Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ?

Jean-Claude Girard

A - L'idée de hasard

Aléatoire, *adj. : Que rend incertain, dans l'avenir, l'intervention du hasard.*
(Dictionnaire Robert)

Dans le sens commun, une épreuve aléatoire est donc simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni calculer le résultat. C'est le contraire d'une expérience déterministe, comme on en rencontre en physique, pour laquelle on peut déterminer ce qui va arriver si l'on connaît parfaitement les conditions initiales.

C'est donc le fait que l'on ne puisse pas prévoir les résultats, même si on répète l'expérience une deuxième fois « dans les mêmes conditions » qui rend cette expérience aléatoire.

Mais, que signifie « dans les mêmes conditions » ?

Dans une expérience concrète, physique, réelle, on n'a jamais exactement « les mêmes conditions » parce que les conditions initiales ne sont jamais exactement identiques. Par exemple, quand on lance un dé, on ne peut le lancer deux fois du même endroit, avec la même vitesse et la même direction et de toute façon pas en même temps, sauf à avoir deux dés et alors les conditions ne sont pas les mêmes pour les deux dés (équilibre, symétrie, poids et de nouveau, vitesse, direction etc.). Des changements, même imperceptibles entre les deux expériences (sur l'une au moins de ces conditions), conduiront à des résultats différents. C'est la manière dont Poincaré[1] définit, dans certains cas, le hasard : la grande sensibilité aux conditions initiales.

1 - Henri POINCARE, *Science et méthode*, Editions Flammarion, Paris, 1908.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

En ce sens, la réussite à un examen, le temps qu'il fera demain, la détermination du sexe d'un bébé sont des phénomènes (réels) aléatoires, c'est-à-dire dont le résultat est dû en partie au hasard même si le hasard qui intervient n'est pas toujours clairement identifiable.

Mais comment appréhender ce hasard ?

- Est-ce la rencontre de deux séries causales indépendantes (au sens d'Aristote ou de Cournot) ?

- Est-il dû à la complexité d'un système qui le rend très sensible aux conditions initiales (au sens de Poincaré) ?

- N'est-il que le reflet de notre ignorance (au sens de Laplace) ?

Certaines de ces expériences réelles peuvent être décrites, et leurs effets possibles étudiés, par des outils mathématiques (fonctions, ensembles, etc). Par exemple les résultats obtenus à partir des lois de Mendel (modèle génétique) sont en accord avec les fréquences d'apparition de certains gènes.

B - Expérience aléatoire réelle ou modèle ?

Une expérience aléatoire mathématique, c'est-à-dire un modèle d'expérience aléatoire doit vérifier les trois points suivants :

La description des conditions de l'expérience détermine celle-ci de façon précise et suffisante pour en garantir l'unicité (en regard de l'objet d'étude).

On n'aura donc aucun problème pour « répéter » cette expérience **fictive** dans les mêmes conditions. On pourra ainsi considérer que des expériences reproduites dans les conditions précisées relèvent de la même description, autorisant à dire que l'on répète la même expérience.

La plupart du temps certaines hypothèses faites à partir de l'observation d'expériences réelles restent implicites. Quand on lance un dé, on sous-entend : à six faces, équilibré, sans tricher etc. ce qui permet de prendre un modèle qui attribue une même probabilité à chacune des faces (sinon on ne saurait quel modèle prendre).

Que signifie, dans un énoncé, « **choisir au hasard** » ? Il faut souvent considérer cette expression comme un synonyme de tirage au sort avec la même probabilité pour tous les individus de la population mais il y a d'autres façons de « choisir au hasard », voir par exemple les différentes méthodes de sondages à deux degrés (ou plus), avec probabilités égales ou inégales, les sondages stratifiés, etc.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Les hypothèses devraient être explicites (autant que possible) dans une expérience aléatoire mathématique.

Comme tout modèle, cette expérience idéale représente plus ou moins bien la réalité.

On peut déterminer l'ensemble des issues possibles.

