Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

3 - A propos de la définition de la probabilité

Jean-Claude THIENARD

Introduction

P.S. Laplace donne comme définition de la probabilité d'un événement "*...le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles*" et il ajoute : "*mais cela suppose les divers cas également possibles*"[1].

Un siècle plus tard[2], alors que cette définition a été systématiquement reprise dans les différents traités qui ont suivi celui de Laplace et transmise par la tradition didactique naissante qu'ils instituaient, H. Poincaré interroge et commente : "*cette définition est une sorte de pétition de principe : comment reconnaître que tous les cas sont également possibles ?*"

Cet article traitera succinctement et partiellement :

- Des difficultés théoriques, logiques et didactiques liées à la «définition Laplacienne».
- Des origines de «définition Laplacienne». De sa fonction dans le Traité de Laplace et dans les traités qui le suivent. De ses articulations avec les pratiques précédentes. Du problème de l'applicabilité du calcul .
- De l'introduction de la probabilité dans les traités modernes[3].
- Des problèmes didactiques que pose l'introduction du concept de probabilité.

1 - *Traité Analytique des Probabilités* (1812).

2 - *Calcul des Probabilités de* H. Poincaré (1896).

3 - Traité de Kolmogorov : *fondements de la théorie des probabilités* (1933) et ceux qui le suivent.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Ce travail est fondé sur une étude intertextuelle des grands auteurs et suppose donc, en préalable, la lecture de certains textes. C'est pourquoi il est proposé au lecteur, dès le début de l'article, quatre extraits de P.S. Laplace, J. Bertrand et H. Poincaré, complétés par la suite par des textes de Fermat et de J. Bernoulli. D'autres textes commentés sont placés en annexes.

A - Des difficultés théoriques et didactiques liées à « la définition »

L'analyse qui suit s'appuie sur les extraits repérés par une lettre (T), de l'introduction au *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. Laplace, du *Calcul des Probabilités* de J. Bertrand et du *calcul des Probabilités* de H. Poincaré.

(T_1)

"La théorie des hasards consiste à **réduire**[4] tous les événemens[5] du même genre, à un certain nombre de cas **également possibles**[4], c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence ; et à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le **rapport**[4] de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la **mesure de cette probabilité**[4] qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles."

Introduction du *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. LAPLACE

(T_2)

Principes généraux du calcul des Probabilités.

"Premier Principe.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, **est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.**

4 - Dans cet article, les mots et expressions écrits en **caractères gras** ont été mis en relief par l'auteur, J. C. Thiénard.

5 - L'orthographe et la ponctuation sont celles du texte original, seconde édition publiée en 1814 par Courcier, imprimeur à Paris.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Deuxième Principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. Éclaircissons ce principe par un exemple.

Supposons que l'on projette en l'air, une pièce large et très mince dont les deux grandes faces opposées, que nous nommerons *croix* et *pile*, soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener croix, une fois au moins en deux coups. **Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles**[4], savoir, *croix* au premier et au second coup ; *croix* au premier coup et *pile* au second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité qui, par conséquent est égale à $\frac{3}{4}$; en sorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera au moins une fois en deux coups.

On peut ne compter à ce jeu, que trois cas différens[5], savoir ; *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considère avec d'Alembert[6], ces trois cas, comme étant également possibles. Mais il est **visible** [5] que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$ tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$. Le premier cas est un événement simple qui correspond aux deux événemens composés, *croix* au premier et au second coup, et *croix* au premier coup ; *pile* au second. Maintenant si conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup, à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second ; on aura $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups. Cette

6 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

supposition ne change rien au sort de celui qui parie pour cet événement : elle sert seulement à réduire les divers cas, à des cas également possibles."

Introduction du *Traité Analytique des Probabilités.* P. S. LAPLACE.

(T_3)

CHAPITRE I.

Énumération des chances

On estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables divisé par le nombre des cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération des cas.
LAGRANGE

"1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. - 2. Exemple d'une énumération incorrecte. - 3. Autre exemple. - 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. - 5. Second exemple. - 6. Troisième exemple. - 7. Quatrième exemple. - 8, 9, 10, 11, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. - 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. - 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue ? - 16. Problème du jeu de rencontre. -17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. - 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. - 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. - 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est **estimée**[4] par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. **C'est une définition**[4].

On jette deux dés ; les six points du premier, en s'associant aux six du second, peuvent former trente-six combinaisons : la probabilité d'amener une d'entre elles, double deux par exemple, est $\frac{1}{36}$.

La probabilité d'amener 3 et 4 est $\frac{2}{36}$: chacun des dés pouvant donner 3 lorsque l'autre donne 4, il y a deux combinaisons favorables 3 et 4, 4 et 3 ; on leur donne le même nom, 3 et 4, mais elles sont réellement distinctes.

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. Une condition est sous-entendue : tous les cas doivent être également possibles.[7] La définition, sans cette restriction, n'aurait aucun sens. Il peut se faire que l'événement arrive, il se peut aussi qu'il n'arrive pas ; ce sont deux cas possibles, un seul est favorable. Toute probabilité serait donc $\frac{1}{2}$. L'erreur est grossière. D'Alembert a élevé l'objection et refusé de passer outre.

Avant de compter les chances, il faut constater qu'elles ont même vraisemblance.

[…]

3. Supposons, pour second exemple, que Pierre et Paul jouent aux boules ; celui qui placera la boule la plus rapprochée du but gagnera. Ils sont également habiles ; mais Pierre a deux boules à jeter, Paul n'en a qu'une. Quelle est la probabilité pour que Pierre gagne ?

Sur trois boules jetées par des joueurs également habiles, Pierre en a deux. La probabilité de gagner est pour lui $\frac{2}{3}$.

Ne pourrait-on pas dire cependant :

Chacune des boules de Pierre peut être meilleure ou moins bonne que la boule de Paul ; quatre cas sont donc possibles. Sur les quatre, un seul fait perdre Pierre, celui où ses deux boules sont l'une et l'autre moins bonnes que celle de Paul, les trois autres cas lui sont favorables. La probabilité de gagner, pour Pierre, est $\frac{3}{4}$.

7 - Cette condition implicite est souvent oubliée par les élèves.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

L'énumération est exacte, mais les cas n'ont pas même vraisemblance.

Paul a de bons et de mauvais coups. Si la boule qu'il a lancée l'emporte sur la première boule de Pierre, il est à croire, sans rien savoir de plus, qu'elle n'est parmi les mauvaises. La chance pour qu'elle soit moins bonne que la seconde boule de Pierre est diminuée. Parmi les quatre cas possibles, ceux dans lesquels Pierre vaincu dans un coup est vainqueur dans l'autre sont moins vraisemblables que ceux dans lesquels ses deux boules ont le même sort."

Calcul des Probabilités de J. BERTRAND (1899)
(d'après les cours du Collège de France).

(T_4)

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES PROBABILITES.

"1. On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la *Probabilité*. On dit ordinairement : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles.

Ainsi, si le premier nombre est n et le second N, la probabilité est $\frac{n}{N}$; cette définition, dans certains cas, ne soulève aucune difficulté. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer un roi est $\frac{4}{32}$, puisque le nombre total des cas possibles, c'est-à-dire des cartes, est 32, et que parmi ces cartes il y a quatre rois ; on a donc ici N = 32, n = 4. Quand on jette un dé, la probabilité d'amener le point 4 est $\frac{1}{6}$, car N = 6 et n = 1, le dé ayant 6 faces dont une seule porte le point 4. Dans une urne qui contient n boules blanches et p noires, on tire une boule ; la probabilité qu'elle soit blanche est

$$\frac{n}{n+p}.$$

2. Prenons un exemple un peu plus compliqué. Deux urnes, qui ne diffèrent pas extérieurement, renferment, la première n boules blanches et p noires, la seconde n' blanches et p' noires.

