

4 - CONSTRUCTION D'UN MODÈLE DE POISSON¹

Michel HENRY

Voici un problème de vacances :

«Par une belle nuit d'été, on observe en moyenne douze étoiles filantes par heure. Quelle est la probabilité d'en voir trois dans le prochain quart d'heure ?»

Supposons qu'il fasse une belle nuit et que les conditions d'observation soient bien décrites, ainsi que le dispositif enregistreur d'étoiles filantes. Le protocole expérimental se limite à cet enregistrement.

Un esprit déterministe comme Laplace,

“Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.”²

dirait qu'il n'y a pas d'expérience aléatoire, puisque les mouvements des météorites en voie de pénétrer dans l'atmosphère sont déterminés depuis longtemps par les lois de la mécanique céleste. Cependant, nous décrivons ce phénomène en disant que l'arrivée d'un tel météorite est aléatoire et l'expérience consiste à enregistrer l'instant où il laisse une superbe traînée dans le ciel nocturne.

1 - Il s'agit du mathématicien Denis POISSON (1781-1840) !

2 - Pierre-Simon LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités*, (1824). Ed. Christian Bourgois, 1986, p. 33.

Cette situation est aussi celle de l'étude des rayons cosmiques. Mais dans un domaine plus économique, les pannes successives d'un appareillage complexe relèvent aussi de ce type de schéma appelé **processus de Poisson**. Le comportement des files d'attente est aussi de type poissonnien, moyennant une adaptation lorsque l'événement observé ne peut être supposé instantané.

Comment allons-nous modéliser ce phénomène, de telle sorte qu'on puisse donner un sens mathématique à la probabilité demandée ?

A - Modélisation

1 - *L'univers*

L'expérience aléatoire étant précédemment décrite, nous devons en préciser les issues. Nous enregistrons des instants, à partir de l'instant initial de l'observation. Ils peuvent être quelconques de 0 à $+\infty$. Bien qu'elles soient entachées d'une approximation décimale due à la précision de la mesure, nous considérerons, dans le modèle, les issues comme des nombres réels positifs.

L'univers Ω représentant cette expérience sera donc l'ensemble des suites de réels positifs.

2 - *Hypothèses de modèle*

Décrivons maintenant un modèle pseudo-concret qui semble interpréter et généraliser cette situation. A partir d'un instant initial $t_0 = 0$, on peut observer à tout instant la manifestation d'un événement E. On suppose que cet événement est instantané. L'ensemble de ces observations constitue une suite croissante d'instants successifs. On s'intéresse au nombre d'événements E produits dans une durée d'observation $[0 ; T]$.

Introduisons alors quelques premières hypothèses de modèle, pour interpréter trois idées «naturelles» :

a) pour notre observation, tous les intervalles de temps de même durée sont équivalents (on suppose donc que la fréquence d'arrivée des étoiles filantes ne dépend pas de l'instant du début de l'observation),

b) les étoiles filantes ne sont pas très fréquentes et

c) l'instant où l'on observe l'une d'entre elles ne dépend pas des arrivées précédentes : nous sommes en présence d'un phénomène **homogène dans le temps, rare et sans mémoire**.

3 - Hypothèses probabilistes

Traduisons mathématiquement ces hypothèses :

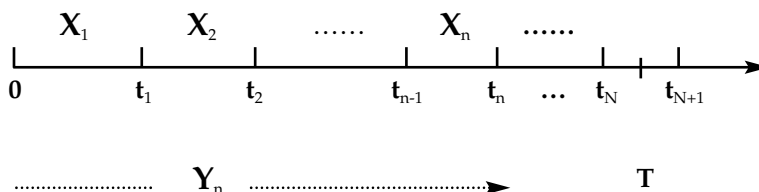
- On pose en hypothèse que la probabilité d'observer E dans l'intervalle $[t_1 ; t_2]$ ne dépend que de la durée $t_2 - t_1$ (phénomène homogène dans le temps).
- On va considérer que la probabilité qu'il se produise deux (ou plus) événements E à la fois (i.e. dans un petit intervalle de temps Δt) est négligeable devant la probabilité d'en observer un seul dans ce même intervalle de temps (E est un événement rare). De plus, cette dernière probabilité tend vers 0 avec Δt . Ainsi, la probabilité que E se produise à un instant déterminé a priori est considérée comme nulle.
- On va supposer que les événements «E se produit entre les instants t_1 et t_2 » et «E se produit entre les instants t_3 et t_4 » sont indépendants si les intervalles de temps $[t_1 ; t_2]$ et $[t_3 ; t_4]$ sont disjoints (phénomène sans mémoire).

4 - Schéma poissonnien

Pour numériser l'ensemble des observations effectuées, on introduit des variables aléatoires, applications de Ω dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, que nous représentons sur un axe.

Désignons par $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ les instants aléatoires où l'on observe les étoiles filantes. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ les durées aléatoires égales à $t_1, t_2 - t_1, t_n - t_{n-1}, \dots$; les X_i désignent les temps séparant deux observations successives de E. Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ les temps d'attente pour voir la première, la deuxième, ..., la $n^{\text{ième}}$ étoile filante depuis l'instant initial.

