Commission Inter-IREM Premier Cycle

Des Mathématiques au Cycle Central

Tome 1

Programme du Cycle Central - 1997

SOMMAIRE

PRÉFACE

Les « suivis scientifiques » avaient pour objectif essentiel d'illustrer les programmes de 1986 à 1989, les brochures « Des mathématiques ... » qui leur succèdent ne poursuivent pas les mêmes buts. Les modifications de programme ne sont pas de même nature, il y a peu de changements apparents mais un changement d'état d'esprit qui va dans le sens du travail mené dans les IREM (cf. les brochures produites ces dernières années).

Le cycle central comporte deux tomes, si le premier est centré sur la cinquième, un certain nombre d'articles ne se limitent pas à ce niveau, correspondant en cela à l'idée de cycle central. La réflexion se poursuivra dans le tome 2, en revenant éventuellement sur des sujets de cinquième non abordés ici.

Les articles de cette brochure sont liés aux travaux des IREM, les auteurs y travaillent dans le cadre de groupes de recherche.

Nous avons fait des choix de thèmes nourissant une réflexion qui ne s'arrête pas à une suite d'exercices à faire en classe. De ce fait, nous ne proposons pas un parcours exhaustif du programme.

Nous souhaitons ainsi faire partager certaines de nos convictions sur l'enseignement des mathématiques au collège.

Nous tenons à remercier tous les collègues qui ont participé à la réalisation de cette brochure.

Christian MASSOT et Brigitte POULAIN

Les responsables de la
Commission Inter-IREM Premier Cycle

Présentation

André ANTIBI
Président de l'ADIREM

La DLC* (Direction des Lycées et Collèges) propose régulièrement à l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'IREM) certains thèmes de Recherche importants. La réflexion et l'analyse des nouveaux programmes de Collège est l'un de ces thèmes. Il a été pris en charge par la Commission inter-IREM Premier Cycle, dans laquelle la plupart des IREM de France sont représentés. La compétence et le dévouement des membres d'une telle Commission sont reconnus dans notre communauté et les documents qu'elle produit sont utiles et appréciés.

La sortie tardive de cette brochure est essentiellement due à des "hésitations" concernant son impression et sa diffusion. Tous les articles étaient prêts avant la mise en application des nouveaux programmes de cinquième. En définitive, contrairement à ce qui était prévu initialement, c'est l'ADIREM qui a pris en charge l'impression et la diffusion de cette brochure.

Je tiens à remercier et à féliciter tous les membres de la Commission Premier Cycle pour leur travail, et particulièrement Christian MASSOT et Brigitte POULAIN, responsables de cette Commission. Je suis sûr que, comme par le passé, une telle brochure montrera l'importance et la qualité du travail et de la réflexion effectués dans les IREM.

* Actuellement, la DLC et la DE (Direction des Ecoles) n'existent plus. Elles font partie d'une nouvelle Direction : la DESCO (Direction des Enseignements Supérieurs).

INTRODUCTION

Le cycle central

Le cycle central : une nouveauté ! Et quelle nouveauté : penser l'apprentissage sur deux ans ! C'est-à-dire le penser dans la durée. C'est non seulement imaginer l'enchaînement des connaissances, mais aussi prévoir leurs interactions et leur réorganisation. Deux ans, c'est encore court, mais c'est déjà bien pour nous permettre à nous, enseignants de mathématiques, de nous poser les vraies questions : Pourquoi les mathématiques ? Quelles mathématiques ?

Pourquoi les mathématiques ?

Pour beaucoup d'entre nous, enseignants de mathématiques, cette question posée à brûle-pourpoint surprend, voire déstabilise. Et pourtant, nous leur avons donné une place importante dans notre vie personnelle et professionnelle. En quoi nous paraissent-elles donc si fondamentales ? Je vois pour ma part trois niveaux de réponse :

- Pour les outils qu'elles forgent, pour les propriétés qu'elles établissent, pour les beaux résultats qu'elles construisent.
- Pour ce qu'elles développent comme aptitudes lors de la résolution de problèmes : un comportement d'expert, avec la recherche de la meilleure stratégie, du modèle le plus pertinent.
- Pour l'expérience intellectuelle, qui d'abord transcende notre pensée, dans une vision idéalisée du monde qui nous le rend plus intelligible, puis la libère dans une vision impossible (« Je le vois, mais je ne peux le croire » Cantor).

Pour beaucoup de nos élèves la question devient vite : à quoi ça sert ? Nous ne pouvons échapper à ce souci d'utilité, et les premières mathématiques que nous leur proposons prennent fortement appui sur leur quotidien, ou, de manière plus précise, sur leur perception « naturelle » du monde qui les entoure : l'ancrage dans la réalité est la condition nécessaire pour motiver leur apprentissage. Mais notre souci va être de les amener à changer ce regard sur le monde, en développant des modèles théoriques non contingents à la réalité. Un enjeu fondamental de notre enseignement va être la modélisation, c'est-à-dire le passage de la « réalité » au « modèle », et du « modèle » à la « réalité ». Et la gageure va être de mener de front l'apprentissage des modèles et de la modélisation.

Pourquoi les mathématiques ? Parce qu'elles contribuent par ce subtil jeu d'aller - retour entre la « connaissance naturelle » et la « connaissance évoluée » à l'un des objectifs fondamentaux de tout enseignement : apprendre à penser. En ce sens elles sont au coeur du système éducatif comme un élément fort de la construction de l'individu.

Quelles mathématiques ?

Comme je le disais déjà dans la brochure « sixième », si elles ne sont que techniques, recettes, algorithmes, trop souvent déconnectées de la réalité, leur apprentissage apparaîtra vite comme rébarbatif et stérile, leur enseignement deviendra alors une suite de recettes, donnant des connaissances à court terme. Sans nier la nécessité d'un tel apprentissage, il faut donc pour justifier la place des mathématiques leur donner une double dimension, culturelle et formatrice de l'individu. Culturelle, en les plaçant dans une perspective historique qui situe leur mission première : résoudre des problèmes, c'est-à-dire se mettre dans une constante confrontation au non savoir ; formatrice de l'individu, en développant ce comportement d'expert dont je parlais plus haut.

Pour que nos élèves sentent que ce que nous leur enseignons est vivant, il faut les rendre acteurs, c'est-à-dire les placer en activité mathématique. Celle-ci commence en général par une recherche personnelle, défi entre le problème et nous, démarche intellectuelle intime qui développe et construit notre pensée. Celle-ci continue dans une communauté scientifique, la classe dans notre enseignement, communauté qui permet successivement le débat en soumettant aux preuves et réfutations les diverses possibilités de solutions, puis l'assurance de la certitude partagée.

En termes de contenus, les programmes de collège, lieu de la scolarité obligatoire, et en particulier ceux du cycle central, me semblent bien pensés, en proposant trois grands types de travaux, interactifs et complémentaires.

Les travaux géométriques

Leur contenu est fortement marqué par l'héritage des Grecs, qui ont toujours eu pour souci de modéliser le monde réel. En ce sens, on peut dire que les axiomes d'Euclide apparaissent comme des règles de bon sens traduisant, de façon locale, la perception que l'on peut avoir du monde. Et on retrouve dans notre enseignement cette démarche : passage d'une « figure physique » à une « figure idéale » ; passage d'une validation par la mesure à une validation par la démonstration ; rencontre avec des figures de plus en plus complexes dans lesquelles il faudra apprendre à retrouver des figures plus simples, porteuses de propriétés, démarche heuristique qui préparera l'argumentation. Tout cela participe à une conceptualisation du réel sur laquelle se fonderont des règles de traitements scientifiques.

Les travaux numériques

Le passage du numérique au littéral, le passage du traitement arithmétique au traitement algébrique sont là encore des enjeux fondamentaux du collège et tout particulièrement du cycle central. Qu'une lettre puisse cacher n'importe quel nombre, qu'elle puisse être tour à tour inconnue, variable, paramètre, ce statut n'étant déterminé que par la compréhension du contexte, est un obstacle redoutable. Que le symbole d'égalité puisse cacher des statuts aussi différents que l'identité, l'affectation, une égalité conditionnelle rajoute à cet obstacle. Cet apprentissage est en tout point comparable à celui d'une langue étrangère, avec ses conventions d'écriture (le vocabulaire), ses règles de travail, les propriétés algébriques (la grammaire).

La gestion de données

Cette partie du programme est « naturellement » celle où les mathématiques et la réalité vont être le plus en interaction. C'est dans cette partie que l'élève va de façon privilégiée développer des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations, en s'appuyant sur de fréquents changements de registre. Partant d'un texte, souvent écrit en français, comportant un certain nombre de données chiffrées, il devra déjà organiser ces données, par exemple sous la forme de tableau ou de graphique, deux cadres dont il faut développer l'interactivité. Puis des calculs permettront de transformer ces données, de les synthétiser. De même les résultats pourront eux aussi être donnés dans différents registres suivant la nature du problème étudié : texte français, tableau, graphique, résultat numérique...

C'est enfin dans cette partie qu'apparaît le mieux le rôle éducatif et social des mathématiques. La lecture, l'interprétation, l'utilisation de diagrammes, tableaux, graphiques, leur analyse critique aident l'élève à mieux comprendre les informations qu'il reçoit, et, en cela, contribuent à son éducation civique. La liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, en particulier sciences de la vie et de la terre, géographie, technologie prend ici tout son sens, en intégrant les connaissances dans une vision plus large.

Comment les mathématiques vont-elles participer à la réalisation d'un tel enjeu ? En proposant des modèles de traitement et de validation ? De tous ces modèles, celui qui va permettre de gérer le maximum de situations est la proportionnalité. Si l'enseignement de ce modèle relève de beaucoup de disciplines, les mathématiques en sont un lieu de systématisation.

Dans cette brochure

Chacune des parties ayant sa propre introduction, je ne vais pas ici en faire une présentation détaillée, mais les regrouper autour des cinq grands axes qu'elles recouvrent :

- Mettre les mathématiques en activités, mettre les élèves en activité (partie 1).
- Calculer, avec ou sans instrument, avec des nombres anciens ou nouveaux (parties 2 et 3).
- Représenter l'espace, le mathématiser pour mieux l'appréhender, et essayer ainsi de modéliser le monde physique qui nous entoure pour mieux le comprendre (partie 4).
- Traiter de l'information, la transformer pour mieux poser et donc mieux résoudre les problèmes, en s'appuyant sur la « langue naturelle » et la « langue mathématique », et sur les allers-retours entre ces deux registres (parties 6 et 7).
- Utiliser les technologies nouvelles, et en particulier l'informatique.

Je me joins à tous les auteurs de cette brochure, membres de la commission Inter-Irem Premier Cycle, enseignants de terrain désireux de vous faire partager leur expérience et leur réflexion, pour vous en souhaiter une très bonne lecture.

Pour la Commission Premier Cycle
Jean-Claude DUPERRET

PREMIÈRE PARTIE

Des activités en géométrie

Depuis de nombreuses années, les programmes de mathématiques au collège insistent sur la nécessité d'activités pour installer une notion, s'appuyant en cela sur des recherches en didactique. Les articles de géométrie présentés ici en sont quelques exemples.

Pourquoi des activités ? L'objectif essentiel est d'amener l'élève à construire de façon dynamique savoirs et savoir-faire. Les élèves s'approprient les connaissances, les réorganisent. Ils sont alors capables de les mobiliser pour résoudre d'autres problèmes, car ils ont donné du sens à ces connaissances.

La géométrie est un lieu où apparaît de façon la plus forte l'hétérogénéité des élèves.

Certains élèves ont une vue globale de la figure et doivent ensuite chercher à expliquer en décomposant leur vision générale, en faisant des constructions précises, en donnant des justifications. D'autres, au contraire, ont une approche d'abord parcellaire et n'aboutissent, qu'après, à une vision plus générale. Certains procèdent par de nombreux essais, en multipliant les constructions, d'autres au contraire essaient de trouver directement la bonne piste. Dans le raisonnement, certains élèves partent des données pour aller vers la conclusion ; d'autres préfèrent « remonter » à partir des conclusions envisagées, beaucoup mêlent ces procédés.

Dans la phase initiale de l'activité, l'élève est confronté à un problème ouvert dont les données sont claires pour lui et il est capable d'envisager une réponse ou au moins d'engager une procédure de réponse partielle. Même les procédures qui n'aboutissent pas sont écoutées et peuvent permettre une meilleure appréhension du problème. Libre des méthodes d'exploration, l'élève est ainsi actif, partie prenante, dans l'acquisition envisagée.

Après cette phase initiale individuelle ou par groupe, la mise en commun peut s'appuyer sur toute cette richesse de pensée. Il est alors apte à approfondir sa connaissance par la compréhension d'autres stratégies, leur comparaison, par la mise en place d'éléments de contrôle et éventuellement la compréhension de certaines erreurs. Le professeur prend en compte ces recherches, ces résultats, les images mentales qui se sont créées ou affinées, les méthodes ou les notions qu'il veut privilégier prennent ainsi du sens. Elles peuvent être alors institutionnalisées.

Tout professeur est tenté de « gagner du temps » en présentant lui-même de la façon la plus claire la notion, la définition, les propriétés à connaître, laissant à la charge de l'élève d'appliquer ces connaissances. Mais il sait bien que si l'élève n'est pas « rentré » dans la notion, cette application risque de n'être que de surface. Au contraire, un travail d'activité se fait en respectant le niveau d'appropriation des élèves : choix des démarches, contrôle des réponses, mise en place de modèle local avant de se détacher du contexte de l'activité pour comprendre la structure générale.

Mais si on peut être convaincu de la pertinence d'une activité pour introduire une notion, pourvu qu'elle soit bien choisie, on ne peut écarter le facteur « temps ».

Le cours de mathématique comporte heureusement beaucoup d'autres temps d'activité, qui ne répondent pas à la définition forte ci-dessus, on peut parler d'une activité « riche » dès lors qu'elle mobilise différents cadres : propriétés géométriques et propriétés numériques utilisant les mesures des grandeurs par exemple...

Nous proposons trois thèmes.

Le premier article présente une activité d'introduction de la symétrie centrale. Celle-ci, au sens fort défini ci-dessus, permet de découvrir et de définir cette « nouvelle transformation ». A la suite de l'institutionnalisation, on trouve de nombreuses activités de prolongement, de découverte, de redécouverte, et la mise en place de notions sur les angles et le parallélogramme.

Le deuxième article présente une activité de recherche sur les quadrilatères. Après un travail sur les quadrilatères, qui marque bien toutes les ambiguïtés sur les définitions qu'on peut donner de ces « configurations », on trouve une activité très ouverte de recherche : « Peut-on paver le plan au moyen d'un quadrilatère quelconque ? ». Comment conduire une manipulation conduisant à constater qu'on peut paver le plan au moyen d'un quadrilatère quelconque ? Comment valider cette observation en utilisant la symétrie centrale et une propriété du parallélogramme ?

Le troisième article propose des activités transversales autour des aires et périmètres. Il ne s'agit plus ici d'une activité, mais d'une suite d'activités que nous avons retenues pour deux raisons. Elle essaie de répondre à la question (mauvaise malheureusement !) « Que faire lorsqu'on a une heure par semaine dans la classe d'un autre enseignant ? ». En prenant pour fil conducteur la proportionnalité, elle propose des activités sur aires et périmètres jouant sur les cadres numériques, géométriques et gestion de données.

Autour de la symétrie centrale

Michel JAFFROT, Annick MASSOT,
IREM des Pays de la Loire

I - UNE VRAIE NOUVEAUTÉ POUR LES ÉLÈVES

Lorsqu'en sixième, on aborde la symétrie axiale, à partir de dessins observés, réalisés ou de pliages, les élèves ont souvent une impression de "déjà vu".

Contrairement à elle, la symétrie centrale est, en classe de cinquième, une "vraie" nouveauté. Ce peut être une occasion de faire un travail un peu conséquent de découverte de cette transformation par une activité.

• Voici **un exemple d'activité** proposée à nos élèves.

Cette situation a été expérimentée dans nos classes depuis une dizaine d'années.

Elle se déroule en plusieurs étapes, alliant entre autres, recherche individuelle, confrontation, échange en groupes, débat en classe entière, exposés individuels des différentes solutions possibles, synthèse.

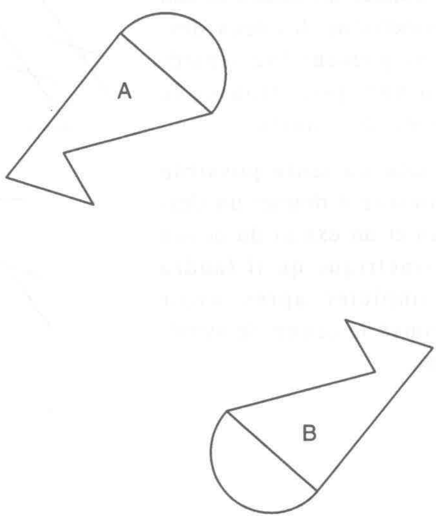
Les élèves ont à leur disposition : une photocopie individuelle de la situation proposée, du papier calque et le matériel habituel de géométrie...

• **Lors de ces expérimentations**, chaque année nous constatons, la richesse des découvertes.

Certains élèves "sentent" le demi-tour et son centre, mais ont de réelles difficultés à l'exprimer et à le définir.

Activité 1

Trouve au moins un procédé qui permet à partir du dessin A d'obtenir le dessin B.



D'autres s'appuient sur la symétrie axiale et réutilisent un double pliage d'axes perpendiculaires.

D'autres "sentent" la relation point par point entre les deux dessins.

D'autres enfin, imaginent des composées de transformations, par exemple une translation suivie d'un demi-tour.

Chaque découverte, solution ou ébauche de solution au problème posé, trouvée individuellement ou collectivement, est exposée à l'aide du rétroprojecteur. Aucune réponse n'est rejetée. Les différences, les points communs des stratégies utilisées sont mis en évidence pour préparer la synthèse.

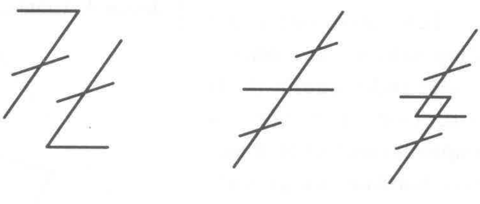
Il n'est pas toujours facile de faire découvrir l'existence, le rôle, la "puissance" de ce point appelé centre de symétrie. Il est à la fois intersection des deux axes trouvés, centre du demi-tour pressenti, milieu commun des segments reliant des points correspondants.

La définition de ce centre est liée au choix de la stratégie imaginée. Ces différentes stratégies dépendent, elles, de la vision globale ou point par point des deux parties du dessin donné. L'institutionnalisation des trois méthodes trouvées est faite dans cette phase de l'activité.

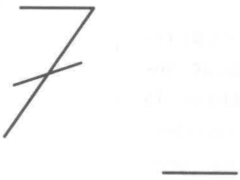
Bien sûr, il nous faudra privilégier le demi-tour et la relation point par point, entre points correspondants.

• **A la suite** de cette première phase importante de découverte de la symétrie centrale et de ses différentes facettes, plusieurs pistes sont possibles pour faire "**utiliser naturellement**" et ressortir ensuite les différentes propriétés, **institutionnalisées a posteriori**, de la symétrie centrale :

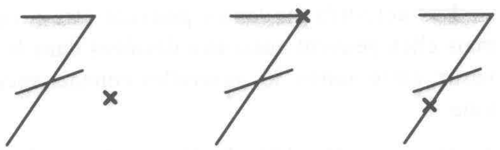
- donner un dessin et son symétrique, les deux dessins pouvant être séparés ou non, pour trouver le centre de symétrie,



- une variante possible consiste à donner un dessin et un extrait du dessin symétrique qu'il faudra compléter après avoir trouvé le centre de symétrie,



- donner un dessin et le centre de symétrie extérieur au dessin, sur le dessin..., pour obtenir le dessin symétrique,



- rechercher des figures géométriques ayant un centre de symétrie ou des dessins comme des logos...

Pour réaliser ces dessins, une phase peut se faire à main levée. Cela permet d'anticiper sur la réponse et de prendre conscience de l'utilisation de certaines propriétés, par exemple le parallélisme de deux segments.

L'ordinateur, en particulier avec Cabri-géomètre, peut aussi permettre de faire percevoir les propriétés qui se conservent. C'est aussi l'occasion de faire un travail conséquent de formulation à l'oral, comme à l'écrit, d'une part lors des constructions réalisées et d'autre part lors des propriétés trouvées. On rejoint ici la préoccupation constante de lire et écrire en mathématiques. (voir l'article "*Lire et écrire en mathématiques*" de cette brochure).

A l'aide de ces travaux, définitions et propriétés sont dégagées. Parmi celles-ci, en vue de réinvestissements ultérieurs, on met en évidence (la formulation proposée est une parmi les possibles) :

- Un segment a pour symétrique un segment parallèle et de même longueur.
- Le centre de symétrie a pour symétrique lui-même.
- Un angle a pour symétrique un angle de même mesure, ses côtés sont parallèles et de "sens contraire".
- Une droite a pour symétrique une droite parallèle.
- Une demi-droite a pour symétrique une demi-droite parallèle et de "sens contraire"...

II - DES PROLONGEMENTS, DES DÉCOUVERTES... DES REDÉCOUVERTES.

• **Dans les nouveaux programmes** de cinquième, on peut lire : "*...Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées ; le parallélogramme est une figure fondamentale du programme...*"

Pour la première activité, on propose d'approfondir l'**étude du symétrique d'un angle** en jouant, d'une part sur la position relative de l'angle donné et du centre de symétrie et, d'autre part, sur la mesure de l'angle.

Les activités suivantes peuvent être proposées immédiatement après, mais elles peuvent aussi être décalées dans le temps pour permettre de réinvestir, entre autres, les nouvelles connaissances concernant la symétrie centrale.

A - Une première idée de départ : le symétrique d'un angle.

Comme dans la première activité proposée dans cet article, on met en place une recherche individuelle, suivie d'un travail en groupes, d'un exposé des découvertes, par exemple sur des transparents fournis aux groupes.

La consigne donnée pour cette activité permet d'obtenir une grande variété de dessins. Pendant la recherche, on observe souvent des dessins à main levée (on peut aussi les suggérer).

Au bout d'une dizaine de minutes, il est souvent nécessaire de préciser la signification de "cas possibles".

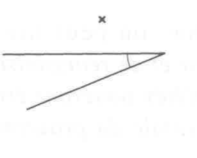
Ensuite un tri est nécessaire.

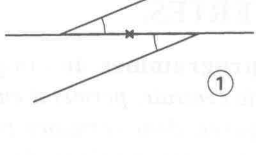
> Dessine un angle $\widehat{xAy}$.
> Place un point O.
> Construis le symétrique de l'angle $\widehat{xAy}$ autour du point O.
> Réalise plusieurs figures.
> Quels sont les différents cas possibles ?

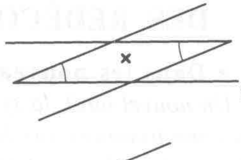
Le premier tri se fait sur la position du centre de symétrie.

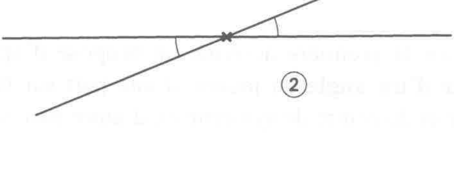
Puis, à l'intérieur des familles de dessins ainsi obtenus, on fera un deuxième tri suivant la mesure de l'angle. En effet, l'angle droit apparaît assez naturellement dans les classes, permettant ainsi d'obtenir des figures particulières.

Cette activité peut aussi être l'occasion de travailler avec l'ordinateur, soit en changeant la position du centre de symétrie, soit en changeant la mesure de l'angle. Cela permet de récapituler les différentes solutions ou de trouver celles qui manquent.




①


③


②

Plusieurs pistes apparaissent : une première vers les **angles opposés par le sommet** ② lorsque le centre de symétrie est au sommet de l'angle, une deuxième vers les **angles alternes-internes** ① lorsque le centre de symétrie est sur un des côtés de l'angle et une troisième vers les **parallélogrammes et leurs propriétés** ③ lorsque le centre de symétrie est "entre les côtés de l'angle". On choisit de les travailler séparément.

1. Un plan de travail commun à chacune de ces pistes.

Ce travail se déroule en plusieurs phases.

***Phase 1* : *Lecture des dessins et généralisation*.** Collecte de "renseignements nouveaux".

La collecte de tous les dessins de la classe peut se faire sur transparent.

a) *Observation* des dessins pour émettre des conjectures :

La consigne est : "que peut-on dire de vrai sur tous les dessins ? ".

Passer de la lecture de son propre dessin à la lecture des dessins réalisés dans la classe ou que l'on pourrait aussi réaliser, est une phase importante.

Cette première phase permet *d'éliminer certaines particularités*, par exemple "sur le dessin, il y a un angle de 60°". L'utilisation de Cabri-géomètre peut encore un peu plus faire sentir la figure générique.

Ces observations (en fait des conjectures) se font à l'oral ou par écrit. Les écrire individuellement peut être un support pour un travail collectif sur l'expression et la formulation.

b) *Explication*

Dans le cadre de l'apprentissage à la démonstration, une explication, une justification, un début de preuve peut se faire à l'aide des propriétés précédemment institutionnalisées. C'est un travail difficile, car les réponses sont évidentes sur les dessins. On obtient finalement une liste de "renseignements".

Les élèves peuvent aussi faire une "lecture différente" de leurs dessins, en parlant de droites sécantes ou de figures déjà rencontrées. Cela permettra dans la phase 4 de formuler des propriétés les concernant.

Phase 2* : *Des contre-exemples

C'est une phase de questionnement des renseignements obtenus dans la phase 1. On propose aux élèves des dessins "contre-exemple".

L'objectif est de faire trouver le ou les renseignements manquants.

Phase 3 : ***Bilan***

On dégage définitions et propriétés. Bien sûr, leur formulation est encore l'occasion d'un travail particulier, à l'oral ou à l'écrit.

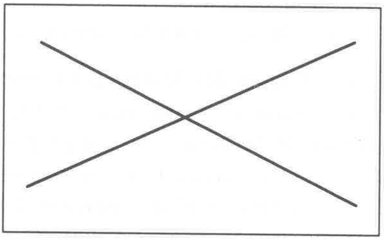
***Phase 4* :**

Une *relecture globale* de la figure en terme de droites sécantes ou de figures particulières peut se faire. Des propriétés sont alors formulées ou retrouvées.

***Phase 5* :** C'est l'étude du cas particulier de l'angle droit.

2. Première piste : le centre de symétrie est au sommet de l'angle

Phase 1 : L'observation des dessins permet de dégager et de justifier, en utilisant les propriétés institutionnalisées :

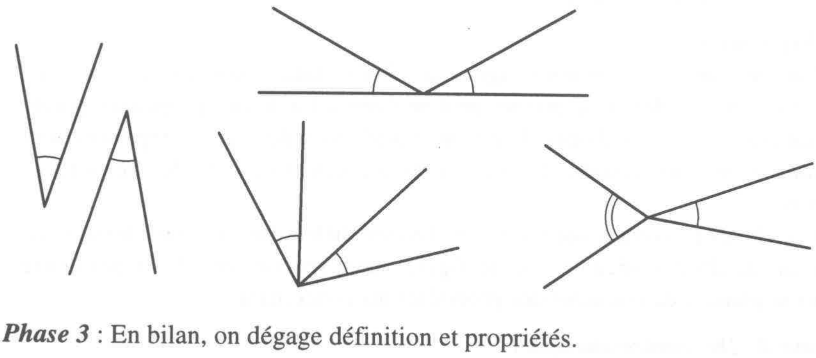


- les angles sont égaux,
- les angles ont le même sommet,
- les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Cette dernière justification est difficile, il faut mettre en correspondance les demi-droites opposées.

Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "Que peux-tu dire des dessins suivants ? "

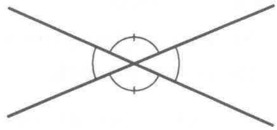


Phase 3 : En bilan, on dégage définition et propriétés.

Par exemple :

- Deux angles qui ont le même sommet, et leurs côtés opposés, sont appelés "angles opposés par le sommet".
- Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils sont égaux.

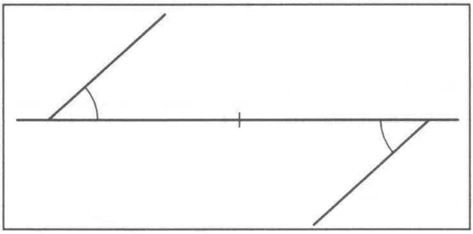
Phase 4 : La figure obtenue peut aussi être lue comme deux droites sécantes qui créent ainsi deux paires d'angles opposés par le sommet et donc égaux.



Phase 5 :

On peut aussi étudier le cas de l'angle droit, pour re-rencontrer deux droites perpendiculaires.

3. Deuxième piste : le centre de symétrie est sur un des côtés de l'angle

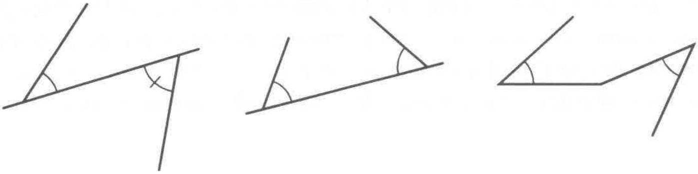


Phase 1 :

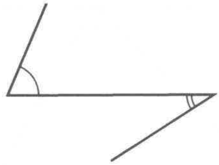
On obtient des angles qui ont "un côté commun", les deux autres sont parallèles et sont situés de part et d'autre du côté commun. Ils sont égaux.

Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "Que peux-tu dire des dessins suivants ?"



Phase 3 :
On peut d'abord désigner
par deux angles alternes-internes,
deux angles ainsi disposés.
Ils ont un côté commun, les deux autres côtés
étant situés de part et d'autre du côté commun.



Et on peut ainsi dégager des propriétés :

Propriété 1 : Deux angles étant alternes-internes,
si leurs côtés non communs sont parallèles alors ils sont égaux.

Propriété 2 : Deux angles étant alternes-internes,
si leurs côtés non communs ne sont pas parallèles, alors ils ne sont pas égaux.

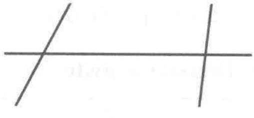
et leur réciproque :

Si deux angles alternes-internes sont égaux, alors leurs côtés non communs sont parallèles.

Si deux angles alternes-internes ne sont pas égaux, alors leurs côtés non communs ne sont pas parallèles.

Phase 4 :

La relecture du dessin, sous forme d'une droite et de deux sécantes permet de reformuler les propriétés sur les droites.

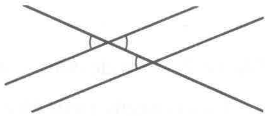


Phase 5 :

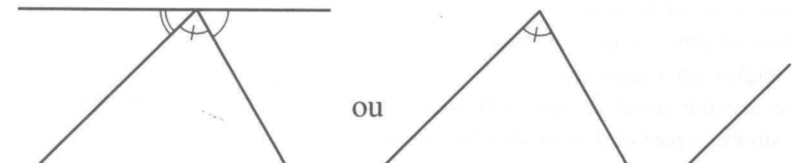
Le cas de l'angle droit permet de retrouver les propriétés concernant deux droites perpendiculaires à une même troisième.

A la suite de ce travail, deux pistes s'ouvrent :

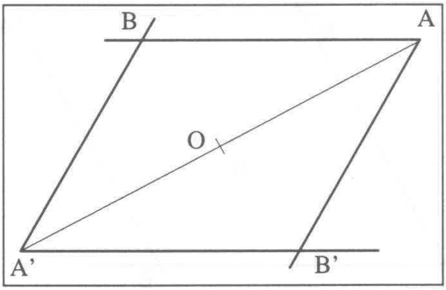
a) *vers les angles correspondants*
en combinant angles alternes-internes et des angles opposés,



b) dans le cadre de *l'apprentissage de la démonstration*, ces différentes propriétés constituent des outils qui vont permettre, par exemple de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, soit à l'aide des angles alternes-internes, soit à l'aide des angles alternes-internes et correspondants.



4. Troisième piste : le centre de symétrie est "à l'intérieur" de l'angle



Phase 1 :

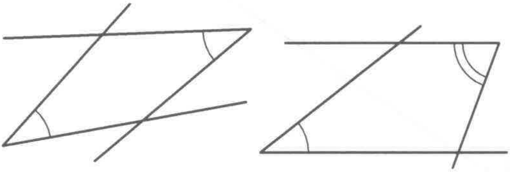
On obtient deux angles dont les côtés sont parallèles deux à deux. Les angles sont égaux.

O est le milieu de [AA']. O est le milieu de [BB'] (sa justification est difficile).

On obtient aussi un parallélogramme. O est le milieu de la diagonale [AA']. O est aussi le milieu de l'autre diagonale. Les côtés opposés sont égaux deux à deux. Les angles opposés sont égaux deux à deux. Dans la suite, on privilégie l'étude du parallélogramme.

Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "Que peux-tu dire des dessins suivants ? "



pas de ***Phase 3***.

Phase 4 :

Dans le parallélogramme ainsi obtenu, des propriétés sont retrouvées et s'expliquent à partir de celles de la symétrie centrale. Dans les nouveaux programmes de cinquième, on peut lire : "*...Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées ; le parallélogramme est une figure fondamentale du programme...*"

De plus, à l'aide des propriétés des angles alternes-internes, on peut démontrer que les angles $\widehat{BA'B'}$ et $\widehat{A'B'A}$ sont supplémentaires.

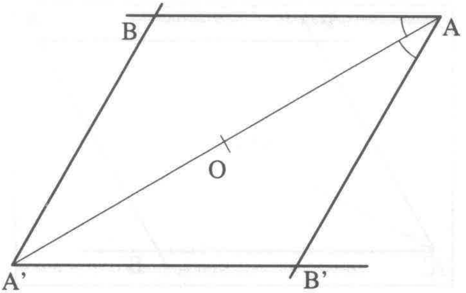
Phase 5 : à partir de l'angle droit, on retrouve l'étude du rectangle.

Deux nouvelles pistes s'ouvrent :

a) Vers le losange, lorsque le centre de symétrie est sur la bissectrice de l'angle.

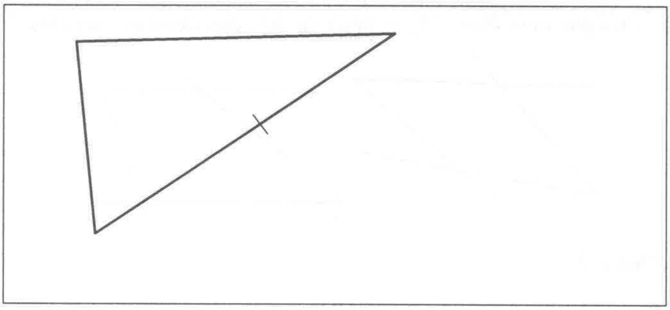
b) Vers le carré. en combinant les deux, angle droit et centre sur la bissectrice, Certaines propriétés peuvent aussi être l'occasion d'un problème, pour être démontrées, par exemple :

lorsque O est sur la bissectrice de $\widehat{BAB'}$, à l'aide d'angles alternes-internes, on obtient des triangles isocèles, et donc un losange.



