Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - Le problème *croix ou pile* de d'Alembert, réalité observable et modélisation

Michel Henry

A - Issues observables et choix d'un univers

Pour illustrer l'importance de séparer modèle et réalité, analysons les confusions présentes dans le raisonnement de d'Alembert[1] exposé dans l'article *croix ou pile* de La Grande Encyclopédie[2].

D'Alembert propose l'exercice suivant :

"On demande combien il y a à parier qu'on amènera « croix » en jouant deux coups consécutifs".

Il répond : *"... dès qu'une fois « croix » est venu, le jeu est fini, ... Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles : « croix », premier coup ; « pile », « croix », premier et second coup ; « pile », « pile », premier et second coup. Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier"*.

D'Alembert soulève là un problème de fond, à l'origine de conceptions erronées très répandues chez les élèves. Déjà, en 1654, Fermat s'était attiré les critiques de Roberval à propos de sa solution au problème des partis : pour dénombrer les combinaisons favorables, il prolongeait en une partie "*feinte*" un jeu de pile ou face en trois manches gagnantes, déjà emporté par l'un des joueurs, *"pour rendre tous les hasards égaux"* selon ses termes.

1 - Jean Le Rond d'Alembert, mathématicien prestigieux du 18ème siècle, mieux connu pour d'autres travaux, Secrétaire de l'Académie des Sciences, auteur avec Diderot de la *Grande Encyclopédie Universelle*, publiée entre 1751 et 1772.

2 - Ce texte de l'Encyclopédie est donnée en entier en annexe 1 de l'article 3 de la première partie : *A propos de la définition de la probabilité*. On pourra le lire attentivement, ainsi que les commentaires épistémologiques de Jean-Claude THIENARD, avant de poursuivre cette analyse.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

D'Alembert envisage bien les quatre combinaisons possibles : (« croix », « croix ») ; (« pile », « croix ») ; (« croix », « pile ») ; (« pile », « pile »), mais prétend *"réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup"*, puisqu'alors l'événement dont on cherche la probabilité : « avoir au moins un ***croix*** en deux coups » est réalisé.

Nous avons ici deux modèles possibles, avec deux univers Ω à trois ou à quatre éléments. Ils sont aussi valables l'un que l'autre, exprimant un choix de modélisation : quelles issues retenir pour décrire les résultats possibles de cette expérience aléatoire ? D'Alembert penche pour les issues réellement observables dans les strictes conditions du jeu. Mais, confondant réalité et modèle, il ne voit pas que d'autres hypothèses de modèle sont nécessaires pour pouvoir donner une valeur (et un sens) à la probabilité de son événement. Quelle est la répartition de la probabilité sur Ω ? Quelle indication le protocole expérimental donne-t-il à cet égard ?

Il semblerait que d'Alembert fut victime de cette conception erronée selon laquelle il y a équiprobabilité d'office pour les issues observables ? Cette conception s'exprime souvent chez les élèves quand, devant une urne contenant des boules blanches et des boules noires, sans indication sur leurs proportions, ils déclarent : *"j'ai une chance sur deux d'avoir une blanche"*.

Avant de donner la probabilité demandée, il convient ici de préciser sur quel univers Ω on fait l'hypothèse d'équiprobabilité et de le justifier. Laplace, dans son essai philosophique[3], reprend cet exercice et tranche immédiatement : *"il est clair qu'il peut arriver quatre cas* ***également*** *possibles..."*. Est-ce bien aussi clair que cela ? Que peut-on dire à un élève qui ne serait pas convaincu par ce *"il est clair que"* ?

B - Hypothèses de modèle

Dans le modèle probabiliste d'aujourd'hui, à partir de l'univers de d'Alembert que nous désignerons par $\Omega = \{c_1 ; (p_1, c_2) ; (p_1, p_2)\}$, nous dirions : « amener ***croix*** au premier coup » est un événement de probabilité $P(c_1) = 1/2$. « Amener ***pile*** au premier coup » est aussi un événement de probabilité 1/2. Cet événement se décompose en deux événements élémentaires, (p_1, c_1) et (p_1, p_2), chacun de probabilité 1/4. L'événement

3 - On trouvera également ce cexte de Laplace dans le document T2 présenté au début du troisième article de la première partie : *A propos de la définition de la probabilité*.

« amener au mois un ***croix*** en deux coups » est représenté par la réunion disjointe de $\{c_1\}$ et $\{(p_1, c_2)\}$, sa probabilité est la somme de celles de ces derniers : 1/2 + 1/4 = 3/4.

Autrement dit, l'équiprobabilité sur « **croix** » et « **pile** » entraîne logiquement l'équiprobabilité sur les couples possibles, obtenus en deux parties, **que celles-ci soient effectivement jouées ou non.**

Mais cela suppose, outre l'hypothèse d'équiprobabilité sur « **croix** » et « **pile** », que l'axiome d'additivité de la probabilité est «naturel». Cette question de l'adéquation du modèle probabiliste à l'idée que l'on se fait de la réalité ne peut être tranchée par l'argumentation mathématique. Une interprétation fréquentiste permettra de convaincre certains : si on recommence ce jeu un très grand nombre de fois, la fréquence des jeux où l'on obtient un « **croix** » se stabilisera vers une valeur proche de 0,75 (il faudra en faire plus de 1 000 pour confirmer cette valeur contre le 0,66 de d'Alembert, avec une fiabilité acceptable : c'est un test d'hypothèse). Mais alors, pourquoi pas 0,73 ?

