Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Sur la durée de la vie et l'espérance de vie

Jean-François Pichard

Cet article présente la première utilisation de la théorie des chances en dehors des jeux de hasard. Elle a donné naissance à la démographie et à ce qui sera la statistique, avec une optique autre que descriptive. Un des problèmes qui était posé à cette époque, «le monde se dépeuple-t-il ?», est encore d'actualité : le taux français actuel de 1,7 enfants par foyer est-il suffisant pour assurer le renouvellement des générations ?

A - Environnement historique

Fixer de façon précise un début à la statistique est une entreprise hasardeuse. Dans les époques reculées, il y a eu des dénombrements partiels et ponctuels : recensements en Egypte, en Mésopotamie, en Chine (dès le 3ème millénaire avant J.C.). A l'origine, la « pré-statistique » désignait essentiellement des études concernant les domaines de la géographie humaine et économique : il s'agissait de faire l'état de la fortune d'un pays à travers le nombre de ses habitants, leurs richesses en terres, bâtiments, têtes de bétail, ..., ceci servant surtout à déterminer les capacités disponibles pour prélever des taxes ou lever une armée, d'où les réticences des habitants. Cette façon de voir continua jusqu'au XVIIIe siècle[1].

Le recueil et l'analyse des données concernant les sociétés humaines et les Etats ont d'abord été le fait d'administrateurs, d'économistes, de géographes : en Allemagne à la fin du XVIIe siècle, le mot « statisticae » est utilisé au sens d'affaires politiques ; « Statistik » est créé au XVIIIe siècle par

1 - Pour plus de précisions, voir l'article de J. HECHT, l'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution, dans [19].

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Achenwald, un géographe, pour désigner l'art de faire connaître la force et les faiblesses d'un pays, d'un Etat.

Comme le note fort bien André M. Guerry [9] :

"Le mot Statistique, introduit à la fin du 18e siècle, signifiait d'abord la Science qui a pour objet de faire connaître un Etat sous le rapport de son organisation politique et administrative, de son territoire, de sa population, de ses forces productives de toute nature, ... Cette définition, aujourd'hui, manquerait d'exactitude... D'un côté, cette définition comprendrait dans la statistique ce qui depuis longtemps n'en fait plus partie : l'exposition de l'organisation politique des Etats ; de l'autre, au contraire, elle n'y renfermerai aucune des applications actuelles de cette science à la médecine, la physiologie comparée, ..."

Une question dont on peut dire qu'elle a donné naissance à la statistique mathématique et à la démographie (même si elle porte sur la mortalité) est celle de la durée de vie humaine.

Le début de l'analyse des statistiques démographiques date de la même époque que celui de la théorie des probabilités (milieu du XVIIe siècle), quoique en partie de façon indépendante.

On peut aussi se demander pourquoi ce genre d'étude à incidence socio-économique n'est pas intervenu plus tôt. La levée d'emprunts remboursables en rentes viagères pour se procurer des fonds au niveau national ou local (dont le coût pour l'emprunteur, et le bien-fondé pour le prêteur, font intervenir la durée de la vie humaine) est attestée depuis l'antiquité romaine[2] et cette méthode était employée de façon assez courante par les villes flamandes depuis la fin du Moyen-Age. Les enregistrements des versements, qui étaient soigneusement tenus, pouvaient fournir une large information sur la population (au moins celle concernées par les rentes). Il y avait aussi une bonne raison économique pour étudier ces données : déterminer si les rentes étaient avantageuses pour la collectivité, par rapport à un emprunt à durée fixe, et pour les souscripteurs, profitables ou non à posséder ; mais aucune analyse sérieuse d'un tel matériau n'a été faite avant de Witt et Hudde en 1671. L'établissement de la valeur était fait de manière empirique et fondé plutôt sur un pari que sur l'analyse d'observations. Il en sera de même pour les "assurances" sur les risques maritimes ou autres, condamnées par l'Eglise catholique qui considérait que c'est parier sur le malheur des gens et sur les intentions de Dieu (par exemple : Ordonnance de la Marine de 1681 en France), mais acceptées dans un pays protestant comme

2 - Tables du juriste romain Ulpien, IIIe siècle.

l'Angleterre dès la fin du XVI[e] siècle. J'avancerai une explication possible d'une telle étude à cette époque-là : l'ambiance intellectuelle en Europe aux XVI[e] et XVII[e] siècles est stimulée par la redécouverte des savants de la Grèce antique que ce soit en mathématiques (e.g. Diophante par Bachet de Méziriac, puis Fermat), en physique (Aristote et Archimède avec Galilée), en astronomie, etc... ; les savants et philosophes veulent obtenir une explication du monde qui ne soit plus seulement qualitative, mais aussi quantitative, illustrée au XVII[e] par cette idée : «mesurer, c'est comprendre».

