Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

1 - Les probabilités au tournant du XVIIIe siècle

Jean-François Pichard

Mon intention est de présenter les commencements de la théorie probabiliste (c'est-à-dire l'émergence de la théorie probabiliste, pour paraphraser le titre de Hacking **[14]**) jusqu'à l'établissement des notions de base et des théorèmes limites (i.e. jusqu'au premier tiers du XVIIIe siècle et ses trois grands traités), en essayant de dégager les problématiques et les différentes formes des concepts de base.

0 - La préhistoire

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude (une «géométrie du hasard», a dit Pascal), le hasard désignant le caractère fortuit, imprévisible des phénomènes observés. Cette partie des mathématiques est apparue récemment, il y a environ trois siècles et demi, contre vingt cinq siècles au moins pour la géométrie.

Le déroulement imprévisible de la vie d'un homme, l'incertitude de la situation présente et à venir, ont d'abord été attribués aux divinités (le Destin, Dieu, qui reste toujours omniprésent dans l'esprit de beaucoup de gens), à la Nature et à l'Homme. L'analyse philosophique pour la compréhension du monde va amener les savants de la Grèce antique à préciser davantage ce concept vague. La notion d'événement accidentel est dégagée très tôt, en particulier par Aristote[1] qui discute des opinions des Anciens et distingue les

1 - Aristote (IVe siècle avant J.C.) distingue les événements contingents, qui doivent nécessairement se produire ou qui se produisent fréquemment, i.e. très souvent, et les événements fortuits ou accidentels, qui peuvent ou non se produire (e.g. *Physique* II, 4,5,6, trad. par H. Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1983). L'utilisation faite par Aristote du terme "probable" [dans la traduction indiquée] est épistémique et porte sur des événements uniques et particuliers ; c'est un attribut qualitatif.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

événements contingents, qui doivent nécessairement se produire, et les événements fortuits, qui peuvent ou non se produire.

Par ailleurs, des expériences aléatoires sont réalisées depuis bien longtemps déjà : les jeux avec des astragales, des dés... étaient pratiqués en Mésopotamie[2] et dans l'ancienne Egypte par exemple (on a retrouvé des dés bien cubiques et homogènes dans des tombeaux).

De tels jeux de hasard étaient effectués parfois avec opiniâtreté. Contre cela, des lois sont édictées contre les tripots dans la Rome antique[3]. Par la suite, les jeux sont condamnés par l'Eglise catholique, par le pouvoir[4] et par la morale[5] ; cependant cette frénésie des jeux n'a pas cessé depuis.

D'autres activités avaient aussi des résultats incertains. Par exemple, dans le cas du transport maritime, les bateaux navigant sur les mers et océans n'arrivent pas toujours à bon port avec leurs cargaisons ; des Bourses avaient même été créées au XIII^{e} et XIV^{e} siècle pour assurer (parier sur) ce risque, de façon empirique. Les rentes viagères dont la valeur est un pari sur la durée de la vie humaine, existent depuis au moins la Rome antique[6].

On peut alors se poser deux questions : pourquoi la théorie des probabilités a-t-elle porté d'abord sur les jeux de pur hasard (lancers de pièces, de dés...) et non sur d'autres phénomènes aléatoires de la vie économique par exemple, et pourquoi cela est-il survenu si tardivement ?[7] En

2 - Dé en terre cuite du 3^{e} millénaire avant J.C. ; cf. David F.N. : *Games, Gods & Gambling*, Ch. Griffin, 1962.

3 - On a retrouvé des dés spécialement pipés datant de cette époque, d'où la notion complémentaire de dé équitable, et l'on peut conjecturer que des joueurs avaient empiriquement senti la fréquence d'apparition des différentes faces, c'est-à-dire une conception intuitive de la loi des grands nombres.

4 - Par exemple, Louis IX interdit en 1255 le jeu et les manufactures de dés : *"Ils devront s'abstenir... des jeux de dés, d'échec, de la fornication et de fréquenter les tavernes"*.

5 - Dans le premier ouvrage sur le sujet **[8]**, Cardano écrit au chapitre 10 intitulé ***"Pourquoi le jeu fût condamné par Aristote"*** :
"Aristote donne une autre raison quand il dit (4. Ethique, *chap. 1,* in fin.*) que les joueurs, les voleurs et les pilleurs font un métier sordide pour lequel ils trafiquent pour un profit indigne ; en fait, ils font n'importe quoi pour l'amour du gain et de ce fait, ils encourent des reproches...*
Maintenant, les chrétiens tolèrent les jeux de hasard, quoique ce fût condamné par les anciens ; mais ils n'admettent pas ce fléau..."
(L'othographe reproduite ici est celle de la traduction d'origine, un peu différente de la nôtre. Il en sera de même pour un certain nombre d'autres citations).

6 - Les tables du jurisconsulte romain Ulpien (IIIe siècle) indiquent, suivant l'âge, la valeur à attribuer aux rentes viagères dans les successions.

7 - Voir par exemple **[14]** et dans **[25]**, en particulier les chapitres 6 : "La tardive émergence du calcul des probabilités au XVIIe siècle", et 7 : "Le contexte juridique et commercial de l'apparition du calcul des probabilités: les mathématiques et la spéculation sur l'avenir".

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

effet, les outils mathématiques utilisés par les inventeurs de cette théorie sont très simples et étaient connus dès l'antiquité grecque pour l'arithmétique et le calcul des proportions et le Moyen-Age pour les combinaisons[8] ; ainsi, dès cette époque, l'appareillage mathématique pour une telle théorie était disponible.

Sur le premier point, on peut remarquer que les jeux de hasard pur (où l'adresse des joueurs n'intervient pas) sont les plus simples conceptuellement et qu'ils sont faciles à modéliser ; Pascal a écrit à ce propos que cette théorie pourrait "s'arroger à bon droit ce titre étonnant : *Géométrie du hasard*." dans son Adresse de 1654 à l'Académie Parisienne Le Pailleur (qui faisait suite à l'académie de Mersenne)[9]. Ce sont des problèmes de ce genre qui ont été développés en premier, à l'encontre de l'hypothèse de Maistrov[10] qu'une science se développe pour répondre à des besoins économiques.

Sur le second point, une première raison est qu'un traité scientifique sur les jeux de hasard ne fait peut-être pas très sérieux, le jeu étant chose futile aux yeux des savants. Une autre raison, certainement plus importante, est que le résultat d'un tirage au «sort» est l'expression de la volonté divine, et comme telle on ne doit pas calculer dessus, on ne doit pas tenter Dieu (ou le Diable) ; cette attitude existe encore actuellement avec les attitudes superstitieuses de joueurs[11]. C'est peut-être une raison pour laquelle l'Eglise catholique avait prohibé les jeux de hasard[12].

L'établissement de règles aussi équitables que possibles[13] dans les jeux de hasard (qui étaient malgré tout pratiqués) suppose une appréciation des

8 - Le triangle arithmétique donnant les combinaisons de p objets pris parmi n était déjà connu des mathématiciens arabes du XII-XIIIème siècle (voir A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb. L'exemple d'Ibn Mun'Im*, Pub. Math. d'Orsay, 1985 ; dont des extraits sont donnés dans *Mathématiques Arabes*, IREM de Rouen, 1989) et des mathématiciens italiens de la Renaissance, en particulier Tartaglia, *General Trattato* de 1556.

9 - Cette académie était un salon où se rencontraient des gens de lettres, de sciences et de la noblesse pour discuter sur toutes sortes de sujets, en particulier scientifiques, c'est la préfiguration de l'Académie Royale de Paris.
Pour avoir une idée de la diversité des questions traitées lors de ces réunions, on peut voir :
Marin Mersenne : *Questions inouyes, questions harmoniques, ...* (1634), Fayard, Corpus des oeuvres de philosophie en langue française, 1985.

10 - L. E. Maistrov : *Probability Theory, A Historical Sketch*, Academic Press, 1974.

11 - Et même en général dans la vie courante. Il n'est que de voir, par exemple, le battage fait dans les médias lorsque survient un vendredi 13.

12 - Par exemple, sermon de St Cyprien de Carthage (240),..., de St Bernadin de Sienne (1423), etc...

13 - C'est-à-dire des règles analogues à une jurisprudence, une évaluation du droit des joueurs sur les mises.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

possibilités des résultats gagnants et perdants. Cependant, ce n'est pas avant la Renaissance, avec un certain nombre de savants qui basaient la connaissance sur la méthode expérimentale, que des tentatives vont avoir lieu (e.g. Cardan, voir ci-après). D'autre part, au début du XVII^{e} siècle, les milieux scientifiques et philosophiques cherchent des explications au monde et à ce qui s'y produit[14] et, s'appuyant sur les expériences, vont vers une rationalisation du réel. Il n'est donc pas étonnant qu'on se soit préoccupé aussi, à cette époque, des phénomènes aléatoires.

1 - Les premiers écrits : Cardan et Galilée

Les premiers textes connus sur le calcul des hasards (ou des chances) ont été écrits au XVI^{e} siècle (Cardan[15]) et au début du XVII^{e} siècle (Galilée[16]), mais ils n'ont été publiés que bien plus tard, c'est pourquoi ils n'ont eu aucune influence directe sur le développement public de cette théorie, parce que celle-ci avait déjà atteint un degré de sophistication supérieur à celui du travail de Cardan[17]. Ils donnent cependant un aperçu de la façon de concevoir les idées de hasard.

Des deux, le travail le plus complet et le plus intéressant est celui de Cardan, bien que Montmort (**[27]**, p. IX) en ait écrit :

"Jérôme Cardan a donné un Traité De Ludo Aleae; mais on n'y trouve que de l'érudition & des réflexions morales."

Libri en dit dans son *Histoire*,

"Cardan a écrit un traité spécial De Ludo Aleae, où se trouvent résolues plusieurs questions d'analyse combinatoire."

14 - Voir des exemples dans Mersenne op. cit, ainsi que dans Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Trad. et notes de Clavelin, Editions Colin, 1970.