On fait tirer une boule à une personne, et on demande quelle est la probabilité pour amener blanche. On pourrait dire que le nombre total des cas est n+n′+p+p′ et que la probabilité est

$$\frac{n + n'}{n + n' + p + p'} .$$

On peut dire aussi que deux cas peuvent d'abord se présenter, soit la première, soit la seconde urne ; la probabilité de prendre dans la première est $\frac{1}{2}$ et dans la seconde $\frac{1}{2}$, car il y a autant de chances de mettre la main dans l'une que dans l'autre. Si j'ai mis la main dans la première urne, la probabilité est $\frac{n}{n+p}$ pour que, prenant dans la première urne, on ait une boule blanche ; en vertu du théorème de la probabilité composée, que je ne tarderai pas à établir, la probabilité de mettre à la fois la main dans la première urne et d'en tirer une boule blanche est $\frac{1}{2}\frac{n}{n+p}$; la probabilité analogue pour la seconde urne est $\frac{1}{2}\frac{n'}{n'+p'}$.
La somme $\frac{1}{2}\frac{n}{n+p}+\frac{1}{2}\frac{n'}{n'+p'}$ est l'évaluation correcte de la probabilité demandée, et il n'y aura égalité entre les deux évaluations que dans un cas particulier

$$\frac{n}{n+p} = \frac{n'}{n'+p'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{n}{p} = \frac{n'}{p'}.$$

A quoi tient cette divergence ? A ce que les n+n′+p+p cas ne sont pas *également* probables.
Ainsi supposons qu'il y ait deux fois plus de boules dans la première urne

$$n' + p' = \frac{1}{2}(n + p) .$$

La probabilité pour que je prenne une boule *donnée* dans cette urne est $\frac{1}{2(n+p)}$; et pour que je la prenne dans la seconde elle est $\frac{1}{(n+p)}$.
A la définition de la probabilité, il faut donc ajouter : à condition que tous les cas soient *également* vraisemblables.
Deux autres exemples sont dus à Bertrand.[8]

8 - Nous ne reproduisons ici que le second : *le problème du jeu de boules*.

4. Problème du jeu de boules. - Deux joueurs également habiles, Pierre et Paul, jouent aux boules ; Pierre a deux boules à lancer, Paul une boule, et la victoire est à celui des deux dont l'une des boules approchera le plus du but.

Quelle est la probabilité pour que Paul gagne ?

Soient A et B les boules de Pierre, C celle de Paul ; six cas peuvent se présenter, en rangeant les boules suivant leur proximité du but.

ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC.

Ces six cas sont également probables ; ceux qui donnent la victoire à Pierre sont au nombre de quatre, ceux qui donnent la victoire à Paul au nombre de deux : la probabilité de gagner est donc $\frac{1}{3}$ pour Paul.

On pourrait raisonner autrement : la boule A de Pierre est plus éloignée du but que C, ou bien c'est le contraire.

$$A > C \quad \text{ou} \quad A < C.$$

De même pour la boule B

$$B > C \quad \text{ou} \quad B < C.$$

Donc quatre cas sont possibles

$$\begin{array}{ccc} A > C & \text{avec} & B > C, \\ A < C & \text{“} & B > C, \\ A > C & \text{“} & B < C, \\ A < C & \text{“} & B < C. \end{array}$$

Un seul cas, le premier, est favorable à Paul, puisque sa boule est à la fois plus rapprochée que A et B ; la probabilité serait donc $\frac{1}{4}$.

Mais les quatre cas ne sont pas également probables.

A > C	avec	B > C	correspond à	2	combinaisons	CAB, CBA
A < C	“	B > C	“	1	“	ACB
A > C	“	B < C	“	1	“	BCA
A < C	“	B < C	“	2	“	ABC, BAC

5. **La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe**[9] : comment reconnaître que tous les cas

9 - Dans la mesure où celle-ci n'est pas de nature axiomatique.

sont également probables ? **Une définition mathématique ici n'est pas possible**[10] ; nous devrons, dans chaque application, faire des **conventions**[10], dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles seront admises.

Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention ; la seconde, mathématique, qui applique à ces conventions les règles du calcul."[10]

Calcul des Probabilités
de H. POINCARÉ

A partir du «Traité» de Laplace et jusqu'à celui de Kolmogorov, les Traités et les cours de probabilité, commencent par la « **définition Laplacienne** » de la probabilité. Comme dans le traité de Laplace (voir (T_2) (T_3) (T_4)), ils la font suivre d'exemples destinés à montrer comment appliquer la définition et à mettre en garde contre les mauvaises applications qui peuvent en être faites.

Ces exemples soulignent que la définition ne s'applique que **si les divers cas sont également possibles**.

"*Mais cela suppose les divers cas également possibles*" (T_2)

"*Une condition est sous entendue : tous les cas doivent être également possibles. La définition, sans cette restriction n'aurait aucun sens*". (T_3)

"*A la définition de la probabilité il faut ajouter : à condition que tous les cas soient également vraisemblables*". (T_4)

J. Bertrand recopie P.S. Laplace. H. Poincaré recopie et discute J. Bertrand. Ainsi reconsidérant l'exemple, détaillé par J. Bertrand, dans la partie de boules entre Pierre et Paul, H. Poincaré en vient à mettre en cause la « définition Laplacienne » de la probabilité : " l*a définition complète de la probabilité est une sorte de pétition de principe, comment reconnaître que tous les cas sont également probables* ?"

10 - Voir en Annexe IV

1. La synthèse faite sur la définition et la signification de la probabilité dans *l'encyclopédie des Mathématiques pures et appliquées*. Article de E. Czuber (1906) - Edition française publiée sous la direction de Molla.

2. La réflexion de Borel sur «les deux périodes d'étude» distinguées par H. Poincaré.

En d'autres termes : (Voir extraits de T_2, T_3, T_4 ci -dessus) :

1) La définition est circulaire - Elle suppose, dans son énoncé, la définition de l'équiprobabilité donc celle de probabilité -

Ce n'est donc pas une définition au sens mathématique du terme.

2) La définition n'est pas opératoire. Elle n'indique pas comment assigner des probabilités aux possibilités d'une expérience dont les résultats dépendent du hasard, autrement dit, elle ne donne pas ses cas d'application.

Poincaré affirme ensuite : "*une **définition** mathématique ici **n'est pas possible** ; nous devons dans chaque application faire des **conventions**, dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables*"[11].

Il est donc vain de chercher une telle définition ou une telle procédure. Il faut "*faire des conventions*".

Le texte de Poincaré par la critique qu'il développe de la définition de Laplace, par l'affirmation qu'"*une définition mathématique ici n'est pas possible*...", inaugure le point de vue moderne[12]: le calcul des probabilités est affaire de mathématiciens en tant que corpus de définitions, de théorèmes... à construire et à développer sur des objets - les probabilités - gérés par un certain nombre de règles, fournies par la tradition et prises pour axiomes.

Le problème de l'assignation de probabilités aux possibilités d'une expérience aléatoire, c'est à dire le problème de **l'applicabilité du calcul** - qui est **primordial** - est alors hors champ mathématique. De plus, Poincaré laisse penser que ce problème n'est pas susceptible de solutions relevant d'une **nécessité**, c'est-à-dire de l'application de règles ou de procédures explicites universellement appliquées[13].

11 - Cf. note 9.

12 - Point de vue qui sera parachevé par Kolmogorov.

13 - Il convient de noter l'irruption de la subjectivité dans le texte Poincaré - "*faire des conventions, dire que nous considérons...*" - et donc l'irruption de la non nécessité, du non mathématique. "*Les conventions ne sont pas tout à fait arbitraires*". Elles résultent d'un accord sur de bonnes raisons partagées.

En effet : qu'est ce qui conduit dans l'exemple du jeu de boules entre Pierre et Paul à assigner une égale probabilité à ABC, ACB, etc... ?

Que répondre à D'Alembert ? Que répond Laplace ?[14]…

La position de Poincaré, qui intervient après deux siècles et demi de pratique du calcul des probabilités, semble indiquer que les **principes directeurs** de celui-ci se sont perdus, plus précisément que la **sémantique** du calcul échappe : "*Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elle seront admises...*".

En conséquence, la **sémantique** du calcul est clairement rejetée hors du champ des mathématiques : "*Ainsi tout Problème de probabilité offre deux périodes, la première métaphysique*[15] *pour ainsi dire...*", et donc seule la **syntaxe** du calcul concerne le mathématicien.

Cette position, pour bien fondée qu'elle soit, est d'un **point de vue** historique et **épistémologique**, **paradoxale** par le renversement qu'elle opère par rapport aux points de vue traditionnels. En effet, le calcul a été créé et développé pour être appliqué et ce que Poincaré appelle des "*conventions*" – qui sont, pour les créateurs, des **déterminations de sens** – sont alors premières. Elles déterminent la sémantique du calcul, et les « règles du calcul » – ce que Laplace appelle les principes – en découlent par voie de conséquence.

L'analyse comparée des quatre textes cités ci-dessus, l'analyse de l'évolution du contenu sémantique, de la fonction de la « définition Laplacienne », de Laplace à Poincaré, la recherche de ses origines et de ses raisons aideront :

1) à comprendre comment les mathématiciens en sont arrivés à considérer le calcul selon le point de vue exprimé par Poincaré.

