Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

4 - Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement

Michel Henry

A - Mathématiques et activités « concrètes »

Dans la période actuelle, que l'on a pu désigner par « post-moderne », la tendance à mettre en valeur le caractère instrumental des mathématiques s'est renforcée. Dans certaines études internationales[1], les mathématiques trouvent leur légitimité comme discipline de service, par le transfert de leurs concepts et méthodes pour résoudre des problèmes externes, posés par le développement des connaissances dans d'autres secteurs de l'activité humaine.

Sur le plan didactique, ce transfert suppose, au cours de l'apprentissage, d'avoir relié ces concepts, qui dans le cadre mathématique reçoivent des définitions précises, aux notions et idées générales qui se dégagent du travail d'exploration de la réalité et de sa modélisation.

Cette nécessité épistémologique converge avec l'objectif didactique de donner du sens aux objets introduits, en les reliant aux expériences et aux notions pré construites des sujets apprenants.

On peut trouver ici une explication partielle au phénomène actuel du développement, peut-être démesuré en France, de l'approche de chaque question d'enseignement par des "activités", dont le lien avec la réalité, censée donner ce sens aux notions nouvelles, n'est pas toujours évident. Sans que cette pratique des activités débouche nécessairement sur la maîtrise de nouvelles connaissances, elle a néanmoins pour intérêt de placer les élèves

1 - Notamment celle de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, présidée alors par Jean Pierre KAHANE. Cf. son article dans le bulletin n° 353 de l'APMEP, Avril 1986.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

dans un contexte d'expérimentation : essais-erreurs, conjectures, manipulations internes, essais numériques, contrôles graphiques, constructions géométriques auxiliaires, etc...

Ces comportements, transférés dans des situations de résolution de problèmes externes empruntés aux autres disciplines, posent la question des liens entre l'observation et la description du réel, c'est-à-dire des situations mises en scène pour présenter un tel problème, et le contrôle théorique que les connaissances mathématiques permettent. La démarche expérimentale et son corollaire, la validation de modèles abstraits, entrent progressivement dans le champ des compétences attendues dans l'apprentissage de certaines parties des mathématiques.

B - Notion de modèle

Le terme de « modèle » est utilisé dans des sens assez variés, voire contraires[2].

Dans une première acception, c'est ce que l'on reproduit par imitation (définition Larousse). Par exemple, le modèle du peintre (ou le « top-modèle » du photographe de mode) est l'objet (ou le sujet) réel que l'artiste se propose de représenter. Ce modèle porte en lui des qualités communes à d'autres objets (ou sujets) mais les met particulièrement bien en évidence, du point de vue de cet artiste qui se doit de choisir un « bon modèle » pour l'inspirer dans la réalisation de son œuvre.

Dans le même registre, on parlera d'un élève « modèle » en disant de lui qu'il donne un bon exemple aux autres élèves, à suivre si possible, car il a un comportement typique par rapport aux meilleures attentes que l'on peut avoir.

D'un point de vue analogue, mais dans une démarche inverse, on appelle modèle d'une théorie formelle, un exemple concret dont les propriétés décontextualisées réalisent celles de la théorie. Ainsi, l'ensemble des fonctions numériques définies sur un intervalle est un modèle pour la structure d'algèbre (espace vectoriel + anneau) de dimension infinie non dénombrable. La théorie formalise les propriétés de structure de cet ensemble.

2 - Anne-Marie DROUIN, *Le modèle en question*, Aster n° 7, 1988.

Nous adopterons un point de vue contraire, en nous inspirant de la définition donnée par Alain PAVE[3]:

> "*Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel, c'est-à-dire une expression ou une formule écrite suivant les règles du système symbolique d'où est issue cette représentation.*"

Cette notion de modèle a émergé au cours des années 60, lorsque est apparue la nécessité de mieux préciser la distinction entre le sujet du monde réel que l'on étudie et son idéalisation. On ne retient pour cette étude que certains des aspects caractéristiques de la réalité, qui semblent être pertinents et que l'on simplifie en une abstraction de cette réalité. Dans une conception platonicienne, l'objet idéal et abstrait ("qu'on ne voit que par la pensée") ainsi obtenu, bien défini, est un modèle de cette réalité complexe, changeante, insaisissable dans sa diversité. Mais, rejoignant BEGUIN[4], nous distinguerons une simple description ou une représentation de la réalité d'un modèle qui, dans sa structure, contient une part de connaissances théoriques permettant d'évaluer, interpréter et généraliser cette réalité.