15 - Gerolamo Cardano, (en français, Jérôme Cardan) : *Liber de ludo aleae* (écrit entre 1526 et 1560) in *Opera Omnia*, vol. 1, Lyon, 1663 ; traduit en anglais par Oystein Ore : Cardano, *the Gambling Scholar*, Princeton Univ. Press, 1953, Cf. **[8]** - les citations données ci-après (traduction libre) sont faites d'après **[8]**.

16 - Galilei Galileo : *"Considerazione sopra il giuco dei dadi"*, *Opere*, t.xiv, 293-296, Firenze, 1855 ; première édition de ce texte, viii 591-594 in *Opere*, 1718. La date de rédaction est inconnue, vers 1620 ; Galileo est mort en 1642. Il avait intitulé ce texte *Sopra le scoperte de i dadis*.

17 - Pour plus de précisions, voir e.g. **[14]**, **[24]**, **[34]**.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

La vérité se situe entre les deux. Cardan étudie, entre autres choses, les différentes combinaisons possibles (qu'il distingue des résultats observables avec des dés indiscernables) avec un, deux et trois dés, et utilise cela pour calculer les chances lorsqu'il y a équipossibilité ou égale facilité des cas (terme que l'on retrouve chez Laplace). Il dit pour le cas d'un dé :

"Par exemple, je peux aussi facilement tirer le un, le trois ou le cinq que le deux, le quatre ou le six. Les paris sont donc posés conformément à cette égalité si le dé est honnête et sinon ils sont faits d'autant plus grands ou plus petits en proportion de l'écart à l'égalité vraie."

Cardan paraît assigner une égale facilité aux différentes faces en raison de la symétrie dans le cas d'un «dé honnête», ce qui revient à considérer le dé comme un cube parfait, c'est-à-dire passer d'un dé particulier par abstraction à un dé parfait, comme en géométrie on passe d'un fil bien tendu à la notion de ligne droite. D'autre part, cette allusion aux dés truqués montre que Cardan (et certainement d'autres joueurs avant lui) avait un sentiment empirique de la loi des grands nombres et proposait d'engager les paris selon une approche qu'on qualifie aujourd'hui de fréquentiste. Cependant, son exposé est fait fondamentalement selon une doctrine mathématique, les expériences effectives de jeux qui sont mentionnées devant être comprises comme des illustrations.

Il énonce alors un principe premier :

"Aussi il y a une règle générale, que nous devons considérer le circuit entier [i.e. toutes les possibilités], et le nombre de ces lancers qui représente en combien de façons les résultats favorables peuvent se produire, et comparer ce nombre au reste du circuit, et les paris mutuels devront être posés selon cette proportion, de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux."

qui est le premier énoncé bien connu de la définition de la probabilité objective : lorsque les cas sont équipossibles (équiprobables), la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. On remarque aussi que le jeu est un contrat passé entre deux ou plusieurs personnes, dont le résultat est imprévisible pour chacune d'entre elles, et que la convention pour établir les paris est basée sur une règle de justice «de sorte qu'on puisse disputer en termes égaux» (jeu équitable), ce que nous retrouverons plus tard.

Bien que ce traité n'ait pas été publié avant 1665, les idées de Cardan ont dû circuler en Italie, puis en France. En effet, Galilée, dans son petit mémoire sur le jeu de dés - écrit à la suite d'une demande du Grand Duc de Toscane vers 1620, mais publié seulement en 1718 - commence directement sa note en supposant l'équipossibilité des résultats des lancers ; et il en est de même dans la correspondance de Pascal et Fermat.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

2 - Le début «officiel» : Pascal et Fermat

Un certain délai de publication s'est aussi produit pour la correspondance entre Pascal et Fermat de 1654, et pour le *Traité du Triangle Arithmétique* (1654) de Pascal ; ces oeuvres ont été publiées à peu près en même temps[18] que celles de Cardan (les oeuvres de Pascal ont été publiées en 1665) et avant celles de Galilée. Néanmoins, les discussions sur le sujet qui ont eu lieu dans l'Académie Parisienne et l'Adresse de Pascal communiquée à un certain nombre de savants, en ont fait connaître la substance à Christiaan Huygens (séjour à Paris en 1655) et a incité celui-ci à écrire et publier en 1657 le premier traité sur la théorie probabiliste.

L'accréditation de Pascal et Fermat comme fondateurs de la théorie probabiliste semble due à Huygens. En effet, il écrit, dans sa lettre à Frans van Schooten (qui a traduit en latin le traité de Huygens et l'a publié en 1657 avec l'édition latine de son ouvrage *Mathematische Oeffeningen*) :

"Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens de toute la France[19] *se sont occupés de ce genre de Calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas."*[20]

Leibniz, dans ses écrits et sa correspondance à ce sujet, ne cite que Pascal, Fermat et Huygens, pourtant les œuvres de Cardan étaient déjà parues depuis 1663. Montmort, quant à lui, avait eu connaissance de l'ouvrage de Cardan, puisqu'il le cite, mais d'une manière très restrictive, alors qu'il dit de Pascal et Fermat (p. XXI) :

"Je crois devoir parler maintenant de deux Geometres illustres à qui je dois les premiers vûes que j'ai eues sur le sujet que je traite. En 1654 M. Pascal resolut ce Problême... M. Pascal le proposa à M. Fermat avec qui il étoit en commerce d'amitié & de Geometrie, & qui en cette Science n'étoit inferieur qu'à M. Descartes."[21]

De sorte que la légende "Pascal et Fermat sont les fondateurs de la théorie probabiliste" a continué à se propager, en particulier en France où les historiens des sciences et les grands mathématiciens des siècles suivants ont consacré la primauté de Pascal et Fermat. On peut citer par exemple :

18 - Fermat : *Varia Opera mathematica*, Toulouse, 1679 ; voir **[12]**.
19 - Il s'agit surtout de Pascal et Fermat.
20 - **[17]**, t.14, p.57-58.
21 - La graphie (et l'orthographe) utilisée ici est celle de l'ouvrage original ; pour certains termes, elle est différente de celle en usage de nos jours ; il en sera de même pour un certain nombre d'autres citations.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Montucla (**[28]**, t. 3, p. 383) :

"Les premiers qui ayent frayé cette carrière sont Pascal et Fermat. L'un et l'autre de ces hommes célèbres examinoient vers le milieu du siècle passé quelques questions sur les jeux et les paris des joueurs."

Laplace (**[23]**, p. 197) :

"Depuis longtemps on a déterminé dans les jeux les plus simples les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs [...] Mais personne, avant Pascal et Fermat, n'avaient donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul [...] C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités."

Poisson (**[31]**, p. 1) décrit de façon plus précise :

"Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités. Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre, pour la gagner, des nombres de points inégaux. Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement; il fût ensuite résolu par Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs." [22]

Cependant, si l'on considère que la date de publication fait foi, c'est à C. Huygens que revient l'honneur d'être appelé le père de la théorie probabiliste : si c'est la date de l'écrit qui compte, c'est à Cardan que revient ce droit[23].

Je vais donner ici seulement quelques indications sur les idées de Pascal-Fermat, bien que publiées environ une dizaine d'années après le traité de Huygens, en raison de l'influence qu'elles ont eue, en complément de ce traité de Huygens, sur le développement de la théorie probabiliste au début du XVIII^{e} siècle avec les trois grands traités de l'époque, qui seront étudiés

22 - Ce problème de partage de l'enjeu a été appelé en France "problème des partis", car on cherche le parti des joueurs, selon l'expression consacrée au XVII^{e} siècle et début du XVIII^{e} siècle.

23 - Comme l'écrit Montmort au début du XVIII^{e} siècle, le texte de Cardan est compté comme quantité négligeable pour le sujet (peut-être ne l'avait-il pas bien lu ?). De plus, Cardan avait une réputation de plagiaire, en raison notamment de ses disputes avec Tartaglia sur la résolution de l'équation du 3ème degré. On peut néanmoins se poser la question : pourquoi les auteurs français cités ont-ils attribué cela à Pascal (invention avec Fermat de la théorie probabiliste, triangle arithmétique dit de "Pascal") alors que Pascal a par ailleurs bien d'autres titres de gloire ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

plus loin. Sur Pascal-Fermat, ainsi que sur Huygens, des études plus approfondies ont été excellemment faites dès le début du XVIII[e] siècle par Jacques Bernoulli, Pierre Rémond de Montmort et Abraham de Moivre, puis dans **[28]** et **[34]**, et tout récemment dans **[1]**, **[7]**, **[14]**, **[16]**, **[18]**, **[19]** (et certainement bien d'autres).

Pascal et Fermat présentent une approche probabiliste d'un problème juridique : comment répartir équitablement entre les joueurs l'enjeu d'une partie qui ne peut être achevée[24]. Pour ce faire, ils utilisent de façon implicite la propriété d'additivité et celle de multiplication pour des événements indépendants, comme si cela était généralement admis.

Pascal procède à une récurrence descendante à partir du droit d'espérer conditionnel à la situation considérée, comme on peut le voir dans sa lettre du 29 juillet 1654 (**[29]**, p. 43) :

"Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres »."

On constate donc sur cet extrait que Pascal reprend, dans le cas d'une situation de jeu, l'analogue du calcul des espérances futures sur des biens des personnes dont on doit hériter, avec les propriétés communément admises : additivité et des héritiers de même rang ont les mêmes espérances pour un bien. Pour la question sur le jeu de dés posée par le chevalier de Méré, il sous-entend qu'il est couramment admis que les faces du dé sont également possibles et par là même qu'elles ont la même chance de se produire.

Fermat, quant à lui, utilise les combinaisons pour dénombrer les cas possibles et favorables, supposés ici «équiprobables», sur le nombre maximum de parties à jouer, comme le fait Pascal, pour une partie simple, en

24 - Le problème de la division (qui est le nom anglais) de l'enjeu semble d'origine arabe, antérieur au XIV[e] siècle. Il avait déjà été étudié sans succès par Pacioli à la fin du XV[e] siècle, puis par Cardan, Peverone, Tartaglia entre autres au XVI[e] siècle.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

disant «le hasard est égal», et en tirer la proportion d'argent mis en jeu qui revient à chaque joueur. On peut illustrer cela par un extrait de la lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654 (**[29]**, p. 47) :

"Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs : [...] d'où vous concluez qu'il faut voir [...] combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion."