Enfin, on appelle N le nombre d'étoiles filantes observées entre les instants 0 et T.



5 - Hypothèses sur les variables aléatoires en jeu

Dans ce modèle, avec nos hypothèses, les variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont de même loi (i.e. si t est un réel positif quelconque, les probabilités $F_X(t) = P[X_i \leq t]$ sont égales, quel que soit i . F_X est appelée «fonction de répartition» de la loi des X_i). En effet, X_i représente la durée qui sépare l'instant initial t_i de l'observation de la prochaine étoile filante. Comme on a supposé que le phénomène est homogène dans le temps, les X_i sont de même loi.

De plus les X_i concernent des intervalles de temps disjoints au cours desquels les arrivées éventuelles de E sont supposées indépendantes. On suppose donc que les X_i sont des variables indépendantes. Cela signifie par exemple que :

$$P[X_i \leq t \text{ et } X_j \leq s] = P[X_i \leq t].P[X_j \leq s].$$

B - Détermination de la loi des variables X

1 - Choix de la probabilité inconnue

On pose $g(t) = 1 - F_X(t)$. La probabilité $g(t)$ est celle qu'aucune étoile filante n'arrive entre les instants 0 et t . C'est en effet la probabilité de l'événement contraire de « $X_1 \leq t$ », qui signifie : la première étoile observée est arrivée avant l'instant t .

2 - Relation fonctionnelle pour g

Appliquons les hypothèses précédentes : $g(s + t)$ est la probabilité de ne pas observer d'étoile filante entre 0 et $s + t$.

Cet événement est la conjonction des deux événements : «ne pas en observer entre 0 et t » et «ne pas en observer entre t et $s + t$ », de probabilités respectives $g(t)$ et $g(s)$.

Ces deux événements sont supposés indépendants, on a donc par définition probabiliste de l'indépendance : $g(s + t) = g(t) \times g(s)$. De plus, $g(0) = 1$, car $g(0)$ est la probabilité qu'il n'y ait pas d'étoile filante à l'instant 0. Par hypothèse b), c'est un événement certain.

3 - Équation différentielle

La nature du phénomène permet de supposer g dérivable (cette hypothèse n'est pas mathématiquement tout à fait nécessaire, mais elle simplifie grandement le calcul!).

On va montrer que g vérifie l'équation différentielle $g'(t) = -\lambda g(t)$ où λ est un réel positif dont on précisera la signification en fin de parcours (cf. C 4).

En dérivant par rapport à s la relation fonctionnelle ci-dessus, on obtient :

$$g'(s+t) = g'(s) \times g(t), \text{ et avec } s = 0, \text{ on a } g'(t) = g'(0) \times g(t).$$

On peut remarquer que g est une fonction positive décroissante puisque F_X est croissante (la probabilité de « $X \leq t$ » augmente avec t).

On peut donc poser: $g'(0) = -\lambda$, où $\lambda > 0$ (si $\lambda = 0$, g est constante égale à 1, c'est le cas où E ne se produit jamais, ce qui est exclu d'après l'observation statistique).

$$\text{Remarquons que } \lambda = F'_X(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_X(\Delta t)}{\Delta t}.$$

C'est la densité de probabilité d'avoir une étoile filante dans un intervalle de temps Δt . On l'appelle la «cadence» du phénomène E .

4 - Loi des X

L'intégration de l'équation différentielle est immédiate, avec $g(0) = 1$, on obtient :

$g(t) = e^{-\lambda t}$, et $P[X_1 \leq t] = F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La fonction de répartition F_X est celle de la loi dite « exponentielle », sa dérivée $f_X(t) = F'_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est la « densité » de la loi exponentielle de paramètre λ .

5 - Loi des Y

On admettra que la loi de Y_n est une loi gamma de densité :

$$f_{Y_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

pour $t \geq 0$. (C'est un calcul un peu compliqué, dont on ne se sert pas ensuite).

C - Détermination de la loi de N (loi de Poisson)

Dans la suite, on désignera par $N_{t_1}^{t_2}$ le nombre des événements E se produisant entre les instants t_1 et t_2 . Dans cette symbolique, $N = N_0^T$.

1 - Probabilité de n'observer aucune étoile filante avant l'instant T.

La probabilité de n'observer aucune étoile filante avant l'instant T (événement « $N_0^T = 0$ ») s'exprime en fonction de λ et de T : cette probabilité est celle de l'événement « $X_1 > T$ ». Elle vaut donc : $P[X_1 > T] = 1 - P[X_1 \leq T] = 1 - F_X(T) = g(T) = e^{-\lambda T}$.

De même, entre les instants t et t + Δt , on peut donner un développement de la probabilité de l'événement « $N_t^{t+\Delta t} = 0$ », au premier ordre au voisinage de $\Delta t = 0$:

$$P[N_t^{t+\Delta t} = 0] = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t)$$

2 - Probabilité d'observer une étoile filante entre t et t + Δt

On peut alors déterminer en fonction de λ et de Δt un équivalent de la probabilité d'observer une seule étoile filante entre les instants t et t + Δt , quand Δt tend vers 0.