Cette remarque nous conduit à la définition suivante, qui distingue le modèle en tant que structure abstraite de la symbolique utilisée pour le décrire :

> **un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issus d'une description de la réalité.**

Ce modèle peut être représenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolismes, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.

Par exemple, on peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés

3 - Alain PAVÉ, *Modélisation en Biologie et en Écologie*, Editions Aléas, 1994.

4 - C. BEGUIN, J-L. GURTNER, O. de MARCELLUS, M. DENZLER, A. TRYPHON et B. VITALE, *Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences*, article en deux parties paru dans "Petit x" n° 38 et 41, 1995-96.

caractéristiques bien définies. Nous parlerons alors de **modèles « pseudo-concrets ».** C'est le cas notamment des modèles d'urnes en probabilités, où l'hypothèse implicite est l'équiprobabilité des boules dans un tirage « au hasard ».

Parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématique permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. Nous les appellerons « **modèles mathématiques** ». Souvent, ils nous sont tellement familiers que nous n'en voyons pas d'autres, et nous avons tendance à confondre ces représentations avec les objets idéaux en jeu, lesquels sont souvent confondus avec la réalité qu'ils modélisent.

C - Un modèle de base en probabilités : l'urne de Bernoulli

Prenons un exemple simple en probabilités.

Description d'un processus réel : *une entreprise produit des pièces d'un certain calibre. Leurs dimensions varient aléatoirement d'une pièce à l'autre, mais il y a des marges qui permettent de dire si une pièce est acceptable ou défectueuse. Une étude statistique montre que dans des conditions normales, les pièces acceptables sont en proportion p. Pour contrôler la qualité de la production, on fait périodiquement un échantillonnage et l'on enregistre le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.*

Pour modéliser cette situation, on considère une urne (fictive) contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires.

C'est une **urne de Bernoulli**, l'outil de base du probabiliste. La production d'une pièce est représentée par un **tirage au hasard d'une boule, avec probabilité p d'être blanche**.

L'échantillon prélevé est représenté par une suite de **n tirages avec remises** dans l'urne (pour interpréter le fait que la qualité d'une pièce ne dépend pas des pièces précédemment produites).

Le nombre de boules blanches obtenues est ce qu'on appelle une **variable aléatoire binomiale**, dont la loi bien connue (par les spécialistes) s'exprime en fonction de p. On peut ainsi comparer cette valeur théorique à la valeur estimée à partir de l'observation de l'échantillon, avec d'autant plus de confiance que n est grand.

Pour conduire ces calculs, on mathématise ce modèle en considérant que les boules de l'urne sont représentées par un ensemble abstrait Ω, appelé **univers**, dont les éléments ω (**éventualités**) sont équiprobables.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Cette hypothèse de modèle définit une **distribution** (dite uniforme) **de la probabilité P sur Ω** : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega}$. Le tirage aléatoire d'une boule revient à choisir l'un des ω. Son apparition réalise l'**événement élémentaire** {ω}.

La partie B de Ω composée par les ω qui représentent les boules blanches, en proportion p dans l'urne, est appelée un **événement** et on a : $P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = p$.

On introduit ensuite une **variable aléatoire** X, dite variable de Bernoulli, application définie sur Ω à valeurs dans l'ensemble {0 ; 1}. On décide par exemple que l'image par X d'un élément ω représentatif d'une boule blanche est égale à 1.

La partie B est alors l'ensemble des antécédents de {1}. On écrit $P(B) = P[X = 1]$ ou encore $P(B) = P_X(\{1\})$.