Les initiateurs de l'*Arithmétique politique*[3], John Graunt et W. Petty, publient leurs travaux un peu après l'émergence publique de la théorie des probabilités (1654-57). A partir des registres des décès enregistrés à Londres régulièrement depuis 1603, John Graunt publie en 1662[4] la première table de mortalité et tire des conclusions de ces observations basées sur les différentes causes de mortalité, l'évaluation de la population de Londres et de l'Angleterre, et son évolution, etc...

Un historien des sciences du début du XIX[e] siècle a écrit à ce propos :

"John Graunt, homme sans géométrie, mais qui ne manquait ni de sagacité ni de bon sens, avait, dans une sorte de traité d'arithmétique politique intitulé : 'Natural and political observations made upon the bills of mortality', *etc..., rassemblé ces différentes listes, et donné même un calcul, à la vérité fort grossier, mais du moins fort original, de la mortalité probable à chaque âge d'un certain nombre d'individus supposés nés viables tous au même instant. [...] Après Graunt, le chevalier W. Petty, dans différents essais d'économie politique, où il y avait, il est vrai, plus d'imagination que de jugement, s'était, de 1682 à 1687, occupé de semblables recherches."*

Cette table de mortalité (voir annexe 1) fut établie par Graunt à partir des maigres données qu'il avait à sa disposition : nombre de décès par sexe, avec la cause approximative de décès, mais pas l'âge. A défaut de cette donnée, il a supposé une loi simple de décroissance. En dépit du fait qu'elle ne soit pas une véritable observation de la mortalité aux différents âges, cette table a joué un rôle important pour la statistique : d'abord comme incitation

3 - D'après l'Encyclopédie Méthodique [6], "*c'est celle dont les opérations ont pour but des recherches utiles à l'art de gouverner les peuples, telles que celles du nombre des hommes qui habitent un pays; de la quantité de nourriture qu'ils doivent consommer; du travail qu'ils peuvent faire; du tems qu'ils ont à vivre ...*", c'est-à-dire, passer de descriptions qualitatives au quantitatif.

4 - John Graunt, *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality ...*, London, 1662.

à l'étude de la mortalité et son application aux rentes viagères, ensuite elle a montré la nécessité de données fiables. De là viennent des indications de plus en plus précises pour la tenue des registres de naissance (ou de baptême) et de décès, ainsi que le besoin de recensements.

Différents auteurs vont travailler sur ce sujet à la fin du 17e siècle : Christian et Ludwig Huygens, Van Hudden et Jean de Witt aux Pays-Bas, Wilhelm Leibniz, puis Edmund Halley en Angleterre, pour en tirer la valeur des rentes viagères.

Montucla en dit (**[17]**, p. 407) :

"Le problême des rentes viagères fut traité par Van Hudden, qui quoique géomètre, ne laissa pas que d'être bourgmestre d'Amsterdam, et par le célèbre pensionnaire d'Hollande, Jean de Witt, un des premiers promoteurs de la géométrie de Descartes. J'ignore le titre de l'écrit de Hudden, mais celui de Jean de Witt étoit intitulé : 'la Valeur des rentes viagères en raison des ventes libres ou remboursables' *(La Haye, 1671). Ils étoient l'un et l'autre plus à portée que personne d'en sentir l'importance et de se procurer les dépouillements nécessaires de registres de mortalité [...] Le chevalier Petty, Anglois, qui s'occupa beaucoup de calculs politiques, entrevit le problême, mais il n'était pas assez géomètre pour le traiter fructueusement, en sorte que, jusqu'à Halley, l'Angleterre et la France qui empruntèrent tant et ont tant emprunté depuis, le firent comme des aveugles ou comme de jeunes débauchés".*

Christiaan Huygens, le premier à avoir publié un traité sur la théorie des chances, va travailler sur ce sujet, en 1669 à l'incitation de son frère Ludwig, qui invente à l'occasion ce qu'on appela ensuite «l'espérance de vie». Il a aussi correspondu à ce propos avec Hudden et de Witt, qui s'occupaient de la valeur des rentes viagères. Quoique cette correspondance n'ait eu aucune influence sur les travaux ultérieurs (elle sera publiée bien plus tard en 1920), elle est intéressante par les questions qu'elle pose.

Il est frappant de constater que les deux frères utilisent les outils, mis au point pour des jeux de hasard où les «chances» sont calculées sur des cas également possibles, pour une situation où on ne connaît que les effectifs observés de mortalité par tranche d'âge (ou présentés comme tels par Graunt) sur un échantillon. Prendre les fréquences correspondantes comme des chances de survie jusqu'à l'âge désigné, consiste à considérer soit que l'échantillon est représentatif de la population comme étant une réduction (un homothétique) de celle-ci, soit que cette fréquence est la valeur la plus vraisemblable à attribuer à cette chance inconnue. C'est alors une probabilité au sens subjectif, et on retrouve la problématique de Jacques Bernoulli. Cette

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

confusion entre fréquence et probabilité[5] ne sera éclaircie qu'à la fin du 18e siècle par Laplace et Condorcet avec l'utilisation de probabilités a posteriori suivant la méthode de la probabilité des causes par les événements (dit aussi théorème de Bayes).