Et de même dans la lettre de Fermat à Pascal du 29 août 1654 (**[12]**, p. 309) :

"Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en 17, 5 et 5 : de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui 17 hasards égaux, lorsque chacun des autres n'en a que 5."

Pascal regroupe et formalise les résultats qu'il a obtenus dans un traité connexe au *Traité du triangle arithmétique*. Il commence par énoncer une convention :

"en quelque terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter; et, au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose. Et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu : et cette juste distribution s'appelle le parti"

c'est-à-dire que le parti est égal au droit d'espérer. Cette même convention avait été aussi indiquée par Cardan :

"Si le jeu recommençait, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer." [25]

Ensuite Pascal donne deux principes qui règlent ce droit d'espérer.

"Le premier principe... est celui-ci. Si un des joueurs se trouve en telle condition que, quoi qu'il arrive, une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée".

En notation moderne, on peut le traduire par : l'espérance mathématique d'une constante est cette même constante.

25 - Dans Cardan, *Practica arithmetica*, 1539.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

"Le second est celui-ci : si deux joueurs se trouvent en telle condition que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard et qu'il y ait autant de hasard pour l'un que pour l'autre et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié."

La conclusion du corollaire premier est :

"Et, partant, si en cas de perte il lui appartient A, et en cas de gain A+B, le parti est qu'il prenne $A+\frac{B}{2}$ *."*

En langage moderne on dirait que le droit d'espérer est un opérateur additif.

Pascal applique ensuite ces propriétés au problème des partis, en utilisant les combinaisons dont il a établi les propriétés dans la première partie du *Traité du triangle arithmétique*.

3 - Le premier traité publié : Christiaan Huygens

J'ai indiqué succinctement ci-dessus les circonstances qui ont incité Christiaan Huygens, jeune hollandais âgé de 25 ans, en séjour à Paris en 1655, à s'intéresser à ce sujet. Son travail était bien avancé au printemps 1656 et Huygens se mit en rapport avec Pascal et Fermat à ce propos. Le traité de Huygens est d'abord paru en latin en 1657 sous le titre *De Ratiociniis in Ludo aleae*. Ecrit en hollandais, il a été traduit en latin par son professeur de mathématiques F. van Schooten qui l'a inséré à la suite de ses *Exercitationum Mathematicarum*, Liber V. Il est publié en hollandais trois ans plus tard.

Huygens commence, dès le tout début de son traité **[17]**[26], par formaliser la notion de droit d'espérer, que l'on a trouvé exprimée chez Pascal dans le *Traité du triangle arithmétique*, sous le nom de «valeur de la chance» :

"Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée."

Cette notion de «valeur de la chance» a été traduite en latin par «expectatio», ce qui a donné en français «espérance mathématique». Ensuite, il indique ce qu'il entend par «jeu juste» :

26 - Voir aussi l'article plus détaillé de Denis Lanier, "*Huygens : l'espérance et l'infini*", dans **[16]**.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

"je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne",

déjà signalé par Cardan. Huygens introduit aussi la notion de jeu équivalent.

Sa proposition I est :

"*Avoir des chances égales d'obtenir* a *ou* b *me vaut* $\frac{a+b}{2}$ "

ce qui est le corollaire second de Pascal, qui en était resté à cette propriété car c'était suffisant pour traiter le problème des partis où les deux joueurs ont des "hasards" égaux. Huygens généralise ce résultat dans sa proposition III :

"*Avoir* p *chances d'obtenir* a *et* q *d'obtenir* b, *les chances étant équivalentes, me vaut* $\frac{pa+qb}{p+q}$."

A l'aide de cela, Huygens résout le problème des partis par récursivité ; il n'utilise pas de méthode combinatoire.

On a vu que, déjà avec Cardan, la notion d'équipossibilité avait été dégagée et postulée. On retrouve cela chez Huygens (**[17]**, p. 76) :

"*D'abord qu'on peut faire avec un dé six coups différents également vraisemblables. Car je suppose que le dé a la forme d'un* cube *parfait. Ensuite qu'on peut faire 36 coups différents avec deux dés, lesquels ont aussi des vraisemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième dé peut se combiner. Et 6 fois 6 font 36.*"

et il fait le décompte des points en appelant les dés A et B respectivement. On remarque, comme pour Cardan, que l'équipossibilité est admise, que ce soit pour un ou plusieurs dés. L'indépendance ne sera considérée que plus tard, avec de Moivre.

La proposition XIV est intéressante en ce qu'elle fait intervenir un nombre de parties qui n'est pas limité :

"*Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.*"

Ici, si les deux ont manqué, on revient à une situation équivalente à celle de départ, de là Huygens propose implicitement une résolution par équation de récurrence périodique. Si x est la «valeur de sa chance» au début, ce sera de nouveau x à chaque fois que c'est son tour de jeter, et y est la

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

«valeur de ma chance» quand c'est mon tour de jeter, on obtient un système de 2 équations entre les 2 inconnues x et y, facilement résoluble.

L'ouvrage se termine par cinq propositions (exercices) laissées à la sagacité du lecteur, dont deux sont dues à Fermat et une à Pascal. Le numéro V est le plus remarquable et fait aussi intervenir éventuellement un nombre non limité de parties : c'est le premier exemple sur la «durée du jeu», un sujet qui a excité la sagacité de Bernoulli, Montmort, de Moivre, Lagrange et Laplace, entre autres.

"Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec trois dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et qui celui là gagnera qui sera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481."

Huygens pensait, pour la résolution de cet exercice, certainement à la méthode par équation de récurrence proposée pour la proposition XIV.

Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du XVIII^{e} siècle. Peut-être est-ce dû au fait que les mathématiciens, pendant cette période, étaient occupés à développer le calcul différentiel et intégral inventé par Leibniz et la méthode équivalente des fluxions et des fluentes inventée par Newton, et aussi au fait que cette théorie ne semblait pas avoir d'application en sciences.

Il sera traduit et commenté dans un traité anglais anonyme de 1692, attribué maintenant à Arbuthnot. Il sera reproduit et commenté dans la première partie de l'*Ars conjectandi* de Bernoulli ; des solutions, interprétations et généralisations aux cinq problèmes laissés comme exercice sont proposées par Huygens lui-même, par Bernoulli, Montmort, de Moivre, etc...

4 - La probabilité et son aspect philosophique

On a pu remarquer qu'il n'est question de probabilité ni chez Pascal, ni chez Fermat, ni chez Huygens ; les calculs sont effectués en fonction des chances (ou hasards) de chacun des joueurs. D'ailleurs ce mot «probabilité» et ses dérivés avaient une autre signification que celle qui est actuellement acceptée, en particulier en théorie mathématique des probabilités.

Le terme «probabilité» a été introduit au Moyen-Age en jurisprudence, construit à partir du latin «*probare*» qui signifie «prouver», sens que l'on retrouve dans les mots «probant», «probation», etc... Il s'agissait d'apprécier

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

les preuves, indices matériels ou témoignages, lors d'un jugement. Suivant la notoriété ou l'autorité morale du témoin, le témoignage avait plus ou moins de poids, ce qui donnait lieu à un «calcul des probabilités». Dans le *dictionnaire Hachette*, Langue-Encyclopédie-Noms propres, 1980, on trouve :

"> ***Calcul des probabilités*** : science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement. - 1360". De même pour le terme :

"> ***Probable*** : adj. Qui a une apparence de vérité, semble plutôt vrai que faux. «*Il est probable qu'il vienne*» ; Lat. «*probabilis*», de «*probare*» ; «*proubable», qu'on peut prouver, 1285 ; 1380*" .

Le mot est utilisé dans ce sens par Mersenne en 1637[27]. La probabilité est considérée alors comme le degré de crédibilité d'une opinion ou d'un jugement sur un fait[28].

Sera probable un avis ou une opinion attesté par toutes les autorités morales ou religieuses, ou par un grand nombre, et par glissement par au moins une autorité ; on aboutit alors à la doctrine du :

"> ***Probabilisme*** *: n.m. PHILO Doctrine qui juge impossible d'arriver à la certitude et recommande de s'en tenir à ce qui est le plus probable.*",

préconisée par les jésuites, et contre laquelle Pascal s'élèvera, par exemple (**[29]** Pensées 981, p. 637) :

"*Que serait-ce que les Jésuites sans la probabilité et que la probabilité sans les jésuites ?" et (P.985, p. 638) : "La probabilité est peu sans les moyens corrompus, et les moyens ne sont rien sans la probabilité.*"[29],

où le terme «probabilité» se réfère à cette doctrine.

Pascal, dans l'argument du pari (**[29]** *Pensées* , p. 418, *Infini-rien*, p. 550), utilise encore la propriété de l'espérance : gain × «nombre de hasards pour

27 - Mersenne (opus cit) : "*Question XXIV : Peut-on sçavoir au vray à quelle heure, à quel jour, en quel mois, et en quelle année le monde a commencé, et quand il finira.*
Il est certain que nul ne peut sçavoir sans revelation en quelle année... Dieu a creé le monde, car les plus sçavans Chronologues avoüent ingenuëment qu'ils ne vont qu'à tastons, et qu'ils n'ont que des conjectures, ou des ***probabilitez****, ...*".

28 - Cette acception est toujours utilisée, en particulier dans l'appareil judiciaire, comme on peut le voir dans l'extrait de l'ordonnance de renvoi du juge Courroye dans l'affaire Carignon : "*Il existe de fortes* ***probabilités*** *pour que le coût de ces avantages fournis par les sociétés concessionnaires ait été refacturé en bout de chaîne aux usagers et consommateurs du service public délégué.*", cité dans le Canard Enchaîné du 10 mai 1995.

29 - Pascal s'élève ici contre la doctrine du probabilisme ; voir e.g. Hacking **[14]**, p. 22-24, et **[7]**.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

le gain» contre perte × «nombre de hasards pour la perte», il fait donc une utilisation de la toute jeune théorie des chances pour en tirer une décision. On peut dire qu'il est l'initiateur de la théorie de la décision. Sa «Géométrie du hasard» était un calcul algébrique des chances et des droits d'espérer qui permet de choisir une stratégie et de prendre une décision basée sur un critère scientifique.

