Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Les enjeux de la modélisation en probabilités

Bernard Dantal

Lors d'une émission télévisée sur les travaux de Paul-Emile VICTOR au Groenland, l'ethnologue Claude LEVI-STRAUSS déclarait :

"*La difficulté pour un ethnologue, c'est d'être à la fois dedans et dehors, il faut qu'il vive pleinement avec les gens dont il veut étudier le mode de vie, mais il faut aussi qu'il se comporte comme un observateur extérieur à eux, sinon il ne fait plus d'ethnologie*".

Il apparaît que l'enseignant de mathématiques dans le second degré se trouve confronté à une difficulté similaire à l'ethnologue, lors de l'enseignement des probabilités. En effet partant d'une observation, puis d'une description de la réalité, par étapes successives, l'enseignant doit aider ses élèves à s'extraire peu à peu de cette réalité pour construire progressivement un modèle mathématique.

Or ces étapes successives posent beaucoup de problèmes à cet enseignant, car il a un pied dans l'observation de la réalité et l'autre dans la construction du modèle.

Souvent il ne sait plus très bien où se situe son enseignement, ce qu'il traduit parfois par la déclaration : "*Les probabilités et les statistiques au lycée, ce n'est pas vraiment des mathématiques*".

Cela pose certaines questions didactiques, notamment :

"- Est-ce que le passage par l'observation de la réalité est nécessaire pour construire le modèle ?

- Ne pourrait-on pas se placer directement dans le modèle au moyen d'axiomes pour l'étudier, puis utiliser ce modèle par la suite dans des descriptions de réalités ?"

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Aujourd'hui on peut répondre, au moins en partie, à ces questions.

En effet, dans le programme de 1972, on avait voulu éviter au niveau du second degré la difficulté de la construction du modèle à partir de l'observation de la réalité. On peut dire que pour le plus grand nombre d'élèves ce choix didactique a conduit au naufrage, car pour eux les contenus d'enseignement n'avaient plus de sens.

Mais, tout aussi grave, le concept de probabilité lui-même perdait son sens et l'on voyait appliquer ce concept à des réalités auxquelles il ne pouvait convenir. Il en reste des traces aujourd'hui encore parfois dans les sujets de baccalauréat…

La démarche suggérée depuis 1991 par les programmes de probabilités du second degré, peut se traduire par le schéma suivant qui synthétise le développement théorique présenté dans les trois dernières parties de ce chapitre, visant la construction du sens pour le plus grand nombre d'élèves :

observation de la réalité	➤	description de la réalité	➤	construction d'un modèle	➤	mathéma-tisation du modèle	➤	interprétation des résultats dans la réalité

Effectivement en choisissant cette démarche, la difficulté importante est de construire des étapes intermédiaires entre l'observation de la réalité et la construction élaborée du modèle mathématique.

Au cours de ces étapes intermédiaires, est-ce que les concepts utilisés peuvent être définis rigoureusement d'un point de vue mathématique ?

C'est la question que nous nous sommes posée au sein de la commission inter IREM concernant le concept probabiliste « **d'expérience aléatoire** ».

Ce concept pose en effet de redoutables questions d'enseignement :

a - Si on le situe au niveau de la description de la réalité, c'est une expérience dont l'observateur ne peut pas prévoir le résultat avec certitude à l'avance.

Par exemple, pour un individu, aller passer un examen ou un concours est-elle une expérience aléatoire ?

On dit souvent dans le langage courant que le résultat d'une telle expérience est dû au hasard, à la « chance ». Mais l'utilisation du mot

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

aléatoire dans un cours de mathématique prend parfois un autre sens pour les élèves. En effet, jusqu'à présent, on n'établissait dans le cours de mathématiques que des résultats sûrs et prouvés, alors qu'une expérience aléatoire apparaît comme quelque chose de peu sûr, qui ne prouve rien, de non signifiant. Pour les élèves, tout est aléatoire dans une telle expérience : les conditions de sa production, son déroulement, ses résultats.

b - Si maintenant on situe ce concept comme première étape de la construction d'un modèle rendant compte objectivement d'une réalité observée (donc qui dépend de l'observateur), alors deux cas sont possibles.

Premier cas :

Pour qu'un observateur décide de décrire une expérience réelle sous le terme d'expérience aléatoire, il faut que d'après les conditions de l'expérience :

1 - Il pense qu'il ne peut pas en prévoir le résultat.

2 - Il pense pouvoir déterminer à l'avance l'ensemble des résultats possibles.

De fait comme dans toute modélisation, il élimine a priori un certain nombre de possibilités qu'il pense être pratiquement impossibles. Tout modèle, à n'importe quelle échelle, est forcément réducteur de la réalité.

3 - Il décide a priori, soit par l'observation des conditions, soit par une contingence totale (approche de Pascal et Fermat dans le problème des partis, position subjectiviste de Laplace), que tous les résultats possibles sont également probables.

Remarques sur ce premier cas :

1 - C'est une modélisation qui rend bien compte a posteriori de la réalité dans les cas facilement reproductibles des jeux de « hasard » où les issues sont symétriques, c'est à partir de cette remarque que Pascal a introduit les termes de *"géométrie du hasard"*.

2 - Malheureusement ce modèle est restrictif, car il faut pouvoir déterminer a priori l'ensemble des résultats possibles, il est d'autre part inadapté pour décrire la réalité lorsque les issues de l'expérience ne se ramènent pas à un système de cas équiprobables.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

3 - Cette approche conduit à la définition de Fermat et de Laplace de la probabilité avec la formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Deuxième cas :

Pour qu'un observateur décide de décrire une expérience réelle sous le terme d'expérience aléatoire, il faut que, d'après les conditions de l'expérience :

1 - Il pense qu'il ne peut pas en prévoir le résultat,

2 - Il pense qu'il peut reproduire l'expérience un grand nombre de fois dans des conditions « semblables ». (Il dit alors qu'il recommence la même expérience.)

Remarques sur le deuxième cas :

1 - La définition du mot « semblable » doit être précisée.

2 - Pour un observateur, des conditions sont semblables lorsqu'il décide que les variations des conditions qu'il ne prend pas en compte ne modifient pas le caractère de l'expérience.

3 - C'est l'œuvre historique de Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, qui a conduit à la loi des grands nombres. Cette loi est en quelque sorte la validation essentielle du modèle probabiliste, elle est grandement utilisée aujourd'hui pour modéliser tous les domaines de la réalité, fondant l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.