Considérons quelques-uns des points abordés dans cette correspondance. Ludwig demande à son frère :

"la question est jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitôt qu'il est conçu. Puis un enfant de 6 ans, puis un de 16 ans, etc...".

Il utilise l'espérance de vie, somme des produits du nombre de personnes dans une tranche d'âge par l'âge milieu de cette tranche, et divise par le nombre total de personnes (ici 100), ce qui donne 18 ans et 2 mois pour un enfant nouvellement conçu, d'après la table de Graunt ; puis détermine l'espérance de vie conditionnelle :

"pour... spécifier combien il reste de vie à chaque personne d'un tel ou tel âge, ... J'ôte premièrement les 108 ans (qui est l'âge des 36 enfants qui meurent au-dessous des 6 ans) de tout ce nombre de 1822 ans; reste 1714 ans, lesquels doivent être partagés entre les 64 personnes qui restent, ce qui fait pour chacun, c'est-à-dire pour chaque enfant de 6 ans, 26 ans et environ 10 mois de sorte qu'il leur reste encore à vivre au susdit âge de 6 ans, 20 ans et 10 mois..."

Christiaan oppose la vie probable (médiane) à l'espérance :

"quoique l'espérance d'un enfant conçu vaille ces 18 ans 2 $\frac{1}{2}$ mois, ce n'est pas beaucoup à dire qu'il soit apparent qu'il mourra devant ce terme. De sorte que si on voulait gager qu'il y parviendrait, la partie serait désavantageuse car on peut seulement gager avec égal avantage qu'il vivra jusqu'à 11 ans environ."

Christiaan Huygens, pour s'éviter des calculs, fait un graphique – le tracé d'une ligne courbe – qui donne le nombre de survivants en fonction de l'âge ; c'est un diagramme des effectifs cumulés décroissants, que l'on retrouvera ci-après avec Fourier. Il fait ensuite le tracé d'une courbe qui donne la durée moyenne de vie en fonction de l'âge, c'est-à-dire l'espérance de vie conditionnellement à l'âge[6]. Il cherche aussi la durée probable de vie conjointe de deux personnes en considérant implicitement qu'il y a indépendance des deux durées.

5 - Par exemple, par Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746, ainsi que Buffon, Tables de mortalité, 1749, in *Oeuvres complètes*, 1855, tome 2, pp.87 et sq., et *Des probabilités de la durée de la vie*, tome 12, pp.209 et sq.

6 - Christiaan Huygens, *Oeuvres complètes*, La Haye, Martinus Nijhoff, tome 6, 1920. Pour plus de détails, voir l'article de D. LANIER, L'espérance du hollandais, dans [21].

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Bien que non publiée, l'utilisation de graphiques pour représenter un phénomène, des données d'observation, sera faite épisodiquement et ne deviendra un peu courante en statistique qu'au début du XIX^e siècle[7].

De même que pour Huygens, les travaux de Leibniz seront publiés bien après (environ deux siècles). Connu comme mathématicien ou philosophe, Leibniz était aussi très versé en droit et jurisprudence, il s'occupa d'administrer des entreprises à plusieurs occasions. Il s'est intéressé à la théorie des probabilités dès 1676 et au sujet en discussion ici[8]. Il a écrit plusieurs textes sur les rentes viagères et la durée de la vie humaine et en particulier un *Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*, vers 1680, où il fait l'hypothèse que la mortalité est uniforme à tous les âges[9]. Avec cette hypothèse simplificatrice, il y a bien entendu égalité entre vie moyenne et vie probable (médiane). Il remarque de plus que ses calculs sont valables seulement si la population est stationnaire, i.e. s'il y a autant de naissances que de décès.

Le mémoire de Edmund Halley *An estimate of the Degrees of the Mortality... ; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon the Lives*, *Philosophical Transactions*, 1693[10], a posé les fondements d'une théorie correcte de la valeur des rentes viagères. Il établit ses conclusions sur la mortalité dans la ville de Breslau (Allemagne), car elle compte une population où les mouvements (immigration et émigration) sont négligeables c'est-à-dire une population fermée, à l'inverse de ce qui se passe à Londres. En effet, étudier la mortalité d'un même groupe de personnes est une condition fondamentale pour établir valablement une table de mortalité, afin de pouvoir répondre à une question du genre «combien de temps peut espérer vivre un enfant

7 - Voir par exemple [8] et mon article, Jean-François PICHARD : *Le début des représentations graphiques en statistique*, Actes de la 46ème rencontre de la CIEAEM, Toulouse, 1994, t.2, pp. 136-145.

8 - Voir en particulier *L'estime des apparences* [14], abondamment commenté et annoté par M. Parmentier.

9 - Cette hypothèse est complètement arbitraire et ne correspond même pas à la table de Graunt qu'il a étudié, qu'il explique ainsi :"... *mais ce surplus des baptêmes et des morts pourra être négligé, puisque s'il en naissait plus que je ne suppose, ils sont aussi moissonnés plutôt que je ne suppose, dans leur plus tendre enfance, et, par conséquent, il n'est pas nécessaire de les compter*".

