Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

5 - Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste

Michel Henry

A - Expérience aléatoire dans l'enseignement

Revenons aux objectifs du programme de première de 1991 dont voici un extrait :

> *"L'objectif est d'entraîner les élèves à* ***décrire quelques expériences aléatoires simples*** *et à calculer des probabilités. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera (...) sur la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois".*

Cet objectif pose la question du lien entre la **notion** d'expérience aléatoire et la modélisation en probabilités, notamment avec l'interprétation de la fréquence stabilisée d'un événement comme valeur estimée de sa probabilité.

La notion d'expérience aléatoire a divers statuts : elle relève d'un habillage pseudo-concret dans les manuels, alors qu'elle concerne une véritable observation du réel dans le programme.

Il n'est pas inutile de regarder plus précisément cette question.

L'objectif affiché est donc de faire le lien entre l'observation, la description d'expériences aléatoires « réelles » et le modèle probabiliste à construire. Dans ce modèle, la probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires (représentant les issues de l'expérience aléatoire) qui le constituent. Ces dernières font partie des hypothèses de modèle : estimées à partir de l'observation des fréquences

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

stabilisées ou issues d'un calcul a priori à partir d'une hypothèse d'équiprobabilité.

Dans les programmes antérieurs à celui de 1991, l'univers-modèle Ω était posé (ou explicité par les élèves) a priori. Ce modèle était par principe accompagné de l'hypothèse d'équiprobabilité permettant d'introduire la probabilité d'un événement par la définition de Laplace :

$P(E) = \dfrac{\text{nombres de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$, déterminée numériquement par un calcul de combinatoire.

La notion d'expérience aléatoire, décrite en termes pseudo-concrets pour fournir la liste des issues possibles à envisager, n'intervenait que pour donner du sens à cet univers Ω.

Aujourd'hui, d'un point de vue didactique, la notion d'expérience aléatoire change de niveau pour désigner un phénomène réel. Les explications données jusque là s'avèrent insuffisantes ou plutôt source de confusions. Voyons cela de plus près.

B - Retour sur la notion d'expérience aléatoire

En probabilités, comme dans toute théorie mathématique, il y a des notions primitives, c'est-à-dire des notions auxquelles la pratique courante dans la réalité nous permet de donner du sens, sans qu'une définition mathématique puisse être formulée. Ces notions sont censées faire le lien entre le modèle et la réalité. Ce lien est un acte de foi au départ. Par exemple, le point, la droite, le plan en géométrie, les entiers en arithmétique ou l'infini en analyse sont des notions primitives avant qu'elles puissent prendre le statut de concepts au sein d'une théorie et participer aux énoncés d'axiomes.

En probabilité, la notion primitive de base est celle d'« expérience aléatoire », du moins pour le programme de 1991, c'était un choix de transposition didactique.

Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Habituellement on dit aux élèves :

- c'est une expérience reproductible,
- le hasard intervient dans son déroulement pour en rendre l'issue incertaine,
- on peut faire la liste des issues possibles.

Cette caractérisation n'est pas satisfaisante : elle confond réalité et modèle. Elle ne fonde pas assez clairement le modèle mathématique standard. Elle se heurte à certaines conceptions, elle soulève certaines questions. Par exemple :

- Qu'appelle-t-on « reproductible » ? (un grand nombre de fois dans les mêmes conditions). L'expérience réelle ne peut être qu'unique. La recommencer, c'est en réalité faire une autre expérience. D'ailleurs, objectait un élève déterministe, "*la preuve qu'en recommençant on fait une autre expérience, c'est que l'on obtient alors une autre issue que précédemment*". Il faut donc clarifier cela.

- Qu'est-ce que j'appelle le hasard ? et l'incertitude ?

- Faire la liste des issues ? c'est déjà simplifier la réalité, faire abstraction de certains résultats jugés non pertinents. Par exemple, si je joue à « pile ou face », je n'enregistre pas la position de la pièce par rapport aux 4 points cardinaux !

Dans cette présentation, il y a ambiguïté sur le terme « expérience aléatoire » qui désigne encore une notion floue. Précisons-la.

La notion d'"expérience aléatoire" est dégagée pour désigner un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées.

On ne sépare donc pas la description d'une expérience aléatoire de la donnée de ces issues possibles que l'on va considérer. Ainsi, dans la nature, il n'y a pas d'expériences aléatoires, il y a des situations complexes ou des systèmes évolutifs (par exemple jet d'une pièce de monnaie, mais aussi la situation météorologique, etc...) qui dépendent de manière sensible des conditions initiales, de telle sorte qu'on ne peut déterminer leurs évolutions, quels que soient les instruments d'observation et la puissance des outils de calcul.