Pascal faisait partie de la communauté janséniste de Port-Royal, où il y avait des discussions religieuses, bien sûr, mais aussi philosophiques et scientifiques. Arnauld et Nicolle ont aussi résidé à l'abbaye de Port-Royal et discuté de divers sujets avec Pascal.

Le mot «probabilité» dans le sens actuel est introduit pour la première fois en 1662 dans la *Logique*, ou l'Art de Penser, dite *Logique* de Port-Royal **[3]**[30]. Cet art de penser est structuré selon les quatre aspects de la pensée rationnelle : comprendre, juger, déduire, ordonner. C'est un ouvrage d'un intérêt considérable qui sera encore utilisé comme manuel durant tout le XVIII^{e} siècle. Dans la lignée d'Aristote sont établies la caractérisation (interne et externe) et les propriétés logiques des propositions certaines ou impossibles. Ensuite, les auteurs étudient les propositions incertaines, en particulier les témoignages sur des événements, plus ou moins probables, de la vie ordinaire et les miracles ; pour ces propositions, on a un «calcul des probabilités» dans le sens indiqué ci-dessus, i.e. sur des degrés de crédibilité. Après, Arnauld et Nicolle passent au cas des propositions concernant des événements futurs (ce qui est peut-être un résultat des discussions avec Pascal), dans le livre IV, chapitre XVI "Du jugement qu'on doit faire des accidens futurs", qui commence ainsi :

"Ces regles qui servent à juger des faits passés, peuvent facilement s'appliquer aux faits à venir."

Ils donnent l'exemple suivant sur un jeu simple :

"Il y a des jeux où dix personnes mettant chacun un écu, il n'y en a qu'un qui gagne le tout, & tous les autres perdent : ainsi chacun n'est au hazard que de perdre un écu, & en peut gagner neuf. Si l'on ne consideroit que le gain & la perte en soi, il sembleroit que tous y ont de l'avantage : mais il faut de plus considerer que si chacun peut gagner neuf écus, & n'est au hazard que d'en perdre un, il est aussi neuf fois plus probable à l'égard de chacun qu'il perdra son écu, & ne gagnera pas les neuf.

30 - Pascal a discuté en particulier de géométrie avec Arnauld, pour les *Elémens de géométrie* de celui-ci.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Ainsi chacun a pour soi neuf écus à esperer, un écu à perdre, neuf degrés de probabilité de perdre un écu, & un seul de gagner les neuf écus : Ce qui met la chose dans une parfaite égalité.

Tous les jeux qui sont de cette sorte sont équitables, ..., & ceux qui sont hors de cette proposition sont manifestement injustes."

On voit donc un glissement du sens du mot «probable», utilisé jusqu'à cette époque pour désigner le degré de crédibilité ou de possibilité d'une opinion ou d'un témoignage sur un événement passé, vers la notion actuelle concernant la probabilité mathématique d'un événement futur sur une expérience répétable, sous l'hypothèse d'équipossibilité. Les termes «chances» ou «hasards» utilisés par Pascal, Fermat et Huygens sont ici exprimés par «degrés de probabilité». On peut noter aussi que le schéma de jeu indiqué est basé sur une convention de justice, d'équité, explicitée par «ce qui met la chose dans une parfaite égalité».

Cette distinction a été bien résumée au XIX^{e} siècle par Cournot :

"Les explications que j'ai données... sur le double sens du mot de probabilité, qui tantôt se rapporte à une certaine mesure de nos connaissances, et tantôt à une mesure de la possibilité des choses, indépendamment de la connaissance que nous en avons : ces explications, dis-je, me semblent propres à résoudre les difficultés qui ont rendu jusqu'ici suspecte à de bons esprits toute la théorie de la probabilité mathématique."[31]

La *Logique* se termine par un raisonnement analogue, plus terre à terre, à celui du pari de Pascal ("Infini-rien") :

"Il y a, par exemple, beaucoup de personnes qui sont dans une frayeur excessive lorsqu'ils entendent tonner... si c'est le seul danger de mourir par le tonnerre[32]*, qui leur cause cette apprehension extraordinaire, il est aisé de leur faire voir qu'elle n'est pas raisonnable. Car de deux millions de personnes, c'est beaucoup s'il y en a une qui meure en cette maniere... Puis donc que la crainte d'un mal doit être proportionnée non seulement à la grandeur du mal, mais aussi à la probabilité de l'évenement, comme il n'y a gueres de genre de mort plus rare que de mourir par le tonnerre, il n'y en a gueres aussi qui nous dût causer moins de crainte."*

31 - **[10]**, p. IV. La suspicion, que Cournot signale ici, concerne l'application de la théorie mathématique probabiliste à la probabilité des témoignages, qu'on rencontre jusqu'au début du XIX^{e} siècle avec Laplace, Poisson et Cournot lui-même. Cet aspect sera complètement occulté par les mathématiciens probabilistes jusqu'au début du XX^{e} siècle, où il reviendra avec la théorie de la décision dans l'incertain (initiée par E. Borel, Ville,...) et dans l'approche subjectiviste de la probabilité (voir ci-après).

32 - i.e. par la foudre.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

On voit ici de plus l'assimilation d'une fréquence[33] avec une probabilité.

Ils donnent aussi un autre exemple d'événement rare, toujours pour illustrer ce raisonnement analogue au pari de Pascal :

"Ainsi ce seroit une sottise de jouer vingt sols contre dix millions de livres, ..., à condition que l'on ne pourroit le gagner, qu'au cas qu'un enfant arrangeant au hazard les lettres d'une Imprimerie, composât tout d'un coup les vingt premiers Vers de l'Eneïde de Virgile."[34]

Dans la seconde moitié du XVII^{e} siècle, en ce qui concerne l'aspect philosophique de la probabilité, nous avons encore à mentionner G.W. Leibniz. Bien que n'ayant obtenu aucun résultat théorique significatif dans ce domaine, il a joué néanmoins un rôle important, à la fois comme mathématicien (il est l'inventeur du calcul différentiel, publié en 1684) et comme philosophe, par l'intermédiaire de sa correspondance[35].

Leibniz s'est intéressé très tôt, dès 1676, à la théorie initiée par Pascal-Fermat et Huygens (cf. **[24]**). Ses études juridiques l'ont amené à étudier la jurisprudence de l'antiquité et du Moyen Age. Les juristes, pour rendre leurs jugements, prenaient en compte diverses variétés de preuves : les preuves pleines, demi-pleines, etc... suivant la confiance qu'on pouvait leur accorder. L'ambition de Leibniz était de rendre la jurisprudence aussi rigoureuse que les mathématiques et d'obtenir une algèbre universelle. Il avait d'ailleurs présenté une thèse en 1666, quand il avait 20 ans, dont le titre est *De Arte Combinatoria*. Il va étendre, comme Arnauld et Nicolle, les opérations logiques sur les propositions certaines aux propositions incertaines, liées à des événements passés incomplètement connus ou aléatoires, avec des degrés de crédibilité sur une échelle de 0 à 1. On peut considérer que cette *caractéristique universelle*, dans l'esprit de Leibniz, s'apparente à la logique floue et à la théorie subjectiviste des probabilités, développée par F.P. Ramsey, D.V. Lindley, B. de Finetti[36], puis L.J. Savage[37], entre autres, c'est-à-

33 - Fréquence supposée car il n'y avait pas, à l'époque, de statistique à ce sujet.

34 - **[3]**, p.353. Cette idée sera reprise par Emile Borel (e.g. **[5]**) sous l'image des «singes dactylographes» pour illustrer un événement de probabilité extrêmement petite.

35 - *Die Philosophischen Schriften* von Gottfried Wilhelm Leibniz, Editions C.J. Gerhardt, tome III, 1887, réédition Olms, 1960, qui contient une partie de la correspondance de Leibniz entre 1673 et 1716.

36 - B. De Finetti : *Theory of Probability*, Wiley, 1974, édition italienne de 1970, premiers travaux vers 1937.

37 - L. J. Savage. : *The Foundations of Statistics*, 1954.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

dire que la probabilité n'existe pas en soi, n'est pas intrinsèque à une chose, mais est une évaluation de *notre* incertitude sur cette chose, et pas seulement sur des événements futurs répétables. Nous pouvons assigner une probabilité à une proposition particulière par rapport à notre jugement personnel et notre état de connaissance, mais l'ensemble de toutes nos attributions de probabilité doit être soumis à des règles assez strictes de cohérence interne.

5 - Arithmétique politique[38]

Cette même année 1662 où parut la *Logique* de Port-Royal, un marchand londonien, John Graunt, publia un ouvrage *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, qui introduisait des problèmes nouveaux de démographie. Les choses les plus remarquables de son livre sont tout d'abord une table de mortalité, et ensuite une évaluation raisonnée de la population de Londres et de l'Angleterre, ainsi que son évolution dans le temps. W. Petty, son ami et contemporain, dans des études similaires, publiées à partir de 1683 et après sa mort (1687), introduit le terme «Arithmétique politique» qui est le titre d'un de ses ouvrages ; il préconise des recensements plus détaillés pour saisir tous les aspects de la vie sociale et économique[39].

Nous allons regarder ici la relation qui s'établit entre ces statistiques et la théorie naissante des probabilités. A cet égard, les idées des hollandais Christiaan et Ludwig Huygens, van Hudde et de Witt, sont intéressantes. Bien sûr, ces correspondances n'ont été publiées que bien plus tard, mais elles reflètent un état d'esprit de l'époque.

Christiaan Huygens, membre de l'Académie Royale, était à Paris en 1669, où son frère Ludwig lui écrit à propos de la table de mortalité de Graunt, avec laquelle il procède à un calcul d'espérance de vie conditionnelle à l'âge. Christiaan lui répond en terme de pari ("*gager avec égal avantage*") qui

38 - Je ferai ici une présentation succincte, me contentant de souligner les relations avec la théorie probabiliste ; un aperçu un peu plus détaillé est fait dans l'article "*Sur la durée de la vie et espérance de vie*" (cf le 2- de la troisième partie, p. 201), une étude plus complète sur cette période peut être trouvée dans l'article de Lanier sur Huygens dans **[16]**, et surtout dans Jacques et Michel Dupâquier, *Histoire de la démographie*, Perrin, 1985.