10 - Une traduction a été faite en français par Jacques DUPAQUIER, *La table de mortalité d'E. Halley*, Annales de démographie historique, 1976, pp. 485-503.

nouveau-né ?». En ce cas, si la population est stationnaire (c'est-à-dire s'il y a autant de naissances que de décès), l'âge moyen des décédés et l'espérance de vie ont des mesures égales.

Pendant le XVIII^e^ siècle, d'autres auteurs vont travailler sur ce sujet avec en vue la recherche d'une loi de mortalité donnant le nombre de survivants en fonction de l'âge qui s'ajuste bien aux observations. Une première étude est faite par Abraham de Moivre à partir de la table de Halley, puis complétée par d'autres tables **[15]** ; ce sujet sera aussi abordé par Buffon (**[3]** et Tables de mortalité dans *Oeuvres*, tome 2), Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, entre autres.

De Moivre publie un livre *A Traitise of Annuities on Lives*, en 1724, qui sera inséré, revu et augmenté, dans les seconde et troisième éditions de son grand traité *The Doctrine of Chances* (1738, 1756). Moivre fait référence aux travaux de Graunt et de Halley et republie (p. 345) la table calculée par Halley. De Moivre prend comme hypothèse que les probabilités[11] de vie décroissent en progression arithmétique, et, selon ses termes

"en comparant cette hypothèse avec la Table du Dr. Halley, à partir des Observations faites à Breslau, on les trouvera très bien approchantes." (Voir annexe 2.)

En France, Antoine Deparcieux[12] construit une table de mortalité en corrigeant les données enregistrés (hormis les jeunes, les âges des décédés étaient souvent donnés en chiffres ronds) et en essayant d'obtenir des valeurs représentatives de la population française. Il en établit la théorie et fait explicitement la distinction entre durée de vie probable et durée de vie moyenne. Buffon s'est aussi intéressé à cette question : table de mortalité dans son *Histoire Naturelle* en 1749 (*Oeuvres*, tome 2) et dans l'*Essai d'arithmétique morale* (*Oeuvres*, tome 12).

Des lois de mortalité et des lois de croissance de la population sont étudiées pendant le XVIII^e^ siècle ; cette recherche utilise le calcul des probabilités et en même temps le fait progresser, par exemple par Leonhard Euler[13]. Lors de la controverse sur les avantages ou inconvénients de l'inoculation contre la petite vérole, entre Daniel Bernoulli et D'Alembert, ce

11 - Prises ici dans un sens subjectiviste.

12 - Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746.

13 - Leonhard Euler, *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, Mémoires de l'Académie Royale de Berlin pour 1760, 1767.

dernier fait usage de représentations graphiques – des *courbes de mortalité*[14] – pour appuyer son argumentation ; cependant les données sont hypothétiques et non basées sur une table de mortalité.

Lacroix, dans son *Traité élémentaire de calcul des probabilités* **[12]**, donne un exposé sur les tables de mortalité et les résumés numériques que sont la durée de vie probable et la durée de vie moyenne, qu'il attribue à Nicolas Bernoulli. Dans une édition suivante, il montre (p. 333 et sq.) comment obtenir ces résumés à partir d'une courbe de mortalité.

Etudions un peu plus en détail ce qui concerne ces courbes de mortalité d'après ce qu'en dit Joseph Fourier, le premier à avoir publier une courbe de mortalité basée sur des données effectives dans **[7]**[15], ouvrage qui est moins accessible que **[12]**. Dans la partie I : *Notions générales sur la population*, il fait un exposé de la théorie des tables de mortalité et des indicateurs qu'on peut leur associer. Il termine cet exposé par :

> *"82. Nous indiquerons maintenant une partie de la question qui dépend de la théorie mathématique, mais que nous ne devions pas omettre entièrement, parce qu'elle est très propre à rendre sensibles les conséquences que nous avons exposées. La loi constante de la population peut être exprimée par une construction géométrique (Voyez fig. 1ère .)"*

Il place l'âge en abscisse et porte en ordonnée le nombre de survivants à cet âge.

> *"La première ordonnée ov_a exprime donc un certain nombre d'hommes nés ensemble, et les ordonnées suivantes expriment combien il en existe encore après un tems donné. Chaque perpendiculaire montre le nombre des survivans et cette perpendiculaire décroît insensiblement, à mesure que le tems s'écoule, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, lorsque l'abscisse représente la plus longue durée de vie."*
>
> *"84. 1°. La population totale, ou le nombre des vivans de tout âge est exprimé (fig. 1) par l'aire totale de la courbe $v_a\ v\ v'\ v''$ etc... ; c'est-à-dire par la surface comprise entre la courbe et les droites ov_a et ov_∞. Une partie quelconque de la population, par exemple, le nombre des vivans dont l'âge est compris entre oh et oh' est exprimée par l'aire partielle hvv'h' que la*

14 - D'Alembert introduit l'expression « courbe de mortalité » et des graphiques dans ses *Opuscules Mathématiques*, tome iv, 1761.