Une expérience aléatoire, c'est la mise en place par un expérimentateur d'un tel système évolutif, quand l'expérimentateur s'intéresse aux issues (observables) qui vont se présenter à la fin du processus. De la complexité naturelle, l'expérimentateur ne retiendra donc pour la description de son expérience aléatoire, que ce qui lui semble pertinent pour indiquer comment la réaliser et quelles issues possibles il veut considérer. Cette description du processus expérimental doit lui paraître suffisante pour pouvoir affirmer qu'il a bien réalisé l'expérience aléatoire qui fait l'objet de son étude.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

A la notion d'expérience aléatoire (mise en œuvre expérimentale par une intention humaine d'un processus aléatoire et donnée des issues possibles que l'on désire étudier), nous associons donc la notion de « **protocole expérimental** », c'est-à-dire le texte des instructions à respecter pour pouvoir affirmer que l'on a bien réalisé l'expérience aléatoire, objet de l'étude.

Ainsi, nous donnons le sens suivant à la locution « répétition de la **même** expérience aléatoire » : nous conviendrons que nous avons répété une même expérience aléatoire, si nous sommes d'accord que les processus expérimentaux que nous avons fait fonctionner dans les deux cas respectent bien le protocole donné.

C'est donc ce protocole expérimental accompagné de la liste des issues possibles à observer, qui caractérise « l'expérience aléatoire ». Cette notion devient une notion générique pour désigner tous les processus expérimentaux de même nature qui respectent un tel protocole.

L'enseignement de cette notion devrait donc proposer aux élèves des tâches de rédaction de protocoles expérimentaux pour décrire, par un texte, des processus aléatoires que l'on peut éventuellement faire fonctionner devant eux, en soulignant les conditions expérimentales minimales, la place du hasard dans le processus et la liste des issues possibles.

Puis, à partir de cette activité, peut se développer la modélisation qui suppose la mise en œuvre des compétences que nous avons pointées lors de la présentation des différents niveaux d'abstraction et de mathématisation. Elles se résument par l'aptitude à bien séparer réalité et modèle.

C - Vocabulaire et symboles associés aux deux premières étapes de la modélisation

A ce point de notre réflexion didactique, ayant montré l'importance de séparer la réalité des modèles censés la décrire, il convient de préciser le vocabulaire, de telle sorte qu'à chaque niveau de description soient associés des termes spécifiques permettant aux élèves de repérer le point de vue auquel on se place : réalité sensible, habillage pseudo-concret, modèle probabiliste.

Il convient aussi que ce vocabulaire rejoigne celui qui est généralement employé, en le précisant.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Une **expérience aléatoire** est donc la mise en œuvre dans des conditions expérimentales déterminées par un protocole, d'un processus évolutif pour un système matériel dont le comportement est sensible par rapport aux conditions initiales, de telle sorte que l'on ne peut prévoir son état en fin de parcours. Dans la réalité, on parlera d'une **expérience « concrète »**.

Idéalisée, caractérisée par le **protocole**, on parlera d'**expérience « abstraite »** ou de l'expérience modèle. Ainsi, on pourra abstraitement répéter cette **même expérience** « un grand nombre de fois », ce qui concrètement revient à reproduire le processus expérimental dans des conditions protocolaires analogues.

Ce processus peut comporter plusieurs étapes élémentaires qu'on appellera « **épreuves** », concrètes ou abstraites suivant le niveau où l'on se place. Ainsi une expérience peut combiner une succession d'épreuves ou un ensemble d'épreuves menées en parallèle.

Le « **résultat** » d'une expérience est l'état réel du système à la fin du processus étudié. La complexité du système en évolution et les moyens d'observation et de calcul ne permettent pas de donner par avance ce résultat. On dit qu'il dépend du **hasard**.

Dans le protocole expérimental, on peut décider de ne retenir du résultat obtenu que quelques caractéristiques particulières, résumant ce résultat. Tous les résultats observables de l'expérience peuvent être ainsi classés dans l'une ou l'autre des catégories définies par ces caractéristiques, ces catégories s'excluant mutuellement. On les appelle « **issues** » ou « **éventualités** » de l'expérience aléatoire. Ainsi la **réalisation** d'une issue est le "fruit du hasard" et du choix d'issues effectué. Ces issues sont dites « **aléatoires** ».