B - Une autre idée de départ : le symétrique d'un triangle ABC

On peut aussi proposer comme consigne de départ : "*où placer le centre de symétrie pour obtenir un parallélogramme ?*"



En considérant tous les "cas possibles", le parallélogramme est ainsi reconnu, re-rencontré, en plaçant le centre de symétrie au milieu d'un côté.

Certaines propriétés du parallélogramme peuvent ainsi être dégagées et expliquées :

- ses côtés opposés ont la même longueur,
- ses diagonales ont le même milieu,
- les angles opposés ont la même mesure.

On peut ensuite poursuivre la recherche en demandant quelle doit être la nature du triangle ABC, et où placer le centre de symétrie pour obtenir un rectangle, un losange, ou un carré.

Des propriétés de chacune de ces figures particulières peuvent ainsi être retrouvées et complétées.

Pavage du plan par des quadrilatères

Marc PICOT   IREM de Lille

Donner aux élèves la conviction qu'une démonstration est nécessaire, n'est pas une mince affaire. La certitude du vrai est une quête permanente, et, pour le professeur, la démonstration apporte cette certitude. Mais pour les élèves, elle ne s'impose pas, l'intime conviction leur suffit. Pourtant, une démonstration apporte en plus de la certitude du vrai, le pourquoi de la véracité (ou de la fausseté) d'une conjecture. L'activité proposée procède de cette démarche. Dans un premier temps, les élèves manipulent, puis ils peuvent, au-delà de leur conviction, trouver les raisons qui expliquent, qui "éclairent" la réponse. Avant d'entrer dans la problématique : "N'importe quel quadrilatère pave-t-il le plan ? " une mise au point sur les quadrilatères peut être utilement proposée aux élèves.

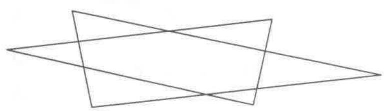
LES QUADRILATÈRES

Les élèves vont travailler sur des objets soi-disant bien connus : les quadrilatères. Ceux-ci sont rarement l'objet d'un apprentissage spécifique ; ils font partie de ces notions que tout un chacun a en lui. Pourtant, quel enseignant ne s'est pas arraché les cheveux [1] lorsque les élèves citent le parallélogramme ABCD pour signifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, ou bien que l'aire du parallélogramme est AB × AD ? etc....

Pour définir un quadrilatère, on trouve deux courants d'idées :

* Polygone (ou ligne brisée fermée) qui a quatre côtés.
* Quadruplet de points de l'espace.

Il semble que pour le collège, ni l'une ni l'autre n'est satisfaisante. On trouve la première dans les dictionnaires usuels, elle est simple, mais la notion de polygone est trop floue. La figure ci-contre représente un polygone ; quels sont ses sommets ? ses côtés ? ....



[1] Pour ceux qui en ont encore...

La seconde est trop lourde, et même gênante : deux quadruplets différents peuvent désigner le même quadrilatère. De plus, la définition d'un quadruplet est difficile pour un collégien.

Sans entrer dans les détails, les exercices suivants vont permettre de proposer une définition qui conciliera simplement les deux points de vue précédents. De plus, le prolongement à des polygones sera facile à envisager.

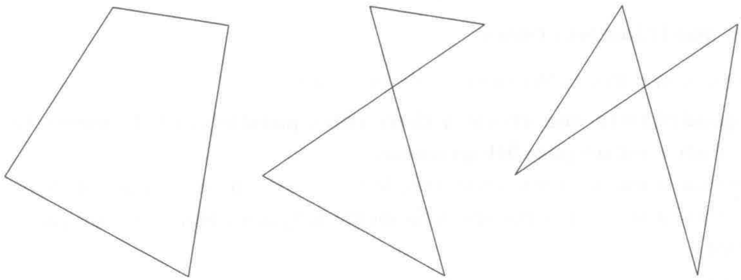
> ***Exercice 1*** : Combien peut-on faire de mots de deux lettres ? de trois lettres ? de quatre ?...

Rencontre avec un arbre

				Mots obtenus
A	B	C	D	ABCD
		D	C	ABDC
	C	B	D	ACBD
		D	B	ACDB
	D	B	C	ADBC
		C	B	ADCB
B	A	C	D	BACD
		D	C	BADC
	C	A	D	BCAD
		D	A	BCDA
	D	A	C	BDAC
		C	A	BDCA
C	B	A	D	CBAD
		D	A	CBDA
	A	B	D	CABD
		D	B	CADB
	D	B	A	CDBA
		A	B	CDAB
D	B	C	A	DBCA
		A	C	DBAC
	C	B	A	DCBA
		A	B	DCAB
	A	B	C	DABC
		C	B	DACB

Exercice 2 : Placer quatre points. Combien de chemins fermés différents passent une fois et une seule fois (sauf pour le point de départ qui sera aussi le point d'arrivée) par chacun de ces quatre points ? On pourra utiliser des couleurs.

On trouvera trois chemins différents



Exercice 3 : On nomme les quatre points A, B, C et D. On parcourt les chemins sans lever le crayon. Les 4 lettres rencontrées dans l'ordre forment un mot. Quels sont les mots associés à chacun des trois chemins ?

On trouve ainsi que huit "mots"[2] différents sont attachés à chacun des trois chemins. On remarquera que quatre de ces mots parcourent les côtés dans un sens, et les quatre autres dans l'autre sens[3].

On peut maintenant donner les *définitions* suivantes :
La donnée de quatre points dans l'ordre A, B, C et D est le quadrilatère ABCD.
[AB], [BC], [CD] et [DA] sont les côtés.
[AC] et [BD] sont les diagonales.[4]

[2] Ma femme me fait remarquer que ABCD n'est pas un mot parce que "ABCD, ça ne veut rien dire". Précisons qu'un mot désignera un groupe de lettres, [délimité par deux blancs, qui représente un son (Larousse)].

[3] On pourra faire une remarque similaire avec les triangles : trois points nommés donnent six noms à un même triangle et deux sens de parcours.

[4] Si le quadrilatère ABCD est croisé, le sens commun sera heurté par le fait que les diagonales [AC] et [BD] sont en dehors du quadrilatère, ou qu'elles ne coupent pas le quadrilatère en deux. Le dictionnaire "Le Lionnais" donne la définition suivante d'une diagonale : segment joignant deux sommets n'appartenant pas à un même côté.

On décide que des quadrilatères qui ont les mêmes côtés sont égaux.[5]

Remarque 1 : un quadrilatère peut être nommé de huit manières différentes par ses sommets.

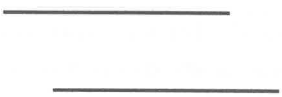
Remarque 2 : certains problèmes soulèvent une ambiguïté. Le côté est soit le segment, soit le support du segment.

Cas des quadrilatères croisés :

Un théorème très controversé, mais très pratique :

Si un quadrilatère non croisé à deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
(on trouvera la même controverse avec le théorème suivant : si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de la même longueur, alors c'est un parallélogramme).

Ce théorème est souvent rejeté (pas forcément à tort) par les enseignants. En effet, comment démontrer que le quadrilatère n'est pas croisé ? Comment justifier la nomination du "bon" quadrilatère, celui des trois qui est bien le parallélogramme ? (voir les figures de l'exercice 2 en imaginant que les points sont nommés A, B, C et D, et voir de même la figure ci-dessous).



tracé d'un parallélogramme avec deux côtés parallèles et de même longueur

De plus, ce théorème est indémontrable au collège : on ne peut que l'admettre. Il est souvent utilisé en acte pour tracer des parallélogrammes, notamment sur un quadrillage : on trace deux segments parallèles et de même longueur (avec les carreaux ou le compas). Les exercices 2 et 3 prennent alors toute leur importance.

Serait-il suffisant d'énoncer le théorème sous la forme suivante ?
Si AB = CD et (AB) est parallèle à (CD), alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme.

---

[5] Le mot "même" doit ici être pris au sens strict : les côtés sont les mêmes si on ne peut pas les distinguer. Le mot même exprime l'identité. On ne peut pas distinguer [AD] et [DA]. ADBC et BDAC sont deux noms d'un seul quadrilatère car les côtés sont les mêmes pour les deux : [AD], [DB], [BC] et [CA] pour le premier, et [BD], [DA], [AC] et [CB] pour le deuxième. Par contre le lecteur vérifiera que les quadrilatères ABCD et ADBC n'ont pas les mêmes côtés.

Comment se ferait le choix entre ABCD ou ABDC ? Avec la même rigueur que pour l'égalité de deux vecteurs : deux vecteurs sont égaux s'ils sont de même longueur, de supports parallèles et de même sens. Etre de même sens, c'est indémontrable. Il n'y a que le dessin qui permette à l'élève de décider !

Ce théorème, sous une forme ou l'autre, est un bon outil pour prouver qu'on a bien un parallélogramme. Il est clair, simple à utiliser, avec les précautions d'usage. Alors, pourquoi s'en priver ? Il resterait bien la solution d'exclure les "croisés" de la famille des quadrilatères...

PROBLEME :

"Peut-on paver le plan avec n'importe quel quadrilatère ? "

La plupart des adultes interrogés répondent par la négative, sauf si le quadrilatère admet une certaine régularité (carré, rectangle, losange, parallélogramme). La familiarité ou le penchant pour la régularité n'invitent pas à paver avec des quadrilatères quelconques. Une réponse affirmative heurte le sens commun.

Principes :

1) Manipuler :

A partir de manipulations (ici, des quadrilatères en carton), l'élève se forge une conviction. La manipulation l'amènera à conjecturer qu'on peut paver le plan. La question de savoir s'il est certain d'avoir raison (et donc qu'il faut faire une démonstration) n'est pas fondamentale pour lui (pas encore).

2) Analyser, idéaliser :

Analyser les manipulations, en reliant les objets manipulés à des "objets mathématiques" : quadrilatère, symétrie centrale, parallélogramme...

3) Démontrer, valider :

La démonstration n'est pas ici seulement un moyen d'établir le vrai, mais un moyen de comprendre ce qui est mis en jeu pour que le projet soit réalisé. Les élèves font fonctionner leurs connaissances, et une fois la démonstration terminée, ils sont certains du vrai, mais surtout ils ont compris "pourquoi ça marche" .

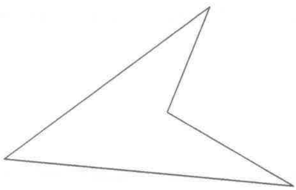
Activité : proposée en classes de cinquième, en deux séances, une séance pour manipuler, l'autre pour démontrer. Les élèves ont déjà rencontré la symétrie centrale et le parallélogramme.

1) Manipulation :

Les élèves travaillent en groupes. Chaque groupe reçoit un paquet d'une dizaine de quadrilatères, tous superposables, découpés dans du carton ou du papier fort.

> ***Consigne*** :
> Vous avez reçu une dizaine de quadrilatères tous superposables. Si nécessaire, vous pouvez en fabriquer d'autres semblables à ceux reçus.
>
> La question est la suivante : peut-on recouvrir le plan avec ces quadrilatères ? Il ne peut pas y avoir de trou, les quadrilatères ne peuvent pas se chevaucher, même un petit peu.

Dans un premier temps, on propose des quadrilatères convexes. Pour les élèves en avance sur les autres, on pourra proposer une manipulation avec des non-convexes, type aile delta :



2) Mise en commun :

Les élèves recouvrent le rétroprojecteur avec leurs quadrilatères. Ce qui les amène à découvrir la manipulation. Il est plus difficile de la faire expliciter : un quadrilatère étant posé, son voisin se place en faisant faire un demi-tour autour du milieu d'un côté. Autour de chaque sommet, on place ainsi quatre quadrilatères, et les élèves sentent que la procédure peut se répéter à l'infini.

3) Validation :

> Notre manipulation nous permet-elle de conclure qu'on peut paver le plan avec n'importe quel quadrilatère ?

Cette question nécessite l'analyse de la manipulation, et sa traduction en "termes mathématiques" : l'objet n'est plus un morceau de carton, mais un quadrilatère. Le demi-tour autour d'un point fait penser à la symétrie centrale.

Formalisation :

L'action de la symétrie sur le polygone nous amène nécessairement à mettre les points en correspondance. La notation $A \to E$ n'est qu'une disposition pratique[6] qui montre que le point A a pour correspondant le point E. La mise en correspondance entre les points est précieuse pour utiliser les théorèmes sur les transformations. Elle permet de mettre en correspondance des objets plus sophistiqués afin de les comparer. Certains préféreront utiliser un tableau :

un point	A	D	B
son symétrique	E	F	C

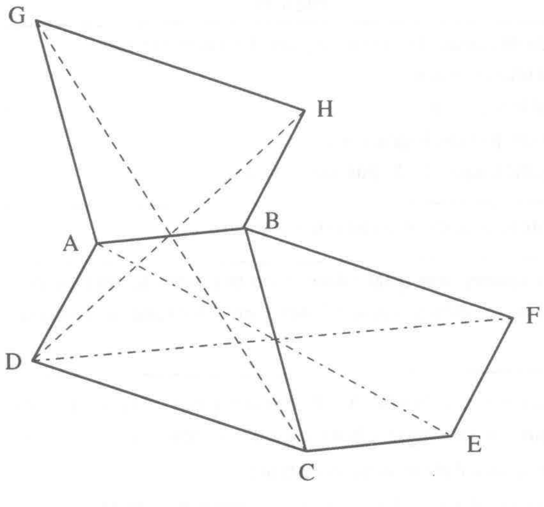


figure 1

On nomme le quadrilatère de départ ABCD, I_1 le milieu de [BC] et on appelle S_1 la symétrie de centre I_1. On construit les images des points A, B, C et D.

$A \to E$
$B \to C$
$C \to B$
$D \to F$

De même, avec I_2 le milieu de [AB],

$A \to B$
$B \to A$
$C \to G$
$D \to H$

Il reste à terminer le pavage. Les élèves ne doutent pas qu'un quatrième quadrilatère terminera le pavage autour du point B. La démonstration ne sert pas à les convaincre du vrai, mais va leur montrer pourquoi la construction du point K termine (presque) le problème. K est le symétrique de C par rapport à I, milieu de [BF].

[6]Le fait qu'elle ressemble a une notation fonctionnelle quasi-universelle est un avantage qu'il serait dommage de bouder. De plus, les élèves sont à l'aise avec cette notation et l'aspect dynamique de la flèche n'est pas négligeable. Dans tous les cas, si on veut utiliser les théorèmes sur les transformations pour faire des démonstrations, on ne peut pas faire l'économie d'une mise en correspondance point par point.

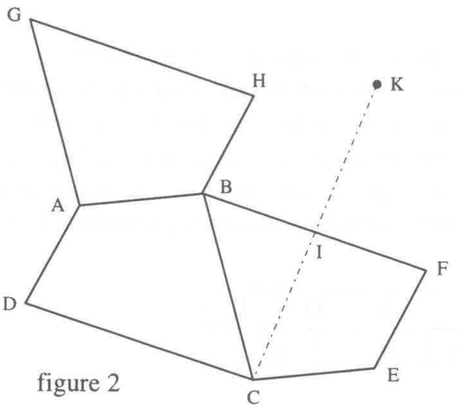


figure 2

On construit les images des points B, C, E et F par la symétrie de centre I, milieu de [BF]

B → F

F → B

C → K

E → ?

C'est en essayant de construire le symétrique de E que les élèves ressentent un problème : ce point est-il bien H ?

Exercice : Avec les données précédentes (voir figure 1) montrer que :

ADEF est un parallélogramme

ADBH est un parallélogramme

En déduire que BHFE est un parallélogramme.

En déduire que H est le symétrique de E par rapport à I.

Pour les plus forts : dernière question avant de conclure :

Exercice : On a construit le quatrième quadrilatère en utilisant le milieu de [BF]. Montrer qu'on obtient le même quadrilatère en utilisant le milieu de [BH].

On a rempli le plan autour du point A. Il existe peut-être d'autres moyens, mais il est clair que la stratégie choisie peut se répéter autour de n'importe quel sommet d'un quadrilatère déjà construit. [7]

Maintenant, on a compris pourquoi et comment on peut placer trois quadrilatères et qu'un quatrième se place exactement dans la place restante, sans chevaucher ni laisser de vide.

Variante sur quadrillage :

Remarque préliminaire :

Soit S une transformation (symétrie ou translation) qui transforme un nœud du quadrillage en un autre nœud. Alors, tout point du quadrillage a pour image un point du quadrillage.

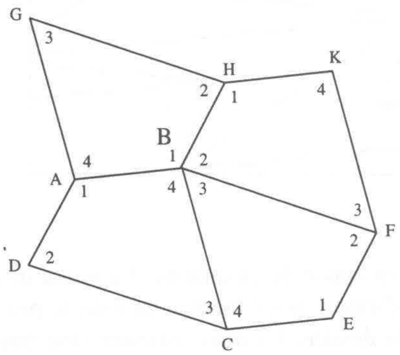
[7] En choisissant un quadrilatère de départ un peu particulier, on peut commencer à remplir le plan, mais la procédure peut se bloquer. Par exemple, si la mesure d'un angle est diviseur de 360°, ou si le quadrilatère a trois côtés égaux, etc....

Grâce à cette remarque, le quadrillage permet des ajustements. En effet, les constructions à la règle et au compas provoquent des petites erreurs, qui s'amplifient avec les itérations. Le quadrillage aide à ajuster les points construits : si un point construit tombe au voisinage d'un noeud, on le placera exactement sur ce nœud.

Prolongements :

1) *Somme des angles d'un quadrilatère*

En utilisant les correspondances entre les points et leurs images, on met en évidence que, autour du point B, par exemple, on trouve les quatre angles du quadrilatère.



Les égalités d'angles se démontrent sur le modèle suivant :

Soit I le milieu de [BF] :

$B \rightarrow F$

$F \rightarrow B$

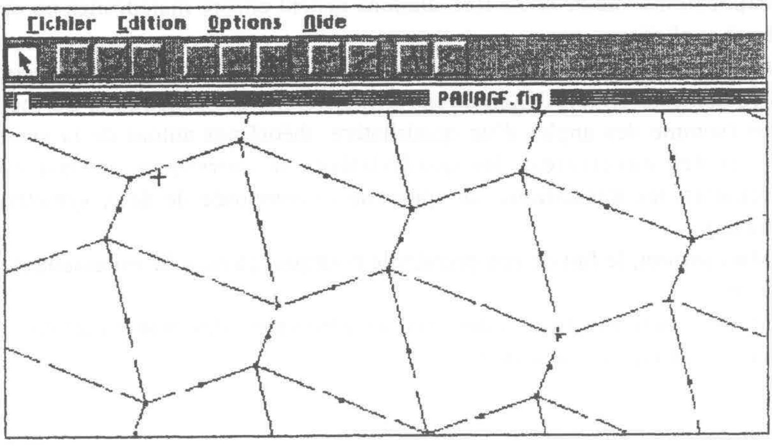
$H \rightarrow E$

Théorème : deux angles symétriques sont égaux.

Donc $\widehat{HBF} = \widehat{EFB}$

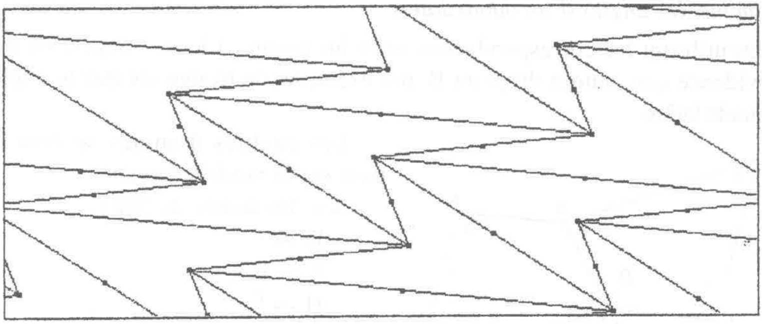
On démontre de même toutes les autres égalités d'angles.

2) *Utiliser les translations pour étendre le pavage*



Les élèves construisent à l'aide du menu symétrie. Cabri2 accepte de construire le symétrique du polygone, tandis que Géomètre demande une macro-construction qui n'est à la portée que des experts de Géomètre. Notons qu'une telle macro pose le problème de l'orientation (sens de parcours des côtés dans l'ordre). Ensuite les élèves peuvent obtenir des variétés de pavages.

Exemple avec un quadrilatère non convexe :



Conclusion :

Cette activité peut sembler difficile en classe de cinquième. La phase des manipulations permet à tous les élèves d'entrer assez facilement dans le problème. La plupart produisent ensuite des dessins. La démonstration doit être guidée, et la production de sa rédaction ne constitue pas encore un objectif premier. Les élèves abandonnent les manipulations, et ils s'investissent dans les explications, même si les formulations restent encore maladroites ou difficiles à expliciter.

Cette activité permet de nombreuses mises au point sur les objets rencontrés (quadrilatère, parallélogramme, symétrie,...), des rencontres de théorèmes (somme des angles d'un quadrilatère, théorèmes autour de la symétrie), et des ouvertures (des quadrilatères se correspondent par des glissements, les translations, on approche la composée de deux symétries centrales).

Mais surtout, le fait de comprendre le pourquoi ça marche est essentiel et motivant.

D'autres activités liées à des travaux physiques, des manipulations, se prêteront à ce type de réflexion.

Aires et périmètres

Francine MOINIER - IREM de Poitiers

Dans le fascicule intitulé "document d'accompagnement des programmes de sixième", on lit dans le paragraphe concernant les objectifs généraux : "*Les activités conduites en classe doivent, autant que possible, mêler les différentes approches numériques, géométriques et graphiques pour que l'activité mathématique prenne un sens plus global pour l'élève. Le découpage du programme en trois parties, activités numériques, activités géométriques et gestion de données, est une commodité de présentation mais ne doit pas conduire à un cloisonnement par thèmes.*"

Ayant été amenée à enseigner une heure par semaine en classe de cinquième, j'ai essayé, en accord avec le collègue assurant le reste de l'horaire, de prendre en compte ces différents aspects du problème pour construire une progression sur l'année. Cette progression a été organisée de telle façon que chaque séquence, ou groupe de séquences, réponde, du mieux possible, aux objectifs suivants :

- traiter la situation étudiée en utilisant plusieurs registres,
- donner une large place au réinvestissement des connaissances antérieures,
- mettre le plus possible en relation avec la partie traitée pendant le reste de l'horaire.

Le thème choisi comme "fil conducteur" de ces séquences isolées a été celui de la proportionnalité parce qu'il permet, en raison de sa "transversalité", d'aborder - ou de réinvestir - un grand nombre de notions du programme, et ceci aussi bien au travers d'activités numériques, géométriques ou de gestions de données.

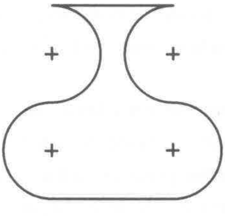
Les points abordés au cours de l'année ont été, dans cet ordre : cercle et disque, agrandissement et réduction, pourcentages, vitesses et débits.

Le contenu des premières séquences de l'année (séquences d'enseignement à l'intérieur desquelles la proportionnalité est peu mise en oeuvre, mais seulement évoquée à travers deux situations : un exemple et un contre-exemple), ce contenu donc, est décrit dans ce qui suit et se décompose en trois parties. La connaissance nouvelle visée est l'aire du disque, mais chaque partie, comme l'indiquera son titre, a été conçue pour faire retravailler les élèves sur des notions ou des savoirs que l'on sait "délicats".

Toutes ces activités ont été réalisées sur des feuilles au quadrillage 5×5, ce qui facilite les observations de type géométrique (milieu, centre, symétries axiales, identification de quadrilatères connus ...), mais qui va devenir une difficulté dès qu'il s'agit d'évaluer ou de comparer les longueurs ou les aires des parties "courbes".

Première partie : aire et périmètre

Activité inspirée de celle qui figure dans le livre de 5ème de la collection Hachette - cinq sur cinq.



La figure ci-contre est composée de demi-cercles de rayon 2 cm et de deux segments de 5 cm.
En utilisant ton quadrillage, construis-la sur ton cahier.
a) Trouve une figure simple ayant la même aire. Le périmètre est-il le même ?
b) Trace une figure ayant le même périmètre mais une aire plus petite.
c) Trace une figure ayant le même périmètre mais une aire plus grande.
d) Trace une figure ayant une aire plus petite et un périmètre plus grand.
e) Peux-tu calculer le périmètre et l'aire de cette figure ? Explique.

Les objectifs

Il s'agit, dans cette première partie, de revenir sur la différenciation aire-périmètre, et, en particulier, de lutter contre l'idée que, si l'aire augmente (ou diminue) le périmètre augmente (ou diminue). On peut aussi établir que des figures de formes différentes peuvent avoir même aire, ce qui permet de ramener la recherche des aires de figures inconnues à celles de figures connues. L'activité choisie permet d'autre part de faire prendre conscience de la spécificité de l'aire du disque par rapport aux aires des polygones.

Les principales difficultés des élèves

- Certains d'entre eux ne prennent pas le temps d'observer et d'analyser le dessin proposé : le dessin et la phrase contenant des données numériques ne sont pas mis en relation. Le non-repérage préalable des différents tracés les conduit souvent dans une impasse. L'utilisation d'un tracé à main levée, avec indications précises des points indispensables, des dimensions connues, des alignements, est peut-être l'un des moyens dont nous disposons pour faire évoluer cette situation.
- Pour quelques-uns, il n'y a pas de différence entre la longueur du demi-cercle et celle de son diamètre : seules les extrémités comptent pour eux.

l'utilisation de bandes de papier, ou de ficelles, permet de mettre en défaut cette conception.

- La conservation des aires par déplacements, après découpage, ne semble pas poser de problème. En revanche, l'idée d'utiliser une figure déjà connue comme modèle de référence est loin d'être naturelle (dans ces conditions, que représente une unité pour les élèves ?).

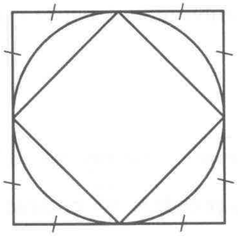
Deuxième partie : l'aire du disque

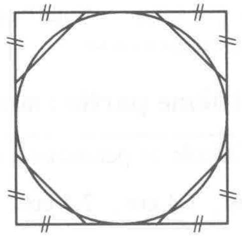
A)

Pierre, en cherchant dans un formulaire, a trouvé la formule suivante pour calculer l'aire d'un disque de rayon R : $\pi \times R \times R.$	Archimède (savant grec) écrit, au IIIe siècle avant J.C, dans " la mesure du cercle " : " L'aire d'un disque est égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle, et l'autre côté de l'angle droit à la circonférence du même cercle ".	Dans les années 60, des écrivains réunis dans un mouvement littéraire appelé Oulipo énoncent : " Si la circonférence est fière D'être égale à deux pierres, Le cercle est tout heureux D'être égal à Pierre 2 ".

Est-ce que tous disent la même chose ? Explique.
Et toi ? Peux-tu faire une phrase indiquant comment on calcule l'aire du disque ?

B)





Anne prétend qu'en calculant l'aire des deux carrés et en faisant la moyenne des résultats obtenus, on doit être proche de l'aire de ce disque de rayon 3 cm.

Bertrand affirme que l'aire de l'octogone ci-dessus se rapproche beaucoup plus de l'aire du même disque.

Et toi, qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse par des calculs.

Les objectifs

Il s'agit dans la partie A, de découvrir (c'est-à-dire de prendre en compte des descriptions de méthodes proposées, et non pas d'en créer une) des méthodes de calcul et de manipuler la formule donnant l'aire du disque en travaillant sur le vocabulaire et le codage des calculs sous forme littérale. La partie B permet de faire fonctionner cette nouvelle formule dans des situations où il est indispensable d'approximer et de travailler sur les arrondis. Elle permet également de réinvestir des connaissances sur les calculs d'aires de polygones, et de mettre ainsi en évidence la spécificité du calcul de l'aire du disque.

Les principales difficultés des élèves

Dans la première activité, la traduction littérale des énoncés est difficile, d'autant que le vocabulaire utilisé est différent de celui que les élèves rencontrent habituellement. La formulation claire et sans équivoque d'un calcul avec des mots l'est encore davantage parce qu'elle suppose une double transposition : de l'énoncé à la langue naturelle, puis de la langue naturelle à la langue mathématique. Les transformations des "formules" sont mieux réussies, la commutativité et l'associativité de la multiplication ainsi que la suppression du signe × dans un produit ne semble pas poser de problèmes particuliers dans ce cas-là. Les deux difficultés principales ont été la confusion entre double et carré, et le passage de $\frac{R \times (R \times \pi \times 2)}{2}$ à $R \times R \times \pi$.

On retrouve les difficultés de la première partie concernant l'analyse du dessin et le repérage des informations nécessaires au calcul. Le choix de l'approximation pose problème et il est visible que la notion de valeur exacte n'est pas acquise. Pour beaucoup d'élèves le nombre donné par la calculette est la valeur exacte.

Troisième partie : sur un graphique

a) Calcule le périmètre et l'aire des disques ayant pour rayons 0,7 cm ; 1 cm ; 1,4 cm ; 2,3 cm ; 3,5 cm et 4,2 cm. Tu prendras $\frac{22}{7}$ comme valeur approchée de π.

b) Place sur deux graphiques différents, en utilisant une page entière pour chacun d'eux :

- les points qui représentent le périmètre en fonction du rayon,
- les points qui représentent l'aire en fonction du rayon.

Quelles remarques peux-tu faire à propos de la position de ces points ?

Les objectifs

Il s'agit maintenant de faire fonctionner cette nouvelle formule, de manière assez répétitive, en la confrontant systématiquement à celle du périmètre de façon à en établir clairement les différences. Le choix d'une valeur fractionnaire de π permet de s'entraîner au calcul avec des fractions et des décimaux. Les problèmes concernant les valeurs approchées et les valeurs exactes vont se reposer, d'autant plus que la réalisation du graphique peut s'avérer délicate si l'échelle est "mal choisie". L'observation du graphique est l'occasion de comparer les deux formules du point de vue de la proportionnalité.

Les principales difficultés des élèves

Tout d'abord, le choix des unités de graduations des axes, qui est ici assez complexe, puis le placement des valeurs trouvées par le calcul. Les élèves se trouvent dans l'obligation de procéder par approximation, et beaucoup ont du mal à trouver le bon intervalle. L'observation des tracés fait surgir le problème de la continuité : les élèves "relient" les points, en utilisant la règle, de façon quasi systématique.

En conclusion

De plus en plus souvent, au collège, beaucoup d'entre nous se trouvent dans l'obligation de partager une classe afin de compléter leur service. Cette situation peut être gérée de différentes manières, mais, dans tous les cas, les élèves risquent d'y perdre leurs repères, surtout dans les petites classes. Les difficultés habituelles auxquelles est confronté tout enseignant sont alors considérablement amplifiées :

- comment partager les connaissances à enseigner alors que, comme avec les différents éléments d'un puzzle, toutes les pièces sont nécessaires pour pouvoir construire l'ensemble ;
- comment faire en sorte que les connaissances enseignées par deux professeurs différents soient considérées par les élèves comme des éléments d'une même discipline ;
- comment faire pour que ces connaissances deviennent, à terme, les constituants d'un vrai savoir mathématique ?

Ce découpage nous a obligés à réfléchir collectivement sur les contenus des programmes, dans la mesure où, depuis de nombreuses années, nous adoptons dans l'établissement une même progression afin de proposer des devoirs communs aux élèves de chaque niveau.

Nous avons été amenés à réorganiser ces contenus de façon à favoriser, pendant cette heure isolée, le réinvestissement des connaissances. Le choix qui a été fait privilégie les domaines numérique et graphique mais permet également une approche du calcul littéral (ex : comment écrire l'aire du disque en fonction de son diamètre ?) ainsi qu'un travail sur les conventions d'écriture dans les expressions littérales.

Toutefois, la durée d'une semaine (et parfois plus en fonction du calendrier) séparant chaque séquence est un réel problème, surtout pour de jeunes enfants de cinquième. Il a souvent été très difficile pour eux de se replacer dans une problématique énoncée quelquefois deux semaines auparavant, avec pour conséquences :

- un temps souvent trop long consacré au recentrage sur les objectifs de l'activité,
- trop d'importance donnée par certains élèves à l'acquisition de mini-connaissances, très locales, au détriment de l'articulation globale de ces connaissances.

DEUXIÈME PARTIE

Calculer : pourquoi, comment ?

« Lire, écrire, compter », cette devise maintes fois entendue, (très récemment encore !) semble identifier mathématiques et calcul.

Le calcul apparaît en effet, à l'école élémentaire et au collège, comme une composante essentielle de l'activité mathématique. Mais il faut distinguer clairement les exercices où le calcul est l'objet d'apprentissage et les problèmes où il n'est qu'un outil, indispensable, à l'obtention de la solution.

Il est tout aussi important de différencier les modalités de calcul (mental, à la main, à la calculatrice) non seulement en fonction de la place de ce calcul dans l'activité, que du fait que les nombres qui y interviennent sont « fréquentables » ou non.

Le premier article met l'éclairage sur l'utilisation de la calculatrice.
Quelle influence a-t-elle au niveau du professeur, aussi bien dans la conception de l'apprentissage (introduction facilitée d'une notion, approche expérimentale ...) que dans le choix des exercices (champ numérique plus large...) ?
Comment permet-elle à l'élève de davantage se centrer sur la situation, en étant débarrassé de difficultés rencontrées sur les techniques opératoires ?
Quels obstacles crée-t-elle ?

Le second montre l'apport spécifique du calcul mental, avec son apport aussi bien dans la gestion des ordres de grandeur, de la connaissance approfondie des nombres que de la prise de sens dans la résolution de problèmes. Il propose un apprentissage qui se poursuit de la sixième à la troisième en étroite interaction avec les connaissances nouvelles, qu'elles soient numériques, géométriques ou algébriques.

Les calculatrices au Collège

Madeleine MAROT IREM de Poitiers

Introduction

Combien de fois avons-nous entendu dire autour de nous que les élèves ne savent plus compter, que pour des calculs simples du genre 2×9, ils ont recours à leur calculatrice et ne font plus l'effort de chercher par eux-mêmes la réponse, qu'ils écrivent n'importe quoi sous prétexte que c'est le résultat affiché sur leur calculatrice ?

Nous sentons bien, nous enseignants, que la présence des calculatrices est importante, que leur utilisation pose parfois problème et nécessite une "familiarisation" au travers d'exercices spécifiques en situation et que celles-ci ne remplacent pas les apprentissages fondamentaux en ce qui concerne les opérations.