2) à dégager et à discuter les problèmes théoriques et didactiques ainsi résolus ou posés.

14 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

15 - Sens Kantien du terme : qui relève de la faculté de connaître.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

B - Des origines de la définition. De sa fonction dans le Traité de Laplace et dans ceux qui le suivent.

Texte (T^4) de H. Poincaré :

"On ne ***peut guère donner une définition satisfaisante*** *de la probabilité. On dit* ***ordinairement*** *: la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre de cas possibles.*

... ainsi dans certains cas, cette définition ne soulève aucune difficulté..."

Poincaré donne alors l'exemple du jeu de cartes et celui d'une urne contenant n boules blanches et p boules noires.

"On tire une boule ; la probabilité qu'elle soit blanche est $\frac{n}{n+p}$.*"*[16]

Pour Poincaré, dans le cas de l'urne, la définition s'applique de **façon évidente**. Pourquoi[17] ?

Autrement dit, il est **évident** que dans ce cas, tous les cas possibles ont la même probabilité de réalisation. Le problème du fondement de cette évidence est immédiatement posé par l'exemple des deux urnes qui suit, où la définition ne s'applique pas, et par l'exemple de la partie de boules entre Pierre et Paul qui conduit à parler de **Pétition de principe** quant à l'assignation de probabilités aux différentes possibilités, de **conventions** à faire dans chaque applications.

« Pétition de principe », « Conventions », l'opération ne relève donc pas d'une nécessité, mais est de l'ordre de l'accord et cela doit valoir dans le cas de l'urne comme dans les autres. L'évidence n'existe pas plus dans ce cas que dans les autres. Simplement «**la convention**» est ancienne et admise par tous, c'est peut être cela, son évidence. De plus ici, le résultat résulte de l'application de la «**définition**». Est ce un hasard ou par quel hasard ?

Texte (T_3) J. Bertrand :

"La probabilité d'un événement est ***estimée*** *par l'énumération des cas favorables, rapprochée à celle des cas possibles.*

16 - On remarquera que Poincaré ne traite en fait qu'un seul exemple : celui de l'urne. Le jeu de cartes n'étant qu'une urne « contextualisée », ou l'urne qu'un jeu de cartes « décontextualisé ».

17 - Cette question trouvera des éléments de réponse dans la suite.

On parie en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$ *. C'est une définition".*

Après l'exemple des deux dés, Bertrand énonce la «définition Laplacienne» :

"la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. Une condition est sous entendue : ***tous les cas doivent être également possibles****. La définition sans cette restriction n'aurait aucun sens."*

Dans tout problème de probabilité, il faut commencer par assigner des probabilités aux événements possibles. Bertrand commence son traité en expliquant comment résoudre ce problème. A cette fin, il utilise le **paradigme du dé**. Celui-ci **sert à penser l'égale probabilité** des possibles et à justifier, à fonder la « définition ». Mais la démarche n'est pas claire ; elle appelle la critique. Ce sera celle de Poincaré.

En effet, il y a ambiguïté. De quel dé parle J. Bertrand ? D'un dé réel... "*On parie en jetant un dé...*" Qu'est-ce qui justifie alors l'affirmation que tous les cas sont également possibles ? Le dé peut être pipé ou mal équilibré. J. Bertrand assigne au point 4 la probabilité $\frac{1}{6}$ et dit : "*c'est une définition.*".

Il signifie ainsi, qu'ayant un dé en main, il n'y a pas de raisons de penser qu'il est mal équilibré et qu'en conséquence toutes les faces ont les mêmes chances d'apparaître. Le mot «définition» est ici déplacé. Il s'agit d'une hypothèse faite sur le dé, d'une "*pétition de principe*", d'une "*convention*" comme le dit Poincaré.

Le paradigme du dé sert ensuite de fondement à la « définition », qui est présentée comme une règle opératoire.

Or la règle n'est pas opératoire en raison de la restriction apportée... "*tous les cas doivent être également possibles*". Cela est immédiatement mis en évidence par quelques exemples dont celui du jeu des boules entre Pierre et Paul qui illustre que dans l'une des façons de penser les événements possibles, il n'est pas **réaliste** – mais comment le savoir ? – de leur **assigner** une égale probabilité.

La « définition » ne résout donc pas le problème qu'elle est censée résoudre. Comment "... *constater qu'elles (les possibilités) ont même vraisemblance*" ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Dans la suite, la difficulté est oubliée. La pratique va être fondée par l'exemple, donc sur le mode **mimétique**. J. Bertrand développe la solution de treize problèmes destinés à exhiber les « conventions » qui seront faites dans tel ou tel cas. L'équiprobabilité des possibles est à chaque fois affirmée, postulée.

Problème I. On jette une pièce de monnaie n fois de suite. Quelle est la probabilité pour que pile et face se succèdent dans un ordre assigné ?

"Pile et face, à chaque épreuve, sont également possibles. Toutes les successions présentent des chances égales..."

"Pétition de principe", *"Convention"*, *"pas tout à fait arbitraire..."*, la « définition » n'opère alors que dans un second temps, comme règle de calcul. Poincaré, lecteur et critique de J. Bertrand n'a trouvé chez ce dernier que des ruines trop délabrées de la sémantique du calcul pour pouvoir la reconstituer et en rendre compte[18]. D'où son point de vue, qui assignera pour tâche au mathématicien de ne s'occuper que de la syntaxe du calcul.

Textes (T_1) et (T_2) P. S. Laplace :

(T_1) renvoie à la tradition, à la pratique déjà séculaire. *"la théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre,* ***à un certain nombre de cas également possibles"***.

La **sémantique** du calcul, bien connue de Laplace, est donc dans cette opération qui ***"consiste à réduire..."*** Cette opération étant faite - comment ?[19] Laplace et ses contemporains le savent - il faut alors... *"déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de la probabilité..."*

Cela résume la pratique, issue des déterminations de sens faites par les créateurs (elles seront explicitées ultérieurement).

(T_2) donne les principes généraux du calcul des probabilités.

P.S Laplace écrit un traité. Un traité doit être organisé sur le mode déductif, comme les éléments d'Euclide ou les Principes de Philosophie

18 - Voir l'annexe II. Le problème VIII est le seul qui laisse entrevoir la sémantique du calcul telle que l'avait établie les créateurs.

19 - Cette question trouvera des éléments de réponse dans la suite.

naturelle de Newton qui sont les grands modèles. En conséquence, il doit commencer par des définitions et des axiomes d'où, par nécessité logique, se déduiront les énoncés, solutions aux problèmes etc... **Une définition de la probabilité est nécessaire.** P.S. Laplace énonce : "*le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport...*"

Il détache alors une « règle », opératoire dans le contexte des pratiques en cours, et l'érige au rang de « définition » non opératoire, puisque circulaire etc...

Le premier principe traite des « cas également possibles » d'où la nécessité du second principe : "*si les divers cas ne sont pas également possibles,(...) Alors la probabilité sera la somme des probabilités de chaque cas favorable* ".

L'illustration donnée de l'application de ces principes mérite d'être analysée.

"*Supposons... Il est* ***clair*** *qu'il peut arriver quatre cas également possibles...*

... Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$ *, si l'on considérait avec d'Alembert, ces trois cas comme étant également possibles. Mais il est* ***visible*** *que ...*".

"*Il est clair*" "*il est visible*" renvoie à **l'évidence**, à une **stipulation qui ne donne pas ses raisons**. Il y a hiatus. D'Alembert[20] connaît la solution traditionnelle exposée par Laplace, il fait remarquer qu'un autre chemin est possible. Pourquoi ne le prend-on pas ? Ne serait il pas meilleur ? Laplace ne répond pas à cette interrogation[21]. Laplace répond par ce que dit la tradition, il se réfère à la pratique et aux déterminations de sens créées et développées par Fermat, Huyghens, Bernoulli... Ce point sera repris.

En Résumé :

1) La définition, règle syntaxique, ne permet pas de répondre à d'Alembert qui pose un problème d'ordre sémantique. L'assignation d'une probabilité à un cas possible est toujours de l'ordre du sémantique.

2) La définition étant donnée[22], les différents principes, règles de calcul etc... appartiennent désormais à l'ordre de la nécessité. La définition **crée la nécessité** - au sens mathématique du terme - dans le champ des probabilités. Elle jouera toujours ce rôle dans les traités et cours jusqu'à celui de Poincaré inclus[23].

20 - Voir le texte de D'Alembert dans l'annexe I.

21 - Voir l'annexe I.

22 - Voir Chapitre 1 du livre II du *traité analytique des probabilités* de P.S. LAPLACE. L'annexe III en donne le début.