L'ensemble des catégories permettant de classer tous les résultats observables est appelé : « **ensemble des issues possibles** » ou « **univers** ». Au niveau du lycée, cet ensemble est fini.

Souvent, au résultat d'une expérience, on associe un repère qualitatif ou une ou plusieurs valeurs numériques, déterminées par des mesures expérimentales. Reprenant le terme usité en statistiques descriptives, cette relation est appelée « **caractère** ». Dans ce cas, les caractéristiques que l'on souhaite conserver pour identifier le résultat, peuvent être déterminées (par image réciproque) par les valeurs possibles du caractère, discrètes ou regroupées en classes.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Un « **événement** » est un ensemble particulier d'issues possibles. Si le résultat de l'expérience aléatoire détermine une issue i, on dit que « **i est réalisée** », et si i est une des issues d'un événement *E*, on dit que « ***E* est réalisé** ». Appréciations portées sur le résultat de l'expérience réelle, ces notions s'inscrivent donc dans le cadre de l'expérience abstraite ou idéalisée.

A ce niveau de la réalité et de sa description simplifiée, il ne s'agit pas de définitions au sens mathématique, mais de la description du substrat concret qui donnera du sens aux termes introduits dans le modèle probabiliste, soit en tant que termes primitifs (expérience aléatoire, issue, ...), soit définis à partir des précédents.

Au niveau du modèle pseudo-concret, on reprendra le même vocabulaire, puisque ce modèle est décrit dans les termes naïfs de la réalité. Mais ces termes, en désignant des objets abstraits, revêtent alors un sens plus précis. Passant de notion à concept, ils désignent des signifiants d'objets concrets ainsi signifiés.

Par exemple, certaines situations concrètes peuvent être représentées génériquement par des **modèles d'urne**. C'est le cas des expériences aléatoires composées d'épreuves dont on peut catégoriser les résultats en un ensemble d'issues *"également possibles"*, selon les termes de Laplace, autorisant l'**hypothèse de modèle** d'équiprobabilité des boules dans l'urne (il y a d'autres objets pseudo-concrets usuels : pièces de monnaie, dés, cartes à jouer, ..., porteurs implicites de leurs hypothèses de modèle, en général l'équiprobabilité).

Le protocole expérimental détermine les conditions d'extraction des boules de l'urne. D'ailleurs, l'analyse exhaustive des différents cas d'urnes (nombre de couleurs) et des différentes conditions d'extraction (remise ou pas, nombre d'épreuves, résumés des issues observées représentant les résultats de l'expérience) conduit à une liste standard des **lois de base** finies usuelles.

La modélisation d'une expérience, par un schéma d'urne par exemple, suppose donc une connaissance préalable, au moins partielle de cette liste, pour mieux identifier la situation concrète avec le modèle d'urne adéquat. C'est ce que j'appelle le « **regard théorique** ».

L'extraction (fictive) d'une boule (épreuve modèle) représente une issue d'une des épreuves concrètes. La couleur de la boule obtenue réalise cette issue. Les issues possibles que l'on a choisi de retenir, en termes d'urne, constituent l'**univers modèle** associé à l'expérience aléatoire. Cet univers se présente donc comme un ensemble « naïf », déterminé par la liste de toutes les issues qui caractérisent exhaustivement tous les résultats possibles de l'expérience. Du point de vue du sens, cet univers représente donc la « **certitude** ».

Sa partie E, représentative de l'événement *E* associé à l'expérience aléatoire, est encore appelée « **événement** », malgré la confusion de statut que ce même vocable peut entraîner.

Dans le modèle pseudo-concret, on peut faire fonctionner sur les événements les opérations (complémentaire, union, intersection, différence ensembliste) de l'algèbre des parties d'un ensemble. Ces opérations reflètent la logique propositionnelle (non, ou, et) combinant entre eux les événements concrets, dès lors qu'ils sont associés aux parties définies en compréhension de l'univers modèle par le sens que l'on a donné aux issues de cet univers.

Dans ce modèle pseudo-concret, un caractère numérique associé aux résultats de l'expérience aléatoire est représenté par une application numérique définie sur l'univers modèle. Cette application, opérant sur les issues, est appelée « **variable aléatoire** », ce qui est source d'une confusion avec la fonction associée définie dans le modèle mathématique. (On l'a aussi désigné par « **aléa numérique** »).

L'expérience aléatoire peut donc être répétée, dans le sens que nous avons donné à cette action. On peut s'intéresser à un événement particulier *E* que chaque résultat d'expérience réelle peut (ou non) réaliser. La proportion des expériences réalisant *E* parmi toutes celles qui ont été effectuées est la « **fréquence** » observée de l'événement *E*.