Alors, quelle attitude devons-nous adopter face à ces outils modernes dont tous les élèves disposent à présent ? Quelle place faut-il leur réserver dans les classes ? Comment les intégrer dans notre enseignement ?

Dans cet article, nous avons essayé de réfléchir aux changements apportés par l'usage des calculatrices au niveau du collège, à leur intégration dans un processus d'apprentissage montrant tout leur intérêt mais aussi leurs limites.

Que disent les programmes à leur sujet ?

A la lecture des programmes et des commentaires de ces programmes nous nous rendons compte que des incitations nombreuses et répétées sont faites pour que l'utilisation raisonnée des calculatrices soit développée. On se reportera aux différents programmes des classes de collège pour les extraits sur ce sujet.

Cependant, nous pouvons remarquer qu'il est toujours recommandé de développer parallèlement le calcul mental, le calcul à la main et le calcul avec machine. Même si l'utilisation des calculatrices nécessite un apprentissage spécifique, celle-ci ne dispense pas d'une connaissance des techniques de calcul et des priorités opératoires.

Les types de calculatrices recommandées au collège sont les calculatrices quatre opérations en 6ème et 5ème et les scientifiques en 4ème et 3ème.

Pour le professeur, quels changements ?

Nous essayons dans ce paragraphe, d'étudier l'influence sur le travail du professeur lorsque les élèves disposent d'une calculatrice.

1 • Lors de l'introduction des notions

L'usage d'une calculatrice permet une *approche et une exploration* plus rapides de techniques opératoires, de certains concepts, de nouvelles notions. Elle peut être à l'origine de conflits, c'est le cas, par exemple, de l'introduction de la multiplication des décimaux, des opérations sur les relatifs, de la multiplication ou de la division par 10, 100, ..., en trigonométrie ou pour les puissances de 10, ...

Citons deux exercices illustrant ce genre de situation :

- Sans taper sur la touche $\boxed{\cdot}$, faire apparaître à l'écran de la calculatrice 5,2 ; 50,02 ; ...
- Calculer la valeur exacte de 637 528 000 × 726.

La calculatrice permet également l'évitement de l'*obstacle du calcul main* quand ce n'est pas l'objectif du travail, de gagner du temps lorsque le calcul est répétitif ou fastidieux et donc de se concentrer sur l'essentiel. C'est le cas notamment dans les problèmes comportant des divisions de nombres décimaux, dans les constructions de diagrammes angulaires, ou encore en statistiques pour le calcul de moyennes, ...
Elle donne la possibilité d'établir le *lien entre les opérations* (opérations et opérations inverses), comme, par exemple : $\frac{a}{b} = c$; $a = b \times c$ et $\frac{a}{b} \times b$.

2 • Dans la conception du travail

L'*approche expérimentale* de certaines notions, la découverte par l'élève de propriétés ou de notions nouvelles, la redécouverte de certaines techniques donne une idée mais nécessite de clarifier dans la classe ce qui est vérifié, admis et non encore démontré.

Le travail sur le *sens des opérations* par rapport à la technique opératoire est prioritaire.

L'importance du *calcul mental*, de l'ordre de grandeur d'un résultat est mis en valeur de plusieurs manières :
- soit la calculatrice est utilisée pour contrôler un résultat obtenu mentale-

ment,
- soit le calcul d'un ordre de grandeur donne une information préalable sur le résultat fourni par la calculatrice.

3 • Dans le choix des exercices

Le fait d'utiliser une calculatrice offre un travail dans un *champ de calcul plus large*, des études plus approfondies de certains thèmes : on peut choisir des nombres plus grands, des calculs avec des nombres tels que $\frac{3}{\cos 28°}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, x^2, $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sont possibles, on peut travailler avec des valeurs exactes sans rendre rationnel le dénominateur, sans calculer la valeur de la fraction ou en gardant des écritures trigonométriques.

Il est cependant nécessaire de rechercher des *exercices mettant en défaut l'outil* :
- soit des calculs dépassant la capacité d'affichage de la calculatrice,
- soit des calculs posant problème.

Par exemple :

$$\sqrt{8} - 2\sqrt{2}\ ,\ 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\ , \text{ et } \sqrt{5 + \frac{1}{3}} + \sqrt{48} - \sqrt{85 + \frac{1}{3}}$$

qui sont différents de 0 sur des calculatrices alors que

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ ,\ 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ et } \sqrt{5 + \frac{1}{3}} + \sqrt{48} = \sqrt{85 + \frac{1}{3}}\ ;$$

ou encore le calcul de $\frac{x + y - x}{y}$ pour x grand et y petit.

Cela oblige l'élève à trouver une nouvelle stratégie de calcul, à effectuer un changement d'écriture, à connaître des règles de transformation, à recourir au calcul littéral, à maîtriser le fonctionnement de sa calculatrice, celle-ci calculant sur des valeurs approchées et envoyant des informations qu'il faut apprendre à traiter ou à interpréter.

Tout ceci nous demande une réflexion sur le choix des nombres afin d'imposer certaines règles de calcul et de travailler en valeur exacte.

Cela requiert une modification, d'une part, dans la *formulation des questions* : demander la valeur exacte ou une valeur approchée avec une précision imposée va entraîner l'élève à enchaîner les calculs, à utiliser des priorités opératoires, à faire usage de parenthèses et, d'autre part, dans le *choix des problèmes* autant pendant l'apprentissage qu'au moment des évaluations. Citons un exemple, lorsque les élèves disposent de calculatrices résolvant les systèmes de deux équations à condition que celles-ci soient sous la forme $ax + by = c$, les textes seront choisis pour que leur traduction ne conduise pas directement à des équations sous la forme canonique mais pour que les élèves fassent fonctionner des règles de calcul algébrique pour s'y ramener.

4 • Pendant l'apprentissage

Il est riche de *confronter les résultats* donnés par les différentes calculatrices afin de semer le doute (troncature, arrondi), ou encore les réponses fournies par les élèves afin de s'interroger sur les approximations à choisir (quand on travaille avec des valeurs approchées, selon les choix, les décimales diffèrent). A-t-on bien les mêmes résultats ?

Pour redonner du sens à la notion de *démonstration* demandons les valeurs exactes, ce qui recommande l'enchaînement des calculs (par exemple : $\sqrt{\ }$, trigonométrie) ou bien donnons des exercices faisant fonctionner des règles peu utilisables. Voici un exemple :

"Je peux dire immédiatement que le carré de 75 est 5 625. Et toi, peux-tu trouver mentalement, le carré de tout nombre ayant 5 comme chiffre des unités ? "

Pour cet exercice, la calculatrice permet à l'aide de quelques essais de découvrir la règle mais pour la généraliser, il est nécessaire de passer à la démonstration et, pour cela, comprendre l'écriture décimale d'un nombre entier et faire fonctionner les identités remarquables.

5 • Au moment des synthèses

Le travail le plus important s'effectuera sur les démarches, sur l'organisation des calculs, sur la confrontation des résultats, sur le raisonnement plutôt que sur les techniques de calcul elles-mêmes.

6 • Conclusion

La connaissance des différents types de calculatrices utilisées par les élèves, les temps d'explication des fonctions multiples des différentes touches selon les modèles, les discussions autour des différents résultats obtenus peuvent être ressentis comme des obstacles ou des pertes de temps. Cependant si ces différences sont prises en compte dans le travail de la classe, elles peuvent être très riches pour la construction du savoir. Pour cela, évitons les chapitres sur l'utilisation de la calculatrice et essayons de placer les initiations au bon moment, en situation.

Et du côté de l'élève ?

1 • Par rapport au calcul

Le calcul est un obstacle important pour certains élèves qui cependant sont capables de fournir un raisonnement correct. La calculatrice leur permet d'*oublier les difficultés rencontrées pour les techniques opératoires,* apprentissage douloureux pour certains, et de se concentrer sur le sens. Ainsi par exemple, on peut éviter qu'ils ne divisent un grand nombre par un petit nombre parce que c'est plus facile ou qu'ils fassent une addition au lieu d'une multiplication toujours dans un souci de facilité.

La possibilité de *travailler par essais-rectifications,* de tester des résultats donne l'occasion de démarrer, de ne pas être bloqué lors de l'approche d'une notion nouvelle.

La rencontre d'écritures ou de nombres plus compliqués requiert une réflexion sur les conventions d'écritures ou l'acquisition de connaissances sur les priorités opératoires.

2 • La réflexion pendant la recherche

Lors de résolution de problèmes, l'activité de l'élève est plus centrée sur la compréhension du texte, sur le *sens des opérations* plutôt que sur la technique.

L'élève émet des *conjectures*, les teste rapidement, les confirme ou les infirme et peut continuer sa recherche.

L'élève peut analyser une *démarche* sans avoir le souci du calcul associé.

3 • Pour l'utilisation de l'outil

Il n'y a pas d'appréhension à l'utilisation de l'outil, on constate même une certaine curiosité, la motivation est accrue même chez les élèves faibles. La calculatrice doit devenir un outil familier comme le sont la règle et le compas.

La connaissance de l'outil est importante pour rentrer les calculs, pour analyser les réponses affichées. Que ce soit :

- les touches à double fonction selon les modèles (x^2 et $\sqrt{x}$, cos et $\cos^{-1}$) ce qui impose de réfléchir à ce que l'on cherche ;
- la touche $\times\ 10^x$ pour les puissances de 10, la lecture du résultat affiché et son interprétation ;
- les priorités de calculs, certaines calculettes ne les possèdent pas, conduisant à l'utilisation de parenthèses, des touches mémoires, des facteurs

constants (par exemple, pour calculer $\frac{80-10}{2}$, $\frac{80}{10-2}$, $80-\frac{10}{2}$; un calcul mental rapide permet de vérifier le résultat affiché) ;
- pour distinguer la valeur exacte et une valeur approchée (par exemple pour $\sqrt{20}$ où la "dernière" décimale 0 ne s'affiche pas sur les calculatrices affichant 8 chiffres et fait penser à certains que le nombre à l'écran est la valeur exacte de $\sqrt{20}$) ;
- pour la compréhension des écritures des fractions données par la calculatrice et des réponses tronquées ou arrondies ;
- au moment de la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues : les mettre sous la forme canonique $ax + by = c$ et identifier les coefficients a, b et c demandés par la calculatrice afin de les rentrer dans le bon ordre et de vérifier un résultat calculé ;
- pour l'enchaînement des étapes intermédiaires (approximations à choisir) ;
- pour l'utilisation des touches statistiques et les facteurs constants selon les différents modèles.

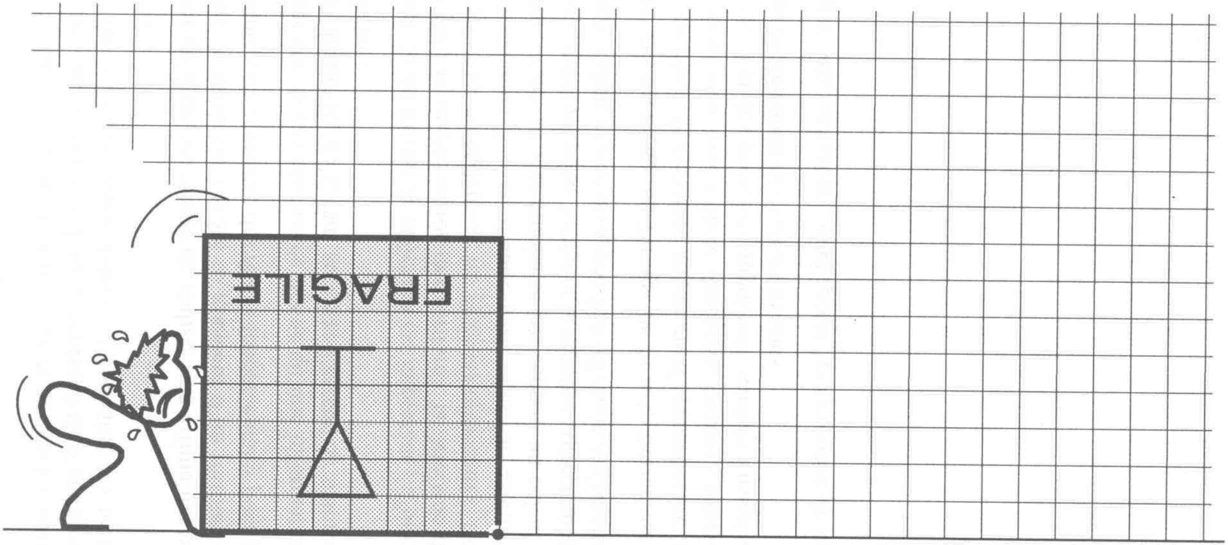
4 • Conclusion

On se rend bien compte également que l'utilisation d'une calculatrice est une aide précieuse mais est aussi la cause de quelques obstacles. Citons par exemple :
- l'élève oublie de simplifier les calculs avant d'utiliser la calculatrice, ou l'utilise de manière abusive pour des calculs très simples ; on remarque également un changement d'attitude, les élèves ne sont pas effrayés par les grands nombres, ne simplifient pas puisque la calculatrice se charge de leur gestion !
- souvent une valeur approchée prime sur la valeur exacte, un glissement apparaît dans les calculs avec des fractions telles que $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}$, la compréhension de l'outil, son affichage est la première préoccupation et occulte la connaissance des règles de calcul simples,
- l'utilisation de l'outil précède souvent la réflexion, les élèves se précipitent sur la calculatrice avant de faire une analyse du sujet proposé et de gérer rapidement des calculs simples.

Il est donc IMPORTANT pour nous de :

- montrer que l'usage de la calculatrice n'est pas toujours un gain de temps pour des calculs simples d'où la nécessité de s'entraîner au calcul mental (avec des nombres fréquentables) et connaître les techniques simples de calcul ;
- montrer qu'il est nécessaire de réaliser une estimation préalable du résultat et donc de travailler l'ordre de grandeur d'un résultat, de vérifier sa vraisemblance, de connaître des règles fondamentales pour prévoir ;
- montrer que la calculatrice ne donne qu'une information sur le résultat du calcul demandé, qu'il faut accepter l'erreur de manipulation et penser à simplifier ;
- montrer qu'un travail de réflexion est important ; d'une part, avant de calculer pour la simplification des écritures, la détection des calculs que l'on peut effectuer mentalement, les priorités opératoires, l'organisation du calcul proprement dit ; et, d'autre part, après le calcul pour interpréter la réponse, tester sa vraisemblance par rapport au calcul réalisé ou par rapport au problème posé, formuler la réponse correctement : écriture, simplification, valeur exacte ou approchée (division euclidienne) ;
- choisir des moments où l'usage de la calculatrice est interdit, lors de la mise en place de certaines situations d'apprentissage, à condition d'avoir un contrat clair avec l'élève (fractions, racines carrées, opérations sur les relatifs,...) et des exercices appropriés rendant l'usage de l'outil inefficace lorsqu'on demande des valeurs exactes ;
- enseigner une utilisation "intelligente" et raisonnée de la calculatrice.

Sans dessus-dessous…



Au prix de deux efforts successifs, Jean KESS le mathématicien manutentionnaire remettra le colis à l'endroit.
Dessine le dans sa position finale.

Calcul mental

Josiane GUIBERT   IREM d'Orléans

Les commentaires des programmes nous indiquent en cinquième comme en quatrième que :
« Toutes les activités numériques fourniront des occasions de pratiquer le calcul mental et d'utiliser une calculatrice. Plusieurs objectifs sont visés, en particulier développer la capacité à :
- *prévoir des ordres de grandeur,*
- *opérer en conservant l'écriture fractionnaire,*
- *utiliser le vocabulaire approprié (terme, facteur, numérateur, dénominateur),*
- *contrôler des résultats par des calculs mentaux approchés. »*

Les problèmes posés.

La plupart des enseignants de collège sont embarrassés pour gérer efficacement une activité de calcul mental. Si chacun est bien conscient que le calcul mental et le calcul à la machine ne sont pas contradictoires mais répondent à des objectifs différents, amènent à des apprentissages différents, la conception et la gestion d'une activité de calcul mental posent question.

Il me semble qu'il n'y a pas une réponse unique à ces préoccupations et je vais essayer d'en proposer quelques unes. Les exemples proposés ne couvrent pas tous les aspects du calcul mental fait au collège. D'autres types de séquences privilégient les rapports entre l'habileté calculatoire et la prise de sens dans la résolution des problèmes (voir article de D. BUTLEN et A.M. MONFRONT dans la brochure sixième). Par cette pratique, les élèves se libèrent de l'angoisse d'avoir à opérer sur des nombres « compliqués », ils prennent une distance par rapport aux données numériques et ainsi sont davantage disponibles pour une recherche plus aisée du modèle à mettre en jeu pour résoudre le problème.

Un apprentissage qui se poursuit de la sixième à la troisième.

Voici donc quelques exemples d'activités ... et des idées pour en fabriquer d'autres.

A. En sixième.

1. *Estimation d'un résultat.*

Compétences mises en jeu :

- trouver l'ordre de grandeur d'un résultat,
- valider une réponse.

Chaque calcul peut être écrit au tableau. Les élèves disposent d'un temps donné (1 min) pour proposer une réponse. Les réponses obtenues sont écrites au tableau puis discutées avec la classe.

exercice 1 :
Donne un ordre de grandeur des produits suivants :
413×49 ; 319×81 ; 122×19 ; 785×34 ; 18×83

Plusieurs stratégies peuvent être employées et leur diversité sera source de richesse dans l'exploitation faite en classe au moment du bilan collectif. Un produit peut être estimé par défaut (ou par excès) en approximant tous ses facteurs par défaut (ou par excès). L'estimation obtenue est plus éloignée du résultat cherché que si on compense un facteur par défaut et l'autre par excès. Les stratégies mises en place deviendront de plus en plus performantes au fur et à mesure que les élèves prendront conscience de ces phénomènes.

Comme dans le cas des produits, les deux nombres qui interviennent

exercice 2 :
Donne un ordre de grandeur des quotients suivants :
319 : 81 ; 122 : 18 ; 4 756 : 118 ; 12 730 : 27 ; 871 : 45

pourront être arrondis par défaut ou par excès. L'estimation sera plus éloignée du résultat si l'un des nombres est arrondi par défaut et l'autre par excès.

Pour calculer 319 : 81, la solution la plus simple peut être de faire 320 : 80 et d'obtenir 4.

Mais dans le cas de 871 : 45, on peut obtenir des résultats très divers ; les élèves peuvent proposer 900 : 45 = 20, ou 900 : 40= plus de 20, ou 900 : 50 = moins de 20. On ne peut guère attendre de réponse plus précise en calcul mental.

Des exercices de ce type peuvent être proposés avant d'effectuer un calcul à la machine. Chaque élève devra donc chercher l'ordre de grandeur avant d'effectuer le calcul en utilisant une calculatrice. Son estimation aura pour objectif de lui fournir un élément de critique de son résultat.

> exercice :
> Pour les calculs suivants, quelle est la proposition la plus proche du résultat ?
> - 98×48 ; réponses proposées : 5 000 ; 2 000 ; 150.
> - 36 912 : 12 ; réponses proposées : 300 ; 3 000 ; 30 000.
> - 13 578 – 7 356 + 1 269 – 451 ;
>
> réponses proposées : 3 000 ; 7 000 ; 10 000.

Pour répondre au premier calcul, l'estimation 100×50 amène à la réponse 5 000.

Pour répondre au deuxième calcul, une estimation 37 000 : 10 amène à la réponse 3 700.

Pour répondre au troisième calcul, une estimation sera 13 000 – 7 000 + 1 000 soit 7 000.

2. Vérification de la réponse à un calcul.

Compétences mises en jeu :

- utiliser les tables de multiplication,
- justifier une réponse.

Le texte de l'exercice peut être écrit au tableau ou mieux, rétroprojeté.

> exercice :
> Le professeur a demandé de calculer 47×28.
> Mathias a trouvé 1 315. Julie dit que ce n'est pas possible.
> Sans faire le calcul demandé, dis qui a raison et pourquoi.

Les élèves sont invités à donner leur réponse en la justifiant. Plusieurs peuvent chercher un ordre de grandeur, par exemple : « le produit cherché est un peu inférieur à $50 \times 30 = 1\ 500$, donc le résultat proposé par Mathias n'est pas ridicule ». Cette argumentation, tout à fait correcte, ne permet pas de répondre à la question posée. Si nécessaire, un débat peut être organisé par l'enseignant. C'est en faisant le produit des chiffres des unités que l'on pourra affirmer que Julie a raison.

3. Vu dans l'évaluation sixième

Il ne faudrait surtout pas confondre les deux exercices précédents avec l'exercice n° 13 de l'évaluation de septembre 1996 pour lequel les compétences annoncées sont :

- donner un sens à un résultat ou rédiger une justification,
- fournir l'ordre de grandeur d'un résultat numérique,
- évaluer un ordre de grandeur pour des résultats d'opération et choisi entre plusieurs réponses possibles.

exercice :			
a) 12 × 98 est égal à			
11 716	2 166	976	1 176
b) 13 064 : 92 est égal à			
142	1 142	512	12
c) 27 × 304 est égal à			
5 208	908	8 208	8 197

La question ne précise ni la méthode ni les compétences que l'élève doit mettre en œuvre pour répondre.

Le calcul a) fait intervenir deux arguments ; si on cherche l'ordre de grandeur du résultat, on peut dire que 12 × 98 est à peu près égal à 10 × 100 ; deux résultats conviendraient : 976 et 1 176 ; mais comme 10 × 98 = 980, le résultat est forcément supérieur à 980 et ne peut être que 1 176.

Le calcul b) utilise uniquement l'ordre de grandeur ; 13 064 : 92 est à peu près égal à 13 000 : 100 donc voisin de 130 ; le seul résultat qui convienne est 142.

Pour le c), on utilise deux arguments ; tout d'abord l'ordre de grandeur, en remplaçant 27 × 304 par 30 × 300 ; deux réponses peuvent alors convenir : 8 208 et 8 197 ; c'est en faisant le produit des chiffres des unités qu'on pourra valider 8 208.

Cet exercice, proposé à l'écrit et dans une évaluation, est beaucoup trop difficile pour des élèves qui entrent en sixième ; de plus, il ne permet pas de vérifier si les compétences annoncées sont acquises ou non. Par contre, c'est un bon exercice où les élèves ont l'initiative de l'argumentation et ont à utiliser plusieurs arguments pour arriver à la justification de la bonne réponse. Ce type d'exercice peut se faire oralement en cours de sixième ou en début de cinquième.

B. En cinquième.

1. Une approche ludique.

a) *Calculs avec parenthèses et priorités* : jeu de dominos (règles de fabrication dans la brochure « Jeux » de l'A.P.M. E.P. ou la brochure « dominos mathématiques » de l'IREM de Lorraine).

Objectifs :

- utiliser les priorités des opérations,
- effectuer un calcul mentalement,
- critiquer un résultat.

Matériel : Un jeu de dominos par groupe, photocopié sur du bristol puis découpé.

$1+1\times 1$	$2+1\times 1$	$2+1\times 1$	$2\times 2-1$	$1+1\times 3$	$3\times 5-4\times 3$
$2\times 2+1$	$2\times(2+1)-3$	$2+2\times 2$	$(5+7):4$	$4-1\times 2$	$12-(3+1)\times 2$
$2\times 2-1$	$2\times 2+1$	$6-1\times 2$	$3\times 2-1$	$3\times 2-1$	$(7\times 2+1):3$
$10-2\times 2$	$3\times 3-2\times 2$	$1\times 1+1\times 1$	$12-(1+2)\times 2$	$3\times 5-4\times 3$	$3+2\times 2$
$1\times 3+1\times 1$	$5\times 2-3$	$(7\times 2+1):3$	$3\times 3-2$	$2\times 2+2\times 1$	$5\times 3-4\times 2$
$2\times(0+1)$	$2\times(2+2)$	$2\times(2+1)-3$	$2\times 2+2\times 2$	$2\times(1+1)$	$12-2\times 2$
$3\times 2-2\times 2$	$3\times 2+3$	$2\times(2+1)$	$12-(2+1)$	$6-2\times 2$	$12-1\times 2$
$(5+7):4$	$2\times 2+2\times 3$	$12-2\times(3+1)$	$2\times(2+3)$	$(4+2\times 3):2$	$12-(3-1)\times 2$
$12-2\times(2+1)$	$4-1\times 2$	$3+2\times 2$	$1+1\times 3$	$5\times 2-3$	$(4+2\times 3):2$

$3 \times 3 - 2$	$2 \times (2 + 1)$	$5 \times 3 - 4 \times 2$	$4 \times 2 + 1$	$3 \times (3 + 1) - 5$	$1 + 1 \times 1$
$2 + 3 \times 2$	$6 - 2 \times 1$	$2 \times 2 \times 2$	$2 + 2 \times 2$	$2 \times (2 + 2)$	$3 \times (3 + 1) - 5$
$2 \times 2 + 2 \times 2$	$5 \times 2 - 1$	$12 - 2 \times 2$	$1 \times 1 + 1 \times 1$	$3 \times 2 + 3$	$3 \times 1 + 1 \times 1$
$12 - (2 + 1)$	$10 - 2 \times 2$	$4 \times 2 + 1$	$2 + 3 \times 2$	$5 \times 2 - 1$	$5 \times 3 - 3 \times 2$
$5 \times 3 - 3 \times 2$	$2 \times (1 + 0)$	$4 + 2 \times 3$	$2 \times (1 + 1)$	$12 - 2 \times 1$	$2 \times 2 + 2 \times 1$
$2 \times 3 + 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times (3 + 2)$	$4 + 2 \times 3$	$12 - 2 \times (3-2)$	$6 - 2 \times 2$

On peut constater un bon investissement des élèves dans cette activité. Chaque élève doit vérifier le résultat annoncé par celui qui joue et chacun est donc actif à tout moment.

b) *Multiplier deux nombres en écriture fractionnaire* (d'après « *Calcul mental, automatismes* », brochure de l'IREM de Clermont Ferrand).

Objectif :

Effectuer le produit de deux nombres en écriture décimale ou fractionnaire.

Déroulement :

Pour chaque bande, le professeur projette la série de calculs. Au signal du professeur, chaque élève écrit ses résultats sur la grille correspondante ; il s'arrête quand le temps donné est écoulé (1/2 minute par calcul semble un temps raisonnable pour cet exemple). Pour chaque calcul, le professeur écrit au tableau toutes les réponses trouvées par les élèves ; puis il fait expliquer les procédures afin de dégager les plus performantes et il exploite les erreurs en faisant éventuellement rappeler les règles de calcul.

Matériel :

- des bandes de transparent sur lesquels sont écrits les calculs à effectuer,

- un rétroprojecteur,
- des bandes de grilles vierges pour les élèves.

Documents à photocopier sur transparent.

Bande n° 1.

$15 \times \frac{4}{3}$	$\frac{5}{3} \times 21$	$\frac{4}{5} \times 12$	$30 \times \frac{2}{9}$

Bande n° 2

$\frac{3}{14} \times 7$	$\frac{4}{9} \times 63$	$12 \times \frac{5}{9}$	$20 \times \frac{7}{5}$

Bande n°3

$4 \times \frac{7}{3}$	$\frac{3}{8} \times 10$	$\frac{48}{13} \times 26$	$10 \times \frac{11}{30}$

Documents pour les élèves

Bande n° 1

Bande n° 2

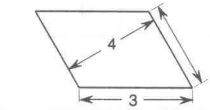
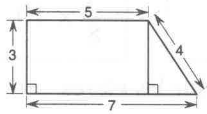
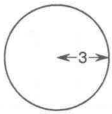
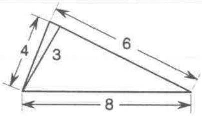
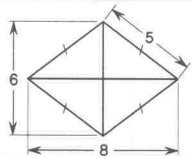
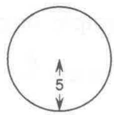
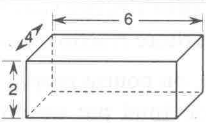
Bande n° 3

Dans cet exemple, on propose des produits d'un entier par une fraction de la forme $\frac{a}{b} \times c$ ou $a \times \frac{b}{c}$; certains calculs donnent un résultat entier, d'autres un résultat qui peut s'écrire sous forme décimale, enfin d'autres donnent uniquement une écriture fractionnaire.

Par la suite, on pourra proposer des activités du même type portant sur le produit d'un décimal par un nombre fractionnaire ou le produit de deux nombres en écriture fractionnaire dont les numérateurs et les dénominateurs sont entiers ; quant au produit de deux nombres en écriture fractionnaire dont les numérateurs et les dénominateurs sont décimaux, il me semble trop difficile à aborder en calcul mental en cinquième.

2. Une approche géométrique : calculs d'aires et de volumes.

Q.C.M. : A chaque ligne, entourer la case qui correspond à la bonne réponse. Les longueurs et les périmètres sont indiqués en centimètres, les aires sont en cm^2.

1. L'aire du parallélogramme ci-contre est :		7,5	10	12
2. L'aire du trapèze ci-contre est :		18	14	24
3. L'aire du disque ci-contre est :		3π	6π	9π
4. L'aire du triangle ci-contre est :		6	9	12
5. L'aire du quadrilatère ci-contre est :		15	20	24
6. La longueur du cercle ci-contre est :		5π	25π	10π
7. Le volume du parallélépipède rectangle ci-contre est :		12	48	40

Ce Q.C.M., auquel les élèves répondent individuellement et par écrit, peut être proposé en activité ou en évaluation formative. Le bilan donnera lieu à une discussion dans la classe ; à l'occasion de l'exploitation des erreurs, on pourra faire rappeler les formules d'aires et de volumes.

D'une manière générale, tous les calculs d'aires et de volumes pourront être faits mentalement chaque fois que les nombres en jeu sont simples.

3. Une approche numérique et algébrique.

a) <u>*Faire décomposer un nombre sous forme de produit*</u>.

Avant de simplifier des nombres en écriture fractionnaire, on fera une activité préalable : chercher toutes les façons possibles d'écrire un nombre sous forme d'un produit, comme par exemple :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 5,$$
$$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 2 \times 3 \times 7 = 6 \times 7$$

Cette activité est très importante, puisque la compétence sera réutilisée pour :

- simplifier des nombres en écriture fractionnaire comme $\frac{12}{60}, \frac{20}{60}, \frac{15}{60}, \ldots$

- factoriser au maximum des expressions comme : $16a + 40b - 72c, \ldots$

b) <u>*Utiliser la distributivité*</u>.

On peut faire des activités du type suivant en calcul écrit, sans brouillon ni calculatrice.

exercice : Effectuer les calculs suivants en indiquant toutes les étapes : 32×24 ; $98 \times 7 + 2 \times 7$; $108 \times 13 - 8 \times 13$

Pour 32×14, on peut attendre

$$(30 + 2) \times 14 = 30 \times 14 + 2 \times 14 = 420 + 28 = 448,$$
ou
$$32 \times (10 + 4) = 32 \times 10 + 32 \times 4 = 320 + 128 = 448,$$
ou
$$32 \times (10 + 5 - 1) = 32 \times 10 + 32 \times 5 - 32 \times 1$$
$$= 320 + 160 - 32 = 448, \ldots$$

Pour $98 \times 7 + 2 \times 7$, on peut attendre $(98 + 2) \times 7 = 100 \times 7 = 700$.

Pour $108 \times 13 - 8 \times 13$, on peut attendre

$$(108 - 8) \times 13 = 100 \times 13 = 1\,300, \ldots$$

Dans chacun des cas, on pourra exploiter toutes les réponses des élèves et mettre en évidence l'existence d'une multitude de procédures dont certaines sont peut-être plus performantes !

On peut également proposer des calculs faisant intervenir des décimaux ou des nombres en écriture fractionnaire, comme, par exemple,

$$\frac{721}{7} = \frac{700}{7} + \frac{21}{7} = 100 + 3 = 103.$$

D'autres activités de calcul mental sont envisageables en cinquième comme des additions ou des soustractions d'entiers puis de décimaux relatifs.

C. En quatrième et en troisième.

1. De nouvelles techniques numériques.

a) *Différentes écritures d'un même nombre*

Après avoir appris comment diviser par un nombre en écriture fractionnaire, on pourra dire que diviser par 3 c'est multiplier par $\frac{1}{3}$, que diviser par $\frac{2}{3}$ c'est multiplier par $\frac{3}{2}$.

Des calculs de ce type pourront être proposés oralement, par exemple dans des résolutions de problèmes où ils interviennent.

b) *Connaître le chiffre des unités de quelques carrés d'entiers.*

Le théorème de Pythagore amène à calculer des carrés ; il me paraît intéressant de demander aux élèves de connaître les carrés des seize premiers entiers, de même qu'on leur a demandé auparavant de savoir les tables de multiplication.

c) *Décomposer un nombre* sous la forme d'un produit dont un des facteurs est un carré le plus grand possible. Ce travail est bien utile lorsqu'il s'agit de transformer des écritures de radicaux.

exemple : $48 = 16 \times 3$; donc $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

Il peut se justifier également quand on demande de simplifier l'écriture d'un quotient comme $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{20}}$.

2. De nouvelles écritures : puissances de dix.

On pourra proposer des activités qui permettent d'apprendre les propriétés des puissances de dix qui sont au programme en utilisant deux méthodes : le calcul mental et la calculatrice. Ainsi, on pourra donner aux élèves le réflexe de contrôler le résultat trouvé avec la machine et en même temps leur permettre de s'entraîner à trouver des ordres de grandeur, à calculer avec des relatifs.