Cette probabilité est celle de l'événement « $N_t^{t+\Delta t} = 1$ » égale à celle de « $N_0^{\Delta t} = 1$ ».

$$\text{On a : } P[N_0^{\Delta t} = 1] = P[N_0^{\Delta t} \geq 1] - P[N_0^{\Delta t} \geq 2].$$

Par hypothèse b), $P[N_0^{\Delta t} \geq 2]$ est négligeable devant $P[N_0^{\Delta t} = 1]$.

$$\text{Mais } P[N_0^{\Delta t} \geq 1] = 1 - P[N_0^{\Delta t} < 1] = 1 - P[N_0^{\Delta t} = 0] = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t$$

D'où $P[N_t^{t+\Delta t} = 1] \approx \lambda \Delta t$ quand Δt tend vers 0.

3 - Probabilité d'observer n événements E entre les instants 0 et t.

Il reste à montrer par récurrence sur n que la probabilité d'observer n événements E entre les instants 0 et t est donnée par :

$$P[N_0^t = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Pour cela, on détermine la fonction p_n définie par $p_n(t) = P[N_0^t = n]$ à l'aide d'une équation différentielle obtenue pour $n \geq 1$ à partir de la décomposition de l'événement « $N_0^{t+\Delta t} = n$ » de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{« } N_0^{t+\Delta t} = n \text{ »} &= \{ \text{« } N_0^t = n \text{ » et « } N_t^{t+\Delta t} = 0 \text{ »} \} \text{ ou } \{ \text{« } N_0^t = n - 1 \text{ » et « } N_t^{t+\Delta t} = 1 \text{ »} \} \text{ ou} \\ &\{ \text{« } N_0^t = n - 2 \text{ » et « } N_t^{t+\Delta t} = 2 \text{ »} \} \text{ ou ... ou } \{ \text{« } N_0^t = 0 \text{ » et « } N_t^{t+\Delta t} = n \text{ »} \}. \end{aligned}$$

Les accolades représentent des événements disjoints. Les événements situés dans une même accolade sont indépendants. De plus,

$$P[\{\ll N_0^t = n - 2 \gg \text{ et } \ll N_t^{t+\Delta t} = 2 \gg\} \text{ ou } \dots \{\ll N_0^t = 0 \gg \text{ et } \ll N_t^{t+\Delta t} = n \gg\}] \leq P[N_t^{t+\Delta t} \geq 2].$$

Cette probabilité est donc négligeable par rapport aux autres probabilités (c'est un infiniment petit d'ordre supérieur à Δt , notons-le $\Delta t \cdot \varepsilon(\Delta t)$). On a donc :

$$p_n(t + \Delta t) = P[N_0^{t+\Delta t} = n] =$$

$$P[N_0^t = n] \times P[N_t^{t+\Delta t} = 0] + P[N_0^t = n-1] \times P[N_t^{t+\Delta t} = 1] + \Delta t \varepsilon(\Delta t).$$

D'où : $p_n(t + \Delta t) = p_n(t) \times (1 - \lambda \Delta t) + p_{n-1}(t) \times \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t)$, et la limite :

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \text{ avec } p_n(0) = 0.$$

On obtient donc l'équation différentielle : $p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$, et, en remplaçant $p_{n-1}(t)$ par la valeur donnée dans l'hypothèse de récurrence, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \text{ qui s'intègre simplement.}$$

Il suffit d'ailleurs de vérifier que la fonction p_n donnée par récurrence est bien une solution particulière de cette équation, vérifiant la condition en 0.

L'hypothèse de récurrence étant vérifiée pour $n = 0$, on obtient ainsi pour tout $t \geq 0$:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \text{ La probabilité de Poisson d'observer exactement } n \text{ étoiles filantes entre les instants 0 et } T \text{ est donc : } p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$$

4 - Contrôle du résultat

Pour vérifier qu'on a bien une loi de probabilité, il faut vérifier que la somme des probabilités $p_n(T)$ pour tous les n entiers naturels vaut 1. On a en effet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} = e^{-\lambda T} e^{\lambda T} = 1$$

Le nombre moyen d'étoiles filantes observées sur $[0, T]$ est la moyenne de la variable de Poisson N_0^T . L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E[N_0^T] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} = \lambda T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda T} = \lambda T$$

λ est donc le nombre moyen d'apparitions d'étoiles filantes par unité de temps, c'est la «cadence» de ce phénomène.

5 - Réponse à la question posée

On peut maintenant calculer la probabilité d'observer 3 étoiles filantes en un quart d'heure.

Prenons pour unité de temps le quart d'heure. Les données statistiques indiquent une moyenne de 12 étoiles filantes à l'heure.

$\lambda T = 12$ et $T = 4$, d'où $\lambda = 3$.

On a donc $P[N_0^1 = 3] = \frac{(3)^3}{3!} e^{-3} \approx 0,224$.