52	0,48
5	Groupe 4	17	9	8	0,53	0,47
6	Groupe 5	29	20	9	0,69	0,31
7	Groupe 6	17	11	6	0,65	0,35
8	Groupe 7	12	6	6	0,50	0,50
9	Groupe 8	14	7	7	0,50	0,50
10	Groupe 9	10	4	6	0,40	0,60
11	Groupe 10	31	19	12	0,61	0,39
12						

Un élève a ressenti le besoin de justifier ces résultats en listant tous les tirages possibles et en comptabilisant le nombre de cas favorables. Ceci a été fait et organisé sous forme de tableau :

Dé n°1 Dé n°2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Après avoir rempli le tableau en calculant la somme des deux nombres affichés par les dés, les élèves ont grisé les cases correspondant à des triangles que l'on peut construire. Il y a 21 cas favorables sur 36 cas possibles.

$\frac{21}{36} \approx 0{,}58$, ce qui correspond aux calculs de fréquences.

Conclusion

Cette activité nous a permis d'introduire la notion de fréquence. Dès la cinquième, nous parlons de « chance d'obtenir un évènement ». Ceci assure un aller-retour entre probabilité et fréquence, comme le suggère l'article « Quelle place pour l'aléatoire au collège ? » de J.C. GIRARD, M. HENRY, B. PARZYSZ et J.F. PICHARD dans le Repère-IREM n°42. Les auteurs s'interrogent notamment sur l'intérêt qu'il y aurait « à aborder en classe la notion d'aléatoire en parallèle avec l'initiation aux démarches statistiques, avant l'enseignement des probabilités ».

Elle nous permet aussi de se familiariser avec l'objet dé, et de commencer son étude, bien avant de l'utiliser comme objet « outil de simulation ».

Lexique

Un cheminement en probabilités

Ce lexique répertorie, de façon non exhaustive, des concepts ou des notions qui seront rencontrés dans le cadre de l'enseignement des probabilités en Troisième. Nous avons opté pour une classification qui respecte un enchaînement logique des notions les unes avec les autres et qui, de ce fait, n'est pas alphabétique.
Pour chaque entrée, selon les cas, nous avons présenté son étymologie, son utilisation dans le langage courant et dans le contexte mathématique.
Des astérisques signalent dans le texte les différentes entrées.

ALÉATOIRE

Aléatoire vient du latin *alea*, dé, jeu de dé, jeu de hasard, hasard (Dictionnaire Gaffiot)

En langage courant, est dit *aléatoire* un phénomène considéré comme relevant du hasard.

En mathématiques, le calcul de probabilités* découle de tentatives de gestion de phénomènes *aléatoires* et on ne peut parler de probabilités* que dans le cadre de tels phénomènes.

~~~ ○ ~~~

HASARD

Le mot *hasard* dérive de l'arabe *az-zahr*, qui signifie *jeu de dés*.

Dans le langage courant, les expressions employant le mot *hasard* sont nombreuses et en révèlent différentes acceptions parmi lesquelles : incertitude, danger, chance, malchance, accident, coïncidence, destin, absence d'anticipation, absence d'intention… C'est un hasard dont on subit les effets.

Certains courants de pensée mettent en doute l'existence du hasard.
« *Le hasard, ce sont les lois que nous ne connaissons pas.* », Émile Borel
« *Le hasard n'existe pas, tout a une cause et une raison d'être.* », Ostad Elahi
« *Il n'y a pas de hasard, il n'y a que des rendez-vous.* », Paul Éluard
« *Partout où le hasard semble jouer à la surface, il est toujours sous l'empire de lois internes cachées, et il ne s'agit que de les découvrir.* », Friedrich Engels
« *Une chose n'est appelée contingente qu'en raison de l'insuffisance de notre connaissance.* », Baruch Spinoza
« *Hasard est le nom que Dieu prend quand il ne veut pas qu'on le reconnaisse.* », Albert Einstein

Le hasard est nié dans la pensée déterministe : tout phénomène a une ou plusieurs causes provenant de phénomènes antérieurs ; c'est l'insuffisance de nos connaissances ou notre incapacité à tenir compte de multiples paramètres qui fait qu'un phénomène sera qualifié d'aléatoire*.

En mathématiques, d'après Dominique Lahanier-Reuter (*Conceptions du Hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, PUF, 1999), on peut distinguer aujourd'hui cinq conceptions du hasard.
Le *hasard du tirage au sort* devient objet d'étude au milieu du xviie dans les travaux de Pascal et Fermat ; il a pour problème fondateur le « problème des partis »[64] (posé pour la première fois en 1494). Les situations modélisées sont celles des jeux de hasard, c'est-à-dire des phénomènes aléatoires* discrets pour lesquels on peut faire la description exhaustive de tous les cas possibles*. Le hasard n'y est pas défini, il est une des règles du jeu, il est mobilisable à volonté. Le cadre d'étude est l'arithmétique (dénombrement, combinatoire, récurrence finie).

Les trois conceptions suivantes (*hasard bénin*, *hasard lent* et *hasard sauvage*) ont pour cadre

64 http://archive.numdam.org/ARCHIVE/MSH/MSH_1964__9_/MSH_1964__9__3_0/MSH_1964__9__3_0.pdf
~~~