Il est un fait d'observation que la fréquence d'un événement tend à se « **stabiliser** » quand le nombre n d'expériences effectuées est de plus en plus grand (interprétation : dans la quasi-totalité des observations, elle restera comprise dans un intervalle dont la longueur se réduit quand n augmente). Ce fait peut être compris comme une loi de la nature (ou du hasard). La notion de fréquence intervient donc au niveau de l'expérience idéalisée et de sa description.

Dans le modèle pseudo-concret, on introduit le concept de « **probabilité** » de l'événement *E*. C'est un nombre réel, associé à la partie E de l'univers représentant l'événement *E*. Ce nombre interprète l'idée de « **chance** » que l'on a d'observer l'événement *E* quand on effectue réellement l'expérience. On peut interpréter cette probabilité comme un degré de la certitude ainsi que le suggérait Bernoulli.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Cette nature subjective du sens que l'on donne à ce concept de probabilité est tempérée par le fait objectif de la stabilisation de la fréquence de *E* et par l'idée (pas toujours facilement acceptée par la culture ou la psychologie individuelle) que cette « chance » correspond à cette fréquence.

Du point de vue conceptuel, il faut imaginer que la suite des fréquences de *E* que l'on pourrait observer si l'on répétait *E* à l'infini, se stabiliserait de plus en plus précisément vers une valeur limite théorique, sorte de mesure idéale de l'incertitude de *E*, alors que les fréquences observées en sont des mesures concrètes approximatives. La probabilité de E serait alors l'expression **dans le modèle** de cette valeur idéale. On doit donc la distinguer de la fréquence théorique limite, comme on distingue le modèle de la réalité.

D - Propriétés de base et hypothèses de modèle

Dans ces conditions, les probabilités des événements associés à l'expérience aléatoire jouissent des mêmes **propriétés d'additivité** que les fréquences de ces événements :

- une probabilité est comprise entre 0 et 1,
- la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des issues le constituant,
- et la somme de toutes les probabilités des issues constituant l'univers (**probabilités élémentaires**) est égale à 1, probabilité de la certitude.

On obtient ainsi la présentation d'une loi de probabilités au sens du programme 2001 de première.

Il reste à préciser les conditions dans lesquelles les probabilités élémentaires sont déterminées. Elles relèvent d'**hypothèses de modèle**. Dans la pratique, on trouve trois catégories d'hypothèses :

a - Le contexte de l'expérience aléatoire, les symétries des objets matériels utilisés, permettent de ramener tous les résultats à un ensemble n d'issues qui sont considérées comme également possibles. On fait alors l'**hypothèse d'équiprobabilité**. On dit aussi que l'on admet la **distribution uniforme** des probabilités sur l'univers de ces n issues.

Cela revient à donner aux probabilités de chaque issue la même valeur $\frac{1}{n}$.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

b - La complexité de l'expérience aléatoire ne permet pas de se ramener à un système d'issues équiprobables (ou c'est trop compliqué : fiabilité de systèmes complexes, phénomènes économiques, météo, ...). On peut alors déterminer la probabilité de chaque issue ou événement en effectuant « un grand nombre de fois »[1] l'expérience aléatoire, et en retenant pour valeur numérique de cette probabilité la **valeur des fréquences observées** de cette issue ou événement. Ces fréquences sont alors conçues comme mesures approximatives de cette probabilité, comme une mesure physique, avec le degré de précision souhaité suivant le nombre d'expérience que l'on consent d'effectuer.

c - On reconnaît dans le processus expérimental une situation relevant d'un modèle standard. Dans ce modèle, les probabilités des issues sont réparties selon une **loi** connue qui dépend d'un ou plusieurs **paramètres** (par exemple, les probabilités binomiales dépendent de la valeur de la probabilité p de Bernoulli). On **estime** alors ces paramètres à partir d'un **échantillon** de résultats obtenus en répétant l'expérience (estimation inférentielle), ce qui détermine entièrement la loi que l'on accepte alors comme **hypothèse de modèle**. Les probabilités élémentaires sont alors calculées à partir des données ou des propriétés mathématiques connues du modèle.

E - Le modèle probabiliste

Pour développer les propriétés du modèle représentatif d'une expérience aléatoire, et les valider par des démonstrations, pour pouvoir utiliser les outils de calcul, il convient d'interpréter ce modèle dans le cadre mathématique formel adapté : c'est la mathématisation du modèle (et du problème !). Depuis Kolmogorov, adoptant la représentation ensembliste, les probabilistes se placent dans le cadre de la **théorie de la mesure**. Dans ce cadre, les notions d'expérience aléatoire, d'issue ou d'événement sont des **notions premières** et n'interviennent que pour fixer les idées, donner du sens aux objets formels de cette théorie.