On pourra également proposer des exercices où il faudra passer de l'écriture scientifique à l'écriture décimale d'un nombre et inversement ; ce travail sera écrit, mais sans aide ni du brouillon, ni de la calculatrice. On obtiendra ainsi des expressions de la forme :

$$0{,}003\,78 = 3{,}78 \times 10^{-3} \ ; \ 8{,}156 \times 10^{4} = 81\,560.$$

3. De nouvelles techniques algébriques : *organiser des calculs en utilisant les produits remarquables.*

On peut demander de répondre en calcul écrit, sans calculatrice ni brouillon, en indiquant toutes les étapes comme dans

$$99 \times 101 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$$

ou dans

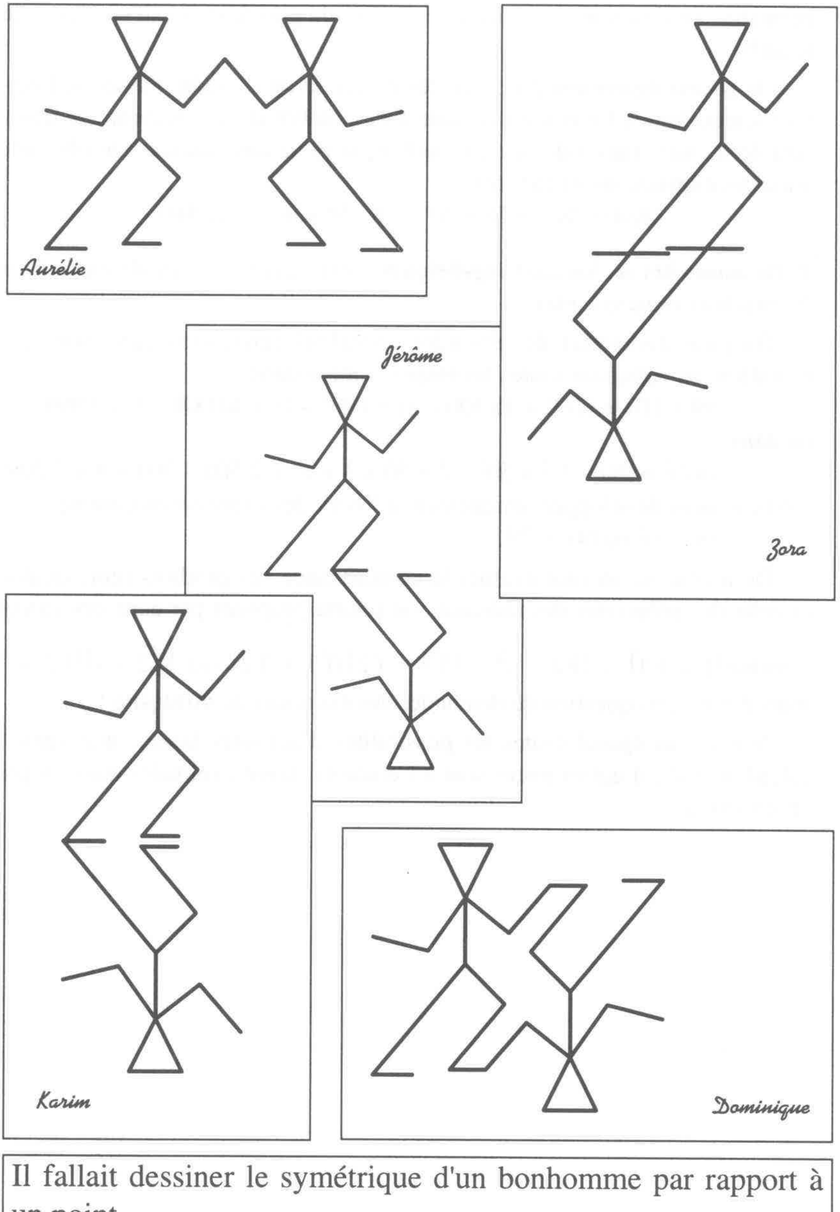
$$(47)^2 = (50 - 3)^2 = 50^2 - 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2\,500 - 300 + 9 = 2\,209.$$

On peut aussi développer, uniquement à l'oral, des expressions comme

$(x - 3)^2$ ou $(4x + 7)^2$.

De même, si on veut évaluer la connaissance des produits remarquables et celle des propriétés des radicaux, on pourra proposer par écrit des calculs comme $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2$, $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$, $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ ou $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$ mais il n'est pas question de demander des exercices de virtuosité !

Je n'ai pas épuisé toutes les possibilités d'activités faisant intervenir le calcul mental ; d'autres pistes sont à l'étude et seront exploitées dans un prochain article.



Il fallait dessiner le symétrique d'un bonhomme par rapport à un point…
Qui a juste ? … Qui a faux ? …

TROISIÈME PARTIE

Du naturel au relatif : une question de signe ?

Quel professeur de mathématique de troisième ne s'est-il point désespéré devant les erreurs répétées de ses élèves lors de la réduction de termes semblables dans une expression algébrique ?

Si, dans un premier temps, il peut être tenté de montrer du doigt ses prédécesseurs, l'honnêteté l'oblige à reconnaître que ces erreurs récurrentes ne s'expliquent pas par un manque ou un défaut d'apprentissage.

C'est en cinquième que l'essentiel se joue, lors de la mise en place de l'addition et de la soustraction dans les relatifs. Si l'objectif est d'amener l'élève à « voir » une suite de calculs sans parenthèses avec des + et des – comme une suite « d'additions », y a-t-il une « voie royale » sur laquelle s'établisse un consensus concernant la manière d'introduire les calculs avec les nombres relatifs et les règles et conventions (parfois implicites) qui s'y rattachent ?

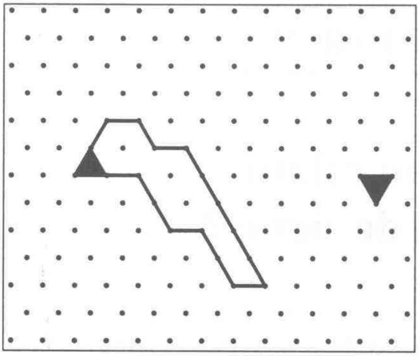
Nous pensons que non, et, pour cette raison, nous avons choisi de vous présenter deux approches contradictoires.

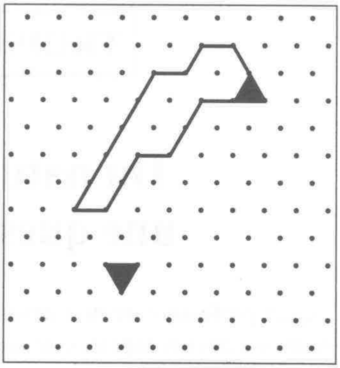
La première privilégie l'approche des entiers relatifs comme de nouveaux nombres, sur lesquels il va falloir construire les opérations, en distinguant clairement les différents statuts des signes (prédicatifs, opératoires, opposés).

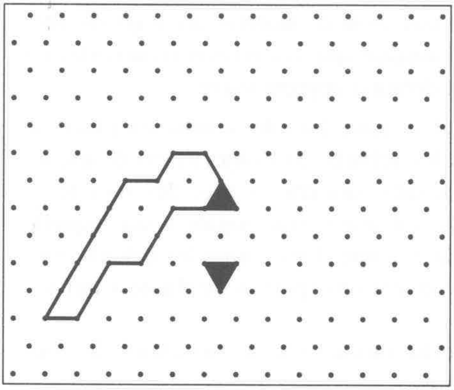
La seconde essaie au contraire de partir du sens déjà acquis avec les entiers naturels pour augmenter les capacités opératoires.

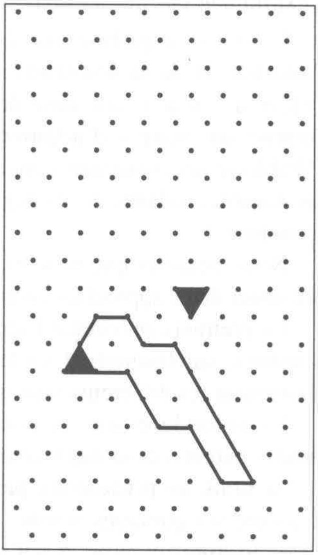
Si nous ne présentons pas de modèle unique, nous sommes toutefois d'accord sur quelques points :

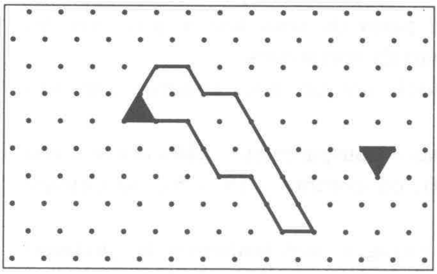
- Les écritures comme $5 - 9$ ne sont pas « transparentes »; elles doivent être interprétées, soit comme $5 + (-9)$, ou comme $-(9 - 5)$, ou comme $(+5) - (+9)$ ...
- Quels que soient les choix faits, ils engagent non seulement les premiers calculs numériques, mais aussi la gestion ultérieure des calculs littéraux.
- Il faut qu'à terme les élèves se construisent une interprétation suffisamment « stable » pour qu'ils puissent traiter efficacement les principales situations numériques ou littérales avec lesquelles ils seront confrontés.











A partir du bec déjà tracé, termine le dessin du symétrique de la perruche dans la symétrie centrale qui convient.

Les nombres relatifs

Chantal GOBIN IREM de Poitiers

Lors de la phase d'introduction des nombres relatifs en sixième, il a paru essentiel de varier les situations afin de permettre à l'élève de se construire une représentation des nombres relatifs principalement centrée sur l'aspect nombre. En cinquième, l'élève est amené à considérer ces nombres comme des quantités autonomes avec lesquels il va effectuer des additions et des soustractions, opérations déjà connues sur d'autres nombres et possédant les mêmes propriétés. Ceci ne va pas sans difficulté quand on pense qu'il y a à peine plus d'un siècle (1866), DUHAMEL, professeur à l'Ecole Polytechnique, écrivait :
« *Toute démonstration des règles sur des quantités négatives isolées ne peut être qu'illusion puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres et n'ont aucune existence réelle.* »

Le but de cet article est d'analyser les mises en place des techniques opératoires concernant l'addition et la soustraction des nombres relatifs, de s'intéresser aux différents statuts du signe « – », en soulignant les obstacles que peut rencontrer un élève de cinquième.

1 - L'addition

a) Les contextes d'utilisation

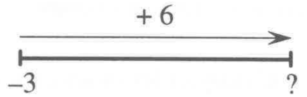
L'addition est la première opération apprise à l'école primaire. La pratique longue et répétée de situations dans lesquelles elle fonctionne bien, en fait, en général, une opération bien maîtrisée par les élèves pour les décimaux positifs. Mais il s'agit maintenant de la prolonger à de « nouveaux nombres ». Selon les activités d'introduction des nombres relatifs, nous nous trouvons en présence de trois possibilités de mise en place de l'addition de deux relatifs :

• soit les écritures ont acquis un statut de nombre et l'apprentissage porte sur la réalisation d'une opération connue avec ces nouveaux nombres et de ses propriétés en s'aidant d'images mentales telles que jetons de couleurs différentes, gains ou pertes. Il s'agit bien là de mettre ensemble des nombres de même nature (relatifs) mais pas toujours de même espèce (positifs et négatifs) et d'en faire le bilan.

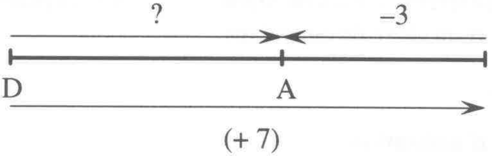
- soit à partir d'une position initiale, nous réalisons une variation et nous essayons de trouver le résultat final. Les deux nombres en présence, représentent deux choses différentes : le premier indique un état (position, avoir) et le deuxième traduit une variation, un déplacement.
  Exemple : Ce matin, il fait – 3°, la température monte de 6°. Quelle est la nouvelle température ?
- soit, et c'est peut-être une situation préférable, la somme correspond au bilan de deux variations ou de deux déplacements.
  Exemples :
  - L'ascenseur monte de 7 étages, puis il descend de 3 étages. Peut-il faire le même déplacement en une seule fois ?
  - Le matin, j'ai perdu 7 billes et l'après-midi, 3 autres. Quel est le bilan de la journée ?

Dans les deux dernières possibilités, les images se situent davantage dans le domaine géométrique, les variations peuvent, en effet, se traduire par des schémas du genre :

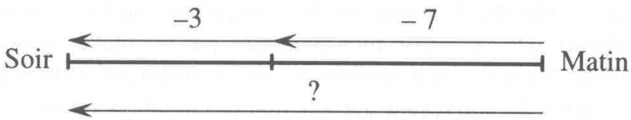
Pour les températures : $(-3) + 6$



Pour l'ascenseur : $(+7) + (-3)$



Pour les billes : $(-7) + (-3)$



Pour l'exemple de l'ascenseur et celui des billes, l'enchaînement des déplacements, indiqué par le mot « et » ou « suivi de » dans la phrase française, correspond au + de l'addition. C'est ce qui semble poser le plus de difficultés à l'élève. L'omission du signe opératoire est fréquente, les déplacements et les variations se juxtaposent : $-3-7$.

Pour l'élève a-t-on encore le modèle d'une addition ? Est-ce seulement un problème d'écriture ?

Si les modèles fonctionnent bien et si les images précédentes permettent d'appréhender facilement les nouvelles situations, quels sont alors les obstacles à l'apprentissage ?

Pour l'élève, il est nécessaire au début, de s'adapter à chaque situation, de réfléchir aux nombres en présence, d'accepter que pour faire une addition de nombres relatifs, il faut parfois effectuer une addition « arithmétique », d'autres fois une soustraction « arithmétique ». C'est une réelle difficulté. Donner une réponse intuitive, c'est encore assez facile, mais lorsqu'il faut expliciter sa démarche et formuler une règle générale, cela devient plus problématique et il y a pour certains élèves, une véritable difficulté.

Alors quelles situations allons-nous mettre en place pour aborder l'addition des nombres relatifs ?

b) les manuels

Les situations présentées dans les manuels (différences d'épaisseurs de couches de neige, différences d'altitudes ...) sont intéressantes mais la formulation des questions n'amène pas toujours l'élève à remettre en cause les techniques qu'il sait déjà utiliser. N'oublions pas que la nécessité de l'utilisation des nombres relatifs est un enjeu important en cinquième. L'élève doit être amené à les manipuler, non pas seulement pour « faire plaisir » au professeur, mais bien parce qu'il prend conscience qu'il peut, grâce à ces nombres, modéliser les problèmes posés et les résoudre de façon plus performante. Il faut pour cela lui proposer des énoncés qui, même s'ils ont pour support des situations concrètes, l'incitent à modifier ses techniques et à se construire de nouvelles représentations.

c) la règle et les propriétés

A travers ces situations, l'élève va se familiariser avec l'addition de deux nombres relatifs de manière intuitive ; mais serait-il capable d'expliciter les règles qu'il utilise ? Quelles formulations en donnera-t-il ?

Il semble qu'en cinquième, le plus important soit que l'élève acquière une méthode de calcul :

- qu'il reconnaisse l'écriture d'une addition de deux nombres relatifs,
- qu'il observe les signes des nombres,
- qu'il déduise d'une part le signe du résultat (nombres de même signe ou non), d'autre part l'opération « arithmétique » à effectuer pour donner le résultat.

Les formulations peuvent être données en liaison avec le travail de repérage, sur la droite graduée et en terme de « distance à zéro » (la notion de valeur absolue ne figurant plus, à juste titre, en collège). Les formulations rigoureuses, n'ayant aucun sens pour l'élève, semblent prématurées.

Quant aux propriétés, il est important de faire sentir à l'aide d'exemples, dans des situations choisies, que l'addition déjà connue avec des décimaux positifs et celle des nombres relatifs n'en sont qu'une seule.

N'est-il pas plus facile de calculer (+ 9) + (– 6) que (– 6) + (+ 9) , de regrouper des termes pour en effectuer la somme :

$$\begin{aligned}(-13)+(+27)+(-4) &= (+27)+(-13)+(-4)\\ &= (+27)+(-17)\\ &= 10\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de donner les noms de ces propriétés, cependant on peut faire sentir aux élèves que leur utilisation ne change pas la valeur des résultats mais qu'elle facilite les calculs.

2 - La soustraction

Il semble que, pour nous enseignants, le travail se situe à deux niveaux. D'une part, il est important de proposer des situations dans lesquelles la soustraction existe avec des nombres positifs et négatifs afin qu'elle prenne sens en tant qu'opération, d'autre part, il nous faut donner du sens à la technique opératoire et faire comprendre que la transformation en addition s'impose et qu'elle est fondée.

a) les contextes d'utilisation

Quelles connaissances possède un élève au sujet de la soustraction arithmétique ?

Parmi les conceptions de la soustraction, deux d'entre elles permettent le prolongement du domaine « arithmétique » au domaine « relatif ».

La première idée correspond à la recherche de l'écart entre deux états (état final, état initial) et consiste à effectuer la différence entre deux valeurs d'une même grandeur. La seconde idée est celle de la complémentarité, de manque : rechercher le nombre à ajouter au deuxième nombre pour obtenir le premier, ce qui se traduit par la transformation de : $a - b = \square$ en $a = b + \square$

Il est intéressant de prendre appui sur ces connaissances, de faire fonctionner l'opération dans des cas faciles (nombres positifs) et d'essayer de prolonger aux nombres relatifs (positifs et négatifs). Les exemples permettant ce passage et donnant du sens à l'opération, sont, en fait, peu nombreux ; citons-en cependant quelques-uns :

- le calcul de la durée de vie, lorsque la date de naissance est négative ;
- le calcul de la distance de deux points d'une droite graduée lorsque ceux-ci sont de chaque côté de l'origine ;

• le calcul des variations de températures, celles pouvant être positives ou négatives.

Dans les deux premiers cas, les résultats sont toujours positifs de par leur nature, le premier nombre correspond toujours au plus grand des deux. Dans le troisième cas, les variations peuvent être de deux sortes. Nous y reviendrons au moment où nous exposerons une proposition pour introduire la soustraction.

L'écriture de la soustraction ne pose aucune difficulté lorsque nous manipulons des nombres positifs, en revanche, il y a rupture au voisinage de zéro. Il n'y a pas de prolongement dans l'écriture, l'élève calcule en effectuant une addition et hésite à écrire une soustraction respectant le calcul réalisé jusqu'alors.

Exemples :

naissance : 1745	mort : 1817	durée de vie : 1817 – 1745 = 72
naissance : 10 av JC	mort : 20 ap JC	durée de vie : 20 + 10 = 30

L'élève hésite à écrire 20 – (– 10).

Ces hésitations sont à exploiter pour apporter une aide à la compréhension de l'opération d'une part, de sa technique d'autre part.

La seconde idée, recherche du complément, est beaucoup plus exploitée dans les manuels : elle vise à donner du sens à la technique et à valider la transformation de la soustraction en addition.

b) les manuels

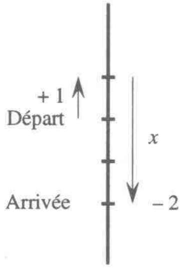
Dans de nombreux manuels, la règle est introduite par l'utilisation de la calculatrice. il s'agit de comparer les résultats donnés pour $a - b$ par la calculatrice et les résultats calculés à la main pour a + opp b sur quelques exemples, et accepter la règle « soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé ». Certes les résultats sont identiques, mais cela ne permet en rien de comprendre pourquoi il en est ainsi, d'en saisir la raison.

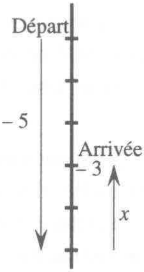
Dans d'autres manuels et dans un souci de donner quelques images mentales à la soustraction, on utilise des modèles « concrets » et on recherche la transformation additive équivalente.

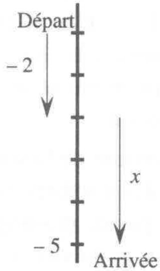
C'est le cas dans l'exemple de l'ascenseur, il s'agit là :

- d'une part de trouver le complément pour arriver au niveau indiqué en s'aidant du dessin :

$1 + x = -2$	$(-5) + x = -3$	$(-2) + x = -5$
$x = (-2) - 1$	$x = (-3) - (-5)$	$x = -5 - (-2)$
$x = -3$	$x = 2$	$x = -3$







- d'autre part d'écrire le bilan sous forme d'une addition équivalente :

$x = (-2) + (-1)$ $\qquad$ $x = (-3) + 5$ $\qquad$ $x = (-5) + 2$

Les écritures $x = (-2) - 1$; $x = (-3) - (-5)$ et $x = (-5) - (-2)$ correspondent aux soustractions mais le passage aux additions équivalentes n'est pas suggéré par les schémas.

Une difficulté supplémentaire est d'écrire l'addition qui correspond effectivement à la soustraction à transformer et non une autre donnant le même déplacement, par exemple $x = (-1) + (-2)$ déduite du dessin. De plus -2 indique tantôt une position, tantôt un déplacement, n'est-ce pas là une difficulté réelle, comme nous l'avons vu pour l'addition ?

Certaines activités d'introduction reposent sur la transformation de $a - b = c$ en $a = b + c$ ou réciproquement, par l'intermédiaire de résolution d'équations à trous où la recherche de l'inconnue peut être facilitée par la visualisation sur la droite graduée ou de résolution d'équations de type algébrique actuellement étudiée en classe de quatrième.

Une autre approche possible est basée sur la connaissance de la somme nulle de deux nombres opposés et sur son addition à n'importe quel nombre, puisqu'ajouter zéro ne change pas la valeur.

Exemple :

Soit la différence $(+15) - (-7)$; nous ne la modifions pas en ajoutant une somme nulle telle que $(-7) + (+7)$ d'où :

$$(+15) - (-7) = (+15) - (-7) + (-7) + (+7).$$

Or dans le second membre $-(-7)$ est compensé par $+(-7)$, il en résulte que :

$$(+15) - (-7) = (+15) + (+7)$$

c) une approche possible

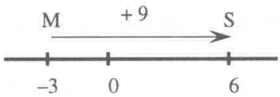
Précédemment, nous avons évoqué des situations donnant du sens à la soustraction en tant qu'opération existant avec les nombres relatifs. Prenons la situation des variations de températures et examinons une stratégie possible. Tous les élèves sont d'accord pour donner comme exemple de variation de la température sur une journée la différence entre la température (finale) du soir et la température (initiale) du matin.

• La première étape consiste à faire calculer les variations sur des exemples simples comme les deux premières colonnes sur le tableau suivant, puis de poser le problème en proposant la troisième colonne de ce même tableau :

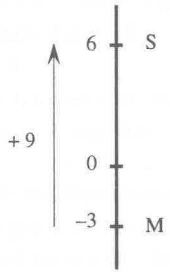
Température du matin	12	15	– 3
Température du soir	15	12	6
Variation	15 – 12 = 3	12 – 15 = – 3	

Il y a rupture dans l'écriture, l'élève n'écrit plus la soustraction 6 – (– 3) mais calcule naturellement 6 + 3 = 9 en s'aidant éventuellement d'un dessin, on peut l'amener à expliciter son changement de calcul.

Exemple : pour 6 – (– 3)



ou



Il est à remarquer que la disposition verticale du dessin des températures est plus proche du concret d'un élève que la disposition horizontale. En effet, il visualise très vite le zéro, les températures positives (celles qu'il voit dessinées au-dessus du zéro) et les températures négatives (celles qu'il voit au-dessous du zéro).

• Le problème étant posé, dans un second temps nous pouvons lister avec les élèves les différents signes qui peuvent se présenter.

Ensuite nous pouvons trier ceux que l'on sait calculer directement :

- soustraction arithmétique,
- soustraction qui a permis d'introduire les « nouveaux » nombres (voir l'article de Claude Robin sur les nombres relatifs dans le « Des Mathématiques en Sixième »), et représenter les autres calculs à l'aide de dessins pour en trouver le résultat.

• La troisième étape consiste à observer le résultat de : 6 – (–3) = 6 + 3 pour analyser la transformation et dégager une règle de calcul.

- Enfin, nous vérifions que cette règle fonctionne d'abord sur les cas connus tel que :

$$12 - 15 = 12 + (-15) = -3$$

puis sur les autres tel que :

$$(-3) - 6 = (-3) + (-6) = -9$$

Nous pouvons également faire un travail sur le signe du résultat, donner des calculs et demander seulement le signe de la différence.

En liaison avec le sens de variation, nous pouvons vérifier que :

$$a > b \qquad a - b > 0$$

ou

$$a < b \qquad a - b < 0$$

Selon le choix des températures, il est possible de dégager la non commutativité de la soustraction et la règle $a - b$ a pour opposé $b - a$. L'avantage d'une telle situation réside dans le fait que l'addition s'impose naturellement par le calcul et peut se représenter géométriquement, la transformation apparaît directement, le travail consiste à l'analyser et à dégager une règle permettant d'effectuer la soustraction dans tous les cas possibles.

Une des difficultés importante est liée à la manipulation dans les deux sens de l'égalité : $a - b = x$ $\qquad a = b + x$

Le passage de la soustraction à l'addition ne semble pas simple pour l'élève, d'autant plus que s'y adjoint le caractère réversible des nombres b et x : $\quad a - b = x$; $\quad a = b + x \quad$ et $\quad a - x = b$.

La soustraction n'implique plus l'idée de diminution de même que l'addition n'implique plus celle d'augmentation. La différence entre deux nombres peut être supérieure aux deux nombres initiaux et la soustraction est toujours possible. Il y a rupture avec les connaissances antérieures sur les opérations concernânt les décimaux positifs. La difficulté majeure semble provenir de la non commutativité de la soustraction, calculer $a - b$ ne donne pas le même résultat que $b - a$ mais le nombre opposé.

3 - Les transformations d'écritures

a) les sommes algébriques

Dans les compléments au programme de Cinquième, dans la colonne « compétences exigibles », on peut lire :

« *Calculer, sur des exemples numériques, une expression, où interviennent uniquement des signes + ; – et, éventuellement , des parenthèses* ».

Cette phrase demande à être décodée : quel est le statut des « + » et « – » ? Parle-t-on du signe des nombres ou des signes de l'addition et de la soustraction ?

Les parenthèses citées sont-elles celles que l'on utilise quand on écrit (–7) ou celles qui encadrent un calcul et indiquent une priorité d'opérations ?

Nous avons un premier éclairage quand nous lisons dans le programme « *on entraînera les élèves à organiser et à gérer un programme de calcul mettant en jeu des additions et des soustractions* ».

Vraisemblablement, les signes « + » et « – » font référence à l'addition et à la soustraction de nombres relatifs et les parenthèses indiquent une priorité opératoire.

Nous rencontrons dans les manuels, pour cette partie de programme, des expressions telles que :

$$-2+3{,}7+10{,}3-15 \qquad (1)$$
$$(-5{,}3)+(-7)+(+10{,}3) \qquad (2)$$
$$8{,}2-(-4)+(-2{,}13) \qquad (3)$$
$$-20+103-(3{,}05-7) \qquad (4)$$

la (4) est la seule pouvant être qualifiée d'expression avec parenthèses.

Certaines sont-elles préférées à d'autres ? Certaines sont-elles des formes « simplifiées » ? Quel est le statut des différents signes dans l'expression (1) : signes des nombres relatifs ou signes opératoires ?

Dans les manuels actuellement en usage dans les classes de Cinquième, une somme algébrique (ou une expression) y est définie comme une suite d'additions et de soustractions de relatifs ; les exemples cités revêtent des formes analogues à celles que nous avons évoquées précédemment. Mais les avis divergent sur le *traitement* de ces expressions. Certains érigent la « simplification » comme un passage obligé, ils énoncent donc des règles de simplification que nous allons examiner.

Exemple 1 :

$(-1)-(-5)+(-3{,}2)-4$ est simplifié en $-1+5-3{,}2-4$ en utilisant deux règles de simplification :

Règle 1 :

Quand une somme ou une différence commence par un nombre négatif, il y a suppression des parenthèses du nombre négatif.

Cette règle, admise par tous, est également utilisée dans toute somme et toute différence de deux nombres relatifs.

La transformation de (– 1) en – 1 est ainsi expliquée : le « – » précédant le 1 est un prédicat puisqu'il provient de (– 1).

Règle 2 (de la soustraction) :

Les exemples cités sont $-1-(-5)=-1+5$
$4+(-3{,}2)=4-3{,}2$

Ici, il convient de s'interroger sur la pertinence des calculs évoqués ci-dessus.

Pourquoi $-1-(-5)$ est-il écrit $-1+5$ sinon pour effectuer une soustraction qui ne peut l'être mentalement directement, pour un élève de cinquième ? Il est en effet enseigné que pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé. Cette règle n'est donc pas une règle de *simplification* d'écriture mais une règle pour *effectuer un calcul.* De même pour effectuer $-3{,}2-4$, les élèves apprennent à transformer cette soustraction en addition : $-3{,}2+(-4)$ qu'ils savent effectuer.

Pour ce qui est du deuxième calcul cité comme simplification $4+(-3{,}2)=4-3{,}2$, quelle est son utilité ? Ne risque-t-il pas de semer le trouble dans la tête des élèves ?

Un adulte qui maîtrise les opérations sur les relatifs reconnaît très vite que cette addition de relatifs correspond à une soustraction de nombres positifs que les élèves savent faire depuis l'école élémentaire.

Cette analyse n'est pas présentée ainsi par les auteurs de manuels puisqu'ils utilisent cette même règle pour « simplifier » $7{,}1+(-15)$ en $7{,}1-15$! Comment un élève pourra-t-il s'y retrouver si on lui fait transformer tantôt des soustractions en additions, tantôt des additions en soustractions !

Cette somme algébrique étant « simplifiée », c'est-à-dire sans parenthèse, quelles méthodes préconisons-nous pour l'effectuer ?

- Soit un calcul dans l'ordre d'écriture

$$\begin{aligned}-1+5-3{,}2-4 &= 4-3{,}2-4\\ &= 0{,}8-4\\ &= -3{,}2\end{aligned}$$

Pour ce dernier calcul, l'élève doit revenir mentalement à l'addition :

$$0{,}8-4=0{,}8+(-4).$$

- Soit un changement d'ordre des termes

$$\begin{aligned}-1+5-3{,}2-4 &= 4-3{,}2-4\\ &= 4-4-3{,}2\\ &= -3{,}2\end{aligned}$$

Chacun de nous met en avant auprès des élèves, l'importance de l'ordre des termes dans une soustraction, alors comment pouvons-nous expliquer ce changement d'ordre sans revenir aux additions ?

Pour conclure sur cet exemple, nous voyons donc que cette transformation d'écriture qui vise à supprimer des parenthèses n'a aucune pertinence :

- Pourquoi transformer des additions en soustractions alors que pour le calcul, il faudra mentalement revenir aux additions ? Où est la simplicité ?
- Pourquoi laisser croire aux élèves que des changements d'ordre des termes

d'une soustraction sont possibles dans certains cas ? N'est-ce pas créer des problèmes là où il n'y en a pas ?
• Quel est le sens des exercices qui demandent de simplifier des écritures ?

Exemple 2 :

Dans d'autres manuels de Cinquième, on peut lire que pour calculer la somme algébrique suivante : (+ 3) + (– 4) + (+ 9) + (– 1,6) + (– 12,3)
on supprime les parenthèses et le signe + de l'addition. Cette somme devient alors : 3 – 4 + 9 – 1,6 – 12,3.

Les différents signes opératoires étant enlevés, les signes « + » et « – » qui figurent sont donc des signes « prédicats ». Nous voilà donc avec une suite d'opérations sans signes opératoires ! Alors comment effectuer ? Certainement pas en faisant comme si ces signes « prédicats » étaient des signes opératoires car nous pouvons lire : « Pour calculer 3 – 4 penser à (+ 3) + (– 4) ». Que de confusions !

• On fait enlever des signes opératoires et on ne se retrouve qu'avec des signes « prédicats ».
• On fait comme si ces signes prédicatifs étaient des signes opératoires.
• Pour effectuer la soustraction, on fait revenir à l'addition, donc à l'écriture de départ !

Si les défenseurs de cette méthode possédaient une calculatrice, ils pourraient l'éprouver en tapant 3 – 4, le – devant le 4 étant pris comme signe « prédicat » : on obtient – 34. De même – 5 – 2 donnera 52 si l'on considère les deux signes « – » comme étant les signes des nombres.

Ces deux exemples nous font réfléchir sur la pertinence de ces transformations. Si nous relisons les compléments du programme de Cinquième, l'objectif est bien qu'un élève apprenne à gérer un programme de calcul, une suite d'opérations à effectuer. Pour cela il n'a besoin que d'une règle qui est une règle de calcul : la transformation de soustractions en additions. Ensuite l'élève se retrouve devant une somme qui possède les propriétés de commutativité et d'associativité, propriétés que l'élève fait fonctionner spontanément même s'il n'en connaît pas le nom.

« Simplifier : Rendre plus simple, moins complexe, moins difficile ou moins chargé d'éléments accessoires.» ROBERT (6 volumes).

Dans un calcul, il est moins difficile d'effectuer une addition de relatifs qu'une soustraction. Les « éléments accessoires » ne sont pas les parenthèses autour des nombres relatifs car elles précisent les nombres, ce sont des conventions d'écriture, elles donnent sens au calcul, mais ce sont les règles de transformations qui sont souvent dépourvues de pertinence et qui encombrent inutilement la mémoire des élèves.

b) les conventions d'écritures des nombres

Nous pouvons nous demander quelle écriture des relatifs il faut privilégier, au moins au début de l'apprentissage. Deux écueils sont à éviter si nous ne voulons pas créer d'obstacles à l'apprentissage :

- Si l'on garde très longtemps et exclusivement (+ 3) pour le nombre 3, les élèves peuvent penser que les nombres relatifs sont indépendants des nombres déjà connus, les décimaux positifs.
- Si l'on écrit systématiquement 3 au lieu de +3, les élèves peuvent penser que les nombres relatifs signifient nombres négatifs et qu'on les juxtapose aux nombres connus.

Le problème posé est celui de la construction du concept de nombre. Pour beaucoup d'élèves de collège, nombre signifie entier positif. Pour aider à cette construction, il faut donc faire sentir que nous agrandissons la « famille » des nombres et que les décimaux connus en sont une partie. Ainsi, au lieu d'écrire (+ 3) = 3, il vaudrait mieux dire que (+ 3) et 3 sont deux écritures du même nombre. Nous ne pouvons pas passer à côté des deux écritures des nombres relatifs positifs et leur assimilation aux nombres connus sera facilitée si nous utilisons conjointement ces deux écritures.

Pour les nombres négatifs, les parenthèses se justifient lorsqu'il y a ambiguïté sur le statut du signe moins. L'écriture sans parenthèse sera privilégiée pour la désignation du nombre et son écriture (– 7) sera utilisée dans un calcul.

Par exemple, pour le repérage, nous écrirons (5 ; – 8) et dans les opérations, nous mettrons des parenthèses ; ainsi :

$3 + (-7) = 4$

Somme de 3 et de –7

$3 + (-7) = (-4)$

Signes prédicatifs

Signe opératoire

$-8 - 5 = -13$ ou éventuellement

$(-8) - 5 = -13$

Différence de –8 et de 5

$-8 - 5 = -13$

Signe prédicatif

Signe opératoire

Signe prédicatif

c) l'opposé

La notation $- b$ pour l'opposé de b est source de nombreuses confusions. Le signe « – » déjà utilisé comme signe opératoire de la soustraction et comme signe prédicatif pour un relatif négatif est ici utilisé dans un troisième sens.