théorique l'analyse et font référence aux *théorèmes limites* :

- les lois *des grands nombres* qui établissent la convergence en loi de la moyenne de *n* variables indépendantes de même espérance mathématique ;
- le *théorème de la limite centrale* qui établit la convergence en loi de cette moyenne vers une loi normale lorsque les *n* variables ont de plus la même variance.

Le recours aux outils de l'analyse permet d'établir des liens entre les observations d'un phénomène aléatoire* aux niveaux microscopique et macroscopique.

Le *hasard bénin*, invoqué dans les travaux de Bernoulli (1713), De Moivre (1733) et Laplace (1812), obéit à ces théorèmes limites. Il intervient au sein d'expériences aléatoires* reproductibles dans les mêmes conditions ; sur un nombre restreint d'épreuves, les résultats peuvent sembler anarchiques mais si le nombre d'épreuves devient suffisamment grand, des régularités apparaissent. Il permet une appréhension déterministe du phénomène aléatoire* au niveau macroscopique. Il va être une aide, un outil dans le domaine scientifique. Il y a parfois intérêt à interpréter certains phénomènes aux conditions initiales trop complexes comme des phénomènes aléatoires*, de façon à utiliser la théorie des probabilités pour les étudier.

Le *hasard lent* nommé ainsi par Mandelbrot (début XXe) concerne les phénomènes aléatoires* qui obéissent aux théorèmes limites mais de façon si lente qu'ils apportent peu de renseignements au niveau macroscopique sur la connaissance globale du phénomène étudié.

Le *hasard sauvage*, d'abord étudié par Lévy (1937) et Lorenz (1960), concerne les phénomènes qui n'obéissent pas aux théorèmes limites, ceux dont l'espérance est infinie (processus de Cauchy) ou ceux qui sont très sensibles aux conditions initiales comme les phénomènes boursiers, les turbulences, les phénomènes météorologiques, ceux qui débouchent sur la théorie du chaos... Leurs fluctuations sont aléatoires* sans être bénignes. L'aléatoire* au niveau microscopique perdure au niveau macroscopique.

Dans ces trois conceptions, le hasard n'est plus perçu comme un principe extérieur, une règle du jeu, mais comme une caractéristique des phénomènes observables que le mathématicien cherche à modéliser.

Le *hasard formel*, étudié depuis les années 1960, a pour cadre théorique la théorie de l'information. Le hasard devient objet de recherche. Le projet est d'étudier la structure interne de suites aléatoires* (contingentes) et de mesurer la quantité de hasard qu'elles contiennent. On définit la complexité d'une suite comme la longueur minimale en nombre de bits du programme dont l'exécution produirait cette suite et on dit qu'une suite est aléatoire* si sa complexité est « approximativement égale » à sa longueur. C'est le domaine des paradoxes ; d'après le théorème de Gödel, il est impossible d'exhiber une suite aléatoire*.