23 - Voir le Chapitre II du *Calcul des Probabilités* de J. BERTRAND.

Sa fonction est donc de résoudre un problème d'ordre **logique** lié au mode d'exposition hypothético-déductif.

3) La définition occulte la sémantique du calcul, conduit à des pertes de sens et à la critique de Poincaré. Cela conduira à la conception moderne du calcul des probabilités - déjà formulée par Poincaré - conçu comme pure syntaxe, détaché du problème fondamental de son applicabilité.

Ces pertes de sens progressives engendreront les difficultés d'ordre théorique et donc didactique implicitement pointées par Poincaré : "*Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention*..."

C - De ses articulations avec les pratiques précédentes

Comme cela a été dit (T_1) la «définition Laplacienne» est abstraite des pratiques initiées par les créateurs. Elle s'articule donc étroitement à celles-ci. Les deux textes qui suivent (T_5) et (T_6) ont pour objectif de mettre en évidence ces articulations.

Rappelons la situation support de l'échange épistolaire : trois personnes jouent à un jeu de hasard en un certain nombre de parties. L'état du jeu est : il manque pour gagner une partie au premier, deux au second et deux au troisième.

Fermat entreprend de calculer les "*hasards*" - autrement dit la probabilité - qui font gagner le premier.[24]

(T_5)

Lettre de Fermat à Pascal du 25 septembre 1654 (Extrait)

"Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois. S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés

24 - Le calcul est mené par Fermat de deux façons. Une seule est exposée.

produisent 9 hasards : ce joueurs a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième ; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$ ".

Pierre de FERMAT
Correspondance.

(T_6)

Ars Conjectandi (1713) J. Bernoulli (Extraits).

($T_6$1)

"La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout. Evidemment, si la certitude intégrale et absolue, que nous désignons par la lettre a ou par l'unité 1, est constituée de - supposons par exemple - cinq probabilités ou parties, dont trois militent pour qu'un événement existe ou se produise, les autres s'y opposant : nous dirons que cet événement a $\frac{3}{5}a$, ou $\frac{3}{5}$ de certitude".

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi , Partie IV, Chap. 1.

($T_6$2)

CHAPITRE IV

LA DOUBLE MANIÈRE DE RECHERCHER LES NOMBRES DE CAS. CE QU'IL FAUT PENSER DE CELUI QUI EST ÉTABLI PAR DES EXPERIENCES. PROBLÈME PARTICULIER PROPOSÉ À CE PROPOS. ETC

"On a montré dans le chapitre précédent comment, d'après les nombres de cas dans lesquels peuvent exister ou ne pas exister les arguments en faveur de n'importe quelle chose, dans lesquels ils peuvent révéler ou ne pas révéler, ou même révéler le contraire, les forces de ce qui prouve de ces arguments et les probabilités des choses qui leur sont proportionnelles peuvent être déduites et estimées par le calcul. On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'œuvre de nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu. Ainsi, par exemple, les nombres de cas sont connus lorsqu'il s'agit des dés, car pour chacun des dés les cas sont manifestement aussi nombreux que les bases, et ils sont tous également enclins à échoir ; car à cause de la similitude des bases et du poids uniforme des dés il n'y a point de raison pour qu'une des bases soit plus encline à échoir que l'autre, comme cela arriverait si les bases étaient de formes dissemblables, ou si le dé était constitué d'un côté d'une matière plus lourde que de l'autre. Ainsi sont connus de même les nombres de cas pour que sorte de l'urne un bulletin blanc ou noir, et on sait que tous sont également possibles, puisque sont évidemment déterminés et connus les nombres de bulletins de chaque espèce, et qu'on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui-là doive sortir plutôt que n'importe quel autre".

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi , Partie IV, Chap. 4

(T_5) : Le jeu est de hasard donc à chaque partie, chaque joueur a $\frac{1}{3}$ des hasards pour lui ; c'est une **détermination de sens**, elle porte sur les mots hasards, hasards égaux et la quantification qui leur est attribuée : dans un jeu de hasard, les "*hasards sont égaux*", s'il y a n résultats possibles, chacun d'eux a pour lui $\frac{1}{n}$ des hasards.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Fermat introduit alors le dé à 3 faces pour **penser** les différents cas - **le dé n'est pas un dé réel** (3 faces) - "*Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde ou lorsque le troisième joueur gagne la première et lui la seconde. Or deux dés produisent 9 hasards : le joueur a donc pour lui* $\frac{2}{9}$ *des hasards*". Les 9 hasards sont égaux - par détermination de sens - $\frac{2}{9}$ résulte alors d'une nouvelle détermination de sens explicitée quelques lignes plus loin "*la somme des hasards qui font gagner le joueur*..." donne les hasards qu'il a pour lui. Le dé permet de mettre ceux ci en évidence, de les penser, de les représenter..

Le calcul est créé par ces déterminations de sens et par l'introduction du dé à n faces qui assurera la **transférabilité** de la démarche suivie par Fermat pour résoudre ce problème, à toute situation présentant n "*hasards égaux*". Le **paradigme** du dé à n faces, qui sera remplacé par J. Bernoulli par celui de l'urne, sera systématiquement utilisé pour penser, représenter - modéliser[25] - les situations les plus diverses. Il contient, détermine, toute la **sémantique** du calcul.[26].

Les faces du dé, ou les tirages dans l'urne de Bernoulli représentent des "*hasards égaux*" d'où (T_1) "*la théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles*"[27]...

Il convient, à ce niveau, de distinguer le $\frac{2}{9}$ ou le $\frac{2}{27}$ obtenu par Fermat du $\frac{2}{9}$ ou $\frac{2}{27}$ que produirait l'application de la «définition Laplacienne». Fermat produit ces résultats par l'intermédiaire du paradigme du dé - on dirait aujourd'hui : par l'intermédiaire d'une modélisation - et non par application d'une formule.

La «définition Laplacienne» fonctionne sur le paradigme du dé ou de l'urne ; elle ne fait qu'énoncer sous forme d'une règle les déterminations de sens faites sur ces paradigmes.

25 - Le terme est évidemment anachronique.

26 - Une situation dont les résultats dépendent du hasard étant donnée... tout se passe comme si en terme de hasard, on jetait un dé à n faces, si k faces représentent les hasards « favorables » à l'événement A, la probabilité k/n lui est assigné.

27 - C'est ce que Fermat fait explicitement dans la première solution adressée à Pascal.

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La «définition Laplacienne» ne fonctionne pas sur les situations, voir l'exemple de d'Alembert ou de la partie du jeu de boules entre Pierre et Paul.

Elle fonctionne sur les **situations après modélisation**, ce qui revient à nouveau à dire qu'elle ne fonctionne que sur le paradigme du dé ou de l'urne.

Le problème est alors : pourquoi telle modélisation plutôt que telle autre ? La tradition répond dans les deux exemples évoqués ci-dessus. Comment ? Sur quels critères s'est elle constituée ?

L'exemple de d'Alembert est traité de façon immédiate par la tradition. La pièce est le dé à deux faces d'où la solution (cf. T_2). D'Alembert remet celle-ci en cause. Il remet en cause les déterminations de sens faites par les créateurs. Il connaît le chemin tracé par ceux-ci mais refuse de l'emprunter et en propose un autre. Lequel choisir ? Pourquoi ? L'évidence à laquelle P.S. Laplace fait appel n'est pas une réponse. Une détermination de sens est faite, une règle est stipulée. Elle peut être acceptée ou rejetée. Elle ne relève pas d'une nécessité. Alors pourquoi cette stipulation plutôt que cette autre ? Parce que le calcul doit s'appliquer, qu'il doit conduire à des prédictions, que celles-ci doivent être en accord avec l'observation ou l'expérimentation. d'Alembert, par son questionnement, renvoie à ce point primordial ; très tôt abordé et élucidé par J. Bernoulli[28].

D - Le problème de l'applicabilité du calcul.

Le problème de l'applicabilité du calcul est au cœur de l'*Ars Conjectandi* de J. Bernoulli. Le problème fondamental est (T_6^2) "*que pour former des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté...*"

En effet, les inventeurs ont pu procéder par détermination de sens, **a priori**, en ne considérant que des jeux de hasard "*en vue de se ménager l'équité*", leurs procédures ne fonctionnent pas en dehors de ces cas.