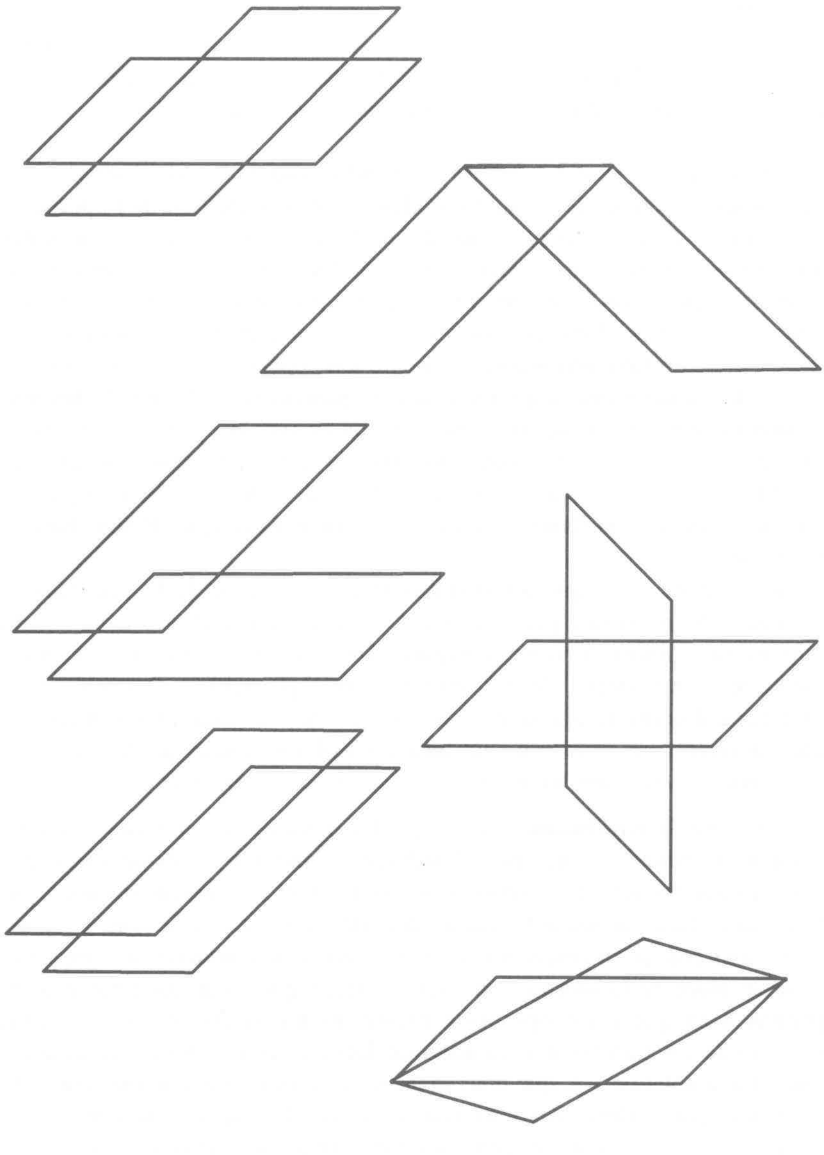
En cinquième, le mot « opposé » est indispensable lors de l'introduction de la soustraction. Celle-ci étant introduite comme l'addition de l'opposé, il ne devrait y avoir aucun problème de notation, car le travail ne doit porter que sur des expressions numériques. Toutefois, une difficulté importante intervient quand on veut formaliser cette règle de soustraction avec des lettres. C'est le cas dans les résumés de quelques manuels où nous pouvons lire « Pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé : $a - b = a + (- b)$ ».

Or, les élèves n'ont eu qu'une courte fréquentation des lettres. Ils les rencontrent comme inconnue dans une équation de type $a + x = b$ (a et b relatifs) et $ax = b$ (a et b décimaux positifs), la lettre x représentant un seul nombre à trouver ; dans une formule d'aire ou de volume, la lettre représentant alors souvent un diminutif du mot comme par exemple, B pour base, h pour hauteur.

Il y a donc un risque à formaliser trop tôt la règle de la soustraction comme celle présentée précédemment, l'élève aura tendance à voir $(- b)$ comme un nombre forcément négatif. De plus, un résumé est un aide-mémoire, il doit aider l'élève à retrouver une règle oubliée. Il semble donc préférable d'écrire la phrase en français, de citer des exemples numériques dans différents cas et si l'on veut formaliser, il vaut mieux garder l'écriture de « opposé » en toutes lettres et écrire : $a - b = a +$ opposé de b.

En guise de **conclusion**, notons que les modèles concrets fonctionnent, donnent de bonnes images pour l'addition à condition qu'ils ne soient pas entravés par des activités d'introduction se limitant au repérage sur une droite ou au codage sur lesquels réaliser des additions n'a pas de sens. De plus, n'oublions pas qu'en cinquième, il est nécessaire de consacrer du temps à la mise en place de la soustraction : sens et technique, pour que l'élève comprenne bien que cette opération existe, même si elle perd son statut puisqu'elle est transformée en addition lorsque les nombres sont connus. Quand à la notation $- b$, que nous manions avec dextérité, elle est source de difficultés pour l'élève. Peut-être voulons-nous aller trop vite avec les élèves en imposant ou en valorisant certaines transformations prématurément ?

Vous trouverez une analyse des modes d'introduction des opérations, une étude des difficultés à surmonter ainsi que des exemples de contextes d'utilisation pour chaque niveau du collège et des éléments de bibliographie dans une brochure de l'IREM de Poitiers « *Les nombres relatifs au collège* ».



Ces configurations ont-elles un centre de symétrie ?
S'il existe, construis-le.

Les nombre relatifs

Jean-Claude LOCHOT IREM de Dijon

L'introduction des nombres relatifs et des opérations sur ces nombres, marque le départ d'une longue initiation au calcul algébrique qui s'étalera sur toute la scolarité. Il est donc essentiel de ne pas rater ce départ. Les difficultés des élèves dans ce domaine sont nombreuses et observées par tous les enseignants de mathématiques.

Les stratégies didactiques diffèrent. Souvent l'approche empirique domine, mais ne satisfait pas le mathématicien ; c'est par exemple, l'observation de résultats dans un tableau ou plus sommairement sur la calculette, qui conduit à une généralisation trop hâtive, mettant en valeur un résultat plutôt qu'un processus généralisable. A l'opposé, une approche plus formelle utilisant les propriétés des structures algébriques difficiles et peu familières aux élèves, n'a bien souvent hélas que l'apparence de la rigueur. Elle ne plaît pas au pédagogue et déconcerte l'élève qui n'y retrouve plus ses références.

Quel que soit l'habillage, l'élève finira par ne retenir qu'un ensemble de règles ou bien mal définies, ou bien en cohérence avec des interprétations personnelles, en oubliant leur domaine de validité. Pour s'en convaincre, il suffit de comptabiliser les erreurs engendrées par des utilisations fantaisistes de toutes ces règles que l'on retrouve dans les présentations habituelles : règles d'addition, règle de soustraction, règles de suppression des parenthèses, règle des signes.

C'est toujours une perte du sens mathématique qui sera la source des conflits que l'on connaît. Il ne faut plus laisser croire que l'algèbre se réduit à une liste de règles, alors que chacun sait bien que la géométrie ne se réduit pas à une liste de théorèmes.

Mais l'élève, outre qu'il a souvent des difficultés avec la maîtrise du calcul élémentaire, se trouve alors ici confronté à un langage nouveau, un langage écrit, et qui plus est assorti de conventions déroutantes : symboles opératoires plus ou moins sous entendus, parenthèses plus ou moins facultatives, donnant un caractère approximatif aux écritures comme aux interprétations. On ne s'étonnera donc plus de trouver $-3\,(-4) = -7$ ou bien $-3-4 = +7$ dans certaines copies.

Nous avons cherché une présentation aussi naturelle que possible, qui prolonge les connaissances sur les nombres positifs, apurée au maximum de tout un décor aussi superflu qu'encombrant et confus, avec pour objectif essentiel d'assurer une cohérence sur l'ensemble du cycle des apprentissages.

C'est cette stratégie que nous proposons ici dans une forme volontairement très détaillée, en faisant état des observations et compléments suggérés par des collègues attentifs. Nous l'avons souhaitée ainsi afin qu'elle puisse être directement exploitable en classe. Mais il faudra bien sûr construire une série d'exercices, la majorité de ceux proposés par les manuels n'étant plus adaptés (les quelques exemples illustrant cet article ne font intervenir que des nombres entiers uniquement pour des raisons de facilité d'écriture et de lisibilité, ils peuvent évidemment s'adapter à n'importe quels nombres).

1. Les nombres relatifs sont connus des élèves

Bien avant le collège, l'élève rencontre les nombres négatifs : températures, niveaux, comptes bancaires,... Ce n'est donc pas un problème de présenter des nombres nouveaux, les relatifs dont l'ensemble est une extension de l'ensemble des nombres connus. Cet ensemble de nombres comprend donc :

- Les nombres connus jusqu'à présent (les positifs) qu'on peut noter comme + 7,25 pour faire savant, mais on peut se demander pourquoi, ou plus simplement 7,25 comme on a l'habitude de faire.
- Les nombres nouveaux (les négatifs) à distinguer par une notation spécifique comme – 8,23.

Pourquoi ces nombres sont-ils traditionnellement protégés (?) par des parenthèses aussi inutiles qu'encombrantes ? Exit les ( ).

On peut visualiser ces nombres en les positionnant sur une droite graduée. Par ce graphique, l'ordre devient naturel, et ne pose pas de problème particulier, même si parfois, il faut insister pour ordonner correctement – 2,45 et – 2,46.

2. La somme de relatifs s'impose aussi naturellement

a. Une approche naïve :

Les exemples abondent de présentation de la somme de nombres relatifs sous forme de bilans :

- gain de 12 ; puis perte de 8 ; et gain de 10 revient finalement à un gain de 14, ce qui conduit à l'écriture simplifiée $12 - 8 + 10 = 14$

ou encore :

- reculer de 15 ; puis avancer de 7 ; puis reculer de 12 et avancer de 18 revient à reculer de 2, ce qui conduit à l'écriture $-15 + 7 - 12 + 18 = -2$

L'idée de cumul de mouvements d'argent ou de déplacements permet de comprendre pourquoi on appelle l'opération une addition, qui se fait ici sur des nombres relatifs, en présentant la convention qui veut que, pour simplifier l'écriture, on n'écrive pas les symboles d'additions, (donc pas de parenthèses) sauf s'il y a risque de détournement de sens. Ainsi dans – 15 + 7 il faut absolument écrire le + d'addition pour éviter – 157.

Pour assumer complètement la convention de suppression du signe d'addition, on pourrait comme certains le suggèrent dire que dans – 15 + 7, ce + est le signe de 7. Mais plus tard on devra écrire 2 + a, afin d'éviter 2 a qui possède un autre sens, et alors ce + n'est pas le signe de a. En fait le symbole + possède essentiellement un sens opératoire ; on n'écrit pas A = + 2 + 3, ni B = + (12 – 8) ; l'écriture + a n'a aucune réalité (cette écriture bien trop ambiguë).

b. Sommes algébriques :

Des exemples comme :
A = – 2 – 3 – 7 – 9 – 8 (somme malgré la présence de tant de signes –)
B = – 3 – 6 + 8 – 2 (pour inciter à faire le calcul dans un ordre autre que celui écrit)
C = – 7 – 8 + 4 + 3 – 2
D = 8 – 5 + 2 – 5 – 4
accompagnés d'une lecture orale comme A est la somme de – 2, – 3, – 7, – 9, – 8 permettent de se familiariser avec les sommes algébriques.

La confrontation des stratégies élèves (opérations successives ou regroupements) permet d'affiner la compréhension de cette écriture. La recherche du résultat ne se fait qu'avec une utilisation réfléchie des opérations addition et soustraction convenablement agencées sur des nombres positifs, le sens servant à établir les signes.

D'emblée, on familiarise l'élève avec la somme de plusieurs nombres relatifs, en utilisant des écritures simples, sans parenthèse ni symbole superflu, en insistant bien sur les points suivants :
• La seule opération mise en œuvre est appelée une addition, l'écriture est simplifiée à une juxtaposition de nombres relatifs (somme algébrique, les signes d'addition n'étant pas marqués sauf en cas de nécessité liée au sens).
• Chaque nombre est précédé de son signe (parfois implicitement).
• On peut modifier l'ordre des nombres et procéder à des regroupements judicieux (fonctionnement implicite des propriétés d'associativité et de commutativité).

Les élèves sont très habiles avec ces calculs. Il est parfaitement inutile de donner des recettes qui risqueraient d'être mal interprétées. La somme de deux relatifs apparaît seulement ensuite comme un cas particulier, et des écritures comme $-2-5$; $3-7$; $-10+6$ sont bien mieux maîtrisées, notamment les propriétés $3-7=-7+3$ et $3-7 \neq 7-3$.

Allons directement au but en évitant le passage par des écritures lourdes et fastidieuses, comme $(-2)+(-5)$ ou $-2+(-5)$ qui introduisent des parenthèses si inutiles qu'on devra ensuite consacrer du temps à leur suppression, au risque de déstabiliser les élèves qui s'y seront trop habitués.

c. Déjà du calcul littéral

Dès à présent, on pourra faire fonctionner des calculs utilisant des lettres, comme par exemple $F = a + 5 + b - 7$ qui se lira oralement F est la somme de a, 5, b et -7

et avec $a = -8$; $b = 2$ se traduira directement $F = -8 + 5 + 2 - 7$

puis avec $a = -3$; $b = -6$ se traduira directement $F = -3 + 5 - 6 - 7$.

Ces exercices doivent être proposés en nombre suffisant pour familiariser l'élève avec la désignation d'un nombre relatif par une lettre, incluant la valeur (absolue) et le signe. Le fait de remplacer directement renforce l'idée de l'écriture d'une somme algébrique conformément à notre présentation.

Traduire $F = (-3) + 5 + (-6) - 7$ n'aurait aucun intérêt (d'ailleurs les élèves habitués à cette méthode n'y pensent même pas).

3. L'opposé d'un nombre relatif

a. Découverte

Des calculs comme

$G = -2 + 5 - 6 - 5$ et $H = -8 + 5 - 7 + 3 - 2$

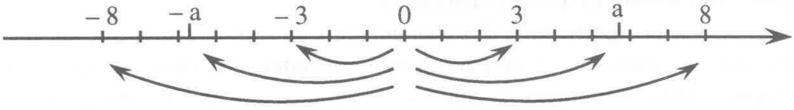
prolongent le paragraphe précédent et incitent à la découverte de regroupements qui conduisent à des simplifications de calcul. Ils préparent à l'idée qu'il existe des couples de nombres particulièrement intéressants (opposés). En reprenant l'image d'une droite graduée, on observe que des nombres opposés sont disposés symétriquement par rapport à 0. Il faudra faire jouer avec cette propriété : placer l'opposé de 3, puis celui de -8,... pour faire comprendre l'écriture littérale.

b. Généralisation

En désignant les nombres par des lettres a, b, ... qu'on place au hasard sur un axe, il est alors facile de positionner leurs opposés. Mais le problème est de trouver une désignation pour ces opposés. C'est un point délicat de la présentation, que nous suggérons de faire en deux étapes.

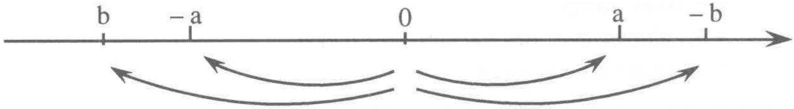
Première étape : on place un nombre désigné par a du côté positif.

Les élèves positionneront facilement son opposé et le désigneront naturellement sans problème par $-a$ (pour les besoins de cette cause, le nombre a aura été placé volontairement du "bon côté").



Deuxième étape : on positionne le nombre b du côté négatif.

Si le positionnement de son opposé ne fait pas de problème, il faut faire violence pour garder l'écriture b, qui désigne le nombre choisi dans sa globalité (d'où l'intérêt du calcul littéral développé au paragraphe précédent). Son opposé qu'on notera logiquement $-b$ sera donc du côté positif (mais ce que la logique fait admettre choque l'œil).



Dorénavant, cela devient une définition :

Si x est un nombre quelconque, $-x$ désigne son opposé.

Il faudra bien s'imprégner de cette conquête par des exercices simples mais qui précisent le sens :

- donner la valeur de $-x$ pour $x = -4$; $-0{,}5$; 8 ; -8 ; ...
- faire jouer également avec l'écriture et le sens de $--x$, comme étant soit l'opposé de $-x$, soit l'opposé de l'opposé de x.
- préciser que $-x$, pas plus que x ne donne le signe du nombre.

c. A nouveau du calcul littéral

C'est seulement maintenant qu'on pourra présenter des expressions comme : $K = a - b - 7$ qui est la somme des trois nombres a, $-b$, et -7 et avec $a = -3$ et $b = -5$, il conviendra de traduire directement :

$K = -3 + 5 - 7$ (car $-b$ = opposé de $b = 5$).

d. L'opposé d'une somme

Il n'est pas très difficile de convaincre les élèves que les calculs suivants, $L = 7 + 8 - 5 - 4 + 12$ et $M = -7 - 8 + 5 + 4 - 12$ qui, par une sorte d'effet miroir, conduisent à faire les mêmes opérations donnent des résultats opposés. Ce qui conduit à l'écriture facilement acceptable opposé de L = M qui s'écrira avec notre définition :

$$-L = M \quad \text{ou} \quad -(7 + 8 - 5 - 4 + 12) = -7 - 8 + 5 + 4 - 12$$

montrant pour la première fois la nécessité d'utiliser une parenthèse, et du même coup la façon de la supprimer.

Il vaudra mieux la formaliser sous la forme de la règle suivante :

Pour calculer l'opposé d'une somme, on calcule la somme de tous les opposés des nombres qui la constituent.

qui insiste sur la signification des changements de signes, plutôt que sur une technique, de suppression de parenthèses précédées du signe – , que l'on applique traditionnellement. Signalons au passage que la parenthèse précédée du signe + n'a aucune raison d'être et que la règle de sa suppression n'a aucun intérêt.

La généralisation à des expressions littérales ne pose aucun problème en lisant la règle.

$N = -(a - b + 7)$

$P = a - 12 - (a - b - 5)$

- A transformer,
- A calculer avec des valeurs pour a et b,
- A simplifier (réduire).

N'insistons pas avec des expressions comme

$$Q = 2 - a - (a - 5) = 2 - a - a + 5,$$

pour ne pas trop charger avec des exercices d'école. Si toutefois ce calcul apparaissait dans un problème, on serait obligé de le laisser sous la forme $Q = 7 - a - a$, car la forme $Q = 7 - 2a$, nous obligerait prématurément à une incursion dans la multiplication de nombres relatifs, et poserait des problèmes avec, par exemple $a = -5$.

4. La soustraction des relatifs

Il n'y aurait aucune raison de parler de soustraction de nombres relatifs, l'écriture $a - b$ est très naturellement définie dans notre progression comme étant la somme de a et de l'opposé de b.

Toutefois, il convient de faire le lien entre ce qui était connu auparavant et cette nouvelle façon de voir. En effet la soustraction n'a pas disparu dans les problèmes, mais pour autant elle peut toujours apparaître comme une addition.

12 – 5 est le résultat de la soustraction de 12 avec 5, mais est également la somme de 12 et de – 5.

7 – 25 qui, du point de vue de la soustraction, n'est pas possible pour nos élèves, le devient puisque c'est la somme de 7 et de – 25.

Toute écriture soustractive est donc en fait une somme algébrique. Même la rencontre de l'écriture 7 – (– 3) que nous avons évitée ne pose pas de problème puisque – (– 3) est l'opposé de – 3 donc égal à 3.

5. Epilogue : les trois significations du signe –

Notre propos a pour ambition d'éliminer toutes les règles ambiguës autour du signe – qui pose tant de problèmes aux élèves. Il permet d'unifier les divers aspects, qui interviennent dans trois situations :

1) – 5 pour indiquer un nombre négatif (qui n'est autre que l'opposé de 5)
2) – x pour désigner l'opposé de x
3) 12 – 8, pour faire une soustraction, qui n'est autre que la somme de 12 et de l'opposé de 8.

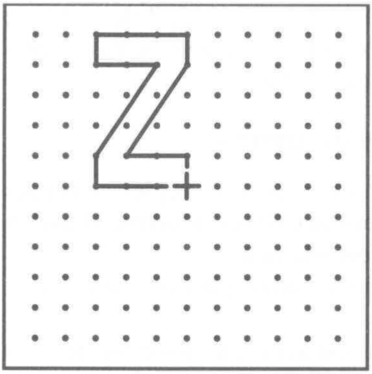
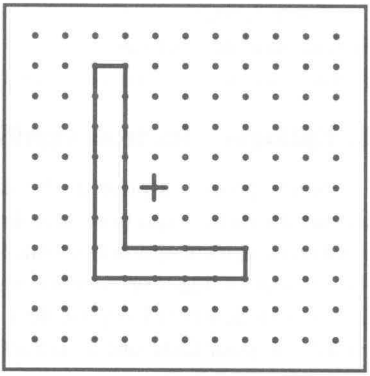
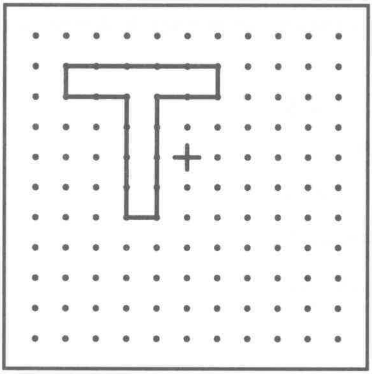
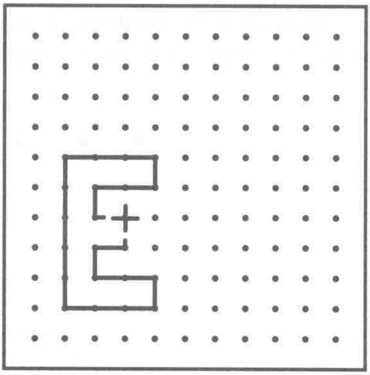
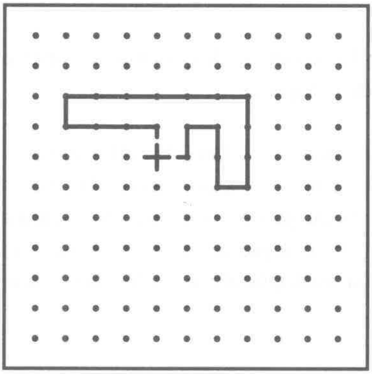
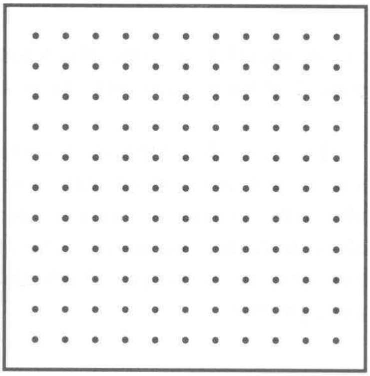
Dans ces trois situations, le mot opposé s'impose, et permet de donner un sens à des expressions aussi complexes que

$$-(3-7)-(9-5)-4+8$$

opposé de 4
opposé de 5
opposé de (9 –5)
opposé de 7
opposé de (3 –7)

qu'on appellera somme algébrique et que la majorité des manuels appelle suite d'additions et soustractions sans trop de scrupules.

L'emploi de l'expression « suite de soustractions » dans de telles expressions n'est pas correct, car la soustraction n'est pas associative. On nous objectera la règle qui fait exécuter les calculs de gauche à droite, permettant alors de donner un sens à cette expression. Une règle de trop qui sera plus tard mise en échec avec l'introduction de la multiplication, obligeant à une autre priorité.

Trace le symétrique de la figure par rapport au point donné

QUATRIÈME PARTIE

L'espace :
un lieu privilégié pour faire des mathématiques

Jusqu'en 1986, les quelques problèmes de géométrie de l'espace qu'on pouvait trouver dans les livres de collège avaient pour but essentiel le calcul de certains éléments métriques : longueurs, aires, volumes. Les programmes de 1986 ont réhabilité l'espace comme un lieu privilégié de formation mathématique, en indiquant clairement les apprentissages attendus.

Cet enseignement est-il vraiment revenu en force dans les classes de collège ? Aucune enquête n'ayant été menée à ce sujet, on ne peut faire état que d'une « rumeur » : 10 ans après l'espace reste encore un parent pauvre, souvent relégué en fin d'année. Que ce bruit soit fondé ou non, il traduit de toute façon un certain malaise.

Parmi tous les obstacles qui conduisent à ce sentiment, l'un nous parait fondamental : c'est celui de la représentation plane d'un objet de l'espace. En effet, voir les objets qui nous entourent semble une capacité largement partagée, mais avoir de ces objets des représentations mentales dynamiques doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Les enseignants le sentent bien, mais avancent alors assez vite deux arguments : leur manque de formation et le temps à y consacrer. Ce qui les amène souvent à travailler directement sur les représentations planes des objets de l'espace.

N'est-ce pas là la grande illusion, que de croire que cela suffira à tous les élèves pour voir et raisonner dans l'espace ? C'est cette illusion que les deux articles proposés voudraient détruire : « un enseignement de la géométrie de l'espace ne peut avoir de chance de réussir qu'à condition que soit mis en place dès les premières années de collège au moins un procédé de représentation de l'espace, avec tout ce que cela comporte de savoir-faire et d'apprentissage ». Notre enseignement privilégie la perspective cavalière comme procédé codifié de représentation de l'espace.

Le premier article propose une réflexion, à partir de tests, sur les compétences mises en jeu pour voir et raisonner dans l'espace, en variant les supports proposés dans les problèmes : maquette, représentation, texte ...

Le second article donne une progression possible et des activités qui peuvent aider à la mise en place de la perspective cavalière comme moyen de représentation. Il insiste sur trois étapes incontournables de cet apprentissage :

* le passage de l'objet au dessin,
* le passage du dessin à l'objet,
* le passage du dessin au dessin sans l'objet.

Voir et raisonner
à la conquête de l'espace au collège

Claire Bayart, Claude Gos, Chantal Hindelang,
Marie-Anne Keyling, Claude Mathern, Monique Ortlieb,
Jean-Claude Rauscher, Gabrielle Roesch.
IREM de Strasbourg

I - Enseigner la géométrie dans l'espace au collège : une question de temps disponible ?

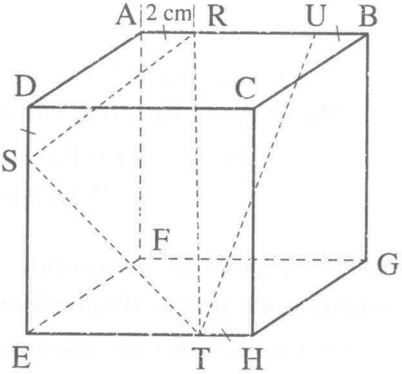
Que faire au début du collège pour initier nos élèves à la géométrie dans l'espace ? Leur demander d'observer et de décrire des solides ? D'en réaliser les patrons ? De les représenter en perspective ? Le programme et les ouvrages scolaires nous invitent à pratiquer ces activités avec nos élèves. Mais cette pratique pose souvent un important problème de gestion du temps dans notre enseignement. En effet, nous sentons bien qu'il faut consacrer un temps non négligeable à ces activités pour qu'elles permettent à nos élèves de se familiariser efficacement avec l'espace. Mais de ce temps, bien souvent nous n'en disposons pas ou nous ne le donnons pas, surtout dans les premières années du collège. Ne serait-ce que parce qu'il semble en concurrence avec le temps consacré aux autres apprentissages comme par exemple celui laissé à la géométrie plane. Il reste alors peu de place à attribuer à la géométrie dans l'espace. D'ailleurs, elle se trouve souvent reléguée en fin d'année scolaire.

Pourtant, très rapidement, les élèves doivent être capables d'analyser les situations dans l'espace présentées par les exercices de quatrième et troisième. Ces exercices se présentent généralement sous la forme d'un énoncé accompagné par une représentation de la situation en perspective. En voici un exemple tiré du chapitre « Théorème de Pythagore et applications » du livre de quatrième de l'IREM de Strasbourg (Hachette-Istra, 1992). Il est assez représentatif et permet une première description des compétences qui sont demandées aux élèves dans le cadre de la géométrie de l'espace. Nous proposons à nos lecteurs de l'exécuter avant de lire la brève analyse que nous en faisons. Comme nous, peut-être auront-ils des surprises !

Problème 1

1° Représenter, comme ci-contre, un cube dont l'arête mesure 5,5 cm.

2° Placer les points R, S et T sur les arêtes [AB], [DE] et [EH], tels que AR = DS = HT = 2 cm.



3° Calculer ST^2 et RS^2 (on admettra que le triangle RDS est rectangle en D).

4° Placer le point U sur l'arête [AB] tel que BU = 2 cm.
Quelle est la nature du quadrilatère BHUT ?
Utiliser alors le triangle TUR pour calculer RT^2.

5° Prouver que le triangle RST est rectangle.

6° Construire, au compas et à la règle, en vraie grandeur, les triangles ARD, RDS et RST.

Une analyse, même rapide, de cet énoncé nous laisse entrevoir les difficultés que les élèves devront surmonter pour réussir dans les tâches qui leur sont proposées. L'énoncé précise que le triangle RDS est rectangle en D. Au collège, l'élève n'est en effet pas sensé savoir qu'une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à toute autre droite de ce plan. Soit ! Par contre, il n'y a aucune indication immédiate en ce qui concerne la nature du triangle RUT. L'énoncé incite à utiliser la propriété de Pythagore pour calculer le carré de RT. Mais la représentation donnée tend à piéger le regard de notre élève et des professeurs que nous sommes : sur la figure le triangle RUT semble rectangle en R. Pourtant, c'est l'angle en U qui est droit. La question qui demande de préciser la nature du quadrilatère BHUT peut désamorcer ce piège. Mais encore faut-il avoir compris que contrairement à ce qui se passe en géométrie plane, le fait de représenter une situation en 3D dans un plan en 2D se solde généralement par une perte d'informations accessibles à la vision. Par exemple, un angle droit n'apparaît pas nécessairement comme droit. Il faut ensuite savoir restituer ces informations par une représentation mentale en 3D de la situation représentée en 2D. Il s'agit de savoir repérer et se représenter un plan dans lequel on pourra réaliser une analyse fiable qui déjouera le piège tendu au regard. Ici, on doit faire le lien avec la question précédente (nature du quadrilatère BHTU) et considérer le plan ABHE dans lequel on peut situer le triangle RTU.

On voit sur cet exemple que, par rapport à la géométrie plane, la géométrie dans l'espace pose de nouveaux et redoutables problèmes à qui veut s'y aventurer.

II - La question de la progression.

Comment préparer nos élèves à affronter ces difficultés malgré les contraintes de temps ? Comment les initier à l'analyse de situations dans l'espace ? On voit déjà, après cette brève analyse, qu'il ne s'agit peut-être pas seulement d'une question de temps consacré à cet enseignement. En effet, pour que le temps consacré à la géométrie dans l'espace en classe soit suffisant sans être dévorant, il faut qu'il soit efficace. Or, notre impression a priori concernant notre pratique dans ce domaine était surtout celle d'un manque de cohérence entre les différentes activités réalisées avec nos élèves. On leur faisait bien construire en début de collège des cubes, des pavés et des prismes droits pour les décrire et les observer, compléter des représentations en perspective parallèle, réaliser des patrons, etc. Mais pourquoi faire telles activités à tels moments ? Quels apprentissages en résultent ? Ces apprentissages se révèleront-ils utiles aux élèves pour faire face aux situations qu'on leur proposera en fin de collège ? Et comment les développer alors ? A de telles questions nous ne savions pas proposer de réponses réfléchies. Mais y répondre semblait une nécessité pour élaborer une progression cohérente tout au long des quatre années du collège et proposer à nos élèves des parcours d'apprentissage motivants et cohérents. Pour les définir, on peut dans un premier temps se référer au programme et à ses commentaires (chose qu'on a parfois tendance à oublier). Ils ont en effet le mérite de suggérer une progression en termes de contenus précis et de compétences visées. Mais dans un second temps, nous nous sommes rendu compte que, pour définir une progression, une analyse plus précise des tâches en jeu par l'observation des élèves en activité se révèle nécessaire. Commençons par rappeler ce que nous suggère le programme.

III - La progression esquissée par le programme : apprendre à voir pour apprendre à calculer et à raisonner.

Du point de vue des solides étudiés, le parallélépipède rectangle est « vu » en sixième, le prisme droit et le cylindre de révolution en cinquième, la pyramide et le cône de révolution en quatrième et la sphère en troisième. Au-delà de ces contenus, le programme évoque et justifie aussi une progression en termes de compétences à développer tout au long des quatre années. Tout comme dans les apprentissages en géométrie plane, dans les apprentissages relatifs à l'espace, « voir » est indispensable. Mais comme nous l'avons constaté en analysant l'exercice proposé par le livre de l'IREM de Strasbourg, le regard est encore bien plus complexe dans la géométrie dans l'espace que dans la géométrie plane. Pour être pertinent, il demande à être éduqué. Le programme de collège subordonne donc les capacités de calculer et d'argumenter à celles de « voir dans l'espace ». Les premières années du collège sont consacrées à apprendre à voir et à dégager les principales connaissances : « dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient ; elles fournissent un terrain pour dégager quelques propriétés élémentaires du parallélisme et de l'orthogonalité ». Par la suite, en troisième par exemple, les élèves doivent savoir utiliser ces images mentales pour observer et argumenter en faisant appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme, sans toutefois que ces énoncés soient à expliciter par ces élèves. En fait, ils doivent surtout savoir utiliser ces images mentales pour faire des calculs en utilisant explicitement des outils tels que le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès dans des situations simples et uniquement à propos de travaux sur les solides. En fin de collège, les élèves devraient donc être capables d'analyser une situation de l'espace telle que nous l'avons vue à travers le problème 1.

Ainsi, les commentaires du programme esquissent une perspective pour la progression à mener : apprendre à voir dans l'espace pour apprendre progressivement à y calculer et y raisonner. Ils donnent même des indications plus précises pour entreprendre cette progression. En cinquième par exemple, les commentaires stipulent : « *Passer de l'objet à ses représentations constitue encore l'essentiel du travail...... L'usage d'outils informatiques (logiciels de géométrie dans l'espace) peut se révéler utile pour une meilleure visualisation des différentes représentations d'un objet. Ces travaux permettront de consolider les images mentales déjà mises en place, relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité.* »

Analysons plus précisément encore les compétences en jeu dans le « voir » et le « raisonner » dans l'espace.

IV - Voir et raisonner dans l'espace pour résoudre un problème : quelles sont les compétences en jeu ?

Distinguer les différentes façons de communiquer aux élèves les données d'un problème permet déjà de décrire les tâches en jeu dans la géométrie tridimensionnelle et de repérer quelques modalités classiques d'enseignement. Nous en voyons quatre :

• Une première est de décrire la situation problématique uniquement par un texte. Elle suppose que l'élève est capable de se représenter en 3D la situation décrite et d'en donner une représentation en 2D.
• Une deuxième, la plus fréquemment rencontrée dans les manuels et dans les évaluations « classiques » (contrôle continu, brevet, etc.), est d'adjoindre au texte une représentation en perspective de la situation. Elle suppose que les élèves sachent « lire » ces représentations.
• Une troisième est d'adjoindre au texte une maquette ou un patron. Pour des raisons pratiques, elle ne se rencontre pas dans les livres mais seulement dans les activités menées en classe.
• Une quatrième est rendue possible avec les logiciels informatiques qui permettent de travailler sur un problème à partir d'une représentation en 3D qu'on peut faire virtuellement « bouger ».

