Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - UN EXEMPLE DE CONFUSION MODÈLE-RÉALITÉ

Jean-Claude GIRARD

Un domaine des mathématiques dans lequel il paraît indispensable de parler de modélisation est bien celui des probabilités. Dans la pratique, modèle et réalité sont si intimement liés qu'il est difficile de démêler l'un de l'autre. Voici, par exemple, le sujet national du Baccalauréat 1995, série ES, (exercice de spécialité) :

Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser, en théorie, 600 grammes.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur les poids possibles des pains de campagne, exprimés en grammes et arrondis à 10 grammes près.

Le tableau suivant indique la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

Exemple de lecture : la probabilité qu'un pain choisi au hasard pèse 590 grammes est 0,25.

1 - Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.

2 - Un client achète un pain de campagne. Quelle est la probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes ?

3 - Un contrôleur du service la répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

a - Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pains de 580 grammes ?

b - Quelle est la probabilité d'avoir au moins un pain de 580 grammes ?

c - Quelle est la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes ?

On donnera les valeurs exactes puis des valeurs décimales approchées à 10^{-4} près.

Dès la première phrase, on mélange une expérience réelle (un boulanger fabrique des pains) et une idéalisation des résultats (les pains doivent peser, « en théorie »[1], 600 grammes). On passe ensuite clairement, mais sans le dire, à une mathématisation en faisant intervenir une variable aléatoire.

Mathématiquement, une variable aléatoire peut se définir sans retour à une quelconque réalité. Mais, ici, la seule définition possible consiste à revenir à l'expérience concrète. Quelle est-elle exactement ? Comment ont été déterminées les probabilités données ? On peut penser que c'est par une analyse statistique de la production dans le passé et sur un assez grand nombre de pains. Ces conclusions sont-elles encore valables pour l'avenir et, en particulier, pour la production du jour considéré ? On en fait l'hypothèse et c'est cela qui détermine le modèle. C'est donc **une réalité** (on a fabriqué un grand nombre de pains et on a calculé la distribution des fréquences des poids obtenus) **qui définit un modèle** (la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le poids d'un pain).

Si la première question est clairement dans le modèle, par contre, la deuxième question entretient la **confusion entre réalité** (un client achète un pain) **et modélisation** (pour calculer une probabilité, il faut être dans un modèle). Le choix du pain est fait « au hasard »[2] (ce n'est pas dit mais on peut le supposer, et cela fait déjà partie des hypothèses) et le calcul doit se faire à l'intérieur du modèle déjà donné (on ne voit pas comment on pourrait faire autrement).

Cela pose alors un problème plus subtil : l'expérience qui consiste à choisir un pain « au hasard » dans la boulangerie est-elle la même que celle qui consiste à fabriquer un pain ? Il faut faire l'hypothèse que oui. Ce n'est pourtant pas la même réalité. La première concerne le boulanger et il peut fabriquer autant de pains qu'il veut. La deuxième est du côté du client qui,

1 - Mais quel est le sens de cette expression ? Exactement 600 grammes ?

2 - Le sens de cette expression sera également à définir.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

lui, ne peut choisir que dans la limite du stock restant au moment de l'achat. N'y a-t-il pas danger de confondre les **probabilités** des différentes valeurs de la variable aléatoire X (le modèle) et les **fréquences** des poids des pains dans le magasin (la réalité) ?

La troisième question porte de nouveau sur **une réalité** : un enquêteur choisit dix pains au hasard.

Que signifie, dans cet énoncé, "choisir au hasard" ?

Dans la réalité, on peut pour cela numéroter les pains et tirer au hasard un nombre à l'aide d'une table de nombre au hasard ou avec la touche RAN d'une calculatrice. On sera conduit à un modèle d'équiprobabilité. Nous avons donc ici un implicite déterminant pour le choix du modèle visé.

Par contre, choisir "au hasard" un point sur une droite n'a pas de réalité physique et aucun modèle ne s'impose. Tout au moins avant qu'on ait dit comment on doit faire !

Les hypothèses de modèle devraient donc être explicites dans la description d'une expérience aléatoire.

Mais cette fois, dans cette troisième question, **le modèle n'est pas donné**. Il appartient à l'élève de modéliser et, comble de malheur, le seul modèle qu'il connaisse en terminale ES (la loi binomiale) ne s'applique pas ici ! En effet, si on se place dans une situation « réaliste », on ne voit pas le contrôleur reprendre deux fois le même pain. On est donc dans une situation qui s'apparente à un tirage « au hasard » et sans remise dans une urne. En toute logique, le meilleur modèle à appliquer est donc la loi hypergéométrique mais, d'une, part elle n'est pas au programme de terminale et d'autre part, elle nécessiterait de connaître le nombre total de pains en stock au moment du tirage au hasard ainsi que la distribution des fréquences de leurs poids.

On doit donc considérer, comme dans la deuxième question, que choisir 10 pains revient à fabriquer 10 pains et que le poids de chacun est aléatoire (modélisable par la loi de probabilité donnée) et **indépendant** du poids des autres, ce qui nous ramène à un schéma de Bernoulli. « **Supposer** » l'indépendance revient donc à construire un modèle incluant une hypothèse forte qui ne figure pas dans l'énoncé, même de façon implicite. La seule justification possible est que, sans elle, on ne peut pas faire le problème, mais c'est, convenons-en, un raisonnement assez spécieux.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Dans nos classes, cette situation est fréquente. Que faut-il « supposer »? Il revient au professeur d'alerter les élèves sur le fait que « le modèle n'est pas la réalité ». Doit-on en conclure qu'il faut habituer nos élèves à réfléchir à propos de la modélisation plutôt que de les entraîner seulement à appliquer des modèles? Si l'on veut éviter la confusion entre modèle et réalité, il faut développer la démarche de modélisation.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X