On considère aujourd'hui que l'homme est incapable de produire par lui-même du hasard. La production de hasard passe par l'utilisation d'un générateur de hasard. Celui-ci peut être un objet usuel (pièce, dé, urne…) utilisé en respectant un protocole expérimental* adapté. Cela peut être aussi une fonctionnalité d'un instrument TIC (RANDOM des calculatrices ou ALEA des tableurs) ; dans ce cas, les nombres fournis sont pseudo-aléatoires : ils sont produits par des algorithmes de façon périodique avec des périodes extrêmement longues et indécelables à notre échelle.

Souvent dans les énoncés d'exercices de mathématiques, l'expression consacrée *tirer un objet au hasard*, appelle comme interprétation *chaque objet à la même probabilité* d'être choisi*. Ainsi le mot *hasard* est associé à de l'équiprobabilité, ce qui peut constituer un obstacle didactique : on observe souvent des élèves qui, dressant une liste d'éventualités, attribuent à chacune la même probabilité*.

~~~ o ~~~
~~~

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une *expérience aléatoire* est un processus où le hasard* intervient pour produire un résultat parmi d'autres possibles.
Dans la description d'une expérience aléatoire, on peut distinguer trois niveaux.

- Le premier niveau est celui de l'*expérience réelle*. Par exemple, on lance une pièce de 1 € en l'air et on observe son comportement : la pièce peut tomber sur le côté Pile, ou sur le côté Face, ou sur la tranche, ou rouler et se coincer sous un meuble (auquel cas le jeu s'arrête), etc. ; on peut ainsi envisager de nombreux résultats de l'expérience, certains farfelus mais pas impossibles. Un autre exemple consiste à lancer en l'air un dé cubique rouge et à observer son comportement : le dé peut retomber sur une des six faces, ou cogner un obstacle et rester en équilibre sur une arête (dé cassé), ou se briser (cf. Ekeland), etc. ; là-aussi on peut envisager de nombreux résultats possibles.
- Le deuxième niveau, celui de l'*expérience pseudo-concrète*, est une première étape dans la simplification et la modélisation de la réalité. Des objets qui produisent du hasard*, on ne retient que certaines propriétés. De la multitude de résultats envisageables, on ne retient que ceux qui sont considérés comme pertinents d'un point de vue probabiliste et qui vont être objet d'étude, on les interprète en termes d'issue*.

  Par exemple, on lance en l'air une pièce (peu importe sa valeur, sa matière) et on observe ce qui arrive. Parmi tous les résultats possibles cités ci-dessus, on ne retient que les cas où elle montre Pile ou Face, situations que l'on interprète en termes d'issues* codées « Pile » et « Face ». De même, on peut lancer un dé cubique (peu importe sa matière, sa couleur) et observer le nombre de points de la face supérieure. Le résultat est interprété par l'issue* 1, le résultat est interprété par l'issue* 2, etc.
- Le troisième niveau est celui du *modèle* mathématique*. Les objets, générateurs de hasard*, sont idéalisés : *la* pièce est équilibrée (qu'est-ce que cela veut dire ? une telle pièce existe-t-elle ?), *le* dé est homogène et régulier (un tel dé existe-t-il ?). On introduit un ensemble d'*éventualités*, chacune étant affectée d'un nombre positif compris entre 0 et 1 (ces nombres doivent vérifier certaines propriétés qui seront précisées plus loin). Ces éventualités représentent en général dans le modèle abstrait les issues* considérées dans le modèle pseudo-concret. L'ensemble des éventualités est appelé *univers* ou *ensemble fondamental* ou encore *référentiel*, il est noté Ω ou *E*.

  Par exemple, on peut modéliser le lancer d'une pièce équilibrée, par le choix des éventualités P et F, chacune affectée de $\frac{1}{2}$. Pour modéliser le lancer d'un dé cubique régulier, on peut choisir comme ensemble d'éventualités $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et affecter à chacune le nombre $\frac{1}{6}$.

On parle d'une expérience aléatoire à plusieurs ***épreuves*** quand la réalisation de l'expérience comprend plusieurs étapes. Par exemple, « tirer à Pile ou Face, puis tirer un jeton dans une urne » est une expérience aléatoire à deux épreuves.