39 - Voir aussi l'article de A. Ropert : "*Naissance et destin de l'Arithmétique politique*", dans *Scholies* n°9, Actes du Séminaire d'Histoire des Sciences du lycée Malherbe de Caen, 1989.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

correspond à la notion de durée de vie probable, puis reconnaît que ce sont deux notions distinctes :

"Ce sont deux choses différentes que l'espérance et la valeur de l'aage futur d'une personne, et l'aage auquel il y a égale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour régler les rentes à vie, et l'autre pour les gageures... Deux personnes de 16 ans chascun, combien peuvent-ils espérer vivre ensemble sans que l'un ou l'autre meurt ?"[40]

Ces questions sont au centre des discussions avec Jan van Hudde (bourgmestre d'Amsterdam) et Jan de Witt (Pensionnaire de Hollande) en 1671, pour déterminer la valeur des rentes viagères. On a ainsi la première application en économie de la toute jeune théorie des probabilités.

En dehors de toute question sur la représentativité et l'adéquation des données, il semble admis comme évident par les frères Huygens, Leibniz, etc..., que les fréquences observées peuvent être considérées comme des valeurs de probabilité dans un jeu de hasard, la durée de vie étant le gain dans un jeu contre la Nature ; les calculs sur plusieurs têtes se font par multiplication, c'est-à-dire en supposant qu'il y a indépendance[41]. Leibniz, vers 1680, considérait aussi cette question comme analogue à un jeu de hasard, par exemple dans *L'estime des rentes viagères* :

"en réputant toutes les années de vie également fatales je veux dire qu'il meurt autant d'hommes une année qu'une autre et en les supposant d'une égale vitalité, j'imaginerai qu'un tirage au sort décide lequel décède chaque année"[42]

Lors de l'examen des registres de naissance (ou de baptêmes) qui distinguaient les sexes, il avait été remarqué qu'il y avait plus de garçons que de filles (par exemple, par Graunt). La philosophie naturelle de Newton consistait à chercher des lois pour expliquer le monde, ces lois étant le signe, le témoignage d'un ordre divin. Dans ce sens, John Arbuthnot présente un mémoire[43] dans lequel il soutient que le fait qu'il naît plus de garçons que de filles est une preuve de la divine Providence. Cette question va soulever de vives polémiques, depuis Nicolas Bernoulli jusqu'à Pierre Laplace en passant par de Moivre.

40 - Christiaan Huygens, *Oeuvres complètes*, t.6 (Correspondance), 1920.
41 - Cependant, la notion d'indépendance n'était pas encore dégagée à cette époque.
42 - **[24]**, p.297.
43 - J. Arbuthnot : "*An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the Births of both Sexes*", *Philosophical Transactions*, London, pour 1710-1712.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

6 - Le tournant du XVIII[e] siècle en théorie des probabilités

A l'aube du 18[e] siècle, depuis le traité de Huygens en 1657, peu de choses ont été publiées sur le sujet. Le véritable tournant en théorie des probabilités a lieu en 1708-1713 avec la publication de trois ouvrages majeurs : le livre *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard* de Montmort en 1708, le mémoire *De Mensura Sortis* de De Moivre en 1711[44] et le livre *Ars conjectandi* de J. Bernoulli en 1713, auxquels il faut adjoindre la 2e édition revue et très augmentée de l'*Essay* de Montmort à la fin de 1713.

Ces travaux traitent en grande partie des mêmes problèmes, c'est-à-dire trouver les rapports des chances (probabilités) de gagner et les gains espérés dans divers jeux de hasard. Les méthodes employées (combinatoire, récursivité, séries, espérance conditionnelle) se retrouvent dans les trois ouvrages, à des degrés plus ou moins importants.

On doit cependant mettre à part la 4[e] partie du livre de Jacques Bernoulli, où il voulait faire l'application de la doctrine des chances aux affaires civiles, morales et économiques. Pour cela il clarifie la notion de probabilité et la relation entre fréquence et probabilité, donnée par le premier théorème limite en calcul des probabilités, dont la démonstration termine l'ouvrage.[45]

Un certain nombre de résultats nouveaux, qui figuraient dans le manuscrit de J. Bernoulli, ont été publiés avant l'édition d'*Ars Conjectandi* par Montmort et de Moivre. J'adopterai donc l'ordre de présentation suivant : Montmort, Bernoulli, de Moivre, car de Moivre, ayant vécu plus longtemps, a poussé plus loin ses recherches sur le sujet et a donné des résultats importants en 1730-1733.

[46]

44 - De Moivre développera ce mémoire pour faire son traité, *Doctrine of Chances*, première édition en 1718.

45 - Ce théorème peut s'exprimer en gros de la façon suivante : pour une épreuve dont une issue possible E a une probabilité p, la fréquence de réalisations de E sera aussi proche que l'on veut de p avec une probabilité fixée si l'on fait un nombre suffisamment grand de répétitions. L'étude du traité de Jacques Bernoulli sera faite plus loin.

46 - Gravure de la p. 105 de l'*Essay* de Montmort.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

7 - Montmort : le traitement combinatoire

Montmort, qui écrivit le premier ouvrage important **[27]** après celui de Huygens, avait été incité à l'étude des hasards par des questions sur les jeux. Il indique dans sa préface :

"Plusieurs de mes Amis m'avoient excité, il y a déjà longtemps, à essayer si l'Algebre ne pourroit point atteindre à déterminer quel est l'avantage du Banquier dans le Jeu du Pharaon. Je n'avois jamais osé entreprendre cette recherche, car je sçavois que le nombre de tous les divers arrangemens possibles de cinquante-deux cartes, surpasse plus de cent mille millions de fois celui des grains de sable que pourroit contenir le globe de la terre; [...] Je serois encore dans ce préjugé si les succès de feu M Bernoulli ne m'eussent invité il y a quelques années à chercher les différens hazards de ce Jeu... cela me donna la pensée de travailler à fond sur cette matiere, & le desir de dédommager en quelque sorte le Public de la perte qu'il feroit s'il étoit privé de l'excellent Ouvrage de M. Bernoulli."

Fontenelle en dit dans son éloge (**[13]**, p. 469) :

"il se fixa sur une matière toute neuve ; car le peu que MM. Pascal et Huguens en avoient effleuré ne l'empêchoit pas de l'être, et il se mit à en composer un Ouvrage qui ne pouvoit manquer d'être original. Feu M. Bernoulli avoit eu à-peu-près le même dessein, et l'avoit fort avancé ; mais rien n'en avoit paru... Aussi ces sortes de sujets n'avoient-ils pas été traités... M. de Montmort s'y engagea avec un courage de Christophe Colomb, et en eut aussi le succès."

C'est donc à l'occasion de problèmes sur les jeux que Montmort a commencé à travailler en théorie des probabilités. D'ailleurs, la première édition de son ouvrage vérifie parfaitement le titre *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* qu'il lui a donné : il passe en revue dans la première partie un certain nombre de jeux de cartes en vogue ; dans la seconde partie, des jeux de dés ; il donne dans la dernière partie des solutions aux cinq problèmes posés par Huygens et divers autres problèmes sur les chances. Les problèmes étudiés sur les jeux de cartes, cependant, sont pour la plupart très compliqués et demandent bien plus d'habileté combinatoire (développement binomial et multinomial) que ceux considérés jusque là avec les dés. Ils font intervenir des tirages sans remise et des équations de récurrence résolues par sommation. Parmi les questions posées sur le «Jeu de Treize», on trouve un problème qui a une place importante en calcul des probabilités, c'est celui des rencontres :

"Pierre ayant un jeu entier composé de cinquante-deux cartes, mêlées à discretion, les tire l'une après l'autre, nommant & prononçant un lorsqu'il tire la premiere carte, deux lorsqu'il tire la seconde, ... & ainsi de suite jusqu'à la treizième

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

qui est un Roy. Alors si dans toute cette suite de cartes il n'en a tiré aucune selon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, & cede la main."

On peut exprimer cette question sous la forme suivante : quelle est la probabilité qu'au moins une des cartes sorte à un rang correspondant à son ordre de valeur ? Montmort donne le résultat sans démonstration (dans la 1ère édition). Dans la dernière partie, Montmort reprend le problème des partis dont il donne une solution complète dans le cas de joueurs de même force (le cas où «le hasard est égal»). Montmort s'est limité au cas des jeux et en donne la raison :

"Si je m'étois proposé de suivre en tout le projet de M. Bernoulli, j'aurois dû ajoûter une cinquiéme Partie, où j'eusse fait l'application des methodes contenues dans les quatre premieres, à des sujets politiques, oeconomiques ou moraux. Ce qui m'en a empêché, c'est l'embarras où je me suis trouvé de faire des hypotheses, qui étant appuyées sur des faits certains, pûssent me conduire et me soûtenir dans mes recherches."

Cette question avait conduit Jacques Bernoulli à son «théorème d'or», mais Montmort n'était pas un aussi habile géomètre.

Montmort reçut des commentaires de Jean Bernoulli qui lui conseilla de regrouper les outils de combinatoire dont il s'était servi pour l'analyse des jeux. Il se lia d'amitié vers 1710 avec **Nicolas Bernoulli**[47], neveu de Jean et de Jacques :

"M. de Montmort l'emmena chez lui à sa campagne, où ils passèrent trois mois dans un combat continuel de Problêmes dignes des plus grands Géomètres. Il s'agissoit toujours d'estimer les hasards, de régler des paris"[48],

puis ils entretinrent une correspondance importante sur divers problèmes de probabilité et de mathématiques, qui contient de nombreuses avancées par rapport à la première édition de 1708 de l'*Essay*.

Montmort publie en 1713 la seconde édition de son ouvrage. Outre un avertissement, il y insère une partie importante intitulée : "*Traité des combinaisons*" qui regroupe les propriétés combinatoires utilisées en divers endroits dans la première édition, et en fin de volume, sa correspondance avec Jean et Nicolas Bernoulli. Quelques problèmes sont modifiés, d'autres ajoutés et les solutions données pour certains problèmes pour lesquels il n'y

47 - Nicolas Bernoulli s'occupait alors de faire publier l'ouvrage, l'*Ars Conjectandi*, de son oncle Jacques, dont il s'est peut-être servi pour sa thèse *De Arte Conjectandi in Jure*, présentée en 1709.