Ces façons de livrer une situation problématique aux élèves ne sont pas équivalentes. Chacune d'elles induit des tâches de natures différentes. Nous allons à présent analyser celles qui entrent en jeu dans les deux premières présentations, c'est-à-dire celles par lesquelles en fin de compte les élèves sont en général « évalués ». Ceci permettra de situer la perspective trop partielle de certains efforts d'enseignement et de mettre à jour des aspects essentiels des compétences nécessaires pour aller à la conquête de l'espace.

a) Difficultés des problèmes présentés uniquement par un texte

Commençons par l'analyse des tâches à effectuer par les élèves dans le cas a priori le plus difficile, lorsque le problème de représentation de la situation est entièrement à leur charge. Voici des exemples extraits du manuel de troisième « Maths , IREM de Strasbourg » (Hachette-Istra, 1993) :

Exemple 1 : *Un fin bâtonnet de 16 cm de longueur entre-t-il dans une boîte cubique de 10 cm de côté ?*

Exemple 2 : *Une boule de pétanque en acier, de 75 mm de diamètre, a laissé dans le sable une trace de 72 mm de diamètre. A quelle profondeur s'était-elle enfoncée ?*

Exemple 3 : *Lors d'un meeting aérien, quatre avions volent en formation. Chaque avion est à égale distance des trois autres. Leur altitude est alors de 800 m pour trois d'entre eux et de 1000 m pour le quatrième. Calculer la distance qui sépare deux avions. (D'après Math sans Frontières, Alsace, 1992).*

Pour résoudre le premier problème, il est nécessaire de savoir se représenter les problèmes de distance entre des points à l'intérieur d'un cube. Par exemple, on doit choisir des sous-figures planes extraites de la situation en 3D qui permettent d'avoir une prise par la raison et par le calcul sur la question.

Pour résoudre le deuxième problème, il faut aussi savoir « entrer dans le solide » par des sections judicieusement choisies pour établir le lien entre le diamètre de la trace, le rayon de la boule et la distance du centre de la boule à la trace.

Par ces deux premiers exemples, on voit qu'une bonne représentation mentale des solides en jeu est nécessaire. La maîtrise de ces situations se manifestera d'ailleurs par la capacité des élèves à produire un dessin présentant les situations 3D sur une feuille, d'abord par une représentation en perspective, ensuite par la représentation de sous-figures planes extraites de l'objet.

Le troisième problème montre la difficulté de ces entreprises dans toute son ampleur.

Pour résoudre le troisième problème, l'élève saura placer trois points équidistants sur un plan, mais comment y faire entrer l'espace pour y faire figurer le quatrième point ? Comment représenter une situation en 3D sur une feuille ? Comme le montre l'épistémologie dans ce domaine, le problème n'est pas « mince » ! Représenter un objet 3D en 2D demande une compréhension et une maîtrise des règles qui régissent un mode de représentation. Et savoir réaliser un tel passage, c'est déjà avoir une représentation mentale opératoire de la situation.

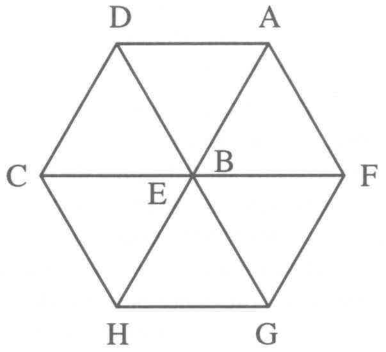
On comprend alors que les problèmes de géométrie de l'espace où aucune représentation ne vient accompagner le texte sont relativement rares dans les livres et posés plutôt en fin de chapitre, lorsque les connaissances ont été en principe assimilées. Pour résoudre les problèmes, l'élève a donc dans une majorité de cas une représentation en perspective à sa disposition. A priori on peut penser qu'il s'agit là d'une aide qui lui facilite le travail !

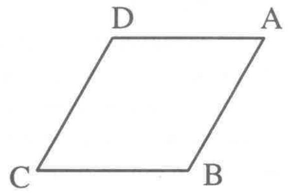
b) Les problèmes accompagnés d'une représentation en perspective de la situation sont-ils plus faciles ?

On peut le penser car l'élève a alors un support pour voir et raisonner. Mais il ne faut pas oublier les contraintes et les pièges occasionnés par le passage des objets tridimensionnels à l'une de leurs représentations bidimensionnelles.

La première difficulté est de voir qu'une figure représente bien une situation tridimensionnelle. Ce n'est pas toujours facile, même pour un œil averti ; ainsi l'exemple 4 peut représenter un cube. L'inverse arrive aussi : certains élèves en début de collège appellent la figure de l'exemple 4' un carré, parce qu'ils imaginent un carreau vu en perspective.

Exemple 4 *Exemple 4'*

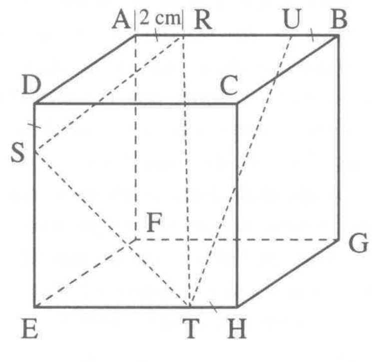




Ensuite il y a d'autres difficultés que nous avons déjà eu l'occasion de repérer à propos du problème 1. Pour situer ces difficultés, rappelons succinctement la teneur du problème et posons-nous quelques questions à son sujet.

Exemple 5 :

A partir de la figure ci-contre, il s'agit de prouver que le triangle est rectangle en calculant ST^2, RS^2 et RT^2.



- Quelle est la nature du solide ABCDEFGH ? Il y a une première difficulté : un même dessin peut représenter plusieurs types d'objets. Ainsi présenté, il pourrait tout aussi bien s'agir d'un cube que d'un parallélépipède. Pour déjouer cette ambiguïté, il est nécessaire de préciser dans les hypothèses la nature de l'objet représenté (ce qui est fait dans l'énoncé initial du problème 1). Mais signalons que, sans cette précision, le lecteur n'a aucun moyen pour trancher.
- La face DCHE est-elle la face avant ou arrière ? Il y a une autre ambiguïté classique sur l'orientation de l'objet représenté. Pour la lever, on recourt en général à l'usage de couleurs ou comme ici de pointillés. Mais même avec des pointillés, le lecteur peut encore voir tantôt un cube où DCHE est une face avant, tantôt un cube où DCHE est une face arrière. Arriver à voir à volonté l'une ou l'autre de ces situations est d'ailleurs bon signe quant à nos capacités perceptives !

• Les triangles SRT et RUT sont-ils dans un même plan ? Une contrainte très forte de la représentation d'un objet 3D en 2D est de représenter une multiplicité de plans parallèles ou sécants dans un seul plan. Discerner ces plans à partir d'une représentation en perspective devient alors un problème.

• Quelle est la nature des triangles CBE et BFD ? Le triangle RUT est-il rectangle en R ? La représentation d'un objet 3D en 2D fixe nécessairement un point de vue qui donne une image insuffisante ou déformée de l'objet. Contrairement à la géométrie plane, l'accès aux informations n'est pas immédiat. Ce qui se donne à voir demande un traitement pour être confirmé ou infirmé. Il faut, par exemple, imaginer la situation vue sous un autre angle. Mais cela ne suffit pas. Il faut aussi savoir raisonner pour valider les hypothèses nées de ces changements de points de vue : par exemple établir que le triangle DFB est équilatéral parce que ses côtés sont des diagonales des faces du cube.

En conclusion, même si l'on est familier avec l'usage des représentations en perspective, on voit que les réponses ne sont pas immédiates. Un temps de réflexion et d'analyse est nécessaire. Dans le n°153 (juillet 1990) de « Pour la Science » (cité par M.-P. Rommevaux,1991), J. Hubbard dit :
« *Nous ne voyons des objets sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà : un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau. Pour l'analyser il doit le voir bouger ou le regarder avec des lunettes stéréoscopiques.* »

Il apparaît donc clairement que le fait d'accompagner un problème par une représentation en perspective de la situation ne facilite pas décisivement le travail de l'élève, s'il n'a pas déjà intégré des images mentales de la situation, images sur lesquelles il peut efficacement opérer en les faisant bouger et en raisonnant à partir d'elles.

c) Voir et raisonner dans l'espace : les compétences à développer.

La conclusion précédente peut paraître un peu désespérante : ne savent voir et raisonner dans l'espace que ceux qui ont à leur disposition des représentations mentales sur lesquelles ils peuvent opérer ! Le problème reste entier : comment aider les élèves à se fabriquer ces représentations ?

Cette analyse des difficultés de quelques problèmes de 3D à propos de solides au programme du collège nous permet déjà de repérer de façon plus opératoire quelques conditions nécessaires (mais non suffisantes, surtout prises isolément) que doivent remplir les élèves pour qu'ils puissent surmonter ces difficultés. Ces conditions sont : connaître les règles élémentaires du dessin en perspective (conservation du parallélisme et des milieux), avoir compris que, si en géométrie plane il faut déjà se méfier d'une lecture trop rapide d'une figure (*voir l'article « Lire et écrire en mathématique en cinquième », proposition F dans les travaux géométriques*), la possibilité de représenter en perspective un objet tridimensionnel se paie essentiellement par une perte d'informations, mais qu'il est possible de restituer ces informations en faisant bouger mentalement un objet 3D représenté en 2D, et, comme en géométrie plane en raisonnant sur l'objet, et tout particulièrement en 3D en discernant les plans pertinents pour la résolution du problème.

Dans quelle mesure ces conditions étaient-elles a priori remplies chez nos élèves ? C'est ce que nous avons voulu savoir avant d'élaborer des stratégies d'enseignement. Pour cela, nous avons élaboré un instrument d'évaluation qui nous a permis de faire l'état des lieux au début de notre recherche. Cet outil devait permettre de voir si les élèves savaient représenter des situations dans l'espace et analyser les représentations de situations de l'espace dans le plan. Il devait aussi montrer si, de la cinquième à la troisième, on assistait à une progression des capacités visées ou au contraire à une stagnation. Cela était possible car nous avons fait passer ce test dans nos classes de cinquième (136 élèves) de quatrième (106 élèves) et troisième (116 élèves). La population interrogée correspondait à des situations variées de recrutement d'un point de vue sociologique.

V - Nos élèves savent-ils voir et raisonner dans l'espace ? Compte rendu d'une enquête.

Les trois parties du test (Exercice 1 d'abord ; 2, 3 et 4 ensuite ; et 5 pour finir) ont été passées à des moments différents, en début de séances portant sur d'autres contenus, avant tout travail en géométrie dans l'espace. Elles ne prirent pas beaucoup de temps aux élèves.

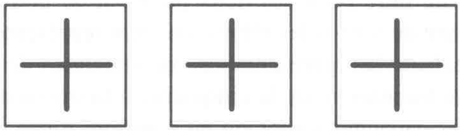
a) Les objectifs du test

Le but était d'évaluer les compétences des élèves dans le domaine de la géométrie dans l'espace tels que nous venons de les décrire. L'analyse des productions des élèves nous permettra d'ailleurs souvent de relever les lacunes de notre test et de cerner davantage encore les tâches en jeu. Tout d'abord avec la question 1, il s'agit de savoir si les élèves savent produire ou compléter la représentation en perspective d'un cube en respectant les règles de ce genre de production. Dans les questions 2, 3 et 4 nous avons présenté plusieurs points de vue d'un même objet. Par ce procédé, nous avons cherché à savoir si les élèves savent qu'il ne faut pas se fier aux apparences d'une représentation, mais de faire bouger mentalement un cube ou d'en analyser les caractéristiques, soit à partir des faces, soit en discernant des plans sécants pour restituer certaines informations. La question 5 permet surtout de voir si les élèves savent discerner des plans dans une représentation en perspective.

b) Analyse du test

Exercice 1 **: Les élèves savent-ils produire ou compléter la représentation en perspective d'un cube en respectant les règles ?**

On a des étiquettes carrées sur lesquelles figure un signe +. Chaque étiquette a les mêmes dimensions que les faces d'un cube. On colle ces étiquettes sur les faces du cube.



Dessine ce cube de façon à voir 3 faces munies de leurs étiquettes.

➡ Représentation du cube en perspective

Classe	Réussite	Erreur	Non réponse
Cinquième	70%	26%	3%
Quatrième	78%	22%	0%
Troisième	81%	18%	3%

Nous n'avons pas tenu compte des coefficients de réduction, nous avons accepté les perspectives parallèles et les perspectives à points de fuite (très exceptionnelles). Nous avons rejeté les représentations comportant des erreurs flagrantes de parallélisme.

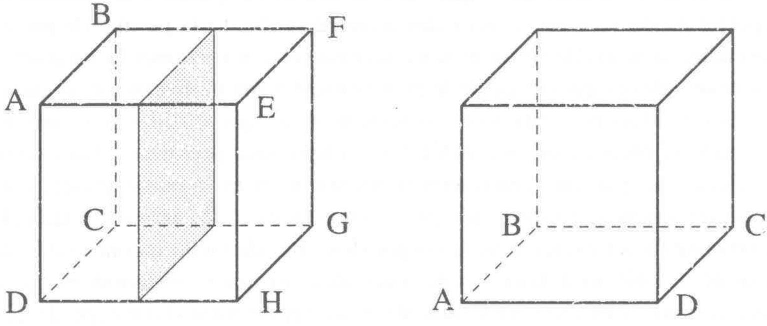
➞ Dessiner des croix sur les trois faces visibles du cube.

Classe	1	5	9	Non réponse
Cinquième	29%	10%	49%	12%
Quatrième	27%	11%	50%	12%
Troisième	40%	15%	38%	7%

Le **code 1** a été attribué si la croix était correctement dessinée sur les trois faces. (C'est le parallélisme des branches de la croix aux arêtes du cube qui a été pris en compte)
Le **code 5** a été attribué s'il n'y avait qu'un seul défaut de dessin sur une seule face du cube. Sinon, nous avons attribué le **code 9**.

On observe que le dessin des croix est bien moins réussi que celui du cube. Cela montre que la réussite du dessin du cube ne signifie pas que les règles de la perspective parallèle sont connues et encore moins maîtrisées. On peut penser qu'il s'agit surtout de la reproduction de dessins déjà vus antérieurement (éventuellement appris sur quadrillage). Beaucoup d'élèves représentent les croix sur les faces latérales du cube telles qu'elles seraient vues sur la face avant du cube. Les règles de conservation du parallélisme et des milieux ne sont pas appliquées. A noter qu'en troisième, plus de la moitié des élèves n'ont pas encore assimilé ces règles.

Exercice 2 **: Les élèves savent-ils déterminer et imaginer les mouvements d'un cube à partir de représentations en perspective ?**



On a tourné le cube. Replace les sommets manquants et dessine la partie grisée sur le nouveau cube.

➟ Placement des sommets.

Classe	Réussite	Erreur	Non réponse
Cinquième	85%	7%	8%
Quatrième	90%	5%	5%
Troisième	91%	6%	3%

➟ La position du plan.

Classe	Réussite	Erreur	Non réponse
Cinquième	61%	34%	5%
Quatrième	62%	28%	10%
Troisième	78%	15%	7%

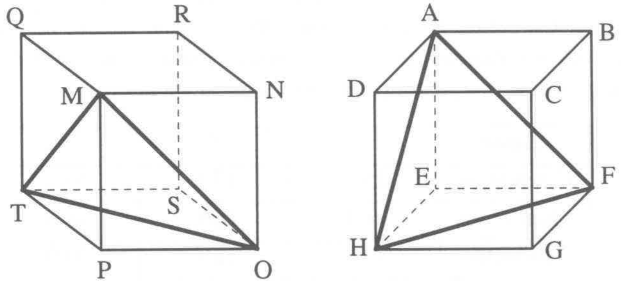
On remarque que les réussites sont bonnes de la cinquième à la troisième. Cela est vrai, dans une moindre mesure, pour la deuxième question. Peut-on, pour autant, penser que les élèves ont bien imaginé la rotation du cube ? Ce n'est pas sûr car certains indices permettent de résoudre la question sans « voir » la rotation en jeu.

Ainsi, les deux vues du cube proposées se déduisent l'une de l'autre dans un plan parallèle au plan de projection, c'est-à-dire qu'il suffit d'imaginer une rotation plane de la face ADHE. Les deux points E et H étant placés, les autres sommets s'en déduisent.

On peut remarquer aussi que dans la deuxième question les sommets de la partie grisée sont les milieux des arêtes du cube. Cela permet de placer le plan dans sa nouvelle position sans nécessairement imaginer la rotation. Par contre les élèves qui ont gardé le plan vertical n'ont ni déterminé, ni imaginé la rotation. Mais peut-être n'ont-ils justement fait que « voir » le « cube tourné » sans se préoccuper de contrôler leur impression première ? Par exemple, les élèves qui placent correctement les sommets et la partie grisée, ont pu raisonner uniquement sur la désignation des faces et des arêtes. Le taux élevé de réussites à cet exercice ne témoigne donc pas de façon incontestable de la capacité des élèves à faire bouger mentalement une représentation du cube dans l'espace. Les exercices suivants nous apporteront davantage de précisions à ce sujet.

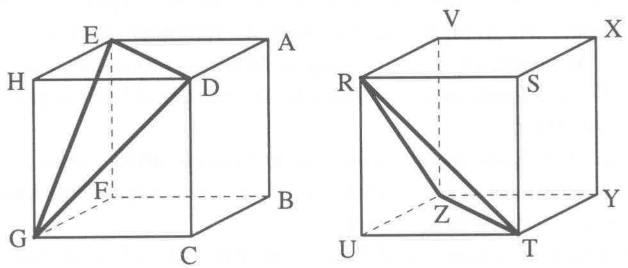
***Exercices n°3 et n°4* : Les élèves sont-ils capables de « voir » des triangles identiques dans des cubes représentés sous des points de vue différents ?**

n°3



Les deux cubes ci-dessus ont la même dimension.
Dans chacun d'eux, on a dessiné un triangle.
Dominique dit : « Le triangle AHF et le triangle MOT sont identiques. »
Claude dit : « Les triangles AHF et MOT sont différents (n'ont pas les mêmes dimensions). »
A ton avis, quel enfant a raison ? Pourquoi ?

n°4



Les deux cubes ci-dessus ont la même dimension.
Dans chacun d'eux, on a dessine un triangle.
Benoît dit : « Le triangle DGE est isocèle, le triangle RZT est quelconque. »
Paul dit : « Les triangles DGE et RZT sont tous les deux équilatéraux. »
A ton avis, quel enfant a raison ? Pourquoi ?

Les résultats des deux exercices ont été codés conjointement car les textes qui les accompagnent pouvaient perturber les résultats enregistrés. Seuls les réussites ou les échecs conjoints donnent une indication sur les capacités de raisonnement ou d'imagination des élèves, étant donné que les réussites-échecs ou échecs-réussites peuvent être imputés à des problèmes linguistiques et non mathématiques. En effet, l'exercice 3 porte sur deux affirmations s'excluant mutuellement. Dans l'exercice 4, une affirmation comporte deux indications ; l'autre affirmation en comporte une seule concernant les natures précises des triangles. La réussite aux deux exercices tendrait à prouver que les élèves imaginent bien l'isométrie des faces du cube. Un échec conjoint laisse supposer une lecture directe des dessins : les élèves les traitent comme des figures planes, mesurent des longueurs et des angles et n'imaginent pas l'objet à partir du dessin.

Classe	1	5	9	Non réponse
Cinquième	25%	17%	58%	0%
Quatrième	26%	26%	46%	2%
Troisième	32%	26%	38%	3%

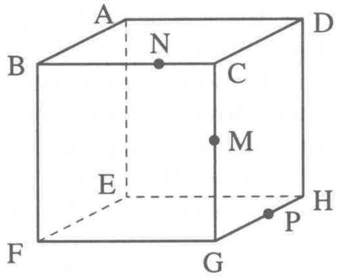
Nous avons **codé 1, la réussite aux deux exercices**. Nous avons accepté les justifications qui parlaient de diagonales de faces ou de rotation du cube. Le **code 5** signifie la **réussite à l'un des deux exercices**, et le **code 9 l'échec aux deux exercices** ou l'**échec à l'un** et la **non-réponse à l'autre**.

On note un fort taux d'échec et peu de progrès de la cinquième à la troisième. Les productions des élèves montrent qu'une majorité d'entre eux a effectivement traité les dessins comme des figures planes : ils se fient à l'aspect des triangles ou mesurent les longueurs de leurs côtés. Ainsi, à propos de l'exercice 3 voici quelques réponses représentatives :
« *C'est Claude qui a raison car le triangle AFH est plus grand que le triangle MOT* »
« *C'est Claude qui a raison car le triangle MOT est un triangle rectangle et le triangle AFH est équilatéral ; ils ne peuvent pas être identiques* »
Ou à propos de l'exercice 4 :
« *Benoît a raison car ED=2,2 cm, EB= DG=5,5 cm donc le triangle EDG est isocèle en G. Le triangle RZT est quelconque car RZ = 3,5 cm RT = 5,5 cm , ZT = 2,4 cm* »
« *Aucun des deux n'a raison parce que EDG n'est pas isocèle ni équilatéral* » (sur la figure la présence d'arcs de cercle montre que l'élève a utilisé un compas pour comparer les longueurs des côtés).

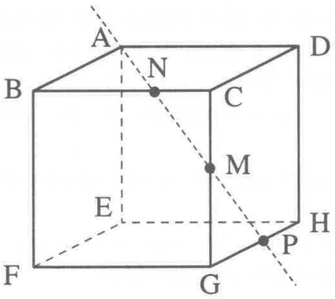
Les représentations données et les textes qui les accompagnent (« les deux cubes ci-dessous ont la même dimension ») ne conduisent pas forcément les élèves à traiter d'une situation de l'espace : ils traitent une configuration plane. Et cela se confirme par leurs réponses à l'exercice 4.

Pour les élèves qui imaginent en revanche un cube qu'on fait bouger, on remarque que, les mots « isocèles » et « équilatéraux » ont provoqué une analyse plus fine de la situation. Les justifications font appel plus souvent aux « *diagonales des faces du cube* » que dans l'exercice 3 où on trouve plutôt des formules plus lapidaires du type « *on a tourné le cube* ».

Exercice 5 : **Les élèves savent-ils discerner des plans dans une représentation en perspective ?**



Ce dessin représente le cube ABCDEFGH.
Le point M est un point de l'arête [CG],
le point N est un point de l'arête [BC],
et le point P est un point de l'arête [GH].



La droite (AM) a été tracée dans le cube ABCDEFGH.
Le dessin ci-dessus représente cette nouvelle situation.

Certains élèves s'interrogent devant ce que représente ce dessin.
*Paul dit : « **Cette droite (AM) passe par le point P.** »*
A ton avis a-t-il raison ? OUI NON J'HESITE
*Marie rétorque : « **Mais non, c'est la droite (NM) qui passe par P.** »*
A ton avis a-t-elle raison ? OUI NON J'HESITE
*Julien veut mettre tout le monde d'accord et dit: « **De toute façon, les droites (AM) et (NM) sont dans le cube une et une seule droite.** »*
A ton avis a-t-il raison ? OUI NON J'HESITE
*Hinda intervient : « **Mais non, vous vous laissez tromper par le dessin, les deux droites (AM) et (NM) sont différentes et aucune ne passe par P.** »*
A ton avis a-t-elle raison ? OUI NON J'HESITE
Et toi, quel est ton point de vue ? Pourquoi ?

Le but de cet exercice est de tester les élèves sur leur capacité à repérer à partir de cette représentation que dans la réalité la droite (AM) ne peut pas passer par N, ni par P.

Si les exercices 3 et 4 pouvaient être résolus par l'analyse des faces du cube, dans l'exercice 5, il faut savoir repérer que la droite (AM) n'est contenue dans aucun des plans correspondants aux faces du cube mais dans le plan AEGC « coupant » le cube, laissant de côté les points P et N.

Un codage des différentes combinaisons de réponses en OUI, NON, J'HÉSITE sur les quatre affirmations, s'est révélé délicat et ne semblait pas apporter des éléments d'analyse évidents. En revanche, il apparaît que confrontés à ces quatre prises de positions, les élèves sont entrés dans le débat et ont pu ensuite se positionner clairement en exprimant leur point de vue. L'analyse des réponses de nos élèves fait apparaître trois catégories :

- Les élèves qui n'avaient aucun doute :« *Les points A, M, N, P sont alignés* ». Ces élèves traitent la figure en dimension 2. Ils sont de loin les plus nombreux.
- Les élèves, peu nombreux, qui ont su discerner que ce qui apparaît sur la représentation comme une droite passant par A, N, M et P peut dans la réalité en 3D recouvrir des situations bien différentes. Mais ils ne se sont pas forcément tenus au fait qu'il était indiqué dans l'énoncé que c'est la droite (AM) qui a été représentée. Voici quelques avis représentatifs de cette catégorie :

« *Ils se laissent tout simplement tromper par le dessin, les deux droites sont différentes, aucune ne passe par P.* »
« *Je crois que c'est une droite et qu'elle passe par A et P, mais comme c'est un cube en perspective, ça nous trompe, elle ne passe pas par M et N.* »

- Les élèves qui, après avoir pris connaissance des avis de Marie, Julien, Paul et Hinda, ont bien compris la nature du problème didactique que nous nous posions. Voici une réponse donnée : « *Je me demande si on doit répondre aux questions par rapport à la réalité ou au dessin* ».

c) En conclusion :

Le verdict est clair. Si l'exercice 1 nous montre des élèves qui savent assez souvent représenter des situations de l'espace (mais peut être de façon stéréotypée), les réussites aux exercices 3, 4 et 5 restent faibles de la cinquième à la troisième. Les élèves en regardant une figure en dimension 2 ne sont pas habitués à imaginer l'objet et à raisonner sur l'image mentale de cet objet. Ils la traitent comme une figure plane et non comme une représentation d'un objet de l'espace. Les images mentales qui permettent d'interpréter les représentations ne sont pas constituées. Notre analyse donne une idée des différentes appréhensions des représentations dans l'espace par les élèves :

- Premier type d'appréhension : La représentation en 3D est prise comme une situation en 2D au premier degré ! L'élève colle à la réalité du dessin et ne fait pas le lien avec la situation en 3D.

• Deuxième type d'appréhension : L'élève distingue la réalité de la représentation et la réalité de l'objet représenté. Mais on peut distinguer différents degrés de perfectionnement :

- L'élève a compris que la représentation est différente de la réalité mais ne produit aucune analyse pour faire le lien. Il se contente de dire que l'objet en réalité est différent de ce qui est donné à voir sur la représentation.
- L'élève est capable de lier la représentation avec l'objet réel par des analyses faites à partir des faces du solide.
- L'élève est capable de lier la représentation avec l'objet réel par des analyses faites non seulement à partir des faces du solide mais en imaginant des sections du solide non matérialisées sur la représentation.

• Troisième type d'appréhension : L'élève sait non seulement faire une entrée en 3D à partir de la représentation en 2D mais aussi établir des faits en raisonnant à l'aide de propriétés de l'espace (orthogonalité et parallélisme dans l'espace par exemple).

C'est au deuxième type d'appréhension que le collège devrait raisonnablement mener un maximum d'élèves afin qu'ils puissent développer plus explicitement les démonstrations au lycée. Quelles sont les stratégies d'enseignement qui permettront cela ? C'est la question que nous allons aborder maintenant en présentant nos propositions.

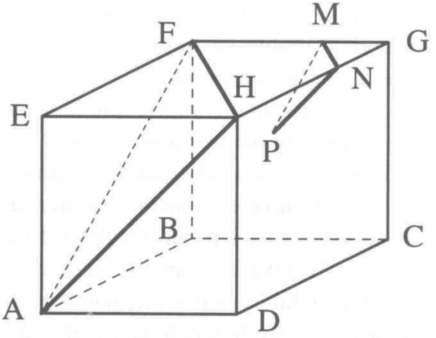
VI - Voir et raisonner dans l'espace : les stratégies d'enseignement.

L'analyse des résultats du test met à mal une idée qui préside parfois à nos efforts, en l'occurrence maladroits, d'enseignement : **il ne suffit pas d'enseigner le code de lecture et d'écriture des représentations en perspective**.

Même si de nombreux élèves arrivent à représenter un solide tel que le cube et ses faces en perspective, ils n'arrivent pas pour autant à traiter une représentation de l'espace en faisant le lien avec la dimension 3.

M.-P. ROMMEVAUX (1991) et A. CHEVALIER (1989) nous montrent le piège tendu par un effort d'enseignement prioritairement et uniquement axé sur l'apprentissage des règles de représentation en perspective. Ces règles, comme par exemple la conservation du milieu et du parallélisme, relèvent de la géométrie plane et du coup les élèves traitent les représentations comme des figures planes comme sur l'exemple suivant :

Production d'élève pour le dessin de la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à AFH passant par le point M de l'arête [FG].



Cet exemple montre bien que ce n'est pas par la connaissance a priori du code de lecture et d'écriture des représentations en perspective que l'élève développera sa connaissance des situations en 3D. Il est nécessaire que dans sa phase d'apprentissage, l'élève ait à sa disposition, non seulement une représentation, mais aussi une maquette de la situation, maquette qu'il pourra faire bouger à sa guise.

C'est dans l'interaction entre la représentation et la maquette manipulable que l'élève pourra développer des représentations mentales. Pour favoriser cette interaction entre maquette et représentation, il faut développer la capacité à repérer et à représenter en vraie grandeur des sous-figures planes.

C'est en sélectionnant des sections des solides que l'on peut analyser plus précisément la nature de certaines relations entre les éléments de la situation (orthogonalité, parallélisme ou égalité de longueurs par exemple). Cet aspect nous rend attentifs aux variables à prendre en compte pour les maquettes proposées aux élèves. Un cube peut se présenter sous différentes formes :

- une maquette pleine et opaque,
- une maquette « découpée » par des sections, notamment par assemblage de deux prismes droits ayant pour bases des triangles rectangles isocèles,
- une maquette creuse où seules les faces, transparentes ou non, sont matérialisées,
- une maquette squelettique où seules les arêtes sont matérialisées (par des tiges soudées par exemple).

Le choix effectué permettra ou non certaines actions matérielles (manipulations, découpages, dessins, projections) qui détermineront les appréhensions possibles. Une maquette opaque et pleine par exemple rendra difficile la perception d'un triangle situé « à l'intérieur » du cube. En revanche une maquette « fil de fer » ou transparente autorisant le dessin permet de repérer, de confirmer ou d'infirmer une conjecture sur la nature d'un tel triangle.

Finalement, les activités que l'on proposera aux élèves se déploieront autour de trois registres figuratifs :

- Les objets tridimensionnels (maquettes).

- Leurs représentations en perspective.

- Des représentations de sous-figures planes des objets considérés.

C'est la pratique des passages d'un registre à l'autre qui permettra aux élèves de se constituer leurs représentations mentales dans l'espace et d'acquérir progressivement les compétences en jeu. Pour permettre ces passages, le choix de la nature matérielle des maquettes sera primordial.

Ce travail est repris et complété dans la brochure « Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège » publiée par l'IREM de Strasbourg. Nous y développons une progression dans les apprentissages pour les quatre années du collège au travers d'activités adaptées. Celles-ci permettent aux élèves de se construire des représentations mentales des objets étudiés.

Bibliographie :

A. CHEVALIER Analyse du problème SEC. Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace. Edition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier - 1989.

John HUBBARD Entretien réalisé par E. NOEL, retranscrit dans POUR LA SCIENCE, n°153, juillet 1990 pp 6-8.

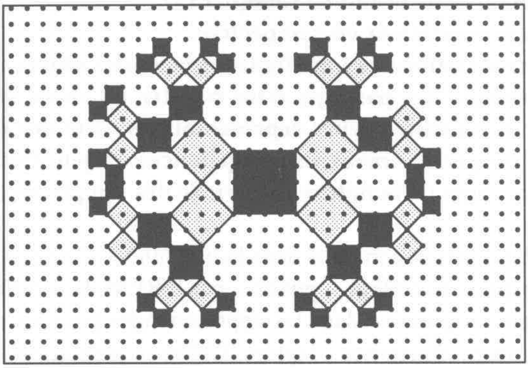
M.-P. ROMMEVAUX « Le premier pas dans l'espace», in Annales de Didactiques et de sciences cognitives vol 4, IREM de Strasbourg 1991-pp 85-123.

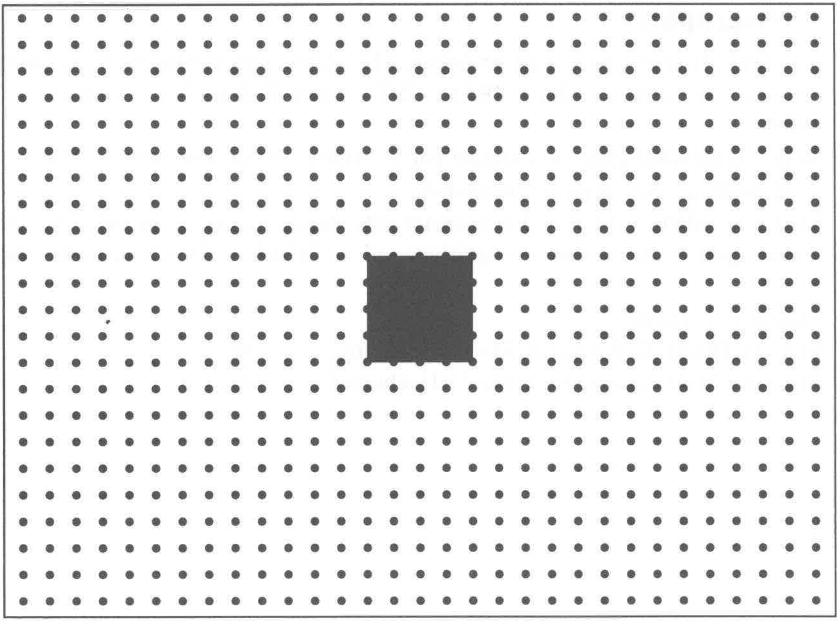
Manuels scolaires:

MATH, IREM-STRASBOURG 4e (Hachette-Istra, 1992).

MATH, IREM-STRASBOURG 3e (Hachette-Istra, 1993).

Expansion





Reproduction autorisée !