Au moins par la pensée, l'expérience aléatoire est reproductible dans les mêmes conditions. Elle est susceptible d'être décrite par un protocole expérimental* dont elle est indissociable.

~~~ ○ ~~~

PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL

Le *protocole expérimental* est l'ensemble des instructions à suivre pour pouvoir affirmer que l'on a réalisé l'expérience aléatoire*. Il doit :

- décrire clairement et avec précision les conditions de réalisation de l'expérience de façon à la caractériser ; c'est ce qui permet de "répéter l'expérience dans les mêmes conditions".
- présenter la liste des issues* (conformément au programme de Troisième, on considère que cette liste comporte un nombre fini d'éléments).

Le respect du protocole garantit qu'une issue* d'une expérience ne peut être ni prévue, ni calculée, ni influencée : à notre échelle, elle dépend du hasard*. C'est la reproductibilité du protocole qui permet de reproduire l'expérience ; c'est la non-prédictibilité du résultat qui confère à l'expérience son caractère aléatoire*.
~~~

~~~ ○ ~~~

ISSUE

On parle d'*issue* dans la représentation pseudo-concrète d'une expérience aléatoire*. Par exemple, pour le jet d'un dé, les issues retenues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (on exclut dé cassé).
Lorsqu'on a répété une expérience aléatoire* n fois, les n résultats interprétés en termes d'issues constituent un échantillon* de taille n.

~~~ ○ ~~~

ECHANTILLON

Le mot *échantillon* vient de *eschandillon*, de *scandaculum*, échelle, jauge.

Dans le langage courant, le mot peut faire référence à un étalon de mesure, à une petite quantité d'une marchandise que l'on montre pour donner une idée de l'ensemble ou encore à une fraction d'une population destinée à être étudiée par sondage.

En mathématique, un échantillon de taille n est un n-uplet constitué des issues* de n répétitions indépendantes de la même expérience aléatoire* (en toute rigueur, c'est un n-uplet de variables aléatoires).
Les n valeurs constituent une série statistique.

~~~ ○ ~~~

DISTRIBUTION DE FRÉQUENCES

Pour un échantillon*, la *distribution de fréquences* est la donnée des issues* et de leurs fréquences respectives.

Distribution de fréquences sur un ensemble fini :

Issues	s_1	s_2	...	s_r	
Fréquences	f_1	f_2	...	f_r	1

Pour une expérience aléatoire*, deux échantillons* de même taille n'ont pas nécessairement la même distribution de fréquences : c'est la *fluctuation d'échantillonnage*.

~~~ ○ ~~~

DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ

La démarche probabiliste passe par une modélisation de l'expérience aléatoire* qui débouche sur la définition d'un modèle*. La donnée des éventualités et de leurs probabilités* respectives constitue la *distribution de probabilité* associée au modèle*.

Distribution de probabilité :

Éventualités	e_1	e_2	...	e_r	
Probabilités	p_1	p_2	...	p_r	1

~~~ ○ ~~~

MODÈLE PROBABILISTE

À une expérience aléatoire* peuvent être associés plusieurs modèles, plus ou moins pertinents ; un modèle pertinent est un modèle « assez » simple pour permettre des calculs et leur exploitation et « assez » juste pour être en cohérence avec la réalité, c'est-à-dire que les distributions de fréquences* obtenues pour des échantillons* de tailles *importantes* sont en général proches de la distribution de probabilité* de ce modèle.

Par exemple, dans le lancer d'une pièce équilibrée, on pourrait adopter la distribution de probabilité* :

Éventualité	P	F	
Probabilité	0,5001	0,4999	1
~~~

sans doute plus *juste* pour une pièce plus creuse du côté Pile, mais peu opératoire pour les calculs. De plus, ce modèle donnerait des résultats très peu différents de celui qui est conventionnellement adopté :