Symboliquement, on écrit :

$$(\Omega \,;\, P) \xrightarrow{X} (\{0 \,;\, 1\};\, P_X)\text{ , avec } P_X(\{1\}) = p.$$

C'est un **modèle probabiliste de Bernoulli.**

Le tirage avec remises de n boules est représenté par l'ensemble Ω^n et le nombre aléatoire de boules blanches obtenues détermine une variable binomiale sur Ω^n. Nous ne développons pas ici ce nouveau modèle.

D - Description du réel, modélisation et compétences attendues

Dans un processus de **modélisation**, nous distinguons donc deux étapes, pour l'analyse didactique. Chacune de ces étapes relève de compétences différentes et donc de contrats didactiques différents.

Pour préciser cela, caricaturons un peu la pratique courante : le professeur présente une situation dans des termes naïfs du langage courant. Cette présentation se réduit souvent à « l'habillage » d'un problème mathématique qu'il désire proposer aux élèves. Ainsi la description d'une réalité complexe disparaît pour laisser la place à la proposition d'un modèle déjà là, exprimé en termes pseudo-concrets. Le professeur attend ensuite des élèves qu'ils traduisent ce modèle en termes mathématiques, il les aide au besoin pour interpréter la question posée en un problème interne que

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

contractuellement les élèves doivent résoudre. Ils doivent enfin produire, si possible, un petit commentaire replaçant leurs résultats dans les termes pseudo-concrets du modèle. Il revient au professeur de donner les prolongements possibles et de porter sur la situation réelle les appréciations qui peuvent se dégager.

Si l'on veut introduire en mathématiques une véritable démarche expérimentale, il convient de ne pas négliger **la première étape** de la modélisation au **niveau de la situation concrète** : l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants.

Cette description est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité, dans la mesure où certains choix sont faits, pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. Cette description est d'ailleurs pilotée par ce que j'appellerai un regard théorique, c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits, pour apprécier justement ce qui se révélera pertinent.

La démarche expérimentale consiste aussi à pouvoir agir sur la réalité, afin d'en étudier les évolutions et les invariants. Il faut donc pouvoir mettre en œuvre une expérimentation programmée par ce que je désignerai par « **protocole expérimental** », c'est-à-dire l'ensemble des instructions à suivre pour réaliser cette expérience et éventuellement la reproduire.

De nouvelles compétences sont alors attendues, qui peuvent être objet de formation : savoir décrire une situation porteuse d'un problème (par exemple, l'évolution des files d'attente devant les caisses d'un supermarché), savoir mettre en œuvre un protocole expérimental, et recueillir les effets obtenus, savoir organiser les données recueillies, savoir lire une statistique (par exemple, pointer les files à intervalles réguliers).

Puis il s'agit de traduire cette description en un système simplifié et structuré : c'est le niveau du **modèle pseudo-concret**. Cela se traduit par l'appel à un modèle général dont les conditions de transfert sont maîtrisées. En didactique, nous appelons cela « contextualisation » d'un savoir ancien.

Dans l'exemple précédent, il faut dégager les hypothèses pertinentes pour décrire les arrivées des clients, notamment le nombre moyen d'arrivées par unité de temps. Cette construction est guidée par un premier niveau de connaissances théoriques du phénomène étudié (processus de Poisson) et par les outils mathématiques disponibles, déjà maîtrisés (équations différentielles). Elle conduit à poser des hypothèses de modèle (indépendance des arrivées...).

On peut alors passer à **la deuxième étape** : la **mathématisation** ou **formalisation** du modèle. Cela suppose que les élèves soient capables de représenter le modèle dans la symbolique propre aux mathématiques. Avec l'exemple précédent, il faut mettre l'évolution de la probabilité sous forme d'une équation différentielle. Puis ils doivent savoir interpréter la question posée en un problème purement mathématique (résolution de cette équation différentielle) et savoir faire appel aux outils mathématiques adaptés pour résoudre le problème abstrait (fonction exponentielle, intégration, raisonnement par récurrence...).