Enseigner la géométrie dans l'espace

Freddy BONAFÉ - Mireille SAUTER
Groupe géométrie IREM de Montpellier

En collège, l'enseignement de la géométrie dans l'espace repose sur l'étude de solides simples. Cet enseignement ne peut se limiter à de simples manipulations d'objets et il se trouve rapidement confronté au problème de la représentation de ces objets et à la nécessité de codage.

Que ce soit en géométrie plane ou dans l'espace, l'élève qui cherche un problème procède souvent en confrontant hypothèse et démarche expérimentale. Mais, alors qu'en géométrie plane l'objet peut être considéré comme objet d'étude permettant cette confrontation, il n'en est pas de même en géométrie dans l'espace car l'absence de statut propre des différentes représentations utilisées par les élèves limite la nature de cette démarche expérimentale. S'agissant du travail sur un triangle, par exemple, son dessin est l'objet d'étude, alors que ce n'est pas le cas pour un cube.

Un enseignement de la géométrie dans l'espace ne peut avoir des chances de réussite, qu'à condition que soit mis en place dès les première années du collège au moins **un procédé de représentation de l'espace, avec tout ce que cela comporte de savoir-faire et d'apprentissage.** Une prise de conscience sur les différences géométriques entre l'objet et sa représentation est indispensable, un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet que s'il a une bonne image mentale de cet objet et aussi une parfaite connaissance des règles de représentation lui permettant de décoder ce dessin.

Notre enseignement privilégie la perspective cavalière, qui est un des procédés codifiés de représentation de l'espace (voir les compléments théoriques de cet article). Ce choix présente comme avantage une assez bonne restitution de la vision de l'objet, la conservation du parallélisme ainsi que celle des proportions dans chaque direction de l'espace. Les notions géométriques requises sont facilement accessibles à de jeunes élèves.

Quelle progression adopter dans les classes ?

Pour tous les solides étudiés : parallélépipède, cylindres, pyramides,... et autres, nous adoptons une progression identique, une première phase de **manipulation avec des objets** permettant d'acquérir le vocabulaire de base, suivie d'une deuxième phase d'**apprentissage de la représentation de ces objets**.

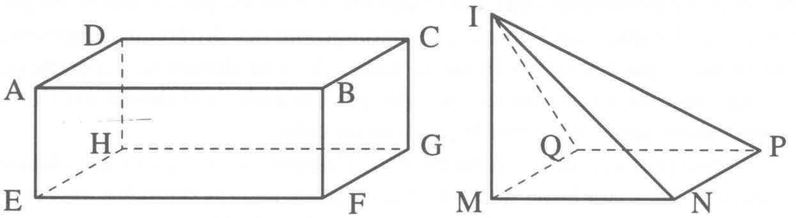
Les fiches d'activités présentées dans cet article sont extraites d'une brochure réalisée par le groupe géométrie de l'IREM de Montpellier : *Enseigner la géométrie de l'espace, activités de la sixième à la seconde.* La première partie de chaque fiche est destinée au professeur.

Manipulations - Utilisation de maquettes

Toute étude de solide commence par l'observation, la manipulation d'objets, objets de la vie courante (boîtes,...) ou bien solides fabriqués par les élèves à partir de patrons que l'enseignant leur a donnés. Par exemple :

Manipulation d'objets, codage, vocabulaire

Les élèves ont à leur disposition un pavé droit et une pyramide tiers de cube dont les sommets sont repérés de la façon suivante :



Exercice 1 : Sur le pavé,
- mesurer les longueurs des arêtes AB = ; AE = ; AD =
- mesurer les angles $\widehat{EAB}$ = ; $\widehat{EAD}$ = ; $\widehat{BAD}$ = .
- calculer les aires des faces ABCD : ; AEBF : ; AEHD :

Exercice 2 : Sur la pyramide,
- mesurer les longueurs des arêtes IM = ; MN = ; MQ =
IN = ; IP = ; IQ =
- mesurer les angles $\widehat{IMQ}$ = ; $\widehat{IMN}$ = ; $\widehat{IPQ}$ = .
- calculer les aires des faces IMQ : ; MNPQ : ; IPQ :

Exercice 3 : compléter:

	Pyramide	Pavé
Nombre de faces		
Nombre d'arêtes		
Nombre de sommets		

Exercice 4 : Entourer les noms des faces de la pyramide :
IPQ, MNPQ, IMP, IQP, QNI, NPMI.

Exercice 5 : Entourer les noms d'arêtes du pavé : [EH], [AF], [CB], [DH], [GD], [FE].

L'observation et la manipulation permettent de définir en le **montrant** le vocabulaire propre à chaque solide.

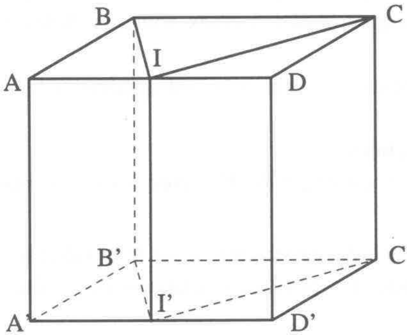
Il est indispensable que chaque élève ait fabriqué sa maquette, il l'utilisera par la suite comme objet à représenter et elle pourra toujours être outil de référence lors de remédiations.

Représentation

Avant tout apprentissage de représentation il semble pertinent de placer l'élève dans une situation où il peut comparer les propriétés géométriques spatiales d'une maquette et les propriétés planes de sa représentation. Une prise de conscience des conservations ou modifications des longueurs et des angles est essentielle, c'est l'objectif de la fiche présentée ci-dessous.

Différences objet - dessin

Les élèves ont à leur disposition une maquette de cube de 6 cm d'arête et le dessin ci-dessous qui représente un cube de 6 cm d'arête en perspective cavalière ayant 30° pour angle de fuyante et 1/2 comme coefficient de réduction sur les fuyantes, ce que nous nommons PC(30°,1/2). Ils doivent compléter le tableau en s'aidant de leurs instruments de mesure.



	Dessin	Objet
AI		
AD		
ID		
IB		
BC		
IC		
IT		

	Dessin	Objet
$\widehat{DAI}$		
$\widehat{AID}$		
$\widehat{ADI}$		
$\widehat{IBC}$		
$\widehat{BIC}$		
$\widehat{BCI}$		
$\widehat{ICD}$		
$\widehat{CDI}$		
$\widehat{DIC}$		
$\widehat{BAC}$		

Conscient des différences géométriques entre l'objet et sa représentation, l'élève peut progressivement se construire des images mentales opérantes. Un véritable apprentissage de la perspective cavalière doit être mis en place.

Trois éléments semblent se dégager dans la constitution d'une bonne image mentale nécessaire à tout travail de géométrie dans l'espace durant cet apprentissage:

- **le passage de l'objet au dessin,**
- **le passage du dessin à l'objet,**
- **le passage du dessin au dessin sans l'objet.**

Passage de l'objet au dessin

Chaque élève a entre ses mains une maquette construite lors de la phase de manipulation. après avoir proposé aux élèves de réaliser une représentation personnelle de cet objet, un débat s'instaure dans la classe aux vues des différentes productions pour un même objet, pour avoir une représentation « lisible par tous » on met ainsi en place les premières règles d'action de la perspective cavalière qui sont pour une PC(30°,1/2) :

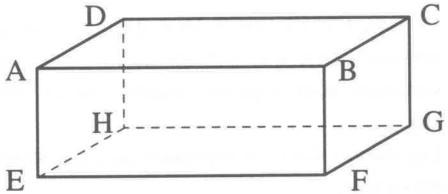
- choisir une face de l'objet appelée face avant, la dessiner en vraie grandeur,
- dessiner en vraie grandeur les arêtes qui sont parallèles à la face choisie,
- dessiner en vraies grandeur les angles dont les côtés sont parallèles à la face choisie,
- dessiner sur des fuyantes* les arêtes qui sont perpendiculaires à la face choisie,
- dessiner en pointillés les arêtes cachées.

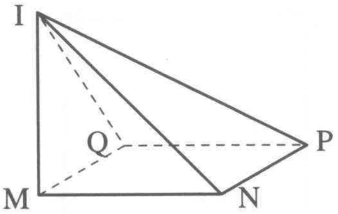
* les fuyantes sont les droites, qui font un angle de 30° avec les horizontales de la feuille.

Ces règles facilement mises en place dès la sixième pour le parallélépipède, nécessitent au préalable une étude des positions relatives des arêtes et faces des objets.

Etude des positions relatives des arêtes et faces d'un pavé, d'une pyramide

Les élèves ont à leur disposition un pavé droit et une pyramide tiers de cube dont les sommets sont repérés de la façon suivante





Exercice 1 : Dans le pavé,
- citer 3 arêtes parallèles à [AB] : ; à [AD] : ; à [AE] :
- citer 4 arêtes perpendiculaires à [AB] : ; à [AE] : ; à [AD] :

Exercice 2 : Dans la pyramide,
- citer toutes les arêtes perpendiculaires à [MQ] : ; à[MN] : ; à [IM] :
- citer toutes les arêtes parallèles à [MQ] : ; à [MN] :
- peut-on citer des arêtes parallèles à [IM] ? ; à [IN] ?
  à [IP] ? ; à [IQ] ?
- peut-on citer des arêtes perpendiculaires à [IN] ? ; à [IP] ? ; à [IQ] ?

Exercice 3 : Compléter avec un des symboles suivants :
// pour parallèle, ⊥ pour perpendiculaire, O pour ni parallèle ni perpendiculaire.

Dans le pavé

	ABCD
[AE]	
[BC]	
[GH]	

	AEHD	ABCD	EFGH	DCGH
[GH]				

Dans la pyramide

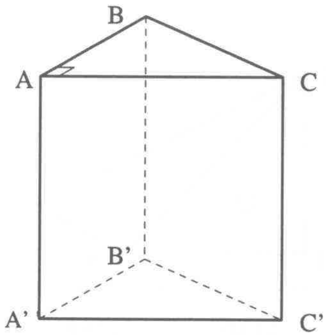
	IMQ
[MN]	
[MQ]	
[PI]	

	IPQ	INP	IMQ	IMN
[QM]				

	IPQ	IPN	MNPQ
[IP]			
[PN]			

L'application de ces règles demande quelques compléments, en particulier concernant la position requise par l'objet pour introduire la notion d'arête cachée. D'autre part lorsque l'objet présente des arêtes ni parallèles, ni perpendiculaires au plan de projection, il peut être nécessaire d'introduire des segments auxiliaires. C'est l'objet du travail qui suit.

Dépassement des règles



Les élèves ont à leur disposition un prisme droit qui est un demi cube, les sommets sont repérés comme sur ce dessin.
Les élèves doivent répondre aux questions suivantes.

Vous disposez d'un prisme droit qui, avec celui de votre voisin, vous permet de restituer un cube.

Exercice 1 : Combien votre prisme a-t-il de faces ?
Quelle est la forme de chacune d'entre elles ?
Combien votre prisme a-t-il d'arêtes ?

Exercice 2 : Représenter le prisme dont vous disposez dans une PC(30°,1/2) dans chacun des cas suivants :

- cas 1 : la face choisie est la face ABB'A'.
- cas 2 : la face choisie est ABC.
- cas 3 : la face choisie est BCC'B'.

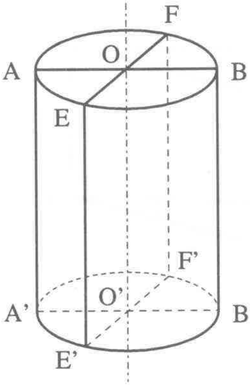
On peut remarquer que le cas des corps ronds que l'on n'a pas encore évoqué ne peut être traité de la même façon. En effet, comme on peut le voir dans la partie théorique à la fin de cet article, la représentation traditionnelle d'un cylindre (de même que celle du cône) utilise une perspective cavalière à 90° contrairement aux perspectives à 30°, 45°, 60° souvent utilisées pour les prismes.

L'apprentissage de cette représentation - passage de l'objet au dessin - se fait assez rapidement malgré les difficultés techniques soulevées par le tracé de l'ellipse et des tangentes à cette dernière, en particulier pour le cône.

La lecture et l'interprétation du dessin d'un cylindre sont intéressantes, la fiche qui suit montre un exemple de travail à ce sujet.

Lecture d'un dessin de cylindre

Chaque élève dispose d'un cylindre qu'il a précédemment construit et de la figure accompagnée du texte ci-dessous.



Ce dessin représente un cylindre de 10 cm de hauteur et de 6 cm de diamètre. Les quadrilatères ABB'A' et EFF'E' représentent des sections verticales de ce cylindre passant par les centres O et O' des disques de base.

Regarde attentivement la figure et réponds aux questions suivantes.

1°) Quelles sont les longueurs réelles des segments [AB], [AA'],....., [EF']?

AB =	AA' =	FE =	FF' =
OO' =	AB' =	FO' =	EF'=

2°) Quelle est la mesure réelle de chacun des angles suivants ?

$\widehat{ABB'}$ = ; $\widehat{BB'A'}$ = ; $\widehat{F'E'E}$ =

$\widehat{E'EF}$ = ; $\widehat{OO'B'}$ = ; $\widehat{OO'F'}$ =

3°) Quelle est la nature des sections ABB'A' et EFF'E' ?

4°) Quelle est l'intersection des sections ABB'A' et EFF'E' ?

5°) Quelle est la position des génératrices [AA'], [EE'], [BB'], [FF'] par rapport aux plans des disques de base ?

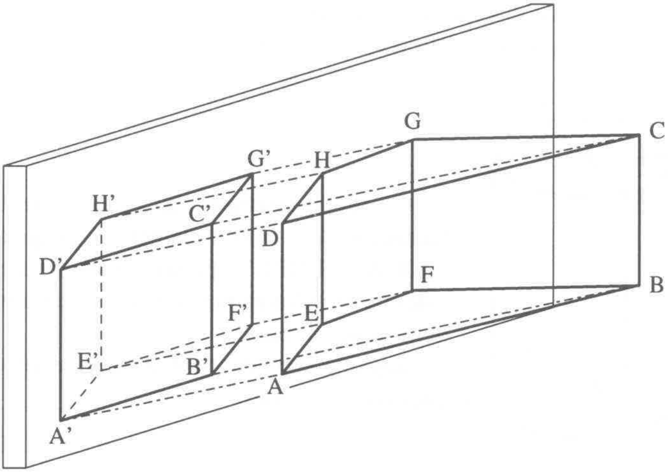
6°) Quelle est la position de l'axe (OO') par rapport aux plans des disques de base ?

Passage du dessin à l'objet

Il s'agit de reconstituer un objet lorsqu'un dessin en perspective cavalière en est donné.

Ce passage comporte dans un certain sens l'idée fausse de bijectivité entre objet et représentation. **En effet, la seule représentation ne permet pas de reconstituer l'objet, et la figure ci-après illustre comment ce que l'on perçoit comme la perspective cavalière d'un cube sur un tableau**

peut être la perspective cavalière d'un tout autre objet.

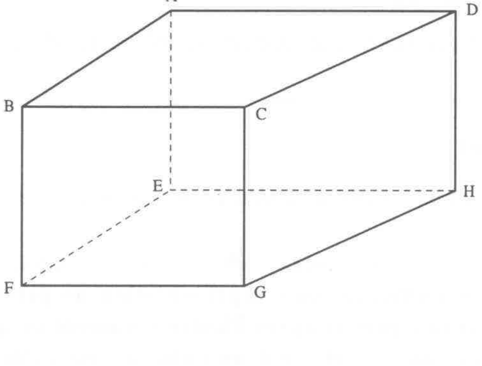


Une analyse préalable des éléments constitutifs de l'objet est donc nécessaire à toute reconstitution.

La fiche qui suit propose à propos du dessin d'un prisme droit dans une position particulière, un travail de reconstitution.

Restitution d'un objet

Les élèves ont à leur disposition le dessin et les consignes qui l'accompagnent, ainsi que le matériel nécessaire à la réalisation d'une maquette. Dans un premier temps une analyse de l'objet à travers sa représentation a été réalisée avec les élèves.



Le dessin ci-contre représente en PC (30°,1/2) un prisme droit dont la base EFGH est un trapèze rectangle

(EF)⊥(FG) et (EF)⊥(HE).

La face BFGC est la face avant de ce prisme.

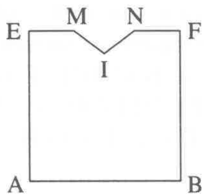
Fabriquer en carton cet objet.

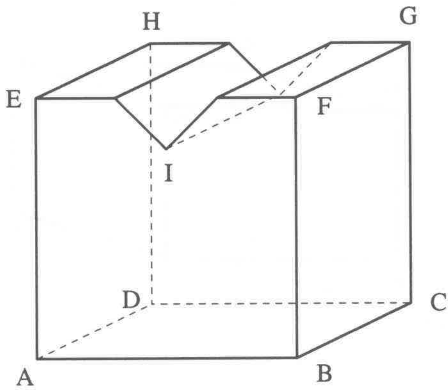
Passage du dessin au dessin

L'objet, n'étant plus présent, n'existe plus qu'en tant qu'image mentale sur laquelle toute action n'est possible qu'au travers de l'action sur le dessin. Ce travail nécessite donc de concilier, tout en les séparant, les propriétés spatiales de l'objet et les propriétés planes du dessin.

Dessiner sans l'objet

Les élèves ont à leur disposition le dessin ci-dessous et les consignes qui l'accompagnent. Dans un premier temps une analyse de l'objet à travers sa représentation a été réalisée. La clé de la représentation réside dans le repérage du point I qui peut se faire par exemple avec le triangle IMN.





Le dessin ci-contre représente en PC(30°,1/2) un cube ABCDEFGH entaillé sur sa face de dessus. La face avant est ABFE.

Représenter ce même objet en PC(30°,1/2) avec comme face avant la face EFGH.

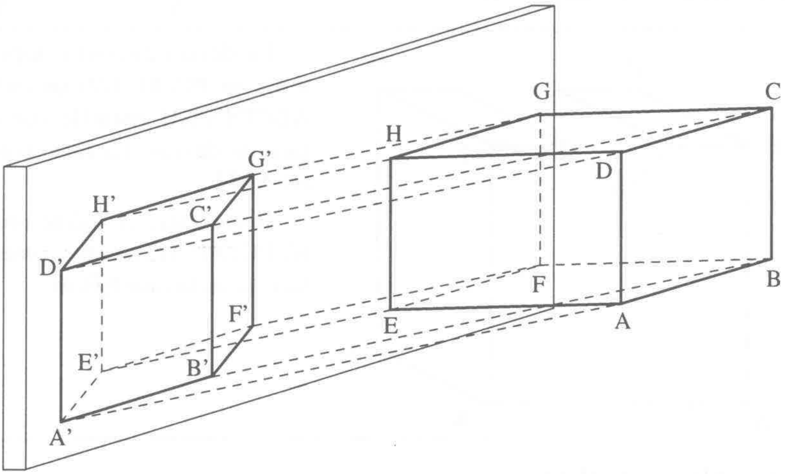
Compléments théoriques

D'un point de vue technique, on dispose de six modes de représentation principaux, parfaitement codifiés, et décrits par G. AUDIBERT (1990) dans *La perspective cavalière*. Ce sont les vues, les projections axonométriques, la perspective cavalière, l'épure en géométrie descriptive, la perspective linéaire et la projection cotée.

La perspective cavalière

On peut définir la perspective cavalière d'un objet comme la projection de cet objet sur un plan suivant une direction oblique par rapport à ce plan. L'étude des propriétés de cette projection permet alors d'établir certaines relations entre l'objet et son image, ou plutôt entre divers éléments de cet objet et leurs images.

Cette approche permet de transposer dans le contexte scolaire la notion de perspective cavalière, mais elle l'isole du cadre des activités qui sont à son origine et pour lesquelles primait la technique de représentation. De plus cette présentation de la perspective cavalière est souvent accompagnée de figures qui sont une perspective cavalière de la perspective cavalière que l'on est en train de décrire. Ce qui revient à utiliser pour mieux la définir la projection que l'on souhaite présenter....La figure ci-dessous qui illustre cette ambiguïté est souvent accompagnée dans les manuels d'une phrase telle que: « A'B'C'D'E'F'G'H' est la projection sur le tableau du cube ABCDEFGH ». Mais où est donc le cube ? Qu'est-ce que A'B'C'D'E'F'G'H' ?...et ABCDEFGH ?



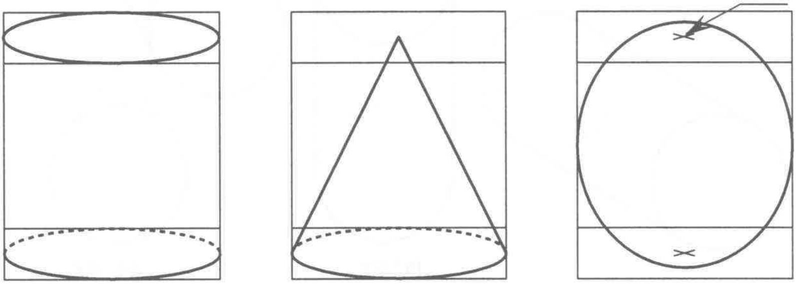
Il ne faut pourtant pas oublier, et l'illustration ci-dessus en est la preuve, que le but de toute perspective est de faire en sorte que la vision d'une image à deux dimensions corresponde à la vision de l'objet qu'elle représente afin de pouvoir substituer l'image à l'objet. C'est cette substitution qui conduit souvent à la confusion entre les opérations qui touchent à l'image et celles qui touchent à l'objet.

Le cas des corps ronds

Le cylindre, la sphère, le cône, ne peuvent être ignorés dans une réflexion globale de l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Leur représentation en perspective cavalière soulève des difficultés de nature tout à fait différente, particulièrement celles liées au tracé de l'ellipse, au contour apparent ainsi qu'à la vision.

Du point de vue technique, c'est le tracé de l'ellipse qui fait difficulté (son étude est réservée aux élèves des terminales scientifiques ayant choisi l'option mathématiques). En effet, sauf dans les cas de positions singulières du type de celles illustrées ci-dessous, les rayons des ellipses permettant la représentation du cylindre, de la sphère, du cône, ne sont pas connus. On ne connaît de ces ellipses que deux rayons conjugués (pour une étude plus complète de ces questions on pourra consulter les travaux précédemment cités).

PC 90°



On a vu que nos règles d'actions concernant la représentation en perspective cavalière s'appuyaient exclusivement sur les arêtes des polyèdres. En effet, quel que soit le polyèdre envisagé, son contour apparent est formé exclusivement d'arêtes. Ce n'est plus tout à fait le cas lorsqu'il s'agit de représenter des corps ronds. A la notion d'arête vient parfois se substituer celle de génératrice. Mais, comme le montre la figure précédente, cette génératrice peut être en vraie grandeur (cylindre), raccourcie (cône) ou carrément absente (sphère).

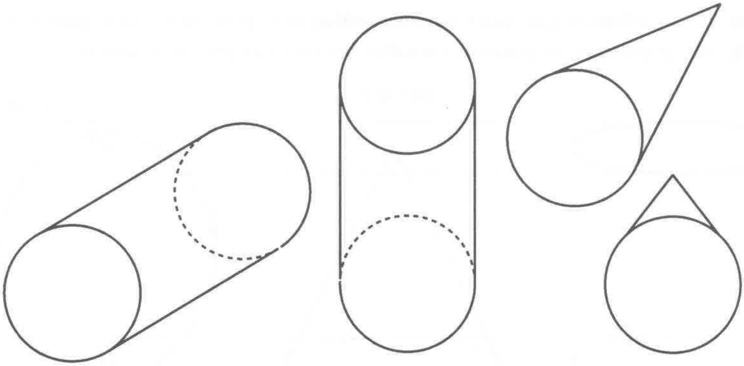
En ce qui concerne la vision qui ne peut être exclue des questions de représentation, on se heurte pour les corps ronds à une profonde contradiction. En effet, si il est possible de disposer un cylindre ou un cône de sorte qu'ils apparaissent comme le montre la figure précédente, il est bien difficile de voir un contour apparent elliptique en observant une sphère; et inversement, la perspective cavalière d'une sphère renvoie plutôt à un ellipsoïde non sphérique.

Ces quelques observations nous imposent une certaine prudence dans l'étude des corps ronds que l'on ne peut exclure de l'enseignement pour la seule raison que leur représentation en perspective cavalière est malaisée. Les travaux de PAïS L.C. (1991) et FAVRAT J.F. (1995) apportent quelques éléments de réponse aux questions d'enseignement portant sur le cylindre.

Concernant le cylindre et le cône, On peut distinguer deux cas dans la représentation en PC : le plan de projection est parallèle à une base ou le plan est parallèle à l'axe du cylindre.

Plan de projection parallèle à une base du cylindre ou du cône

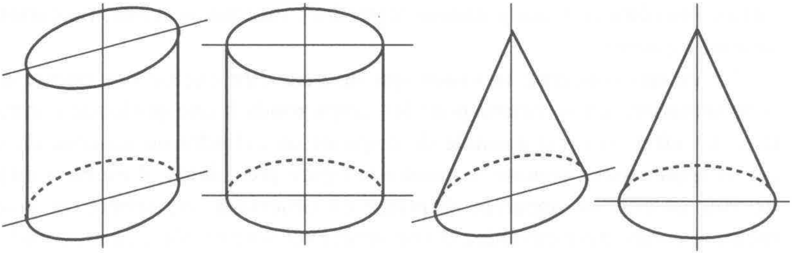
Les disques de base apparaissent en vraie grandeur. Les génératrices sont des fuyantes. Ces représentations illustrées ci-dessous sont peu utilisées.



PC 90° PC 90°

Plan de projection parallèle à l'axe du cylindre

Les disques de bases sont représentés par des ellipses. Les génératrices ne sont en vraie grandeur que pour le cylindre. Le contour apparent dans une perspective cavalière différente de 90° présente des difficultés à cause des points de tangences des génératrices comme on peut le voir sur les figures suivantes.



PC 90° PC 90°

Les représentations traditionnelles du cylindre et du cône en perspective à 90° sont les plus utilisées avec les élèves. Un pochoir trace-ellipse facilite alors les tracés.

BIBLIOGRAPHIE

AUDIBERT G. (1985) : *Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL*. Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier.

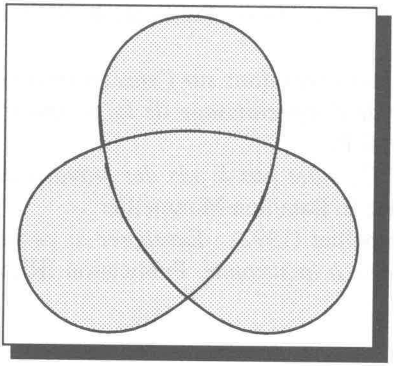
AUDIBERT G. (1990) : *La perspective cavalière*. Publication N°75 de l'A.P.M.E.P.

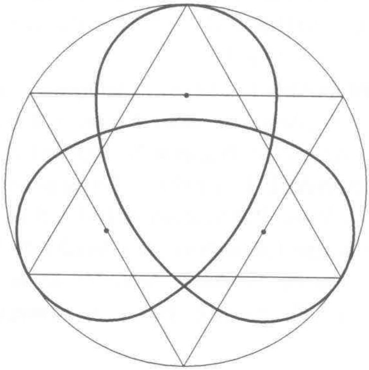
BONAFÉ F. (1988) : *Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace à partir de l'apprentissage de la perspective cavalière*. Bulletin N°363 de l'A.P.M.E.P.

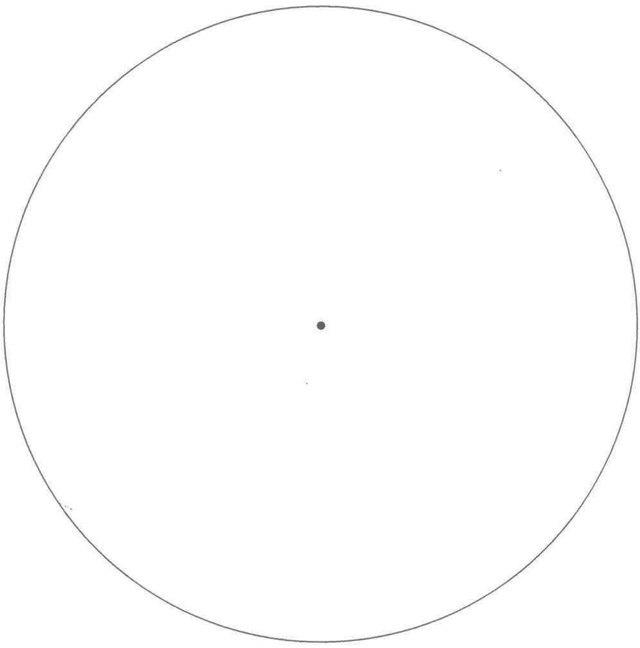
BONAFÉ F. (1991) : *La séquence P.C., suite pas à pas des travaux des élèves*. Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier.

Groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier (1992) : *Enseigner la géométrie de l'espace, activités de la sixième à la seconde*. Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier.

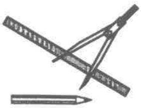
Le trèfle







Reproduis le trèfle en t'aidant du dessin de construction



CINQUIÈME PARTIE

Comprendre, expliquer, raisonner, écrire.

Un des grands enjeux de l'enseignement des mathématiques au collège est d'amener l'élève à faire évoluer ses modes de décision : d'une validation métrique de la « figure » aux dimensions imposées, il lui faudra passer à une validation argumentée sur une « classe de figures » en fonction de leurs propriétés ; d'une explication naturelle souvent très narrative, il lui faudra passer à une démonstration aux règles d'écriture très codifiées.

En sixième, et bien entendu, à l'école élémentaire, la résolution de problèmes oblige à lire, comprendre, raisonner, expliquer. La mise en place du cycle central est l'occasion de mener une double réflexion :
- Comment assurer la continuité des apprentissages fondamentaux définis ci-dessus ?
- Comment provoquer une nécessaire rupture pour changer certains modes de validation ou d'écriture ?

On sait que les élèves restent longtemps attachés à un point de vue pragmatique. Comment faire évoluer ce point de vue ? Comment lever les malentendus, souvent résistants sur les enjeux et les méthodes des mathématiques ? En particulier, comment négocier le passage d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction ?

A cette question, les trois articles répondent en proposant des activités destinées à créer un débat dans la classe. La notion d'enjeu est centrale. Pour que les élèves puissent comprendre l'intérêt du raisonnement déductif, on va leur proposer des problèmes où la réponse n'est pas évidente, des problèmes ou différentes réponses contradictoires peuvent surgir...

On sait aussi que, dans l'apprentissage de la démonstration, une difficulté, particulièrement sensible en géométrie, est le passage à l'écrit, la compréhension de la structure des théorèmes, de leur emploi dans la démonstration, l'organisation des démonstrations...

Le premier article explore les différentes facettes de ce que l'on peut appeler plus généralement « lire, écrire en mathématiques ». Il propose des activités visant l'appropriation de différents supports de communication : figures, expressions numériques ou algébriques, graphiques, textes. Pour faire progresser les élèves dans la maîtrise de l'écrit, un choix essentiel est de partir de leurs productions individuelles et de les faire travailler ensuite, par groupes ou classe entière, sur ces productions.

C'est également une des options du deuxième article dont la contribution porte plus spécifiquement sur l'initiation au raisonnement en géométrie. Il traite également du point délicat de la compréhension des théorèmes et de la compréhension de leur utilisation, qui conditionne leur apprentissage.

Jusqu'où aller ? Le troisième article prend position sur ce sujet. On attend des élèves qu'ils sachent distinguer conjecture et preuve, argumenter en utilisant des propriétés, mais on ne saurait exiger d'eux en cinquième qu'ils rédigent une véritable démonstration.

Lire et écrire en mathématiques

Michel JAFFROT - Annick MASSOT
IREM de des Pays de la Loire
Annie DUBUT - Brigitte POULAIN
IREM de Rouen

Introduction

Cet article se place dans la continuité de celui de la brochure « Des mathématiques en sixième ».

Dans les programmes du cycle central, le même souci concernant la lecture et l'écriture apparaît.
« *Les travaux individuels de rédaction concourent efficacement à la maîtrise de la langue, à la mémorisation des savoirs et savoir-faire et au développement des capacités de raisonnement* » ....
« *La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'écrit qu'à l'oral* »

L'importance de la lecture et de l'écriture de textes est mise en évidence dans les trois parties du programme.

Faire écrire les élèves, c'est les mettre en activité et en situation de production. La communication de cette production aux autres élèves les amène à améliorer leur expression, à approfondir leur pensée, à expliquer et à justifier leurs affirmations.

De plus, le professeur a ainsi à sa disposition un matériau (les productions) qui lui permet d'essayer de mieux comprendre les stratégies mises en oeuvre et les difficultés mathématiques.

Les activités qui vont être proposées ont des objectifs de contenus ou de méthodes mais aussi des objectifs d'écriture-communication. Elles sont destinées à améliorer les compétences de tous les élèves et font partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques en cinquième.

Si lecture et écriture sont toujours mêlées, l'écriture prend une place de plus en plus importante.

Certaines de ces activités sont ou seront détaillées dans les brochures IREM citées en référence, d'autres sont issues de stages que nous avons animés.

Des propositions

Les activités décrites dans l'article « *Lire et Ecrire* » de la brochure « *Des Mathématiques en Sixième* » ont pu, ou non y être menées. Certaines peuvent être reprises en cinquième ou adaptées, on peut citer entre autres :
« Lire un texte complexe pour faire une figure » qui peut être proposé en début d'année pour remettre en mémoire vocabulaire et notations.
« Associer des textes donnés et des figures données » dont les quadrilatères peuvent être, par exemple, un support.
« Poser des questions sur une figure géométrique ».
« Fabriquer un texte à partir d'un calcul donné ».

Certaines constantes de fonctionnement se dégagent des activités qui suivent. Le point de départ est souvent une production individuelle de textes ; ces textes vont ensuite être retravaillés en groupe ou en classe entière, dans le cadre d'un débat.

De ce travail se dégagent des critères de réussite, éventuellement une correction, une production collective, une nouvelle production individuelle ou une institutionnalisation de connaissances nouvelles... Cette phase est nécessaire pour se déconnecter de l'activité, pour faire une pause...
« *On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes. Elle seule permet, par exemple, l'appropriation du raisonnement ...* »

Les élèves sont actifs et leur esprit critique fonctionne.

Le professeur anime des débats, veille à ce que tout le monde puisse s'exprimer. Il reste en retrait, il recueille les propositions, il ne donne pas son avis, la classe les discute. Cependant il arbitre, tranche si nécessaire, renvoie les questions au groupe et gère la séance.

Dans une activité, on utilise la technique « autour du mot » qui permet de faire émerger les représentations initiales des élèves : le professeur écrit un mot au tableau puis en silence et à tour de rôle, les élèves disent un mot qu'ils associent aux mots écrits. Ainsi par association d'idées, une suite de mots est écrite. Puis, toujours de la même manière, les élèves disent les mots qu'ils gardent (mots soulignés) ou qu'ils rejettent (mots barrés). Quand plus personne n'a rien à dire, un débat est instauré, essentiellement autour des mots soulignés ou rejetés. A la fin du débat, un état des lieux est fait par rapport au mot étudié.