Éventualité	P	F	
Probabilité	0,5	0,5	1

Il se peut que pour une expérience aléatoire* complexe, la modélisation n'aille pas de soi et que le choix d'un modèle pose problème. On peut alors confronter un modèle que l'on pense pertinent à la réalité en produisant un échantillon* de *grande* taille et en dressant la distribution de fréquences*. Une trop *grande* différence entre la distribution de fréquences* et la distribution de probabilité* pousse à mettre en doute la validité du modèle candidat.

~~~ o ~~~

SIMULATION

À défaut de réaliser concrètement une expérience aléatoire*, on peut la *simuler*, c'est-à-dire la remplacer par une autre expérience aléatoire* à laquelle est attaché un modèle* de même loi de probabilité*. Les résultats de l'expérience réalisée sont alors interprétés en termes d'issues* de l'expérience simulée à l'aide d'une correspondance, d'un codage.
Par exemple, pour simuler l'expérience « sexe à la naissance » dans une population d'animaux comprenant autant de femelles que de mâles, on peut lancer une pièce et coder F pour FEMELLE, P pour MÂLE.
Pour simuler le tirage dans une urne qui comprend 1 jeton jaune et 2 jetons verts, on peut lancer un dé cubique et coder 1 et 2 par Jaune, 3, 4, 5 et 6 par Vert.
On peut aussi utiliser un dé cubique pour simuler le « lancer d'un dé tétraédrique équilibré » en codant : 1 par 1, 2 par 2, 3 par 3, 4 par 4, et en considérant que 5 et 6 ne sont pas interprétés en termes d'issues* de l'expérience « lancer d'un dé tétraédrique ».
On voit ainsi qu'un dé peut être utilisé, suivant les besoins, pour *jouer* au dé, ou pour *simuler* d'autres expériences aléatoires*.

À partir du générateur de nombres pseudo-aléatoires d'un outil TIC (RANDOM ou NbrAleat ou Ran# d'une calculatrice, ALEA() d'un tableur) de très nombreuses simulations sont possibles.
Pour simuler une expérience aléatoire*, il est nécessaire de lui avoir associé au préalable un modèle*, supposé pertinent. Pour certaines expériences aléatoires (par exemple, le lancer d'une punaise), il n'est pas possible de proposer un modèle* *a priori*.

~~~ o ~~~

ÉVÉNEMENT

Le mot *évènement* provient du verbe latin : *evenire* (venir).
L'Académie Française indique l'orthographe « évènement » dans sa troisième édition (1740). En 1990, le rapport sur les rectifications orthographiques préconise l'orthographe *évènement* afin de respecter la prononciation ; l'ancienne accentuation *évènement* reste tolérée.

Dans le langage courant, on rencontre le mot *évènement* avec plusieurs acceptions : résultat, fait important, soudain, imprévu.

En mathématiques, *évènement* est utilisé dans plusieurs contextes.
▪ Dans le cadre d'une expérience aléatoire* réelle, un évènement est une assertion qui, au vu du résultat de l'expérience aléatoire*, se révèlera vraie ou fausse. Par exemple, pour le jet d'un dé, on peut s'intéresser à l'évènement « la face supérieure du dé montre un nombre pair ».
▪ Dans la représentation pseudo-concrète de l'expérience, un évènement est un ensemble d'issues* possibles. Par exemple, pour le jet d'un dé, l'évènement « obtenir un nombre pair » est {2 , 4 , 6}.
Une fois l'expérience réalisée, l'issue* observée, si elle appartient à cet ensemble, réalise cet évènement.
▪ Dans le modèle probabiliste*, un évènement est un sous-ensemble de l'ensemble E des éventualités.

Par exemple, pour le jet d'un dé équilibré, on peut choisir E = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} et {2 , 4 , 6} est un évènement.