28 - J. Bernoulli a pensé à son théorème dès 1685. La publication d'"*Ars Conjectandi*" (1713) est posthume.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

J. Bernoulli discute alors deux exemples. Celui du dé et celui de l'urne.

Le dé de Bernoulli n'est pas le dé idéal de Fermat, il est **réel**, symétrique et homogène. Il y a alors de bonnes raisons de **stipuler** que chaque face apparaîtra avec la même probabilité. Les probabilités sont alors fixées **a priori**. Elles font l'objet d'une **convention**, non d'une « pétition de principe », elles résultent d'une **modélisation**.

L'expérience permettra de juger de la **bonne adéquation** des résultats du calcul aux résultats observés.[29]

Si le dé n'est pas symétrique ou homogène, la démarche - hypothèse de modèle a priori - précédente ne peut plus être faite. Comment procéder alors ? En jetant le dé un nombre suffisant de fois et en observant à chaque fois ce qu'il présente[29].

L'urne de J. Bernoulli est introduite avec le double rôle de **paradigme, servant à opérer les déterminations de sens essentielles** - si elle contient 3 000 bulletins blancs et 2 000 bulletins noirs, la probabilité de tirer un bulletin blanc est de $\frac{3}{5}$, c'est une détermination de sens a priori[30] - et **d'urne réelle** servant à faire des expériences. J. Bernoulli montre qu'une personne qui ne connaît pas la composition de cette urne, peut, par expérience, arriver à une évaluation très précise de la proportion des blancs ou des noirs, et ainsi "*ce qu'il n'est pas donné d'obtenir **a priori** l'est du moins **a posteriori***".

Ce double rôle est fondamental. Il permet de traiter de **l'applicabilité du calcul**, comme le montre le texte qui suit.

(T_7)

> "Je suppose que, dans une urne, à ton insu, soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience tu tires une pierre après l'autre (en replaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien

29 - Voir la suite.

30 - J. Bernoulli donne la raison, purement intellectuelle, de la détermination de sens faite "*... on ne voit aucune raison pour que celui-ci ou celui là doive sortir plutôt que n'importe quel autre*".

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France   Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquilatère où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. (...)

On montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois, tombe entre ces limites
$\left[\frac{229}{200} \text{ et } \frac{301}{200} \text{ ou } \frac{2\,999}{2\,000} \text{ et } \frac{3\,001}{2\,000} \text{ ou } \ldots\right]$ du rapport sesquilatère $\left[\frac{3}{2}\right]$ plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors".[31]

Jacques BERNOULLI
Ars Conjectandi, Partie IV, Chap. 4.

Le paradigme de l'urne[32] contient donc toute la sémantique du « calcul », et comme cela a déjà été dit, il permet à J. Bernoulli de régler le problème de l'applicabilité du calcul. Cela peut se résumer ainsi :

1) Une urne contient k boules blanches et l boules noires. La probabilité de tirer une blanche lors d'un tirage est $\frac{k}{k+1} = p$.

C'est une **probabilité a priori**, obtenue par **détermination de sens**.

2) Soit une expérience et un événement A lié à celle-ci. Si $p(A) = p$, alors **tout se passe en terme de hasard**, lorsque l'expérience est effectuée, **comme si** on tirait une boule blanche dans une urne composée comme en 1). C'est une **modélisation**.

31 - En langage moderne, J. Bernoulli montre en substance que si :

- f_n (B) et f_n (N) sont les fréquences observées sur n tirages avec remise dans l'urne des événements «on tire une blanche», «on tire une noire»,

- $$\frac{P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \in \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right)}{P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \notin \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right)} > C$$

d'où $P\left(\frac{f_n(B)}{f_n(N)} \in \left]\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon\right[\right) > \frac{C}{1+C}$, dès que n est supérieur à un certain n_0 , $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ étant donnés.

32 - Ou celui du dé généralisé à n faces.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

L'urne est pour J. Bernoulli, le **modèle** des êtres aléatoires les plus divers, d'où son rôle fondamental. Elle est utilisée soit pour représenter des probabilités **a priori**, soit pour représenter des probabilités ignorées, qui seront déterminée **a posteriori**, par expérience, (Voir le point 3 suivant).

3) L'expérience qui consiste à tirer une boule de l'urne précédente est renouvelée n fois - toujours dans les mêmes conditions, donc avec remise - Si f_n est la **fréquence observée** de l'événement : «une blanche est tirée», alors la probabilité que f_n donne une approximation de p à 10^{-u} près (u entier arbitraire) peut être rendue arbitrairement voisine de 1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} P(|f_n - p| < 10^{-u}) = 1$).

Cet énoncé, en reliant les concepts de probabilité a priori et de probabilité a posteriori, relie à l'expérience et à l'observable, les résultats fournis par le calcul issu de l'assignation des probabilités.

Il résulte alors de ce qui précède que le théorème de J. Bernoulli fournit :

1) La possibilité de mesurer **l'adéquation** d'une probabilité stipulée a priori, ou dérivant d'un calcul, aux résultats observés, c'est-à-dire la possibilité d'évaluer le degré de validité des prévisions auxquelles conduit le calcul.

2) La possibilité **d'assigner** aux événements les plus divers, les plus complexes - sous réserve que l'expérience qui les produit puisse être renouvelée un nombre arbitraire de fois dans les mêmes conditions - une probabilité p^*, qui a de «très bonnes chances» d'être une approximation à 10^{-u} près de p.

C'est en ce double sens, que le théorème de J. Bernoulli règle le problème de l'applicabilité du calcul.

Il donne la solution au problème que d'Alembert soulèvera cinquante ans plus tard. On jette une pièce « honnête » deux fois. L'expérience est renouvelée un grand nombre de fois, la fréquence de l'événement «*croix* a été amené» est observée. Elle est voisine de $\frac{3}{4}$ et non de $\frac{2}{3}$.

Les créateurs ont tracé le bon chemin.[33]

33 - En premier lieu, l'adoption de ces concepts exprime l'attente sûre d'elle, de certaines expériences :

"Mais maintenant nous avons trouvé un chemin grâce, pour ainsi dire, aux traces laissées par ceux qui l'ont emprunté ! Et le trafic se fait maintenant sur ce chemin vers différentes fins". L. Wittgenstein : *Remarques sur les fondements des mathématiques.*

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Conclusions

1 - De l'introduction de la Probabilité dans les Traités modernes

Dans les traités modernes[34], la probabilité est conçue comme une mesure. Suite aux travaux de Borel, la notion de probabilité a été étendue à des espaces non finis, non dénombrables pour lesquels une définition **opératoire** de la probabilité est impossible. Ce qui est alors défini est une algèbre de probabilités. L'applicabilité du calcul est assurée par le choix des axiomes qui stipulent que les probabilités doivent obéir aux règles de calcul que suivent les fréquences, c'est la démarche des programmes de lycées des années 2000 :

à : «si A est certain, alors $f_n(A) = \frac{n}{n} = 1$ », correspond la prescription : «si A est certain alors P(A) = 1». De même, à : «Si A et B s'excluent mutuellement alors : $f_n(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B)$ », correspond la stipulation : «si A et B s'excluent mutuellement alors P $(A \cup B) = P(A) + P(B)$».

Autrement dit, les syntaxes adoptées sont conformes à la sémantique du calcul, exprimée d'une certaine manière par le théorème de J. Bernoulli.

Le calcul des probabilités est alors une théorie mathématique dans laquelle sont développées les règles applicables dans les espaces probabilisés. Dans la pratique, ces espaces sont obtenus par modélisation des situations étudiées, et comme le souligne déjà H. Poincaré, le mathématicien n'est concerné qu'une fois cette modélisation réalisée.

Dès la fin du XIX^{e} siècle la division du travail semble bien établie[35], les modélisations sont à la charge des utilisateurs qui sont les seuls aptes à juger de leur bonne adéquation aux phénomènes étudiés[36], les études théoriques des modèles, la mise en ordre des savoirs constitués, sont alors à la charge des mathématiciens.

34 - Ils reprennent grosso-modo le début du traité de A. Kolomgorov.

35 - Cette division du travail, due à la spécialisation entraînée par la croissance et la complexification des corpus du savoir scientifique, n'avait pas de sens un siècle auparavant.

36 - Que l'on pense aux différentes modélisations faites par les physiciens dans le cadre de la théorie cinétique des gaz : modèles de Boltzmann, de Bose-Einstein, de Fermi-Dirac...

Dans ces traités, et dans le cas ou l'espace est fini, "«*la définition Laplacienne» n'est plus considérée comme une définition, mais seulement comme une méthode pour calculer les probabilités, dans une algèbre de probabilité finie, dont les événements élémentaires, pour certaines raisons, par exemple des propriétés de symétrie, ont la même probabilité* ".