48 - **[13]**, p.470.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

avait qu'un exemple numérique dans la première édition. Par exemple, d'après une suggestion de Jean Bernoulli, il étudie le problème des partis avec des joueurs d'adresses différentes (des chances inégales) et donne une solution générale du problème de la durée du jeu :

"Sur la durée des parties que l'on joue en rabattant... On demande combien il y a à parier que la partie qui peut durer à l'infini, sera finie en un certain nombre déterminé de coups au plus." (p. 268) ,

que l'on trouve dans sa correspondance avec Nicolas Bernoulli. Ce problème fut résolu d'une façon différente par de Moivre en 1711 dans son article *De Mensura Sortis*[49].

Dans une lettre à Montmort, du 11 octobre 1712, Nicolas Bernoulli reprend l'argument de Arbuthnot indiqué ci-dessus (fin du §5) :

"On prétend que si le hazard gouvernoit le monde, il seroit impossible que les nombres des mâles & des femelles s'approchent de si près pendant plusieurs années de suite... en examinant le Catalogue des enfans nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710 inclusivement, ..., la raison des mâles aux femelles est fort près de la raison de 18 à 17, d'où je conclus que la probabilité pour qu'il naisse un garçon, est à la probabilité pour qu'il naisse une fille environ comme 18 à 17."

Il revient sur ce sujet dans une lettre du 23 janvier 1713 :

"Or je vous prouverai qu'il y a beaucoup à parier qu'entre 14000 enfans, le nombre des mâles ne sera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163, ... Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces chacun, dont 18 soient blanches & 17 noires",

il utilise des approximations pour les coefficients du binôme et obtient un énoncé analogue à la loi des grands nombres, où il remarque que la probabilité que le nombre de faces blanches tombe dans un intervalle donné dépend de la longueur de cet intervalle.

Les avancées conceptuelles dans la première édition de l'ouvrage de Montmort ne sont peut-être pas très significatives, sauf l'emploi important de l'analyse combinatoire, mais son influence est importante en ce qu'il a joué le rôle d'incitation, en particulier pour de Moivre et les cousins Bernoulli, Nicolas d'abord et Daniel par la suite. Le problème ou paradoxe de Saint-Pétersbourg[50] est une extension de problèmes que Nicolas Bernoulli proposait à Montmort dans une lettre de septembre 1713[51] :

49 - Ce problème sera aussi examiné en grand détail par Laplace **[23]**.
50 - Dans le mémoire de Daniel Bernoulli : "*Specimen theoriae de mensura sortis*", *Comm. Acad. Sc. Petrop.* pour 1730-1731, publié en 1738.
51 - **[27]**, p.402.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

"Quatrième problème. *A promet de donner un écu à B, si avec un dé ordinaire il amène au premier coup six points, deux écus s'il amene le six au second, trois écus s'il amene ce point au troisième coup, quatre écus s'il l'amene au quatrième, & ainsi de suite ; on demande quelle est l'esperance de B.*

Cinquième problème. *On demande la même chose si A promet à B de lui donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme auparavant.*"

Daniel propose un jeu avec une pièce équilibrée et des gains en la progression 1, 2, 4, 8, 16, &c si on obtient pour la première fois croix au premier lancer, au deuxième, &c. Le paradoxe provient de ce qu'un jeu était alors considéré comme équitable si la mise est égale à l'espérance mathématique de gain, or ici cette valeur est infinie, bien que ceux qui cherchaient à résoudre cette question sentaient que l'enjeu devait être fini, et même assez petit. Buffon donne quelques détails sur ce problème (**[6]**, pp. 47-58), il avait d'ailleurs conduit une expérimentation sur ce sujet et obtenu une valeur équivalente à environ cinq écus (voir **[6]**, p. 53), ce qui est la première expérimentation statistique pour valider une hypothèse probabiliste[52].

8 - La relation entre fréquence et probabilité : la loi des grands nombres de Jacques Bernoulli

Jacques Bernoulli, né en 1654 à Bâle, l'année de la correspondance entre Pascal et Fermat, allait devenir un des fondateurs de cette nouvelle théorie publiée par Huygens. Selon l'éloge fait par Fontenelle (**[13]** , p. 109 et sq.),

"*on le destinoit à être Ministre*[53]*, et on lui appris du Latin, du Grec, de la Philosophie Scholastique, nulle Géométrie : mais dès qu'il eut vu par hasard des figures géométriques, il en sentit le charme, si peu sensible pour la plupart des esprits. A peine avoit-il quelque Livre de Mathématiques, encore n'en pouvoit-il jouir qu'à la dérobée... Il alla même jusqu'à l'Astronomie... en 1684 la face de la Géométrie change presque tout-à-coup. L'illustre M. Léibnitz donna dans les Actes de Léipsic quelques Essais du nouveau Calcul Différentiel, ou des Infiniments Petits, dont il cachoit l'art et la méthode. Aussitôt Messieurs Bernoulli... s'appliquèrent à en chercher le secret ; ils y réussirent... au point que M. Léibnitz a déclaré qu'elle leur appartenoit autant qu'à lui.*"[54]

52 - Ce problème dit de Saint-Pétersbourg a été résolu par Feller en 1937, voir W. Feller : *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, vol. 1, 1951.

53 - i.e. pasteur protestant.

54 - Eloge par Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie*, Paris, pour 1705, publiée en 1706. Un autre éloge non signé est paru dans le *Journal des Sçavans* de 1706, par Saurin d'après Montmort (**[27]**, p. IV).

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

On ne sait pas ce qui a incité Jacques Bernoulli à s'intéresser à la théorie des probabilités, peut-être le mémoire de Sauveur sur le Jeu de la Bassette dans le *Journal des Sçavans* de 1679, jeu alors fort en vogue, ou le petit traité de Huygens. Cependant la première chose qu'il donna sur ce sujet est un article, dans le *Journal des Sçavans* pour 1685, contenant deux problèmes de jeu de dés, prolongement des problèmes que Huygens avait lancés comme défi aux autres mathématiciens. La solution de ces problèmes, donnée par J. Bernoulli dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig pour 1690, puis quelque temps après par Leibniz, fait intervenir des séries infinies. Un autre écrit en français, anonyme (d'après Montucla **[28]**, p. 391) mais qui lui a été attribué et qui a été publié par Nicolas Bernoulli à la suite de son *Ars Conjectandi* **[4]**, est intitulé *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*. D'après ses dires, Bernoulli aurait commencé à méditer à partir de cette époque sur son grand ouvrage en théorie des chances, l'*Ars conjectandi*. A sa mort en 1705, l'ouvrage n'était pas terminé et des querelles familiales firent qu'il ne parut qu'en 1713, par les soins de son neveu Nicolas.

Fontenelle en dit dans son éloge (**[13]**, p. 120-121) :

"Il achevoit un grand Ouvrage, De Arte conjectandi*; et quoiqu'il n'en est rien paru, nous pouvons en donner une idée sur la foi de M. Herman... Quelques grands Mathématiciens, et principalement Messieurs Pascal et Hugens, ont déjà proposé ou résolu des Problêmes sur cette matière, mais n'ont fait que l'effleurer ; et M. Bernoulli l'embrassoit dans une plus grande étendue, et l'approfondissoit beaucoup davantage. Il la portoit même jusqu'aux choses morales et politiques... La suite de ces idées a conduit M. Bernoulli à cette question : Si le nombre des cas inconnus diminuant toujours, la probabilité du parti qu'on doit prendre en augmente nécessairement, de sorte qu'elle en vienne à la fin à tel degré de certitude qu'on voudra...M. Bernoulli, qui possédoit fort cette matière, assuroit que ce Problême étoit beaucoup plus difficile que celui de la Quadrature du Cercle, et certainement il seroit sans comparaison plus utile."*

Ce traité de Jacques Bernoulli, l'*Ars conjectandi*, est divisé en quatre parties. La première partie comporte une reproduction du traité de Huygens avec des notes et commentaires. En particulier, J. Bernoulli propose pour la proposition XIV (voir ci-dessus) une solution basée sur le calcul de l'espérance mathématique par des progressions géométriques infinies. La seconde partie est un traité des permutations et des combinaisons, la troisième comporte des problèmes relatifs à des jeux de chance avec leurs solutions. La quatrième partie est restée inachevée, mais expose une réflexion en profondeur sur la probabilité ; elle traite de "*l'usage et l'application de la*

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques". Ceci est un écho des travaux sur les rentes viagères faits par les hollandais ; en effet, en 1703, J. Bernoulli a demandé à Leibniz de lui procurer une copie du petit traité de 1671 de van Hudde et du rapport de de Witt, mais en vain.

Dans cette quatrième partie, J. Bernoulli commence en préliminaire par distinguer la certitude objective et subjective d'une chose[55], et indique que :

"La probabilité *est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout.",*

passe à la «certitude morale»[56], puis caractérise les événements nécessaires et contingents dans une vue subjectiviste :

"ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre (ou plutôt le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire ; si bien que la contingence est surtout en rapport avec notre connaissance."

Laplace dira (**[23]**, p. 34) :

"La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances."

Bernoulli passe ensuite aux chapitres 2 et 3 à l'art de conjecturer et de calculer les probabilités, qui est une formalisation et une algébrisation des idées de la *Logique* de Port-Royal (**[3]**).

Dans le chapitre 4, Bernoulli en arrive à

"La manière de rechercher le nombre des cas. Ce qu'il faut penser de celui qui est établi par des expériences."

Il explicite d'abord la démarche de base d'un calcul probabiliste :

"il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres",

c'est-à-dire, en langage moderne, de déterminer l'univers ou ensemble fondamental et les probabilités des événements élémentaires (les résultats possibles) ; ce que l'on peut faire pour

55 - C'est la raison pour laquelle certains subjectivistes revendiquent Bernoulli comme le fondateur de la théorie subjectiviste des probabilités.