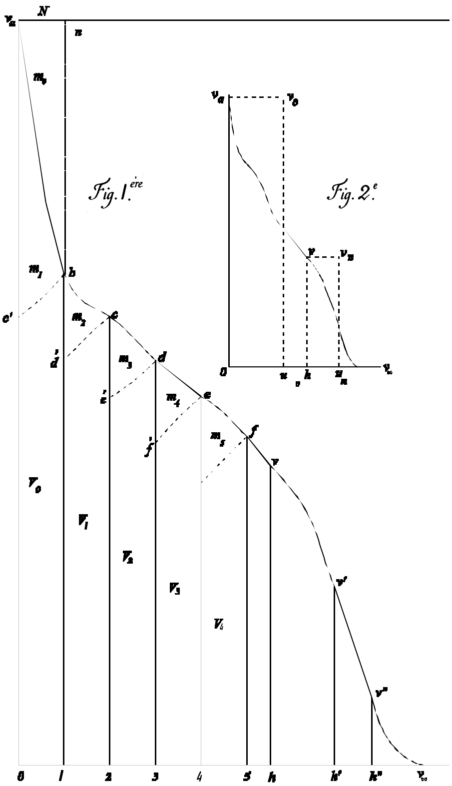
15 Cet ouvrage n'est pas signé, mais il est attribué à Fourier qui était alors le directeur du service statistique du département de la Seine.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

courbe termine au-dessus de l'intervalle hh', et qui est comprise entre les ordonnées vh et v'h'. Ce n'est donc point l'ordonnée qui est la mesure proprement dite du nombre des habitans d'un âge marqué; c'est l'aire partielle qui a pour base l'intervalle fini ou infiniment petit des limites de cet âge."

"85. 2°. Le nombre total des naissances annuelles N est exprimé (fig. 1) par l'aire rectangulaire ov_a n1 qui a pour hauteur la première ordonnée ov_a et pour base l'intervalle 01, ou l'unité de temps.

Les nombres V_0 V_1 V_2 V_3 V_4 etc... inscrits dans la table (B)[16], article (8), sont représentés par les aires partielles qui reposent sur les intervalles successifs 01 12 23 égaux à l'unité, et qui sont terminés par les arcs de la courbe."



A partir de cette courbe de mortalité, Fourier donne des constructions géométriques qui permettent d'obtenir les valeurs des résumés numériques : moyenne ou espérance de vie et médiane ou durée probable.

"86. 3°. Pour connaître par ces constructions la durée moyenne de la vie entière, il faut (fig. 2) former un rectangle $v_a o u_0 v_0$ dont la première ordonnée soit v_a, et en augmenter la base ou jusqu'à ce que l'aire du rectangle soit précisément égale à l'aire totale comprise entre la courbe $v_a v v_\infty$. et les droites ov_a ov_∞.. Cette longueur ou est la mesure exacte de la durée moyenne de la vie.

16 - Voir l'annexe 3 ; les V_i représentent le nombre de vivants à la fin de la i^e année.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Si l'on veut connaître la durée moyenne de la vie, à partir d'un âge donné oh, il faut former un rectangle vhu_0v_0 *dont la hauteur soit l'ordonnée vh, et augmenter la base* hu_0, *jusqu'à ce que l'aire* vhu_0v_0 *du rectangle soit égale à l'aire restante comprise entre la courbe* vv_∞ *et les droites hv* hv_∞"

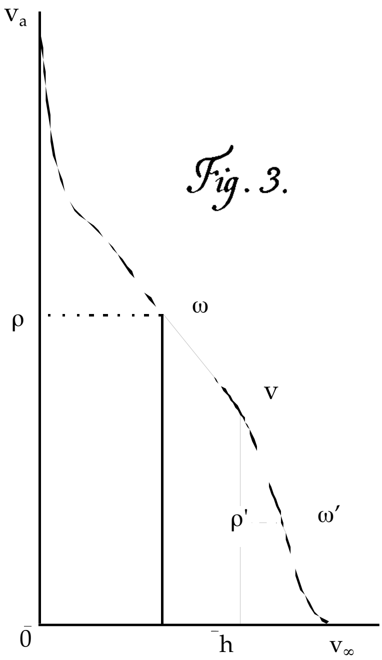


Fig. 3.

"*87. 4°. Pour connaître la* durée probable *de la vie ou cette durée* intermédiaire, *telle qu'il y a autant d'hommes qui parviennent au de-là qu'il y en a qui meurent avant de l'atteindre, il faut marquer (fig. 3) le milieu p de la première ordonnée, et par ce point p mener une parallèle aux abscisses jusqu'à la rencontre de la courbe au point ω, la longueur pω mesure la durée probable de la vie entière.*

Si l'on veut connaître cette durée probable à partir d'un âge donné oh, il faut marquer le milieu p' de l'ordonnée vh, et par le point p' mener une parallèle à l'axe hv_∞ *jusqu'à la rencontre de la courbe au point ω'. La longueur p'ω' est la mesure de la durée probable de la vie à partir d'un âge donné.*"

Fourier fait la distinction entre l'espérance de vie et l'âge moyen.