Enfin, il convient, en **troisième étape**, de pouvoir revenir à la question posée pour traduire dans les termes du modèle pseudo-concret, les résultats mathématiques obtenus, leur donner du sens pour dégager des réponses et **relativiser ces réponses** par rapport aux hypothèses de modèle (formuler la loi de Poisson pour le nombre d'arrivées de clients dans un intervalle de temps donné) ; il faut ensuite interpréter ces réponses pour apprécier leur validité et leur étendue dans la situation concrète (décider de l'ouverture ou de la fermeture d'une caisse pour réguler les files d'attentes). Ces compétences peuvent faire l'objet de formation dans diverses disciplines. Elles prennent un aspect spécifique en mathématiques du fait du caractère particulièrement abstrait des outils que l'on désire mettre en œuvre.

E - Schéma d'une modélisation

A partir des considérations précédentes, on peut schématiser la modélisation d'un phénomène réel ou d'un processus évolutif faisant intervenir certaines grandeurs variables, de la manière suivante :

Schéma d'une modélisation		
Etape de la modélisation	Objet de l'action	Activité attendue
Réalité	Étude d'un phénomène réel, ou d'un processus expérimental. Ex : situation binomiale, dessin géométrique du "drapeau anglais"	Description simplifiée des éléments pertinents pour le problème posé. Application d'un protocole expérimental. Cette description est filtrée par un regard théorique.
Modèle pseudo-concret	Situation générique, décontextualisée, abstraitement porteuse des propriétés objets de l'étude. Hypothèses de modèle : -implicites en général, -explicites pour le contexte particulier Ex : urnes de Bernoulli et tirage binomial, figures connues en géométrie : le parallélogramme.	Présentation du modèle en termes courants ou schématiques, validation rhétorique de l'analogie avec la description précédente. Confrontation des hypothèses de modèle avec les éléments correspondants de la description. Conjectures sur les propriétés du modèle répondant à la question.
Modèle mathématique	Ensemble d'équations ou de formalisations mathématiques représentant les propriétés du modèle et les hypothèses retenues. Ex : Univers $\Omega = [0 ; n]$, variable binomiale N et probabilités $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ configurations connues et théorèmes en géométrie.	Mise en équation ou formalisation : à partir des lois du phénomène étudié et des connaissances théoriques du modèle pseudo-concret, écriture mathématique des relations repérées entre variables dans un cadre théorique déterminé. Formulation dans ce cadre de la question posée.
Etude mathématique	Propriétés du modèle mathématique découlant des hypothèses et des théories mathématiques utilisées. Ex : $E[N] = np$, les médianes passent par le centre du parallélogramme.	Démonstration de résultats théoriques internes au modèle mathématique. Énoncé formel d'une réponse au problème mathématique posé.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Etape de la modélisation	Objet de l'action	Activité attendue
Confrontation modèle-réalité	Formulation en termes concrets des résultats obtenus. Recontextualisation. Confrontation du modèle complété par ces résultats avec les informations accessibles de la réalité. Ex : La moyenne des succès obtenus dans un grand nombre de tirages binomiaux comparée à np.	Comparaison des résultats numériques ou qualitatifs avec les mesures expérimentales correspondantes. Évaluation de la marge d'erreur et acceptabilité du modèle.
Généralisation et prévisions	Extension du modèle validé à d'autres situations analogues, conditions de généralisation. Prévisions des résultats attendus dans ces nouvelles situations. Ex : Contrôle de la valeur réelle de la probabilité p. Intervalle de confiance et test d'hypothèse pour un pourcentage réel dans une population échantillonnée.	L'appréciation de la validité et de la généralisation du modèle suppose une connaissance spécialisée de la situation étudiée. Ce n'est plus l'affaire du mathématicien. Le spécialiste relativisera les conclusions, explications et généralisations issues de l'étude mathématique en fonction des hypothèses de modèle.