56 - De nombreuses études (e.g. **[5]**, **[6]**, **[23]**) ont traité ce point qui est un des plus délicats et controversés pour l'application de la théorie probabiliste à la vie ordinaire : à partir de quelle valeur peut-on dire qu'on a atteint la certitude morale ou l'impossibilité morale pour un événement ?

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

"les jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, ... de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité."

Il passe ensuite aux phénomènes «où cela n'a pas du tout lieu» et où on ne peut faire un calcul des probabilités. Mais

"Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins ***a posteriori****, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables."*

Le problème défini ici par Bernoulli est celui de l'estimation. Il va donc étudier la relation entre la probabilité d'un événement concernant une expérience aléatoire et la fréquence relative de celui-ci lors de la répétition de cette épreuve ; il appellera le résultat obtenu son «théorème d'or», appelé actuellement «théorème de Bernoulli»[57]. Le nom de «loi des grands nombres», utilisé maintenant pour des résultats de ce type, semble avoir été donné par Poisson qui écrit dans son traité, dès le préambule (**[31]**, p. 7) :

"Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la ***loi des grands nombres.****"*, et p. 8 :

"Cette loi des grands nombres s'observe dans les événements que nous attribuons au hasard aveugle, faute d'en connaître les causes, ou parce qu'elles sont trop compliquées... Mais dans la plupart des questions d'éventualité, la détermination a priori *des chances des divers événements est impossible, et ce sont, au contraire, les résultats observés qui les font connaître."*

Ce que Poisson appelle «loi des grands nombres» est un principe conjecturé, une ligne de recherche qui se poursuit encore aujourd'hui. Ce nom caractérise un certain type de théorèmes limites. Il pose ici très clairement le concept de l'approche fréquentiste, que ce soit pour la valeur d'une probabilité ou pour une distribution. Le résultat démontré par Jacques Bernoulli a été généralisé dans de nombreuses directions ; c'est maintenant un cas particulier de la loi faible des grands nombres, pour la probabilité d'un événement.

La problématique envisagée par Bernoulli n'est cependant pas nouvelle : elle est contenue de façon implicite dans la construction de dés

57 - Pour une étude bien plus détaillée sur Bernoulli, voir **[4]** ainsi que l'article de Norbert Meusnier, "*Argumentation et démonstration : à quoi sert la démonstration de la «Loi des grands nombres» de Jacques Bernoulli*", dans **[22]** ; sur la loi des grands nombres, voir l'article de Denis Lanier et Didier Trotoux, "*La loi des Grands Nombres : le théorème de Moivre-Laplace*", Actes de la 6ème Université d'été 95 sur l'histoire des mathématiques de Besançon, IREM de Franche-Comté, 1996.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

truqués, mentionnés déjà dans la Rome antique. Elle est indiquée de façon obscure par Cardan :

"Pour une succession répétée, ... cette connaissance est basée sur une conjecture qui produit seulement une approximation, et le compte n'est pas exact dans ses détails ; cependant il arrive dans le cas de beaucoup de circuits que la chose tombe très près de la conjecture."

Galilée aussi l'avait noté, mais de façon plus claire :

"Toutefois, quoique le 9 et le 12 se composent en autant de façons que le 10 et le 11, ce pour quoi ils devraient être présumés d'usage égal, on voit néanmoins que la longue observation a fait estimer par les joueurs que le 10 et le 11 sont plus avantageux que le 9 et le 12."[58]

Ce premier théorème limite de la théorie probabiliste est établi par Jacques Bernoulli dans la quatrième partie de son ouvrage *Ars Conjectandi.* Bernoulli, d'après ses explications littérales et préalables, se posait le problème de l'intervalle de confiance, c'est-à-dire qu'ayant observé une certaine fréquence relative sur une expérimentation de n répétitions d'une même épreuve à deux issues, il demande quelle valeur attribuer à la proportion des issues «fertiles» inconnue, et plus précisément quel est le meilleur intervalle qui recouvrira la valeur véritable de la proportion avec un niveau de confiance donné à l'avance. Cependant, lorsqu'il traite le problème, ce qu'il résout est la question de déterminer la taille de l'échantillon à partir d'un intervalle de pari. En notation moderne, la question se présente ainsi : on veut déterminer le nombre n d'expériences à faire pour que la fréquence de succès (de probabilité a priori p connue) tombe dans un intervalle centré sur p, de largeur fixée (c'est l'intervalle de pari), avec une probabilité donnée.

Considérons sa proposition principale[59] :

58 - Galilée, op. cit. Selon Hacking **[14]**, il est improbable que des joueurs de dés se soient rendus compte d'une différence de probabilité de 0,01, et ceci pour plusieurs raisons : les dés sont en général imparfaits, la possibilité de tricherie, les joueurs ne notent pas de séries aussi longues pour mettre en évidence une telle différence. Cependant, l'existence, depuis longtemps, de dés spécialement pipés infirme cette dernière supposition.

59 - On peut exprimer ce théorème de la façon suivante avec des notations modernes : Soit A une issue possible d'une épreuve, de probabilité p. On répète n fois cette épreuve et on note F_n la fréquence de réalisations de A dans ces n épreuves.
Alors pour toute valeur 1- α entre 0 et 1 et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 assez grand tel que si $n > n_0$, on a: $P(|F_n - p| < \varepsilon) > 1 - \alpha$ ce qui signifie que la suite de variables aléatoires F_n tend «en probabilité» vers la valeur p de la probabilité.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

*"... j'appellerai **fertiles** les cas dans lesquels un événement peut se produire, et **stériles** les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences **fertiles** celles pour lesquelles on constate qu'un des cas **fertiles** peut survenir, et **stériles** celles pour lesquelles on observe qu'un des cas **stériles** se produit. Soit donc le nombre de cas **fertiles** au nombre de cas **stériles** précisément ou approximativement dans le rapport* r/s *et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport* $\frac{r}{r+s}$ *ou* r/t *rapport qu'encadrent les limites* $\frac{r-1}{t}$ *&* $\frac{r+1}{t}$*. Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut (soit* c*) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que* $\frac{r+1}{t}$*, ni plus petit que* $\frac{r-1}{t}$*."*

Bernoulli utilise, pour faire cette démonstration, des méthodes combinatoires : comparaison des coefficients du binôme dont l'exposant est très élevé et minorations fines de leurs rapports infiniment grands.

Stigler [**33**, p. 77] avance l'hypothèse que Jacques Bernoulli n'a pas publié son *Ars conjectandi*[60] parce qu'il estimait que c'était un échec en raison du nombre considérable (25 550) d'expériences à faire pour avoir une «certitude morale» (0,999 qu'il prend avec $c = 1\,000$) que la fréquence des cas «fertiles» observés est dans l'intervalle 29/50, 31/50 (ayant 50 boules dans son urne dont 30 blanches, pour modéliser chaque épreuve). Si on considère qu'une épreuve prend une minute, la durée de réalisation de ces expériences faites sans s'arrêter prendrait près de 18 jours entiers. Le résultat de Bernoulli n'a donc aucune valeur pratique, à moins d'améliorer l'inégalité qui permet de déterminer le nombre d'expériences à faire, ou de prendre une condition moins forte que la «certitude morale» (le «niveau de confiance» couramment utilisé de nos jours est 95% correspondant à $c = 19$, mais cela ne joue que par un facteur d'environ 2 sur la taille de l'échantillon à prélever : le calcul de Bernoulli donnerait alors 14 750 épreuves au lieu de 25 550) et surtout un intervalle plus grand car d'après les résultats de De Moivre (voir plus loin), le nombre d'épreuves à répéter varie comme le carré de la longueur de l'intervalle de confiance. De plus, ce nombre considérable ne correspond pas à l'intuition commune qu'au bout de quelques dizaines ou centaines d'épreuves, on obtient une fréquence très approchée de la véritable valeur de

60 - Bernoulli avait à peu près son théorème vers 1690.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

la proportion *p*. Peut-être aussi Bernoulli avait-il conscience que cette procédure qu'il indiquait ne correspondait pas au problème qu'il se posait, qui était celui de l'estimation par intervalle.

Une approche efficace de ce problème de la probabilité inverse (que peut-on dire de la probabilité d'un événement quand on connaît sa fréquence de réalisations sur un certain nombre de répétitions ?) ne sera effectuée qu'à la fin du siècle par Bayes et Laplace (probabilités a posteriori) puis par le théorème limite central de Laplace au début du XIX[e] siècle.

61

9 - De Moivre : le traitement analytique

C'est à la demande d'un Lord, Francis Roberts[62], membre de la Royal Society, lecteur du traité de Huygens et de l'*Essay* de Montmort, et certainement joueur, que Abraham de Moivre commença vers 1709 ses travaux en théorie des probabilités. Comme il l'écrit dans sa lettre de dédicace de son mémoire *De Mensura Sortis* de 1711, il se base sur les livres de Huygens et de Montmort

"A ma connaissance, Huygens *fut le premier à présenter des règles pour résoudre ces sortes de problèmes, que très récemment un auteur Français*[63] *a bien illustré d'exemples variés; mais ces gentilshommes distingués ne semblent pas avoir employé toute la simplicité et la généralité que la nature du sujet demande".*

Ceci laisse sous-entendre que Montmort n'apportait rien de plus par rapport à Huygens, sinon une illustration par quelques exemples nouveaux. Cela va amener des remarques de Montmort dans la 2[e] édition de son *Essay* et une dispute de priorité sur quelques uns des résultats nouveaux.

La 2[e] édition très augmentée de l'*Essay* de Montmort (1713) comporte beaucoup de résultats que De Moivre a publiés dans *De Mensura Sortis* de 1711. Comme Montmort le souligne lui-même, puisque De Moivre a basé son

61 - Gravure en tête de l'avertissement p.xi de la *Doctrine of Chances* de De Moivre, 3ème édition.

62 - Francis Roberts avait déjà travaillé le sujet : mémoire "An Arithmetical Paradox, concerning the chances of Lotteries", *Philosophical Transactions*, n° 198 pour le mois de mars 1693.