"*89. 6°. Pour connaître l'*âge moyen, *c'est-à-dire l'âge que l'on trouverait si l'on ajoutait ensemble les âges actuels de ceux qui composent la population, et si l'on divisait la somme de ces âges par le nombre des vivans; il faut concevoir (fig. 5) une axe Aa servant d'appui au-dessous de l'aire totale* v_aov_∞, *et tel que cette aire demeure en équilibre, le poids de l'aire partielle située à la gauche de l'axe faisant équilibre au poids de l'aire restante située à la droite. La distance comprise entre l'axe Aa et la première ordonnée* ov_a, *mesure l'âge moyen ou cet âge qu'aurait chacun des vivans, si tous mettaient en commun leur âge actuel.*"

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

On peut se rappeler que Fourier était aussi physicien, ce qui l'a peut-être amené à cette analogie entre une distribution statistique et une distribution de masses en mécanique pour obtenir la valeur moyenne comme centre de gravité. Il s'intéresse ensuite à la loi de mortalité. Il rappelle la loi implicite de la table de Graunt et l'approximation faite par de Moivre.

> *"92. ... Il existe toujours une certaine ligne courbe qui représente, dans des circonstances données, le décroissement graduel d'un grand nombre d'hommes nés ensemble ; mais il n'y a aucune loi analytique régulière qui réponde à la figure de cette ligne. On ne peut douter d'ailleurs qu'elle ne subisse des changemens considérables en vertu d'une multitude de causes naturelles ou physiques, dont l'action serait long-tems prolongée. Cette figure serait celle d'une courbe logarithmique si la stabilité de la vie était la même à tous les âges : mais cette supposition est inadmissible. On se rapproche un peu plus des faits observés en comparant la partie moyenne de la ligne au cours d'une droite inclinée vers l'axe. Il faut se rappeler que les parties de cette courbe très-voisines des deux extrémités et surtout de la première, sont peu connues et sujettes à de grandes variations."*

Pour la première remarque faite dans ce paragraphe, J.H. Lambert[17] avait proposé

$$y = 10\,000 \left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6\,176\,\left(e^{-\frac{x}{13,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}}\right)$$

comme équation de la loi de mortalité sur les registres de Londres, et on peut vérifier que cette fonction n'est pas simple. Karl Pearson a montré à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle que la loi de mortalité est une somme de plusieurs lois normales[18]; il ne peut donc y avoir de loi simple et non probabiliste pour la mortalité.

Fourier termine en mettant en garde contre l'utilisation des tables de mortalité pour un individu particulier.

> *"95. On n'a point expliqué dans cet écrit tous les usages des tables de mortalité : mais on en a démontré tous les principes. Ces tables qui étaient entièrement inconnues des anciens, et dont l'origine ne remonte qu'au milieu du XVII^{e} siècle, intéressent plusieurs sciences, et servent de*

17 - Johann L. Lambert, *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik* ..., 1765.

18 - Karl Pearson, *The Chances of Death*, Londres, 1897.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

fondement à des établissemens utiles. En les supposant déduites avec beaucoup de soin des registres publics, elles représentent la loi moyenne qui convient à la masse de la nation : mais il est évident que l'application qu'on en ferait à une personne désignée ne peut être qu'incertaine. Les résultats généraux sont vrais en eux-mêmes; et ils ont le plus haut degré de certitude si l'on considère un très-grand nombre d'hommes : mais ils sont seulement probables, si on les rapporte à une seule personne."

B - Questions

1. A partir de l'extrait de Graunt (annexe 1), déterminer les nombres moyens proportionnels correspondants aux nombres de survivants pour chaque tranche d'âge.

2. A partir de la table de Graunt, retrouver les calculs des frères Huygens sur la durée moyenne de vie (l'espérance de vie à la naissance) et la vie probable (âge médian). Ces deux valeurs sont-elles égales ? Construire la courbe de mortalité.

3. En prenant l'hypothèse simplificatrice de Leibniz de mortalité uniforme, calculer la durée moyenne de vie et la vie probable. Ces deux valeurs sont-elles égales ? Pourquoi ? Construire la courbe de mortalité.

4. Construire la courbe de mortalité à partir de la table de Halley ou de Kesserboom (données en annexe 2). Utiliser la construction proposée par Fourier pour déterminer la durée moyenne de vie.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Bibliographie

[1] Jean le Rond D'ALEMBERT : *Opuscules Mathématiques*, vol.2, 1761, vol.4, 1768.

[2] Jacques BERNOULLI : *Ars conjectandi*, 1713, Traduction de Norbert MEUSNIER, réédité par l'IREM de Rouen, 1987.