Vocabulaire, cas d'un espace probabilisé fini

Langage ensembliste	Langage probabiliste	Exemple : jet d'un dé
Ensemble E = {e_1 , e_2 , … , e_r}	Univers ou référentiel E = {e_1 , e_2 , … , e_r}	E = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}
Élément de E : e_i	Éventualité : e_i	3
A est une partie de E A ⊂ E	A est un évènement	{1 ; 2 ; 3} est un évènement défini en extension. « Obtenir au plus 3 » est le même évènement défini en compréhension.
Partie pleine E	Évènement certain	« Obtenir au plus 10 »
Singleton {e_i}	Évènement élémentaire	{6} ou encore « Obtenir 6 » est un évènement élémentaire.
Ensemble vide : ∅	Évènement impossible	« Obtenir plus de 7 »
Réunion de A et B : $A \cup B$	Évènement A ou B	
Intersection de A et B : $A \cap B$	Évènement A et B	
Ensembles disjoints	Évènements incompatibles	« Obtenir un nombre impair » et « Obtenir un multiple de 6 »
Ensembles complémentaires dans E	Évènements contraires	« Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un nombre impair »
Partition de E	Système complet d'évènements	

~~~ ○ ~~~

PROBABILITÉ

Une *loi de probabilité* P sur l'univers fini $E = \{e_1 , e_2 , \dots , e_r\}$ est une application définie sur l'ensemble des évènements* de E, à valeurs dans [0 ; 1]. L'image par P d'un évènement* A est la probabilité de A, notée $P(A)$.
La somme des probabilités de tous les évènements* élémentaires de E est égale à 1.
La probabilité d'un évènement* est la somme des probabilités des évènements* élémentaires qui le constituent.
De fait, dans le cas où E est fini, P est déterminée dès que l'on connaît les éventualités e_i et les probabilités correspondantes $P(\{e_i\})$ - souvent notées p_i - c'est-à-dire dès que l'on connaît la distribution de probabilité*.
En conséquence :

- $P(E)=1$
- $P(A)=\sum_{e_i \in A} p(\{e_i\})$
- Pour tout évènement A, d'évènement contraire $\bar{A}$, $P(\bar{A})=1-P(A)$
- Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Aborder les probabilités par la notion de loi de probabilité permet de relativiser les valeurs des probabilités élémentaires les unes par rapport aux autres, il y a peu de sens à en définir une isolément.

Lorsque les évènements* élémentaires ont la même probabilité, égale à $\frac{1}{Cardinal(E)}$,on parle d'*équiprobabilité*. La probabilité d'un évènement A est alors $\frac{Cardinal(A)}{Cardinal(E)}$. Le calcul de probabilité se ramène dans ce seul cas à du dénombrement.

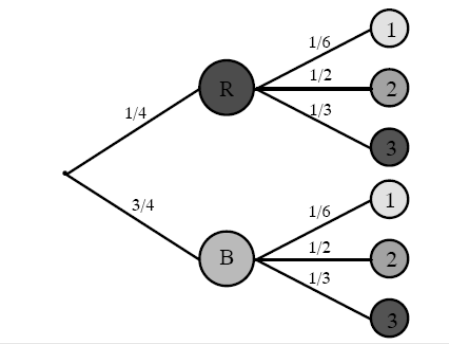
~~~ ○ ~~~

ARBRE

Un *arbre de choix* est un schéma adapté à des situations où plusieurs choix doivent être opérés et qui se construit par étapes.
Pour une étape, chaque option est matérialisée au bout d'un trait appelé *branche* : on obtient un *nœud* de l'arbre. À partir de chaque nœud d'une étape, on matérialise par de nouvelles branches les options possibles de l'étape suivante en tenant compte si nécessaire des choix effectués aux étapes précédentes. On appelle aussi *nœud* l'origine commune des branches de la première étape.
En partant d'une branche de la première étape et en suivant une branche de chacune des étapes suivantes pour arriver à un nœud terminal, on parcourt un *chemin*. À l'extrémité de chaque branche terminale de l'arbre, on peut dresser la liste des options du chemin correspondant : on obtient par ce procédé le bilan exhaustif des cas possibles*, qui peut donner lieu à du dénombrement, on parle alors d'*arbre de dénombrement*.

Choisir un arbre comme support de raisonnement revient à modéliser une situation donnée par une succession d'étapes qui ne sont pas nécessairement liées à une temporalité.