A. RENYI - *Calcul des probabilités.*

2 - Des problèmes didactiques que posent l'introduction du concept de probabilité.

1) L'introduction de la «définition Laplacienne» qui renvoie aux dénombrements des « cas », résout un problème **d'ordre théorique,** dans le cadre des probabilités finies, puisque les différents principes du calcul peuvent en être dérivés. Elle crée des difficultés **d'ordre logique** - elle est circulaire - ainsi que **didactique** - elle n'est pas opératoire - que l'enseignement traditionnel règlait par recours au mimétisme : voilà un exemple, voilà ce qu'il faut faire ; voilà un autre exemple, fais de même, recopie, imite.

Cette façon de faire crée des habitudes, des pratiques qui finissent par bien fonctionner sur des situations stéréotypées, mais ne conduit ni au sens, ni à la culture. Les savoirs acquis sont, pour beaucoup d'élèves, non transférables[37] , donc vides.

2) Les exposés axiomatiques modernes de type universitaire présentent le calcul des probabilités comme une théorie détachée de ses applications, dans laquelle la probabilité est un objet abstrait qui doit suivre un certain nombre de règles et non un concept.

Or pour le calcul des probabilités, les **applications sont fondamentales** et n'ont de sens que par rapport au concept de probabilité. Le lien du calcul avec celles-ci se fait alors par les exemples et la présentation des grands modèles, qui apparaissent alors, à l'expérience, comme un certain type de décontextualisation de diverses situations. Cette démarche, très abstraite, risque d'être opaque pour un débutant. Elle occulte le lien organique qui existe entre le calcul et ses applications, en dissimulant le fait que le calcul s'applique par l'intermédiaire de modélisations, que ce sont ces modélisations qui donnent un sens aux divers schémas d'urnes, etc...

37 - On pourra se reporter à "*A propos de l'enseignement du calcul des probabilités*" IREM de POITIERS. (1993) pour des justifications à cette affirmation.

L'étudiant qui aborde le calcul des probabilités à l'aide de ce type de présentation, apprend à faire fonctionner des règles de calcul, à reconnaître des modèles, à les projeter sur des situations, à traiter avec aisance les problèmes théoriques posés et résolus dans la théorie, sans nécessairement accéder à la sémantique profonde du calcul[38]. Si l'on admet qu'un enseignement, quel que soit son niveau, ne se justifie que s'il contribue **à intégrer des savoirs à la culture de l'individu,** que s'il contribue à lui **«apprendre à penser»**, et si l'on admet les arguments précédents, il convient alors d'éviter, lors d'une première approche (qui sera la seule pour 80 % au moins des élèves du secondaire), les deux entrées précédentes.

L'entrée par la notion de fréquence, proposée par les programmes de 1991 pour les classes de première, n'a pas les inconvénients qui viennent d'être décrits. En effet, le problème central de l'applicabilité du calcul, et donc celui du sens de ce calcul, y est posé d'emblée. Néanmoins ce mode d'introduction n'est pas une panacée ; il a l'inconvénient de présenter une circularité[39] qui génère des difficultés d'ordre logique et risque de créer un obstacle durable pour l'accès au concept de probabilité a priori, qui est premier et primordial. La démarche des programmes de seconde et de première des années 2000 semble vouloir mieux faire le partage entre l'observation des fréquences et le statut de modèle théorique de la probabilité.

L'histoire, la réflexion épistémologique, permettent en suivant les différentes étapes de la genèse du **calcul** de **localiser les difficultés théoriques ou didactiques** liées à la définition de la probabilité, ou plus précisément, à l'introduction du concept de probabilité. Elles permettent de

38 - Une syntaxe peut être utilisée correctement, voire avec aisance, sans faire sens. Cela a été souvent mesuré par l'auteur sur l'exemple des définitions de la probabilité conditionnelle et de l'indépendance des événements par voie axiomatique.

39 - 1) La notion de fréquence qui, stabilisée, déterminerait la probabilité - a posteriori - est liée à celle de probabilité – a priori – par les lois des grands nombres dont l'énoncé suppose acquis le concept de probabilité,

2) Faire croire ou laisser croire, que la fréquence observée d'un événement conduit à sa probabilité risque de générer des obstacles à la compréhension globale de la théorie. Pour une argumentation détaillée de cette affirmation on se reportera à : "*A propos de l'enseignement du calcul des probabilités*" (page 4) publié par l'IREM de Poitiers.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

comprendre les origines et l'évolution des pratiques théoriques ou didactiques, les raisons qui ont conduit, de Laplace à Kolmogorov, à la séparation des champs sémantique et syntaxique. Elles enseignent que, lors d'une première approche, une autre voie est possible qui évite les difficultés précédemment décrites : celle explorée par Fermat et définitivement ouverte par J. Bernoulli, centrée sur les **modélisations**, par le dé ou l'urne[40], qui permet d'appréhender la démarche probabiliste dans son ensemble, d'en comprendre les mécanisme profonds[41] et les enjeux, à savoir que le calcul est élaboré pour traiter, prévoir, décider dans certains types de situations aux résultats aléatoires[42].

40 - Tout se passe en terme de hasard, comme si...

41 - Les règles du calcul apparaissent comme des conséquences directes des déterminations de sens faites sur le paradigme de l'urne ou du dé.

42 - Se reporter à "*A propos de l'enseignement du calcul des Probabilités*", IREM de Poitiers.

Annexe I

Extrait commenté de l'Article "Croix ou Pile" écrit pour l'Encyclopédie par D'ALEMBERT.

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards*). Ce jeu, qui est très connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera ***croix*** en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

Premier coup.	Deuxième coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner, il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouveroit huit combinaisons, dont une seule fait perdre, & sept font gagner ; ainsi, il y aurait 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. **Cependant cela est-il bien exact** ?[43] Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent ***croix*** au premier coup ? Car, dès qu'une fois ***croix*** est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup

Pile, ***Croix***, premier & second coup.

Pile, ***pile***, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix

Pile, croix.

pile, pile, croix.

Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier. **Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, & irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard**[43].

43 - Souligné par l'auteur.

Commentaires :

Que signifie “*cependant cela est il bien exact ?*” Qu’une règle a été mal appliquée ? Que la règle appliquée n’est pas adéquate ?

Dans le texte (T_2), Laplace[44] suggère que d’Alembert n’a pas compris comment les principes du calcul s’appliquent : si d’Alembert ne comprend pas la solution avec les quatre cas équiprobables, il **doit** (“*il est visible que* “) alors dire : “*la probabilité d’amener croix au premier coup est* $\frac{1}{2}$ *tandis que...*”

Doit renvoie à une nécessité. Or la nécessité ici est créée par la règle. Mais quelle est la nécessité de cette règle ? Telle est la question de d’Alembert : “*Ne faut il pas réduire à une les deux combinaisons...*” Laplace ne répond pas : “*il est visible que la probabilité d’amener croix au premier coup est* $\frac{1}{2}$ *tandis...*” n’est pas une réponse.

D’Alembert pense que “*les règles unanimement reçues sur les jeux de hasard*” sont mal formées et donc à réformer. D’Alembert remet en cause la sémantique et par voie de conséquence la syntaxe du calcul c’est-à-dire les “*règles unanimement reçues*”.

Laplace, quant à lui, ne traite la question que du point de vue syntaxique, c’est-à-dire du **comment** appliquer les règles, et non du **pourquoi** telle règle ?

D’Alembert pose implicitement le problème de l’applicabilité du calcul, puisque la seule réponse qui peut lui être fournie est : fais l’expérience un grand nombre de fois et observe la fréquence de « croix a été amené ». Quelle valeur l’attire, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$? C’est $\frac{3}{4}$, les créateurs ont donc ouvert la bonne piste.

Il y a une ambiguïté. L’expérience est conduite avec une **pièce réelle** or $\frac{3}{4}$ est le résultat obtenu pour une pièce **modélisée** par le dé à 2 faces de Fermat ou l’urne de Bernoulli contenant une boule blanche et une boule noire. Il faut donc préalablement tester la pièce, vérifier que la modélisation faite lui correspond, c’est-à-dire que de longues séries de lancers produisent un rapport des nombres de « croix » à ceux de « pile » voisin de 1, changer de pièce sinon.

Une question demeure. Peut-il exister une pièce vicieuse qui conforte d’Alembert dans son opinion ? Autrement dit peut-il exister une pièce dont

44 - Voir le texte T_2.

les jets seront modélisés par une urne contenant n_1 boules blanches et n_2 boules noires, telle que :

$$P(B_1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(\overline{B}_1, B_2) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(\overline{B}_1, \overline{B}_2) = \frac{1}{3}$$

où B_i est l'événement : «on tire une blanche au i^ème tirage».