[3] Georges Louis LECLERC de BUFFON : *Essai d'arithmétique morale*, 1777, *Oeuvres complètes*, tome 12, pp. 154-208, Editions Garnier frères, Paris, 1855.

- - - et aussi in *Un autre Buffon* par J.L. BINET et J. Roger, Editions Hermann, Paris, 1977.

[4] Marie Jean Antoine CARITAT de CONDORCET : *Arithmétique politique, Textes rares ou inédits* 1767-1798, édité par B. Bru et P. Crépel, INED-PUF, Paris, 1994.

- - - *Mathématique et société*, commentaire de R. Rashed, Hermann, Paris, 1974.

[5] Jacques et Michel DUPAQUIER : *Histoire de la démographie*, Perrin, Paris, 1985.

[6] *Encyclopédie Méthodique*, Mathématiques, 1785, réédition. ACL, 1987.

[7] Joseph FOURIER : *Recherches statistiques sur la ville de Paris et le département de la Seine*, Paris, 1821.

[8] H.G. FUNKHOUSER : Historical development of the graphical representation of statistical data, *Osiris*, p. 269-404, 1937.

[9] André GUERRY : *Statistique morale de l'Angleterre comparée avec celle de la France*, Baillière, Paris, 1864.

[10] Christian HUYGENS : *Ratiociniis in aleae ludo*, 1657, traduction française "Du calcul dans les jeux de hasard" in tome 14, *Oeuvres complètes*, 22 vol. 1888-1950, La Haye.

[11] M.G. KENDALL and R.L. PLACKET, eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 2, C. Griffin & Co, Londres, 1977.

[12] Sylvestre François LACROIX : *Traité élémentaire de calcul des probabilités*, Paris, 1816 ; reproduit par IREM de Paris 7, 1994.

[13] Pierre Simon LAPLACE : *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814, 5e édition, 1825, préface de René Thom, postface de B. Bru, Editions Bourgois, 1986.

[14] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ : *L'estime des apparences*, traduction et notes de M. Parmentier, Vrin, 1995.

[15] Abraham DE MOIVRE : *A Traitise of Annuities on Lives*, 1724, in *The Doctrine of Chance*, 2e édition, 1738, 3e édition, 1756.

[16] Pierre Rémond DE MONTMORT : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708, 2e éd., 1713.

[17] Jean-François MONTUCLA : *Histoire des mathématiques*, 4 tomes (tome 3, p. 380-426 sur les probabilités), 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

[18] E.S. PEARSON and M.G. KENDALL, eds : *Studies in the history of statistics and probability*, vol. 1, C. Griffin & Co, Londres, 1970.

[19] *Pour une histoire de la statistique*, Economica/INSEE, 1987.

[20] R. RASHED éd. : *Sciences à l'époque de la révolution française, Recherches historiques*, Librairie Blanchard, Paris, 1988.

[21] *Scholies* n°16, Actes du séminaire interdisciplinaire d'histoire des sciences du lycée Malherbe de Caen, IREM de Caen, juin 1995.

[22] I. TODHUNTER : *A history of the mathematical theory of probability*, from the time of Pascal to that of Laplace, 1865, réédition Chelsea, New York, 1965.

Annexe 1

Extrait de John Graunt : *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, 1662.

Sur 100 individus conçus et animés, 36 environ meurent avant l'âge de 6 ans, et un seul peut-être est survivant à 76 ans. Comme il y a 7 décennies entre 6 et 76, nous avons recherché six nombres moyens proportionnels entre 64, nombre de survivants à 6 ans, et 1, celui qui survit à 76 ans; et nous trouvons que les nombres suivants sont pratiquement assez proches de la vérité, car les Hommes ne meurent pas selon des proportions exactes ni en fractions :

Sur 100 individus, il meurt pendant :

les six premières années	36
les dix années suivantes ou 1ère décennie	24
la 2ème décennie	15
la 3ème décennie	9
la 4ème décennie	6
la suivante	4
la suivante	3
la suivante	2
la suivante	1

Il s'ensuit que, sur ces 100 individus conçus, il en survit :

au bout de 6 ans	64
au bout de 16 ans	40
— 26 ans	25
— 36 ans	16
— 46 ans	10
— 56 ans	6
— 66 ans	3
— 76 ans	1
— 86 ans	0

L'âge des décédés n'étant pas indiqués dans les registres, mais seulement les causes approximatives de décès, il semble que Graunt ait noté la proportion de ceux qui meurent de maladies infantiles et qu'il ait ajouté la moitié de ceux mourant de maladies touchant beaucoup les enfants comme la rougole. La proportion ainsi obtenue est attribuée à la tranche d'âge de 0 à 6 ans (la mortalité ainsi attribuée aux enfants est considérable). Ensuite il considère que peu de personnes vivent au-delà de 76 ans et il suppose que la mortalité est uniforme.