L'équiprobabilité supposée sur « **croix** » et « **pile** » est encore une hypothèse de modèle traduisant **conventionnellement** l'idée : "la pièce n'est pas truquée, elle est bien équilibrée," etc...

En réalité, seul les succès des applications du modèle probabiliste nous confirment son adéquation (dans des conditions d'emploi déterminées) et cette pertinence ne peut-être qu'admise au départ par les élèves, c'est une question de confiance dans l'enseignement et de contrat didactique.

C - Pour faire mieux comprendre l'erreur de raisonnement de D'Alembert

Changeons de modèle, avec un jeu analogue. L'équiprobabilité entre « **croix** » et « **pile** », loin de simplifier la question, l'embrouille. Alors, lançons une pièce truquée, par exemple une punaise, qui tombe sur la pointe avec une fréquence d'environ 0,7 et sur la tête avec une fréquence de 0,3. (Pour obtenir ces valeurs, on a fait un très, très grand nombre d'expériences). On s'intéresse à l'événement T = « obtenir au moins une fois ***tête*** en deux lancers ». Il y a trois issues observables selon d'Alembert, qui conduisent à l'univers $\Omega = \{t_1 ; (p_1, t_2) ; (p_1, p_2)\}$.

Y a-t-il encore 2 contre 1 à parier pour l'événement T ? On peut faire un calcul dans le modèle enseigné en Terminale, enrichi par la notion

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

d'indépendance : le résultat du deuxième lancer ne dépend pas de celui du premier, on a «donc», d'après la définition probabiliste de l'indépendance : $P[(p_1, t_2)] = P(p_1) \times P(t_2) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$ ce qui nous conduit au résultat : $P(T) = 0{,}3 + 0{,}21 = 0{,}51$. Vérification fréquentiste si on veut.

Mais nous avons, ici, à nouveau deux hypothèses de modèle : l'une sur l'estimation des probabilités des événements « tête » et « pointe » à partir de leurs fréquences observées, l'autre sur l'adéquation de la définition probabiliste de l'indépendance pour modéliser une notion plutôt vague de non-dépendance réelle.

On peut penser qu'avec ces deux issues élémentaires, « tête » et « pointe », supposées non équiprobables pour cette punaise, d'Alembert ne conclurait pas de même pour la probabilité de l'événement T. Cependant, dans son raisonnement :*"réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup"*, d'Alembert n'invoque pas l'équiprobabilité de « croix » et « pile »**.** Ce raisonnement s'appliquerait mutatis mutandis à la punaise.

Pour convaincre définitivement les sceptiques (que le raisonnement de D'Alembert est érroné), il suffit de remplacer la punaise par un clou, ayant très peu de chance de garder la position « tête » après un lancer, et de demander si réellement on pense encore avoir deux chances sur trois d'avoir « tête » en deux lancers ?

D - Au delà des apparences : le rève de d'Alembert et la réalité

Il conviendrait d'approfondir notre réflexion à propos des « hésitations » de d'Alembert qui, Secrétaire de l'Académie Royale des Sciences, autorité mathématique incontestée, n'avait pas une pensée aussi naïve que ne le laisse croire son article "*croix ou pile*". Il y pose une vraie et bonne question : « dans cet exemple simple du jeu de ***croix*** ou ***pile*,** qu'est-ce qui peut justifier le choix de tel ou tel modèle » ? A l'époque de d'Alembert, le modèle inspiré de la ***géométrie du hasard*** (équiprobabilité sur les issues possibles) devait-il s'imposer, face à un autre modèle qu'il propose : celui de l'équiprobabilité sur les issues observables ? Sans doute, à cette époque, l'idée de modélisation était étrangère aux probabilités. A cette étape de la construction du savoir scientifique, les probabilités relevaient encore de la simple observation du monde réel. Ainsi, dans leur correspondance de 1654 sur le problème des partis, Pascal calcule l'espérance du gain pour chacune des suites de parties possibles et Fermat explicite la combinatoire de ces parties.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

D'Alembert présente deux manières de compter et pose la question : quelle méthode de dénombrement donne-t-elle les « chances » de gagner dans les « bonnes » proportions ? Pourquoi pas 2 sur 3 au lieu de 3 sur 4 ? Qui pourra « démontrer » le contraire ? Personne en réalité, car il s'agit d'une question posée dans le monde réel et non dans le domaine mathématique, seul susceptible de démonstration. La preuve ne peut être qu'expérimentale et donner la préférence à un modèle provisoire, tant qu'il « colle » de manière acceptable aux observables de cette expérimentation. Ainsi, dans son article, D'Alembert pose la question du statut de la probabilité : simple observation du réel ou connaissance de nature théorique ? Par ricochet, il montre qu'en refusant à la probabilité d'accéder à un statut mathématique, on se place dans des situations paradoxales. Laplace, quarante ans après, reprendra la balle au bond et construira sa *théorie analytique des probabilités* sur la base de 10 principes fondateurs.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X