Or, $P(B_1) = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$; $P(\overline{B}_1, B_2) = \dfrac{n_2 n_1}{(n_1 + n_2)^2}$; $P(\overline{B}_1, \overline{B}_2) = \dfrac{n_2^2}{(n_1 + n_2)^2}$ [45].

On doit alors avoir $\dfrac{n_2 n_1}{(n_1 + n_2)^2} = \dfrac{n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \Rightarrow n_1 = n_2$,

d'où : $P(B_1) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$!

Il y a impossibilité de trouver une telle pièce.

45 - Pour deux tirages, Fermat dirait : *"il y a $(n_1 + n_2)^2$ hasards, tous égaux"* - détermination de sens - $n_2 \times n_1$ sont favorables à

$$\overline{B}_1 \cap B_2 \text{ d'où } P(\overline{B}_1, B_2) = \frac{n_2 n_1}{(n_1 + n_2)^2},$$

nouvelle détermination de sens. J. Bernouilli, par l'expérience qui consiste à répéter n fois 2 tirages avec remise dans cette urne, confirme ce résultat.

Annexe II

Extrait du chapitre I du cours de probabilité de J. BERTRAND.

Suite à la définition, J. Bertrand, donne quelques exemples destinés à montrer les précautions à prendre pour son application, puis il développe la solution de quelques problèmes. Le problème VIII est le seul problème théorique de la série.

A l'occasion de ce problème, J. Bertrand renoue avec la tradition en représentant -modélisant - les données à l'aide d'une urne - **se référant ainsi aux déterminations de sens essentielles instituées par les créateurs -**

15. PROBLEME VIII. - La probabilité d'un événement *est p, combien faut-il tenter d'épreuves pour que la probabilité de voir l'évènement se produire au moins une fois dépasse une fraction donnée r ?*

Supposons que, dans une urne, soient contenues m boules blanches et n noires, m et n étant telles que :

$$\frac{m}{m+n} = p.$$

Il faut chercher combien de tirages doivent être tentés pour que la probabilité d'amener une boule blanche soit plus grande que r. La boule sortie est remise dans l'urne après chaque épreuve, de telle sorte que la probabilité reste, à chaque tirage, égale à p. Le nombre des combinaisons possibles, sur k épreuves, est :

$$(m+n)^k$$

Le nombre de celles qui ne contiennent pas de boules blanches est n^k.

Le nombre des combinaisons contenant une boule blanche au moins est :

$$(m+n)^k - n^k.$$

La probabilité demandée est donc :

$$\frac{(m+n)^k - n^k}{(m+n)^k} = 1 - \left(\frac{n}{m+n}\right)^k = 1 - (1-p)^k.$$

Le nombre k des épreuves à tenter pour que cette probabilité soit égale à r est donné par l'équation :

$$1 - (1-p)^k = r,$$

d'où :

$$k = \frac{\ln(1-r)}{\ln(1-p)}.$$

Cette valeur de k n'est pas, en général, un nombre entier. Pour un nombre d'épreuves plus petit que k, la probabilité de voir une boule blanche sortir sera moindre que r ; elle surpassera r si le nombre des épreuves est plus grand que k.

L'événement de probabilité p est **représenté** par tirage d'une boule blanche dans une urne qui contient m blanches et n noires, telle que

$$\frac{m}{m+n} = p.$$

et la répétition de l'épreuve par des tirages successifs avec remise dans cette urne.

La solution est alors donnée par application de la « définition laplacienne », qui suppose - cela est implicite dans la démarche de J. Bertrand - que les $(m + n)^k$ tirages possibles sont équiprobables. Il y a hiatus, dans la démarche. Le point délicat est éludé, il fait l'objet d'une stipulation implicite.

La difficulté est éludée, mais l'usage est fixé et c'est ce qui importe pour la suite du Traité.

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Annexe III

Extrait du chapitre I du livre II du *Traité Analytique des Probabilités* de P. S. Laplace

LIVRE II.

Théorie générale des probabilités

Chapitre premier.

Principes généraux de cette Théorie

1. On a vu dans l'introduction, que la probabilité d'un événement, est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables, au nombre de tous les cas possibles ; lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.

***Premier principe**.*

Rappel de la définition. Elle n'est pas opératoire (Voir l'article).

Mais elle crée la nécessité. Les différents principes du calcul - les déterminations de sens des créateurs - n'en sont que des conséquences.

*Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera leurs possibilités respectives ; et alors la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités de chaque cas favorable. En effet, nommons p la probabilité du premier de ces cas. Cette probabilité est relative à la subdivision de tous les cas, en d'autres également possibles. Soit N la somme de tous les cas ainsi subdivisés, et n la somme de ces cas qui sont favorables au premier cas ; on aura $p = n/N$. On aura pareillement $p' = n'/N$, $p'' = n''/N$, etc ; en marquant d'un trait, de deux traits, etc, les lettres p et n, relativement au second cas, au troisième, etc. Maintenant, la probabilité de l'événement dont il s'agit, est, **par la définition même de la probabilité**, égale à :*

$$\frac{n + n' + n'' + \text{etc.}}{N};$$

elle est donc égale à $p + p' + p'' + \text{etc.}$

***Deuxième principe**.*

"Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable".

Introduction du
Traité Analytique des Probabilités.

*Lorsqu'un événement est composé de deux événemens simples, **indépendans** l'un de l'autre ; il est clair que le nombre de tous les cas possibles est le produit des deux nombres qui expriment tous les*

***Troisième principe**.*

"Si les évènemens sont indépendans les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le

cas possibles relatifs à chaque événement simple ; parce que chacun des cas relatifs à l'un des ces évènemens, peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé, est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple ; la probabilité de l'événement composé, est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple.

produit de leurs probabilités particulières".

Introduction du
Traité Analytique des Probabilités.

La démonstration, tous les cas étant supposés également possibles, ce qui peut toujours être fait, est purement combinatoire.

Ainsi la probabilité d'amener deux fois de suite, un as avec un dé, est un trente-sixième, lorsque l'on suppose les faces du dé parfaitement égales ; parce que le nombre de tous les cas possibles en deux coups, est trente-six, chaque cas de la première projection pouvant se combiner avec les six cas de la seconde ; et parmi tous ces cas, un seul donne deux as de suite.

Le dé est modélisé par le dé de Fermat et le raisonnement reprend les déterminations de sens faites par ce dernier.

En général, si p, p', p", etc. sont les possibilités respectives d'un nombre quelconque d'évé-nemens simples ***indépendans*** *les uns des autres ; le produit p.p'.p", etc. sera la probabilité d'un événement composé de ces événemens.*

Si les événemens simples sont ***liés*** *entre eux, de manière que la supposition de l'arrivée du premier,* ***influe*** *sur la probabilité de l'arrivée du second ; on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant, 1° la probabilité du premier événement ; 2° la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu.*

"*liés*" définit "*indépendans*" du paragraphe précédent.

Quatrième principe.

"Quand deux événemens dépendent l'un de l'autre ; la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu"

Introduction du
Traité Analytique des Probabilités

Pour démontrer ce principe d'une manière générale, nommons p le nombre de tous les cas possibles, et supposons que dans ce nombre, il y en ait p' favorables au premier événement. Supposons ensuite que dans le nombre p', il y en ait q favorables au second événement ; il est clair que $\frac{q}{p}$ *; sera la probabilité de l'événement composé. Mais la probabilité du premier événement est* $\frac{p'}{p}$*. ; la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu, est* $\frac{q}{p'}$ *; car alors un des cas p' devant exister, on ne doit considérer que ces cas.*

Maintenant on a $\frac{q}{p} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{q}{p'}$;
ce qui est la traduction en analyse, du principe énoncé ci-dessus.

En considérant comme événement composé, l'événement observé, joint à un événement futur ; la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement ; or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée ***a priori****, ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé, déterminée* ***a priori*** *; on a donc ce nouveau principe, relatif à la probabilité des événemens futurs, déduite des événemens observés.*

La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminée ***a priori****, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement* ***a priori.***

etc...

Ces quelques extraits du début du Traité suffisent à justifier les affirmations de l'article sur la fonction de la « Définition Laplacienne ».

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Annexe IV

CALCUL DES PROBABILITÉS.

Exposé, d'après l'Article Allemand de E. CZUBER (Vienne), par J. Le ROUX (Rennes). (1906)

Probabilité a priori.