Ainsi l'univers sera représenté par un ensemble abstrait généralement noté Ω, appelé « **ensemble référentiel** », ses éléments ω représentent les issues de l'expérience aléatoire idéalisée, on les appelle les « **éventualités** ».

1 - Dans la pratique, on calcule qu'environ un millier d'expériences permettent de déterminer cette probabilité avec deux chiffres significatifs.

[Quand cet ensemble est infini non dénombrable[2], l'existence d'une distribution de probabilité sur Ω passe par la sélection d'une famille de parties de Ω structurée en « **tribu** » *T* (famille contenant toutes les parties obtenues par les opérations ensemblistes à partir de ses sous-familles dénombrables), conformément à la théorie de Borel et Lebesgue.]

Dans le cas fini [ou dénombrable] auquel on se limite au lycée, cette difficulté est inutile et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω représente les événements associés à l'expérience aléatoire. Ces parties (sélectionnées ou non) sont encore appelées « **événements** ». Un événement-singleton {ω} est appelé « **événement élémentaire** ».

Les probabilités des événements sont alors considérées comme valeurs images d'une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ [ou sur *T*] à valeur dans [0, 1], appelée « **mesure de probabilité** » ou simplement « **probabilité** ». La notation fonctionnelle est utilisée : à l'événement E, on associe sa probabilité p = P(E). Dans le cas fini ou discret, la probabilité P est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires $p_i = P(\{\omega_i\})$. (Cette écriture est parfois abusivement simplifiée en $P(\omega_i)$, assimilant un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ à l'éventualité.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ [ou (Ω, T, P)], [structuré en espace de mesure] est appelé « **espace probabilisé** ».

Mais, pour avoir accès aux outils de calcul et pour expliciter analytiquement la probabilité P, on transfère cette structure abstraite d'espace probabilisé dans un espace numérique, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, au moyen d'une « **variable aléatoire** » X. Cette variable est censée représenter un caractère auquel on s'intéresse. C'est une application définie sur Ω, à valeur dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, [muni de la tribu B engendrée par les intervalles, dite tribu « **borélienne** ». (Quand Ω est un ensemble infini non dénombrable, on doit supposer que les images réciproques par X des boréliens sont dans la tribu *T*. On dit alors que X est « **mesurable** ».)].

La probabilité P sur Ω est alors donnée par l'intermédiaire de la probabilité image P_X de P par X : si B est un intervalle de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{R}$ ou un pavé de $\mathbb{R}^n$ [ou si $B \in \mathcal{B}$] et si $A = X^{-1}(B)$, on a : $P(A) = P_X(B)$. Les probabilistes notent aussi $P(A) = P(X \in B)$ ou $P(A) = P(X = x_i)$ quand B est l'événement $\{x_i\}$. P_X est appelée la « **loi de X** ». [C'est une mesure sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, définie sur les boréliens].

2 - Les parties entre [ ] dans ce paragraphe sont destinées à remuer quelques souvenirs universitaires ! Elles sont sans doute inutiles (trop abstraites ou trop connues) et peuvent être négligées en première lecture.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

[Dans le cas de modèles infinis, on se donne d'abord cette loi, au moyen de sa **fonction de répartition** : $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x])$, ou de sa **densité** : $f_X(x) = F_X'(x)$, ou de sa **fonction caractéristique** (transformée de Fourier de f_X). La probabilité P reste abstraite.]

Dans le cas où Ω est fini, l'utilisation de variables aléatoires est commode pour repérer des lois connues et appliquer des résultats théoriques, notamment des calculs d'espérances, de variances, ou faire fonctionner des théorèmes. Sans cette connaissance de base en probabilités, on ne voit pas ce que peut apporter la notion de variable aléatoire et de loi pour résoudre de vrais problèmes. C'est pourtant la situation créée par le programme de terminale qui, limitant la notion de loi à la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, exclut toute référence à des lois standard.

Le modèle choisi pour étudier une expérience aléatoire est donc représenté par des objets mathématiques dont la symbolique peut être résumée par le schéma générique suivant, appelé le « **modèle probabiliste** » :

$$(\Omega, \mathcal{T}, P) \xrightarrow{X} (\mathrm{IR}, \mathcal{B}, P_X).$$

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X