63 - Il s'agit de Pierre Rémond de Montmort qui a publié son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* en 1708.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

travail sur le traité de Huygens et la 1e édition de l'*Essay*, il n'y a rien de surprenant à ce que les résultats de De Moivre et ceux de Montmort et Nicolas Bernoulli soient similaires.

Le mémoire de De Moivre, *De Mensura Sortis* de 1711, porte aussi sur les jeux, mais de façon épurée ; c'est un traitement purement mathématique qui en est fait. Il commence directement en définissant le degré de probabilité à partir du nombre de cas également faciles, puis en prenant comme axiome la propriété de l'espérance mathématique donnée par Huygens dans sa proposition III. Ensuite, de Moivre traite le problème des partis dans le cas de joueurs de forces inégales (c'est le problème de Roberts pour des personnes jouant aux boules, qui ont des adresses différentes à ce jeu) et à plus de deux joueurs, ainsi que le problème de la durée du jeu (le cinquième de ceux proposés par Huygens).

Les 26 problèmes sont basés sur des modèles mathématiques de jeux de hasard, il n'y a pas de mention d'observations (et de relation entre fréquence et probabilité), ni même d'objets qui conduisent à des attributions de chances pour les issues possibles. La solution de beaucoup de problèmes est donnée en utilisant des développements du binôme[64] et de la binomiale négative, ainsi que des séries.

Abraham de Moivre développe ensuite ce mémoire en 1718 dans *The Doctrine of Chances*, **[26]**.

De Moivre, après avoir indiqué vers 1721 qu'il ne se sentait pas de taille à améliorer le résultat de Bernoulli, forge, dans *Miscellanea Analytica* (1730-1733), les outils mathématiques qui lui permettront d'aborder ce problème. Comme ce qu'avait fait Bernoulli, c'est une étude détaillée[65] du développement binomial pour des puissances élevées qui vont lui donner la clef. En donnant une approximation numérique pour les coefficients binomiaux, qui est équivalente à la formule de Stirling, il trouve que le logarithme du rapport d'un terme, situé à la distance d du terme médian (maximum), à ce terme médian est $-2dd/n$ [66]. Il arrive ainsi à la courbe qu'on appellera normale, mais il ne la considère que comme une approximation et non comme la densité d'une loi continue. Il insère ces résultats dans les 2e et 3e éditions, qu'il applique au rapport des naissances garçons/filles en

64 - Voir l'article de M. Pensivy : "*Les démonstrations de la formule du binôme au XVIIe siècle*", dans **[22]**.

65 - *A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial* (a+b)*n expanded into a Series*, *Doctrine of Chances*, 3ème édition, pp. 243-250.

66 - Corollaire 1, **[26]** *Doctrine of Chances*, 3ème édition, p. 245.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

réponse à Nicolas Bernoulli[67]. Citons ses derniers corollaires (**[26]**, p. 249-250) :

"Corollaire 8.

Le rapport que, dans une puissance infinie d'une binomiale, dénotée par n, le plus grand terme porte à la somme de tout le reste, sera justement exprimé par la fraction $\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$ *, où c désigne, comme auparavant, la circonférence d'un cercle dont le rayon égale l'unité.*

Corollaire 9.

Si, dans une puissance infinie, quelque terme est distant du plus grand par l'intervalle l, alors le logarithme hyperbolique du rapport que ce terme porte au plus grand sera exprimé par la fraction $-\frac{(a+b)^2}{2abn} \times ll$ *, pourvu que le rapport de l à n ne soit pas un rapport fini, mais soit tel qu'il puisse être conçu entre tout nombre donné p et* $\sqrt{n}$*, de sorte que l soit exprimable par p* $\sqrt{n}$*."*

Ce traité de de Moivre, *The Doctrine of Chances*, est resté Le Traité en calcul des probabilités jusqu'à la parution du grand traité de Laplace de 1812, *Théorie analytique des probabilités*, dans lequel ce dernier achève le dessein de Bernoulli en montrant que la loi limite de la variable discrète binomiale est une loi continue[68].

67 - Remarque II, **[26]** *Doctrine of Chances*, 3ème édition, p. 251-253.

68 - Ce résultat est connu sous le nom de Moivre-Laplace. On l'exprime en notation moderne de la façon suivante: Si X_n suit une loi binomiale B(n , p), c'est-à-dire X_n est le nombre de réalisations d'un événement E de probabilité p lors de n répétitions de l'épreuve, alors quand n tend vers l'infini, la loi de $(X_n - np)/\sqrt{np\,(1-p)}$ tend vers la loi normale centrée réduite de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

Presses universitaires de Franche-Comté - Université de Franche-Comté
25030 Besançon cedex - France Tél. : (33) 03 81 66 59 70 - Fax : (33) 03 81 66 59 80
Mél : presses-ufc@univ-fcomte.fr - http : //presses-ufc.univ-fcomte.fr

Bibliographie

[1] P. J. ABOUT et M. BOY : *La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat, la Géométrie du Hasard ou le début du Calcul des Probabilités,* Les Cahiers de Fontenay n° 32, 1983.

[2] Jean LE ROND D'ALEMBERT : *Opuscules Mathématiques,* vol.2 1761, vol.4 1768.

[3] Antoine ARNAULD et Pierre NICOLLE : *La logique ou l'Art de penser,* 1662, 2ème édition 1664, Edition critique par Pierre CLAIR et François GIRBAL, PUF, 1965.

[4] Jacques BERNOULLI : *Ars Conjectandi,* 1713, 4ème partie, traduit du latin par Norbert MEUSNIER, IREM de Rouen, 1987.

[5] Emile BOREL : *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* Editions Gauthier-Villars, 2ème édition 1952.

[6] Georges Louis LECLERC, Comte DE BUFFON : *Essai d'arithmétique morale (1777),* Oeuvres, tome 12, Garnier Frères, 1855, et aussi in *Un autre Buffon* par J. L. BINET et J. ROGER, Editions Hermann, 1977.

[7] Cahiers pédagogiques de philosophie et d'histoire des mathématiques, fasc. 4 : *Pascal et les probabilités,* CRDP-IREM de Rouen, 1993.

[8] Gerolamo CARDANO : *The Book of Games of Chances*, Editions Holt, Rinehard and Winston, 1961.

[9] E. COUMET : *La théorie du hasard est-elle née par hasard ?*, Annales Economies, Sociétés, Civilisations, n° 3, 1970.

[10] Antoine Augustion COURNOT : *Exposition de la théorie des chances et de la probabilité,* Hachette, 1843.

[11] *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques,* 1785, réédition ACL, 1987.

[12] Pierre DE FERMAT : *Oeuvres*, (tome 2, Correspondance, 1894) publiées par P. TANNERY et C. HENRY, Editions Gauthier-Villars, 1891-1922.

[13] FONTENELLE : *Oeuvres complètes,* tome VI, Eloges, Editions Fayard, 1994.

[14] Ian HACKING : *The emergence of probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

The Taming of Chance, Cambridge University Press, 1990.

[15] Abraham HALD : *A history of probability and statistics,* New York, 1989.

[16] *Histoire d'infini,* Actes du 9ème colloque Epistémologie et Histoire des mathématiques, Landerneau, 1992, IREM de Brest, 1994.

[17] Christiaan HUYGENS : *Ratiociniis in aleae ludo,* 1657, traduction française "Du calcul dans les jeux de hasard" in tome 14, Oeuvres complètes, 22 vol. 1888-1950, La Haye.

[18] IREM de Paris 7, collection *M.A.T.H. Mathématiques : approche par des textes historiques*, n° 61, 1986 et Mnémosyne n° 6, 1993.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005

[19] IREM de Poitiers, *Thèmes pour l'enseignement de la statistique et des probabilités*, 1994.

[20] IREM de Strasbourg, *Enseigner les probabilités en classe de première,* 1992.

[21] M. G. KENDALL and R. L. PLACKET, eds : *Studies in the history of statistics and probability,* vol. 2, C. Griffin & Co, Londres, 1977.

[22] *La démonstration mathématique dans l'histoire,* Actes du 7ème colloque Epistémologie et Histoire des mathématiques, Besançon, 1989, IREM de Besançon et de Lyon, 1990.

[23] Pierre Simon DE LAPLACE : *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition 1825), préface de René THOM, postface de B. BRU, Editions Bourgois, 1986. *Théorie analytique des probabilités*, 1ère édition 1812, 3ème édition 1820, Oeuvres complètes, tome 7.

[24] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ : *L'estime des apparences*, traduction et notes de M. Parmentier, Editions Vrin, 1995.

[25] M. LELOUARD, C. MIRA, J. M. NICOLLE : *Etudes d'histoire externaliste des mathématiques,* IREM de Rouen, 1994.

[26] Abraham DE MOIVRE : *De Mensura Sortis, Philosophical Transactions of the Royal Society,* London, n° 329, pour les mois de janvier, février et mars 1711, publié en 1712.

The Doctrine of Chances, 1718, 1738, 3ème édition 1756.

[27] Pierre REMOND DE MONTMORT : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* 1708, 2ème édition 1713.

[28] Jean-François MONTUCLA : *Histoire des mathématiques,* 4 tomes, (tome 3, p. 380-426 sur les probabilités) 1799-1802, réédition Blanchard, Paris, 1968.

[29] Blaise PASCAL : *Oeuvres complètes,* Editions du Seuil, 1963.

[30] E. S. PEARSON and M. G. KENDALL, eds : *Studies in the history of statistics and probability,* vol. 1, C. Griffin & Co, Londres, 1970.

[31] Siméon Denis POISSON : *Recherches sur la probabilité des jugements*, 1837.

[32] Collectif: *Le futur est-il prévisible ?*, Sciences et Avenir, Hors-série n° 106, juin 1996.

[33] Stephen M. STIGLER : *The history of statistics*, Belknap Press, 1986.

[34] Isaac TODHUNTER : *A history of the mathematical theory of probability, from the time of Pascal to that of Laplace*, 1865, réédition Chelsea, New York, 1965.

Édition intégrale en ligne de : *Autour de la modélisation en probabilités*
Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, coordination Michel Henry
Presses universitaires de Franche-Comté, 2001, 262 pages, ISBN 2-84627-018-X
© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté - 2005