1. Définition et signification de la probabilité mathématique.

Les événements incertains sont ceux dont l'arrivée ne résulte pas avec certitude des conditions connues ou données, mais pour lesquels on peut seulement exprimer un degré plus ou moins élevé de possibilité. Le calcul des probabilités a pour objet l'étude de la fréquence relative des événements incertains.

Suivant H. Poincaré, il n'est guère possible de donner une définition satisfaisante de la probabilité. A.A. Cournot, au contraire, développe une série de considérations de nature à conduire à une définition rationnelle de la probabilité mathématique. On peut les résumer de la manière suivante : Supposons qu'il s'agisse d'un événement incertain E, et que sur m épreuves ou observations, faites dans des conditions constantes déterminées, cet événement se produise n fois. Il peut arriver que le rapport $\frac{n}{m}$ qui en mesure la fréquence relative tende vers une limite p lorsque le nombre m croît. C'est cette limite que A.A. Cournot appelle la probabilité mathématique de l'événement E dans les conditions considérées. Il est évident que le nombre p regardé comme une limite ne peut être révélé rigoureusement par l'expérience : des raisons théoriques permettraient seules de lui assigner une valeur précise.

La probabilité ainsi conçue peut être regardée, d'après A. A. Cournot, comme la mesure de la possibilité physique ; elle ne s'applique qu'à des classes de faits susceptibles d'une répétition en quelque sorte indéfinie et pour lesquels la limite p existe.

Dans les questions de statistique, le rapport $\frac{n}{m}$ n'admet pas en général de limite déterminée, mais il peut osciller entre deux limites assez resserrées pour que, dans ces questions, l'on puisse faire usage, avec une approximation suffisante, du calcul des probabilités.

En dehors de ces conditions la probabilité n'a qu'une valeur subjective : il peut alors être question d'une énumération des cas, il est illusoire de parler de mesure.

C'est de cette probabilité subjective qu'on peut dire avec **P. S. LAPLACE** qu'elle est "*relative en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance*".

Les événements auxquels on applique le calcul des probabilités sont tantôt des faits théoriques ou mathématiques pour lesquels la mesure de la probabilité résulte d'une définition : c'est la probabilité a priori ; tantôt des faits physiques ou sociaux pour lesquels l'observation doit servir de guide : c'est la probabilité a posteriori.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X

Le calcul des probabilités a pris naissance dans les problèmes relatifs aux jeux de hasard.

Ce sont ces problèmes relatifs aux jeux de hasard qui donnent lieu à la distinction en cas homogènes également vraisemblables et à leur répartition en cas **favorables** ou **chances** et en **cas défavorables**.

Dans ces conditions la probabilité mathématique d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, pourvu que les cas considérés soient également possibles.

Dans cette définition classique **il faut attacher la plus haute importance à la notion de l'égale possibilité des cas**. Au point de vue général il peut être tout aussi difficile de définir l'**égale possibilité** des cas que de définir la probabilité elle-même ; mais, pour certains problèmes, la définition peut être quelquefois imposée par les conditions de l'énoncé. S'il s'agit d'un dé, par exemple, ce que l'on a en vue dans le raisonnement, **ce n'est pas tel dé particulier, mais un dé théorique** que l'on suppose homogène et régulier de telle sorte que la chute sur l'une quelconque des faces ait la même probabilité. La symétrie de constitution que l'on suppose au dé relativement à toutes les conditions du problème revient en dernière analyse à la notion d'un groupe de transformations qui laisse la probabilité invariante.

Une remarque semblable peut être faite à propos de la plupart des problèmes du calcul des probabilités. La formation des cas également possibles équivaut à la construction d'un groupe de substitution de certains éléments. On pourrait donner à ce groupe le nom de **groupe d'invariance de la probabilité**.

Soit m le nombre total des cas également possibles, g celui des cas favorables ; la probabilité p aura pour valeur $\frac{g}{m}$. Ce nombre est une fraction proprement dite, par conséquent il est toujours compris entre 0 et 1. Les deux limites extrêmes 0 et 1 sont relatives à des états qui n'appartiennent plus à proprement parler au domaine des probabilités, car ni l'un ni l'autre n'implique le moindre doute. La première, correspondant à $g = 0$, est le symbole de **l'impossibilité** ; la seconde, qui correspond à $g = m$, est celui de la **certitude**. Il faut cependant établir une différence essentielle d'une part entre l'impossibilité et une probabilité qui tend vers zéro, d'autre part entre la certitude et une probabilité qui tend vers l'unité.

2 . Détermination directe de la probabilité.

La détermination directe de la probabilité dans un problème donné **consiste à décomposer la matière du problème en cas simples, équivalents, également vraisemblables**, et à prendre le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles. **Chr. Sigwart** fait remarquer avec raison que, dans l'application de cette règle, c'est la première partie, la formation des cas également probables, **qui constitue l'art propre de la théorie des probabilités. Le reste n'est qu'une question de pure arithmétique. A l'origine il s'agissait uniquement d'une équivalence formelle, combinatoire**, des cas. Il est donc tout naturel que le calcul des probabilités et l'**analyse combinatoire** se soient développés simultanément. Effectivement les premiers écrits concernant le calcul des probabilités sont aussi les premiers sur l'analyse combinatoire.

Une des premières questions dont il soit fait mention dans les mémoires où il est question de probabilité est relative à l'égale possibilité des cas. C'est chez **Jérôme Cardan** qu'on trouve pour la première fois une appréciation judicieuse de cette équivalence, dont l'évaluation inexacte a souvent conduit à des résultats erronés.

3 . Probabilité totale.

La méthode directe fut tout d'abord le seul moyen employé pour déterminer la probabilité d'un événement.

Cependant peu à peu on arrivera à formuler des règles particulières pour résoudre les problèmes qui se présentaient le plus fréquemment.

D'abord très nombreuses, ces règles se réduisirent enfin à un petit nombre de propositions que **P. S. Laplace**, le premier , énonça d'une façon précise. Dans bien des cas **P. S. Laplace** est parvenu par l'application de ces propositions, jointe à une habile analyse de l'événement dont on demandait la probabilité, à résoudre les problèmes plus simplement que par l'évaluation directe des chances.

La plus simple des propositions énoncées par **P. S. Laplace** est celle qui concerne la **probabilité totale**. Quand un événement peut se produire de plusieurs manières différentes, mais que deux de ces manières ne peuvent arriver simultanément, la probabilité de l'arrivée de cet événement est égale à la somme des probabilités pour qu'il se produise de chacune des manières considérées.

Supposons par exemple que l'arrivée de l'un quelconque des événements E_i ($i = 1, 2, \ldots n$) entraîne l'arrivée de l'événement E et qu'un seul des événements E_i puisse avoir lieu à la fois. Soit P_i, la probabilité de l'événement E_i, la probabilité P de l'événement E sera $P = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$

Dans l'énoncé du théorème sur la probabilité totale **P. S. Laplace considère les événements E_i** comme des cas inégalement possibles de l'événement E."

Terminons par cette autre citation d'Émile Borel :

Le hasard (1914) - Emile BOREL

"La première question est de construire un schéma mathématique présentant avec la réalité d'assez étroits rapports…

… cette première question résolue ou du moins partiellement résolue... le rôle du mathématicien se borne à étudier les propriétés du schéma obtenu, ce qui et un problème de mathématiques pures. La comparaison des résultats ainsi obtenus avec l'expérience et le développement des théories que peut suggérer cette comparaison sont en dehors du domaine des mathématiques ; car on doit dans ces recherches théoriques, ne jamais perdre de vue les réalités et contrôler à chaque instant les idées nouvelles par l'observation et l'expérience. Mais ce rôle des mathématiques, pour être limité, n'en et pas moins, dans bien des cas, fort important."

Ouvrages cités**

1 - **Pascal** et **Fermat,** *Correspondance* sur le problème des partis (1654).
2 - **J. Bernoulli**, *Ars Conjectandi* (1713)
3 - **P. S. Laplace**, *Traité analytique des probabilités* (1812)
4 - **J. Bertrand**, *Calcul des probabilités* (1899)
5 - **H. Poincaré**, *Calcul des probabilités* (1896)
6 - **E. Borel**, *Le hasard* (1914)
7 - *Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées*, quatrième volume. Tome 1
Calcul des probabilités - Théories des erreurs - Applications diverses.
8 - **A. Kolmogorov**, *Fondement de la théorie des probabilités* (1933).

** - On trouvera les références bibliographiques dans la bibliographie générale en fin d'ouvrage, ou dans la bibliographie détaillée de l'article précédent : *Les probabilités au tournant du XVIIIe siècle.*

Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X