Un *arbre pondéré* est une représentation adaptée aux expériences aléatoires* à plusieurs épreuves.
Le programme de Troisième limite l'étude au cas d'une expérience à deux épreuves conduisant à un maximum de six issues ; il n'aborde pas le cas de tirages successifs dans une urne (avec ou sans remise).
Dans ce contexte, un arbre pondéré se construit en deux étapes.
Pour la première étape, on dispose d'un système complet d'évènements* de l'univers attaché à la première expérience, les évènements* sont matérialisés à l'extrémité de traits de même origine, appelés *branches* : on obtient des *nœuds* de l'arbre. Chaque branche est *pondérée* par la probabilité* de l'évènement* représenté.



Pour la deuxième étape, on dispose aussi d'un système complet d'évènements de l'univers attaché à la seconde expérience. À partir de chaque nœud précédent, on matérialise par de nouvelles branches pondérées les évènements* de la seconde expérience.
Remarquons que la somme des probabilités* sur les branches originaires d'un même nœud est égale à 1.
Une branche de la première étape suivie d'une branche de la seconde constitue un *chemin*. À l'extrémité d'un chemin, on obtient l'évènement conjonction des évènements* du chemin dont la probabilité* est le produit des probabilités* pondérant les branches.

~~~ o ~~~

POSSIBLE

Le mot *possible* vient du latin de *possibilis*.

Dans le langage courant, on utilise le mot *possible* pour exprimer ce qui peut exister, ce que l'on peut faire, ce qui constitue une limite, ce qui peut se réaliser ou être vrai, ce qui est acceptable…
En philosophie, est possible ce qui n'est pas impossible.

En langage probabiliste, un évènement* est dit impossible lorsqu'il est vide (il ne peut pas être réalisé). On ne parle pas d'évènement possible.
On utilisait ce mot dans deux expressions (vieillies) :
▪ "l'univers des possibles", où le mot désigne ce que l'on appelle aujourd'hui les éventualités (cf. expérience aléatoire*) ;
~~~

▪ la formule $\frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$, à laquelle on préfère aujourd'hui $\frac{Cardinal\,(A)}{Cardinal\,(\Omega)}$ ou $\frac{Nombre\ d'\ éléments\ de\ A}{Nombre\ d'\ éléments\ de\ E}$, que l'on peut noter $\frac{\#\,A}{\#\,E}$.

~~~ ○ ~~~

PLAUSIBLE

Le mot *plausible* vient du latin *plausibilis*, digne d'être applaudi.

Dans le langage courant, plausible se dit d'une thèse, d'une histoire, d'une interprétation, d'une explication, d'une excuse qui semblent pouvoir être admises ou tenues pour vraies. Ce mot renvoie à la notion de vrai ou de vraisemblable.

Il n'y a pas de définition mathématique de ce mot dans une théorie.

~~~ ○ ~~~

PROBABLE

Le mot *probable* vient du latin de *probabilis*, de *probare*, prouver.

Dans le langage courant, est *probable* ce qui n'est pas contraire à la raison, ce qui, sans être certain, peut être tenu pour vrai plutôt que pour faux, ce qu'il est raisonnable de conjecturer…

Il n'y a pas de définition mathématique de ce mot dans une théorie.

~~~ ○ ~~~

CHANCE

Le mot *chance* dérive du latin *cadere*, tomber, choir. Au XIIe, *chéance* désignait la manière dont tombent les dés.

Dans le langage courant, le mot chance évoque une manière favorable ou défavorable selon laquelle un évènement se produit, la possibilité de se produire par hasard, un hasard heureux ou un sort favorable…

Des expressions courantes comme "*il y a de fortes chances que*…", "*quand on lance une pièce, il y a une chance sur deux d'obtenir Pile*" renvoient à la notion de probabilité*. Suivant les cas, ce mot désigne des issues* ou cas possibles*, une proportion, une grandeur, une comparaison entre deux probabilités… (cf. l'article *À propos de l'introduction aux probabilités en Troisième*). Du fait de sa polysémie, c'est un terme à éviter en cours de mathématiques ; l'employer risquerait de plus de renvoyer l'élève à la notion de sort, favorable ou défavorable, d'où toute rationalité est exclue.
~~~

Membres des Commissions Inter-IREM ayant contribué à l'élaboration de cette brochure