Dans une modélisation, il y a toujours deux étapes délicates qui relèvent d'une connaissance spécialisée des phénomènes étudiés :

- **l'identification,** c'est-à-dire le choix entre plusieurs modèles possibles et la détermination expérimentale des paramètres qui interviennent alors comme hypothèses de modèle,

- **la validation**, c'est-à-dire l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs expérimentales correspondantes et la décision que le modèle est ou n'est pas bien adapté à la situation étudiée.

F - Conclusion : remarques épistémologiques et didactiques

Revenons sur l'importance didactique de la modélisation. Lors de l'introduction en classe des probabilités, nous avons vu l'intérêt épistémologique de bien distinguer réalité, modèle pseudo-concret et modèle

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

mathématique. Il se résume par la nécessité d'introduire de nouveaux objets formels au sein d'une théorie.

Dans les exercices traditionnels où le calcul des probabilités est conçu comme une application de la combinatoire, les élèves se trouvent déroutés, car ils ne voient pas les applications à des situations aléatoires réelles et complexes. Retenant les probabilités comme un jeu de l'esprit, ils n'apprécient guère les hésitations et les incertitudes sur la validité de leurs résultats issus de calculs de combinatoire mal maîtrisés.

Mais sur le plan didactique, je soulignerai un argument supplémentaire. Poser les problèmes en termes de modélisation, suppose contractuellement de rendre explicites les hypothèses de modèle, donc de se poser la question de leur choix, en relation avec la situation étudiée. On permet alors aux élèves de sortir de certains paradoxes ou de surmonter des obstacles liés à certaines conceptions erronées. Ainsi, il revient aux recherches en didactique des probabilités de repérer et analyser ces obstacles[5], aussi bien culturels qu'épistémologiques ou didactiques.

Pour terminer reprenons l'exemple classique des deux dés :

On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 et un 6 ?

On rencontre souvent cette réponse :

"si les dés sont rigoureusement identiques et si on les jette ensembles, il y a 21 issues constituées par les 6 doubles et les 15 paires panachées. La probabilité est alors de 1/21.

Par contre si on jette les dés successivement ou si l'on peut les distinguer par la couleur, il faut distinguer les couples (5, 6) et (6, 5) et la probabilité cherchée est 2/36".

Cette réponse est plus fréquente qu'on ne le croit (la moitié de mes étudiants d'un examen de probabilités en Licence ont commencé le problème avec ce raisonnement). Mais elle révèle aussi une conception subjective de la probabilité, s'opposant à l'approche fréquentiste qui donne à la probabilité un sens objectif : "si, en tant qu'observateur, je ne peux distinguer les deux dés, faute d'un regard assez fin, cela change la probabilité que j'attribuerai à la paire {5 ; 6}". Dépend-elle vraiment de la couleur des dés ? Demandez

5 - On peut consulter par exemple l'article d'André TOTOHASINA, *L'introduction du concept de probabilité conditionnelle* paru dans Repères IREM n° 15 et sa bibliographie.

dans une classe de première, avant d'aborder le chapitre, si du point de vue des probabilités, il revient au même de lancer un dé deux fois successives ou deux dés ensembles ?

L'enseignement des probabilités au Lycée est délicat. Les élèves y rencontrent de nombreuses difficultés cumulées : introduction d'un nouveau concept lié à une idée de limite (fréquence stabilisée), vocabulaire des ensembles, logique des événements, et surtout démarche de modélisation. La réponse didactique ne peut-être de négliger cette démarche. On a constaté l'échec de l'enseignement formel de la structure d'espace probabilisé, sans que les élèves puissent relier ses propriétés à des situations d'évaluation d'un "degré d'incertitude". Elle réside plutôt dans la familiarisation plus précoce des élèves avec les situations aléatoires réelles (comme c'est maintenant le cas dans de nombreux pays étrangers au niveau collège ou même primaire), avec leur description et avec l'expérimentation. Les outils de simulation seront alors précieux. Il convient aux recherches en ingénieries didactiques de proposer des situations exploitables à ces niveaux.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X