Selon Hacking, les nombres obtenus résultent de la résolution de l'équation $64(1 - p)^7 = 1$, où p est la « chance » de mourir dans une décennie donnée, puis en arrondissant à l'entier le plus proche.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe 2

Appendice de *A Treatise of Annuities on Lives*, par Abraham de Moivre, 2[e] édition, 1756

N°. VII

Les probabilités de la vie humaine, selon différents auteurs.

Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants
1	1000	16	622	31	523	46	387	61	232	76	78
2	855	17	616	32	515	47	377	62	222	77	68
3	798	18	610	33	507	48	367	63	212	78	58
4	760	19	604	34	499	49	357	64	202	79	49
5	732	20	598	35	*490	50	346	65	192	80	41
6	710	21	592	36	481	51	335	66	182	81	34
7	692	22	586	37	472	52	324	67	172	82	28
8	680	23	580	38	463	53	313	68	162	83	23
9	670	24	574	39	454	54	302	69	152	84	19
10	663	25	*567	40	445	55	*292	70	142	*	*
11	653	26	560	41	436	56	282	71	*131		
12	646	27	553	42	427	57	272	72	120		
13	*640	28	546	43	*417	58	262	73	109		
14	632	29	539	44	407	59	252	74	98		
15	628	30	*531	45	397	60	242	75	*88		

Table I, par Dr. *Halley*.

Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants	Age	Vivants
0	1400	16	849	31	699	46	550	61	369	76	160	91	7
1	1125	17	842	32	687	47	540	62	356	77	145	92	5
2	1075	18	835	33	675	48	530	63	343	78	130	93	3
3	1030	19	826	34	665	49	518	64	329	79	115	94	2
4	993	20	817	35	655	50	507	65	315	80	100	95	1
5	964	21	808	36	645	51	495	66	301	81	87	96	0.6
6	947	22	800	37	635	52	482	67	287	82	75	97	0.5
7	930	23	792	38	625	53	470	68	273	83	64	98	0.4
8	913	24	783	39	615	54	458	69	259	84	55	99	0.2
9	904	25	772	40	605	55	446	70	245	85	45	100	0.0
10	895	26	760	41	596	56	434	71	231	86	36	*	
11	886	27	747	42	587	57	421	72	217	87	28		
12	878	28	735	43	578	58	408	73	203	88	21		
13	870	29	723	44	569	59	395	74	189	89	15		
14	863	30	711	45	560	60	382	75	175	90	10		
15	856												

Table II, par Dr. *Kersseboom*.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Annexe 3

Table de mortalité de *Deparcieux*, utilisée par Fourier, [7], p. 15

ans			ans			ans			ans		
0	V_0	1 359	24	V_{24}	782	48	V_{48}	599	72	V_{72}	271
1	V_1	1 092	25	V_{25}	774	49	V_{49}	590	73	V_{73}	251
2	V_2	1 043	26	V_{26}	766	50	V_{50}	581	74	V_{74}	231
3	V_3	1 000	27	V_{27}	758	51	V_{51}	571	75	V_{75}	211
4	V_4	970	28	V_{28}	750	52	V_{52}	560	76	V_{76}	192
5	V_5	948	29	V_{29}	742	53	V_{53}	549	77	V_{77}	173
6	V_6	930	30	V_{30}	734	54	V_{54}	538	78	V_{78}	154
7	V_7	915	31	V_{31}	726	55	V_{55}	526	79	V_{79}	136
8	V_8	902	32	V_{32}	718	56	V_{56}	514	80	V_{80}	118
9	V_9	890	33	V_{33}	710	57	V_{57}	502	81	V_{81}	101
10	V_{10}	880	34	V_{34}	702	58	V_{58}	489	82	V_{82}	85
11	V_{11}	872	35	V_{35}	694	59	V_{59}	476	83	V_{83}	71
12	V_{12}	866	36	V_{36}	686	60	V_{60}	463	84	V_{84}	59
13	V_{13}	860	37	V_{37}	678	61	V_{61}	450	85	V_{85}	48
14	V_{14}	854	38	V_{38}	671	62	V_{62}	437	86	V_{86}	38
15	V_{15}	848	39	V_{39}	664	63	V_{63}	423	87	V_{87}	29
16	V_{16}	842	40	V_{40}	657	64	V_{64}	409	88	V_{88}	22
17	V_{17}	835	41	V_{41}	650	65	V_{65}	395	89	V_{89}	16
18	V_{18}	828	42	V_{42}	643	66	V_{66}	380	90	V_{90}	11
19	V_{19}	821	43	V_{43}	636	67	V_{67}	364	91	V_{91}	7
20	V_{20}	814	44	V_{44}	629	68	V_{68}	347	92	V_{92}	4
21	V_{21}	806	45	V_{45}	622	69	V_{69}	329	93	V_{93}	2
22	V_{22}	798	46	V_{46}	615	70	V_{70}	310	94	V_{94}	1
23	V_{23}	790	47	V_{47}	607	71	V_{71}	291	95	V_{95}	0

Les V_i désignent le nombre de vivants à la fin de l'année i.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X