CII Collège

Nathalie Ben Moussa
IREM de ROUEN

Patrice Boutoille
IREM de LYON

Pierre Campet
IREM de PARIS VII

Catherine Chabrier
IREM de NICE

Thierry Chevalarias
IREM de POITIERS

Aurélia Decrozals
IREM de MONTPELLIER

Robert Delord
IREM d'AQUITAINE

Jean-Claude Duperret
IREM de REIMS

Jean-Claude Fenice
IREM de REIMS

Marie-Renée Fleury
IREM d'AIX-MARSEILLE

Laurianne Foulquier
IREM d'AQUITAINE

Guillaume François
IREM des PAYS de la LOIRE

Maëlle Jouran
IREM de ROUEN

Christian Judas
IREM des PAYS de la LOIRE

Fabienne Lanata
IREM de ROUEN

Béatrice Legoupil
IREM de GRENOBLE

Jacky Maréchal
IREM de BOURGOGNE

Monique Maze
IREM de CLERMONT-FERRAND

Jean-François Mugnier
IREM de BOURGOGNE

René Mulet-Marquis
IREM de LYON

Vincent Paillet
IREM d'ORLEANS

CII Statistique et probabilités

Brigitte Chaput
IREM de TOULOUSE

Annette Corpart
IREM de CLERMONT-FERRAND

Jean Claude Girard
IREM de LYON

Jean-Pierre Grangé
IREM de BESANÇON

Jean-Pierre Hairault
IREM de RENNES

Michel Henry
IREM de BESANÇON

Nelly Lassalle
IREM de CLERMONT-FERRAND

Stéphan Manganelli
Enseignement Agricole

Bernard Parzysz
IREM de PARIS 7

Jean-Louis Piednoir
Inspection Générale de Mathématiques

Jean-Pierre Raoult
Comité Scientifique

Hubert Raymondaud
Enseignement Agricole

Françoise Robert-Prieur-Drevon
IREM de LYON

Jean-Marie Thomassin
IREM de DIJON

Daniel Vagost
IREM de LORRAINE

Hervé Vasseur
IREM d'ORLÉANS-TOURS

Claudine Vergne
IREM de MONTPELLIER

Dominique Poiret
IREM d'ORLEANS

Georges Pons
IREM des PAYS de la LOIRE

Aurélie Roux
IREM de CLERMONT-FERRAND

Mireille Sauter
IREM de MONTPELLIER

Site des Commissions : *http://www.univ-irem.fr* ***- Rubrique :*** *Commissions Inter-IREM*

Titre	Probabilités au collège : ne pas laisser l'enseignement des probabilités au hasard...
Auteurs	Membres de la Commission Inter-IREM Collège Membres de la Commission Inter IREM Statistique et Probabilités Membres du réseau des IREM http://www.univ-irem.fr - Rubrique : Commissions Inter-IREM
Coordonnateurs	Brigitte Chaput, Fabienne Lanata, Vincent Paillet
Date	Troisième trimestre 2012
Éditeur	Brochure APMEP n°198 26 rue Duméril - 75013 Paris Tél. 01 43 31 34 05 fax : 01 42 17 08 77 Mel : apmep@apmep.asso.fr Site : http://www.apmep.asso.fr
Résumé	Les probabilités font partie des programmes de troisième au collège. Cette publication présente des situations avec différents objectifs : initier, faire émerger les représentations des élèves sur le hasard, expérimenter, manipuler, donner du sens et mettre en place le vocabulaire. Chacune des activités décrites a été expérimentée et les productions d'élèves analysées. Les auteurs ont eu le souci de faciliter leur prise en main en proposant une feuille de route et des documents directement à photocopier pour les élèves. Cette brochure propose également aux enseignants des apports théoriques et un lexique.
Mots-clés	Collège - Probabilités - Statistiques - Activités - Expérience - Protocole - Aléatoire - Fréquence - Hasard - Dés - Pièces - Biberons - Arbre - Chance - Issue - Évènement - Modélisation.
Nombre de pages	120
ISBN	978-2-912846-73-0