Cet ensemble E est lié à l'usage que l'on veut faire du modèle choisi. Par exemple, si on lance une pièce, on prend généralement E = {Pile, Face} en éliminant la possibilité pour la pièce de tomber sur la tranche, d'être désintégrée ou satellisée ! L'ensemble E = {Pile, Face} suffit pour modéliser la réalité.

Lancer une pièce n'est pas une épreuve aléatoire en soit. On a la certitude (dans des conditions normales) qu'elle va retomber. La considération de l'épreuve aléatoire nécessite que l'on sache à quoi l'on s'intéresse.

Au sens commun, l'arrivée du tiercé est aléatoire. Elle peut être modélisée par le tirage d'un arrangement de trois chevaux parmi ceux qui sont au départ. Dans la réalité, et dans le modèle, on peut attribuer (de façon subjective) à chacun une probabilité de gagner qui est donnée par sa cote. L'ensemble des résultats possibles est donc l'ensemble des arrangements possibles et l'on peut alors calculer la probabilité de chacun. On peut aussi, pour le même tiercé s'intéresser au temps du vainqueur, et alors E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On ne peut ni prévoir ni calculer le résultat de l'expérience.

On dira que c'est l'intervention du hasard (sans avoir besoin de le définir d'avantage) qui empêche de pouvoir déterminer, parmi les résultats possibles, celui qui se réalisera lors d'une exécution de l'expérience dans les conditions fixées. Avec les mêmes conditions initiales, on n'obtient pas toujours les mêmes résultats.

C - Où la notion de modèle devient incontournable

D'après David RUELLE[2], "*un modèle consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité. Pour certains de ces morceaux de réalité, il existe des idéalisations qui font intervenir les probabilités. On s'intéresse à ces idéalisations parce qu'elles sont utiles.*"

2 - David RUELLE, *Hasard et Chaos*, Editions Odile Jacob, Paris, 1991.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Il y a donc souvent confusion entre modèle et réalité, entre expérience aléatoire réelle et expérience aléatoire mathématique. La plupart du temps, les expériences aléatoires des cours de probabilité sont des expériences mathématiques, tandis que les expériences aléatoires évoquées dans les exercices d'application ou de baccalauréat sont des expériences aléatoires réelles.

"Les sciences n'essayent pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter ; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner." John VON NEUMANN[3].

Par exemple, lorsque l'on fait un test d'hypothèses, on accepte le modèle présupposé c'est-à-dire l'hypothèse suivant laquelle on est dans les conditions d'une certaine épreuve aléatoire, par exemple "l'échantillon est extrait d'une population de moyenne m" jusqu'à ce qu'une valeur de la moyenne d'échantillon trop improbable (dans l'hypothèse considérée) nous fasse rejeter le modèle.

Il est à remarquer que les probabilités sont largement déterminées par l'expérience aléatoire (mathématique) que l'on prend pour modèle. En fait, **elles font partie du modèle choisi.** Par exemple, dans le paradoxe de Bertrand[4], les différentes manières de choisir la corde "au hasard" donnent des résultats différents pour les probabilités[5].

De même, dans l'exemple du test ci-dessus, une valeur peut être jugée trop grande parce que sa probabilité d'apparition est trop petite dans le modèle lié à l'hypothèse testée.

En ce sens une simulation, informatique ou non, ne démontre rien, pas plus qu'une figure en géométrie, car les probabilités sont déterminées par le modèle employé pour la programmation. Une simulation consiste à remplacer une épreuve aléatoire réelle par une autre épreuve physique (généralement pseudo-aléatoire !) basée sur un modèle dont on pense qu'il représente bien la réalité de la première expérience. La simulation illustre et montre les conséquences de ce modèle, ce qui n'est déjà pas si mal !

---

3 - Cité par James GLEICK, *La théorie du chaos*, Editions Albin Michel, Paris, 1989.

4 - On trouvera une présentation de ce paradoxe célèbre dans l'article de Michel HENRY et Henri LOMBARDI : *Paradoxes et lois de probabilités* paru dans Repères-IREM n° 13 octobre 1993.

5 Voir par exemple, Gilbert Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistiques*, Editions Technip, Paris, 1990.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005