Les activités proposées sont variées et indépendantes les unes des autres. Elles s'inscrivent dans un apprentissage de lecture-écriture s'étalant tout au long de l'année, tout en s'intégrant dans l'étude de notions du programme.

… dans les travaux géométriques

A - Ecrire un texte pour décrire un objet

Le professeur distribue un **prisme droit différent** à **chaque membre** d'un groupe.

Consigne 1 : En travail individuel "**Décris l'objet que tu as devant toi**". Par groupe de quatre, **présentez-vous vos descriptions**. Consigne 2 : **Trouvez une description qui convient à tous ces objets**. Cette description <u>commune</u> sera mise sur transparent.

Après avoir donné la consigne 2, le professeur doit intervenir en prenant appui sur ce qui se dit dans les groupes pour expliquer à certains « description commune ». Ensuite, chacun a le temps de manipuler, d'observer les objets… De conjecturer.

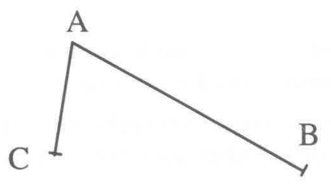
Le professeur intervient pour stimuler. Mais aussi, en fonction des propriétés non trouvées ou discutées dans le groupe, il glisse, soit un contre-exemple (pyramide tronquée parallèlement à la base ou non, prisme oblique…) soit un cas particulier de la famille (cube ou un pavé).

Une lecture des transparents est faite ; chacun note au brouillon ce qui va ou non ; une relecture critique est faite en notant au tableau ce qui est retenu par la classe. La description est écrite dans le cahier.

Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

B - Construire un quadrilatère

Les quadrilatères ont déjà été rencontrés à l'école primaire ou en sixième. A partir de constructions expliquées **par écrit** on commence à mettre en



Termine le parallélogramme ABDC avec :
1) Seulement ta règle non graduée et ton compas.
2) Seulement ta règle non graduée et ton équerre.
3) Seulement ta règle non graduée, ton compas et ton équerre.

place des propriétés caractéristiques.

L'activité peut être aussi donnée de façon plus ouverte, en laissant les élèves terminer le parallélogramme avec les instruments de leur choix.

L'inventaire des différentes possibilités de construction est fait.

Le texte élaboré par l'ensemble de la classe a ainsi du sens pour chacun des élèves car il prend appui sur les premières remarques individuelles, puis la mise en commun par groupes permet des rectifications et une décontextualisation. L'élaboration finale est l'aboutissement de cette démarche où l'élève a pu s'approprier un texte qui rend compte de ses activités.

A travers ce type d'activités, les élèves réalisent la nécessité de connaître le vocabulaire pour communiquer. Quand le moment s'en fait sentir, une mise au point sur le vocabulaire est faite.

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

C - Le jeu de cartes des quadrilatères

Cette activité permet de récapituler les résultats obtenus à la suite de travaux comme ci-dessus.

Chaque élève tire une carte numérotée d'un jeu de trente cartes différentes. Chaque carte demande de construire un quadrilatère. On recommence deux fois de suite. Chaque construction est ainsi faite par plusieurs élèves.

Des groupes sont constitués à partir de critères décidés à l'avance par le professeur.

Il y a par exemple le groupe « des angles droits », le groupe « des diagonales »...

Le groupe des "angles droits" est constitué à partir des trois cartes :

Construis un quadrilatère ABCD qui a un angle droit.
Construis un quadrilatère ABCD qui a deux angles droits.
Construis un quadrilatère ABCD qui a trois angles droits.

En fonction des constructions réalisées, des cartes « bis » sont données ou non, individuellement ou en groupes. Pour le groupe ci-dessus, on a pu donner « Construis un quadrilatère ABCD qui n'a qu'un angle droit ».

Ensuite, sur transparent, chaque groupe donne les propriétés communes de leurs quadrilatères. Et, quand c'est possible ils donnent aussi leur nature et complètent comme ci-dessous :

Quand un quadrilatère a.............. alors il est .... sur le modèle :
Quand un triangle a *deux côtés de même longueur* alors il *est isocèle.*

Chaque groupe expose en classe entière, corrige éventuellement ses constructions. Celles-ci sont alors collées sur des affiches qui seront complétées et resteront dans la classe.

Un des intérêts de cette activité est de découvrir ou de redécouvrir des propriétés caractéristiques et d'apprendre à construire les énoncés correspondants.

A cette occasion les propriétés des quadrilatères sont réévoquées puis notées sous la forme :

« **Un parallélogramme a ....**
et ....
et ....

Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

D - Encore des quadrilatères !

L'objectif est maintenant de faire acquérir aux élèves une certaine habileté dans la manipulation de ces propriétés à travers différents exercices.

A la suite d'une interrogation de cours, à partir de quatre ou cinq textes comportant au moins une incorrection, le professeur demande de trouver ces incorrections, individuellement, puis par deux. Les élèves repèrent bien les manques, les contresens.... Un point est fait sur ce qu'il faut (faire) pour savoir le cours.

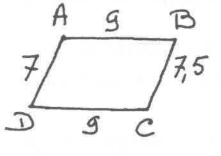
A travers les exercices donnés, on a souvent l'occasion de travailler les « petits mots » comme « tous, un, le, si...alors, car, donc...» afin d'apprendre aux élèves à les utiliser correctement, sans les déconnecter de notions mathématiques en cours d'étude.

Des exemples d'exercices :

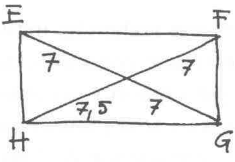
* Sur une fiche, une douzaine de figures sont dessinées à main levée et portent des indications erronées. Le travail se fait en groupe, il est suivi d'une mise en commun orale.

Corrige les indications erronées en citant les propriétés qui permettent de le faire.

ABCD est un parallélogramme



EFGH est un rectangle



....

C'est répétitif sans pour cela être ennuyeux. Les élèves sont motivés parce qu'ils sont en situation de corriger un travail « déjà fait ».

* On donne une série de phrases ; pour chacune des phrases vraies, les élèves dessinent trois exemples et pour celles qui sont fausses, ils dessinent une figure contre-exemple.

1 - Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.
2 - Le quadrilatère IJKL a ses diagonales qui ont le même milieu et la même longueur, c'est un rectangle.
3 - Le quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, c'est un carré.
...

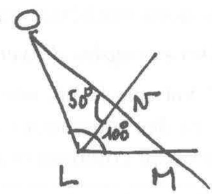
Après un travail individuel les élèves confrontent leurs réponses et se mettent d'accord oralement à partir des figures dessinées.

"Langage et raisonnement" IREM de Picardie

E - Constructions raisonnées de figures nécessitant un calcul d'angles

L'objectif est d'obliger l'élève à faire un calcul pour pouvoir réaliser un dessin, de lui faire rédiger un texte justifiant ce calcul, puis à propos de cette activité de lui faire dégager quelques critères de réussite pour l'écriture de textes mathématiques.

OLM est un triangle. Le point N appartient au segment [OM] .
De plus : $\widehat{ONL} = 50°$; $\widehat{OLM} = 100°$; $\widehat{OML} = 30°$ et LM = 15 cm
La figure ci-contre est mal construite ;
elle ne correspond pas aux données.
Construis une figure respectant cet énoncé.
Explique ta méthode.



Repère IREM n°12. Une preuve pour construire en 5ème

Après une recherche individuelle (ou en groupe) du problème, le professeur sélectionne certains textes produits par les élèves (ceux qu'il juge intéressants par rapport à ses objectifs).

Ces textes sont photocopiés sur des transparents. Les élèves sont amenés à prendre conscience de l'insuffisance de certains textes, à dégager des critères de réussite d'un bon texte et d'en produire un collectivement.

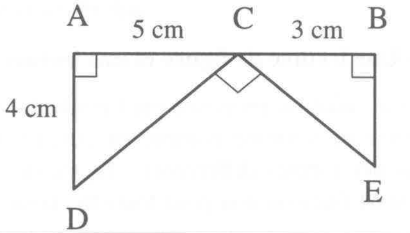
Puis les élèves reprennent leur premier texte dans lequel ils soulignent ou modifient ce qui ne convient pas.

La consigne « explique ta méthode » permet dans le travail commun de rejeter, dans la plupart des cas, les méthodes « par tâtonnement », difficiles à expliquer.

F - Se méfier d'une lecture trop rapide d'une figure

En sixième, le statut de la figure commence à évoluer. L'élève découvre qu'il faut "s'en méfier" comme dans le problème ci-dessous où ABED semble être un rectangle mais les données ne permettent pas de conclure...

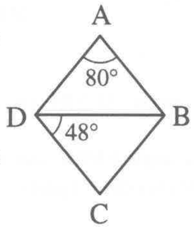
A,C et B sont alignés.
Construis la figure ci-contre.
Quelle est la nature de ABED ?



On peut poursuivre ce travail avec les problèmes d'alignement utilisant la somme des angles.

En cinquième, on continue à faire évoluer la figure par exemple à partir de l'activité « Losange »

On donne : DB = 8 cm ; CD = CB et AD = AB
1) Construis la figure donnée.
2) Justifie ta construction.
3) Peux-tu préciser la nature de ABCD ?



Cette figure ressemble à un losange. Elle est dessinée à main levée au tableau.
Les questions sont données les unes après les autres.

Les élèves placés en groupe réalisent d'abord leur propre figure. Très vite des contradictions apparaissent entre les différentes lectures de la figure et les calculs nécessaires à sa réalisation.

« *Les angles* $\widehat{BDC}$ et $\widehat{ABD}$ *mesurent 48° car ils ont alternes-internes égaux* » *mais* « *les angles* $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ABD}$ *sont égaux à 50° car le triangle ABD est isocèle en A* ».

« *Les angles* $\widehat{BDC}$ et $\widehat{ADB}$ *mesurent 48° car ils sont symétriques par rapport à la droite (DB) et dans le triangle ABD,* $\widehat{ABD}$ = *180° - 80° - 48° = 52° mais le triangle ABD est isocèle en A...* »

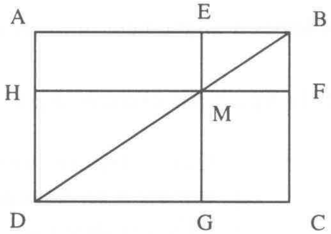
Il y a conflit, entre l'observation de la figure et le calcul.

La demande d'une justification fait apparaître le raisonnement suivi, lors de la construction et parfois un contournement de l'obstacle, par exemple, un groupe a tracé l'axe de symétrie de [DB] et en glissant le rapporteur sur cet axe, a construit l'angle $\widehat{A}$ de 80°.

Repère IREM n° 8 "Quelques outils et quelques activités pour l'apprentissage de la démonstration" - IREM de Nantes

G - Une lecture de figure et une lecture de sous-figures pour prouver

La situation proposée est l'étude des rectangles d'Euclide. Elle peut être donnée en sixième comme en cinquième...La consigne peut être donnée sous des formes différentes : figure donnée ou à construire, la position du point M fixée ou non pour toute la classe...



ABCD est un rectangle.
Sur la diagonale [BD], on a placé un point M.
Par M, on a tracé les parallèles (EG) et (HF) aux côtés du rectangle ABCD.

Pierre dit que l'aire du rectangle AEMH est plus grande que celle du rectangle FMGC.
Paul dit que c'est l'aire du rectangle FMGC qui est la plus grande.
Jacques dit qu'elles sont toutes les deux égales.
Qui a raison ?

Après une recherche individuelle, les élèves placés en groupe doivent rédiger collectivement une affiche.

Des explications et des réponses différentes peuvent apparaître sur une même affiche ou d'une affiche à l'autre :

- *Non, car en mesurant les côtés des rectangles, les calculs donnent des résultats différents.*
- *Oui, car en mesurant les côtés des rectangles, on obtient des résultats presque égaux.*
- *Oui, car aux deux grands rectangles égaux ABD et BDC, on enlève des triangles égaux (rare mais vrai).*
- *Oui, car les deux rectangles sont symétriques par rapport à (BD).*
- *Oui, car le rectangle AEMH est plus long, mai moins large que le rectangle MFCG.*
- *Non le rectangle AEMF est plus grand car il est plus long que l'autre.*

Le doute s'installe dans la classe. Un débat est nécessaire. Les arguments avancés s'appuient à la fois sur la lecture de la figure (avec ou sans mesurage) et sur les affiches réalisées. Il est important de montrer l'erreur d'argumentation surtout si la réponse "oui" est exacte. Il est parfois difficile de convaincre toute la classe de l'égalité des deux aires.

Après ce débat, une rédaction individuelle ou un test à partir de figures proches ou éloignées de la figure travaillée (rectangles, parallélogrammes, trapèzes...) fait souvent apparaître la persistance du doute de l'égalité. Il est intéressant de reposer la même question quelques mois plus tard...

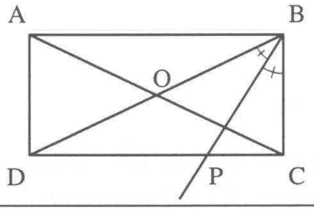
Cette activité de lectures de figures et d'écriture permet de retravailler une surface « puzzle » (voir la partie pleine, voir les morceaux ; ajouter, retrancher des surfaces sans obligatoirement calculer leur aire).

Stage apprentissage à la démonstration - IREM de Nantes

H - Réécrire une démonstration pour l'améliorer

« Il s'agit, en poursuivant l'initiation très progressive au raisonnement déductif commencée en 6e, de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples. »

L'objectif de ce travail est d'amener les élèves à améliorer leur rédaction d'une démonstration et non pas de les aider à trouver la solution du problème. Néanmoins, pour cela, ils seront bien sûr amenés à le chercher et donc à le résoudre.



ABCD est un rectangle

$\widehat{DBP} = \widehat{PBC} = 32°$

Montrer que $\widehat{DOC} = 128°$

Les élèves cherchent et rédigent individuellement l'exercice précédent qui a plusieurs solutions.

Une fiche est réalisée à partir de trois rédactions d'élèves (les textes choisis sont à améliorer, mais ils ne cumulent pas trop d'erreurs).

Voici 3 textes de solutions rédigés par 3 d'entre vous. Vous allez les corriger, les compléter afin d'obtenir une « bonne » rédaction.
Puis vous dégagerez les critères de ce que l'on peut appeler une bonne rédaction.

Le travail se fait en groupes de quatre élèves : cinq fiches sont distribuées, une par élève et une autre qui sera rendue, à la fin de la séance, au professeur ; les membres du groupe devant se mettre d'accord sur les corrections à apporter.

La liste des critères d'une « bonne » rédaction est déterminée à partir du travail des groupes. A partir de ceci une grille de relecture d'un texte de justification ou de démonstration (qu'il faudra éventuellement adapter aux différentes situations) peut être mise au point.

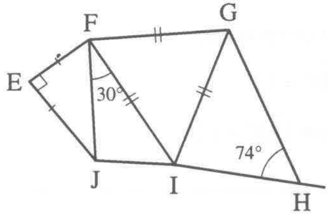
Chaque élève ayant à sa disposition sa première production rédige à nouveau le problème. Quand il a fini il est invité à vérifier si la liste des critères est satisfaite.

L'intérêt d'une telle activité est la succession : écriture, lecture critique, réécriture. En effet les professeurs savent combien il est difficile de faire corriger ou modifier par les élèves leurs propres productions.

"Des activités pour lire et pour écrire en mathématique" - IREM de Rouen

I - Une autre démarche pour apprendre à écrire une démonstration

Le professeur choisit quatre morceaux de textes-élèves, solutions du problème ci-dessous. Ce choix a été fait en fonction des erreurs contenues (un « donc » qui est faux ; des angles nommés seulement par une lettre ce qui crée des ambiguïtés ; des données supplémentaires utilisées ; les angles égaux d'un triangle isocèle mal repérés ...) et tel que la combinaison de ces textes permette de trouver une solution au problème, si elle ne l'a pas été.



$\widehat{EJI} = 151°$

Quelle est la valeur de $\widehat{GIH}$ sachant que les points J, I et H sont alignés ?

Après un travail individuel et une mise en commun orale, la solution d'un élève est distribuée à chacun. Celle-ci est juste mais elle est rédigée sans explication. La consigne suivante est donnée : « Comment l'améliorer en pensant que celui qui va le lire doit comprendre la démarche ? ». Individuellement puis en groupe, les élèves rédigent une solution mise sur un transparent.

Pendant le passage des transparents, les élèves notent ce qui va ou non et retiennent le texte qui leur convient le mieux. Un vote est fait, un texte est retenu (les élèves semblent reconnaître ce qui est attendu…le texte choisi est souvent celui qu'attend le professeur). Une solution est rédigée en classe entière, à partir de ce texte. Un élève remarque : « *Avec les transparents des autres, on a vu ce qu'il faudrait faire ou non.* »

Et de l'auteur du texte travaillé dit : « *En fait mon texte, c'est moi comprendre et toi pas comprendre.* »

Il est reconnu que trouver la solution est un préalable mais qu'il faut aussi apprendre à la communiquer. On commence à élaborer une fiche conseil « Pour rédiger…» .

Le travail suivant sur la rédaction a été fait sous une forme différente et beaucoup plus rapidement. Les élèves ont commencé par améliorer la rédaction d'une solution puis ont corrigé quelques erreurs ou maladresses « classiques » extraites des copies. La fiche conseil est complétée ou les points déjà rencontrés sont soulignés (comme connaître son cours …)

En parallèle, un travail sur les priorités de calcul était travaillé (voir prochain paragraphe).

A partir d'une recherche INRP en cours - IUFM Nantes

… dans les travaux numériques

A - Priorités de calcul

Quatre rédactions, aboutissant toutes à la solution, ont été écrites sur un transparent et projetées à la classe avec pour consigne :

« **Que pensez-vous des différentes rédactions de ce calcul :**
(26 – 6 × 2 – 2,6 × 2 + 6,2 × 6) **?** »

26 – 6 × 2 – 2,6 × 2 + 6,2 × 6 = 26 – 6 × 2 = 14 = 14 – 2,6 × 2 = 14 – 5,2 = 8,8 = 8,8 + 6,2 × 6 = 8,8 + 37,2 = 46	② 26 – 6 × 2 – 2,6 × 2 + 6,2 × 6 ② 26 – 12 – 5,2 + 37,2 ② 8,8 + 37,2 ② 46

Voir les deux autres rédactions page suivante.

$2 = 26 - 6 \times 2 - 2{,}6 \times 2 + 6{,}2 \times 6$ $2 = 26 - 12 - 2{,}6 \times 2 + 6{,}2 \times 6$ $2 = 26 - 12 - 5{,}2 + 37{,}2$ $2 = 14 - 5{,}2 + 37{,}2$ $2 = 8{,}8 + 37{,}2$ $2 = 46$	$6 \times 2 = 12$ $26 - 12 = 14$ $2{,}6 \times 2 = 5{,}2$ $14 - 5{,}2 = 8{,}8$ $6{,}2 \times 6 = 37{,}2$ $37{,}2 + 8{,}8 = 46$

Les élèves ont tout de suite remarqué que tous les calculs donnaient la bonne solution. Ils ont, là encore, pris conscience que trouver la solution n'était pas suffisant. La lecture de ces écrits a été déterminante.

A la suite des remarques des élèves une fiche « conseils » a été élaborée. Elle pourra, elle aussi, être prolongée.

Après l'élaboration des deux fiches conseils, le professeur fait remarquer qu'il existe des points communs entre les deux fiches issues de la géométrie ou du calcul :

- Partir des données ou réécrire le texte pour comprendre.
- Mettre des liens entre les phrases ou les calculs.
- Ne pas trop en mettre mais suffisamment pour se faire comprendre.

A partir d'une recherche INRP en cours - IUFM Nantes

B - Programmes de calculs

Voici un programme que tu appliqueras au nombre donné à la fin :

- Multiplie le par cinq.
- Ajoute 4 au résultat.
- Multiplie le tout par deux.
- Au dernier résultat obtenu, retire dix fois le nombre choisi au départ.
- Divise le tout par deux.

Applique ce programme au nombre 4. Que constates-tu ?
Recommence avec 15. Que conjectures-tu ?
Prouve ce résultat.

Quand on applique ce programme à 4 on obtient 4. Les élèves conjecturent que le programme donne le nombre de départ. En recommençant avec 15, ils s'aperçoivent que ce n'est pas vrai et ils commencent à être convaincus de l'intérêt d'utiliser une lettre. Ce qui n'avait pas été le cas pour des programmes faits précédemment et pour lesquels il n'y avait pas deux possibilités de conjecture.

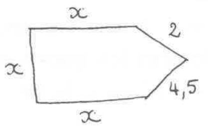
Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

C - Association équations et textes de problème

Il semble utile de familiariser les élèves avec des mises en équation, dès la classe de cinquième, et ceci avant même de passer à un travail effectif de mise en équation.

Les problèmes proposés peuvent également être résolus par d'autres méthodes, souvent plus courtes et qu'ils maîtrisent mieux. On ne peut leur imposer une démarche nouvelle qui leur semble moins efficace.

Et les programmes insistent sur la nécessité de privilégier le sens : « *La classe de cinquième correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens afin de ne pas aboutir à la mise en oeuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.* », d'où la nécessité de travailler sur des activités du type suivant.

> Parmi les textes de problèmes suivants, trouver ceux qui correspondent à l'équation : $3x + 6,5 = 33,5$
>
> 1) J'achète 3 stylos feutres et une gomme à 6,50F. Je paie 33,50F. Quel est le prix d'un stylo feutre ?
>
> 
>
>
> 2) Quelle valeur doit-on attribuer à x pour que le périmètre de cette figure soit égal à 33,5 ?
>
> 3) ....

Divers objectifs sont visés. Il s'agit d'abord de montrer qu'une même équation peut correspondre à plusieurs textes comportant des grandeurs de nature différentes (ceci peut expliquer aussi pourquoi on ne met pas les unités dans les équations).

D'autre part on peut aussi montrer que l'inconnue représente une grandeur liée à un objet, et non l'objet. Ainsi le travail n'est pas terminé lorsqu'on écrit « $x = ...$ » mais bien lorsqu'on est capable de passer de cette phrase mathématique à l'expression linguistique de la réponse.

IREM de Rouen

D - Ecrire un texte de problème correspondant à une équation donnée

> Ecris l'énoncé d'un problème qui correspond à l'équation $3x + 15 = 45$

L'objectif est toujours d'appréhender les équations par le sens plutôt que par la technique, de façon que l'élève comprenne les différents processus qui entrent en jeu lors d'une mise en équation, ceci afin d'éviter des comportements mécaniques dépourvus de sens.

IREM de Rouen

...dans les travaux d'organisation et de gestion de données

A - Trouver une échelle

Cette activité fait suite, entre autres, à une partie de l'activité « *Le camion* » décrite dans l'article « *Lire et Ecrire* » de la brochure « *Des Mathématiques en Sixième* ». Il est demandé de dessiner chaque face de l'objet agrandi 1,5 fois pour ensuite reconstituer l'objet.

Ce travail fait lui-même suite à ce qui se fait à l'école et il est l'occasion de revenir sur les différents sens des mots agrandir ou réduire.

En cinquième, après avoir fait un état des représentations initiales du mot « échelle » avec la technique "autour du mot", le professeur dit aux élèves que la suite de l'activité sera sur échelle « agrandissement-réduction ». Les autres sens du mot "échelle" sont ainsi évacués.

A partir de documents empruntés à l'histoire et géographie, à la technologie et aux sciences de la vie et de la terre, le professeur demande pour chacun des cas, de trouver s'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction puis de donner l'échelle correspondante (individuellement).

Puis par groupe de quatre, les élèves se mettent d'accord. Sur un transparent ou une affiche, ils notent leurs résultats, éventuellement les questions qu'ils vont poser pour mieux comprendre et une définition « d'une échelle ».
Voici des exemples de questions qui surgissent :

> Comment peut-on trouver une échelle sans grandeur réelle ?
> Existe-t-il beaucoup d'échelles ? Quelles sont les unités des échelles ?
> Comment trouver une échelle ?

Après la mise au point, pour vérifier que chacun a compris, un autre travail de ce type est réalisé individuellement à partir de nouveaux documents.

Les outils mathématiques dans les autres disciplines - IREM de Nantes

B - Fabriquer des graphiques

> Une famille dispose d'un revenu de 8 000 F par mois et consacre :
> 40 % à la nourriture, 15 % aux transports, 20 % pour le logement, 7 % aux loisirs, 7 % aux vêtements et le reste à l'énergie.
> Représente ce budget par le plus de méthodes possibles (sans calculer le montant de chaque rubrique).
> Calcule le montant de chaque rubrique et représente les par un diagramme circulaire.

En un premier temps de travail individuel, les élèves retrouvent, avec plus ou moins de bonheur, des graphiques déjà rencontrés.

En effet, les diagrammes en barres ne sont pas toujours dessinés avec des barres de même largeur, les diagrammes circulaires sont dessinés à peu près, les pourcentages sont parfois placés sur les axes dans l'ordre donné... Les élèves dessinent aussi des carrés de 10 cm de côté, des diagrammes bâton, des segments de longueur 10 cm.

Puis arrivent des créations : des disques dont les rayons sont 4 cm, 1,5 cm..., un secteur circulaire (ou un angle) faisant en tout 100°...

Les élèves présentent ensuite leurs solutions et posent des questions.

« On dessine les barres d'un diagramme en barres de la même largeur ou non ? Il y a proportionnalité entre quoi et quoi ?
Mais comment faire avec précision un diagramme circulaire ?
Pour la solution des disques, qu'est-ce qui représente les pourcentages ?
Pourquoi certaines représentations ont-elles été choisies ?
Que faut-il écrire sur le graphique pour qu'il soit lisible sans avoir recours à un texte extérieur ? »...

Les graphiques intéressants sont alors reproduits sur le cahier.

La deuxième partie, permet de reprendre la fabrication d'un diagramme circulaire et de faire réaliser que la représentation est la même quand on la fait à partir des pourcentages ou des valeurs.

Après avoir évalué l'aire de quelques disques à partir de comptages de carreaux sur feuille quadrillée 5×5, on peut faire représenter cette aire en fonction du rayon pour faire remarquer que, contrairement au périmètre comme cela avait été vu en sixième, l'aire n'est pas proportionnelle au rayon mais à son carré.

Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

C - Calculer un pourcentage à partir d'un document réel.

A partir d'un document de quatre pages de la prévention routière « *Les accidents à deux roues et les adolescents* », on donne la consigne suivante :

Observe et lis le document sur la sécurité routière dans l'agglomération nantaise.

A partir de ce document :

1) Calcule le pourcentage d'accidents en 2 roues légers (à bicyclette, à moto ou à mobylette) liés aux jeunes de 18 à 25 ans.

2) Calcule le pourcentage d'accidents à bicyclette, le pourcentage d'accidents à moto et le pourcentage d'accidents à mobylette qu'ont eu les jeunes de 18 à 25 ans par rapport aux accidents à deux roues qu'ils ont eu.

A partir des pourcentages obtenus, représente ces accidents par un diagramme circulaire.

3) Calcule le pourcentage d'accidents qu'ont eu les jeunes de 18 à 25 ans en sorties nocturnes des week-end et fêtes.

Cette activité demande de retrouver des informations à partir d'un document réel et complexe, de faire des lectures croisées et des interprétations entre des ordres de grandeurs et des valeurs réelles, des valeurs réelles et des diagrammes.

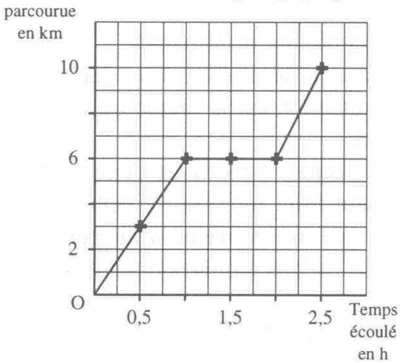
C'est aussi l'occasion de mettre en évidence, auprès d'adolescents, des statistiques qui les concernent.

Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

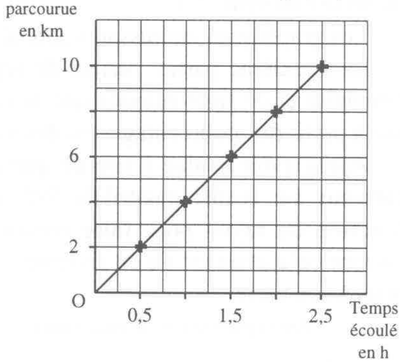
D - Lire un graphique pour faire un tableau et pour extraire des informations

Dimanche dernier, Georges et Christian sont partis en même temps pour faire une même randonnée.
Voici ci-dessous les graphiques qui traduisent le parcours de chacun.

Parcours de Georges : graphique 1



Parcours de Christian : graphique 2



1) Traduis les données, représentées par des croix, du graphique **1** par un tableau. Puis, fais de même pour le graphique **2**.
2) Observe les graphiques et les tableaux.
   a) Que constates-tu ?
   b) Décris le déplacement de chacun.

---

3) Au fait, à quelle distance du départ Christian était-il au bout de 15 minutes ? De 45 minutes ?
4) Combien de temps lui a-t-il fallu pour faire 7 km ? 8,2 km ?
5) Et si Christian continuait à marcher à la même vitesse, quelle distance aurait-il parcourue en 3 h 15 min ? 4,25 h ?

On donne les deux premières questions de l'activité à chercher individuellement.

Ce travail oblige à une lecture croisée entre un graphique et un tableau.

Puis par groupe de quatre, après avoir mis en commun leurs résultats, les élèves notent la réponse sur laquelle ils se sont mis d'accord sur un transparent.

Après l'étude des transparents en classe entière, un certain nombre de points sont retenus permettant :
- de faire réaliser aux élèves que ces graphiques ne sont pas des descriptions du terrain « çà monte, puis c'est plat...»,
- de définir dans quel cas la distance parcourue est proportionnelle au temps,
- de faire émerger le coefficient de proportionnalité correspondant,
- de définir "mouvement uniforme et vitesse constante".

On donne alors la deuxième partie de l'activité à chercher individuellement, puis par deux.

Ce qui permet à la suite d'un débat de montrer :
- Que l'on peut utiliser la proportionnalité entre deux grandeurs :
* pour trouver, par une lecture de graphique, **rapidement** des résultats qui sont parfois **approchés**,
* pour obtenir, par **le calcul**, des valeurs **exactes**.
- Comment passer de durées données dans le système décimal à des durées dans le système sexagésimal et réciproquement.

Enseigner les mathématiques autrement au cycle central - IREM de Nantes

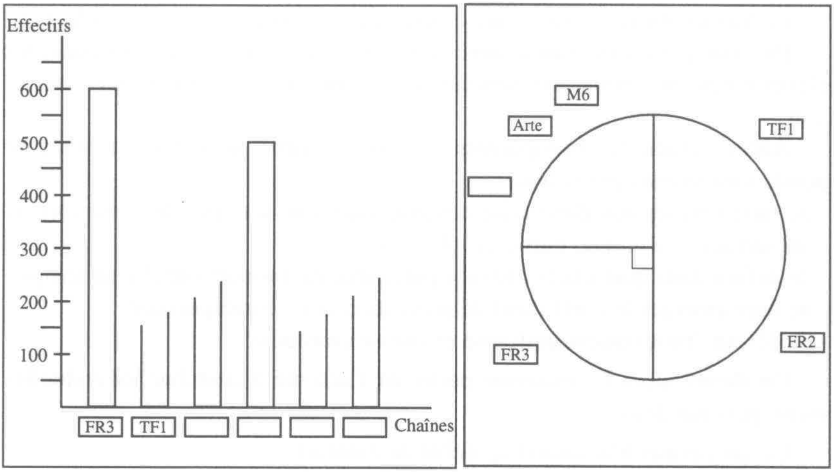
E - Une activité de lectures croisées non linéaire : "les téléspectateurs et l'audimat"

Compléter le texte, le tableau et les deux graphiques

chaînes	FR3		C+				Total
effectifs							
pourcentages				20%			
angles			54°				

Sur .... personnes ayant regardé la télé samedi soir, ... ont regardé TF1, ...% ont regardé FR2, 600 ont regardé ...., ...% ont regardé ...., les deux autres chaînes ont eu le même nombre de spectateurs.

graphiques page suivante



C'est une activité de réinvestissement.

Les informations importantes étant dispersées, une lecture complète mais non linéaire est obligatoire pour répondre aux questions. Le texte est long, l'activité suffisamment complexe pour que les élèves s'impliquent. Les élèves travaillent seuls puis par deux. Les démarches sont multiples (passage obligé « FR3 »).

C'est une occasion de faire remarquer qu'une lecture sur le graphique est rapide, mais n'est pas sûre (480 spectateurs peut être obtenu par le calcul).

Stage apprentissage à la démonstration - IREM de Nantes

Conclusion

En cinquième, il y a beaucoup d'occasions de faire « lire et écrire », chacune d'elles permettent d'avancer dans la construction des connaissances liées au programme et dans la construction du sens mathématique.

Les propositions faites dans cet article ne sont pas des activités uniquement destinées à apprendre à lire et à écrire en mathématique. Les exemples choisis correspondent à un contenu donné, ils peuvent être remplacés par d'autres en fonction des notions mathématiques visées.

A travers ces activités, d'une part, des notions comme déduction, contre-exemple, propriété caractéristique ... sont travaillées ; d'autre part, dans chacune d'elles, nous avons essayé de créer des conditions pour que les élèves deviennent ensuite plus critiques par rapport à leur production personnelle.

Si ces propositions sont presque toutes axées sur l'écriture, ce n'est pas que la lecture soit oubliée, elle est évidemment, sans cesse, présente. Lecture et écriture sont toujours associées, l'élève lit pour écrire, lit ce qu'il a écrit, ce que les autres ont écrit. La lecture est un outil, la production d'écrit est un support à faire évoluer.

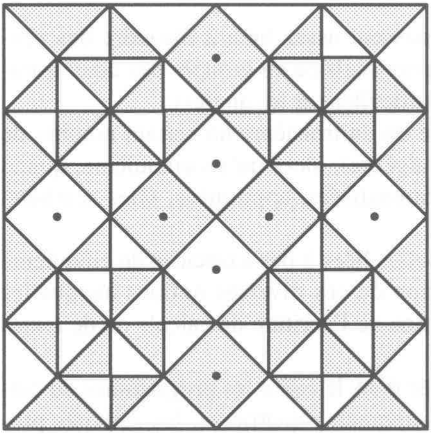
Dans nos classes, les élèves réussissent assez bien à résoudre des problèmes à plusieurs étapes et donc à écrire seuls ou en groupes des démonstrations « d'élèves de cinquième » (en particulier sur les angles).

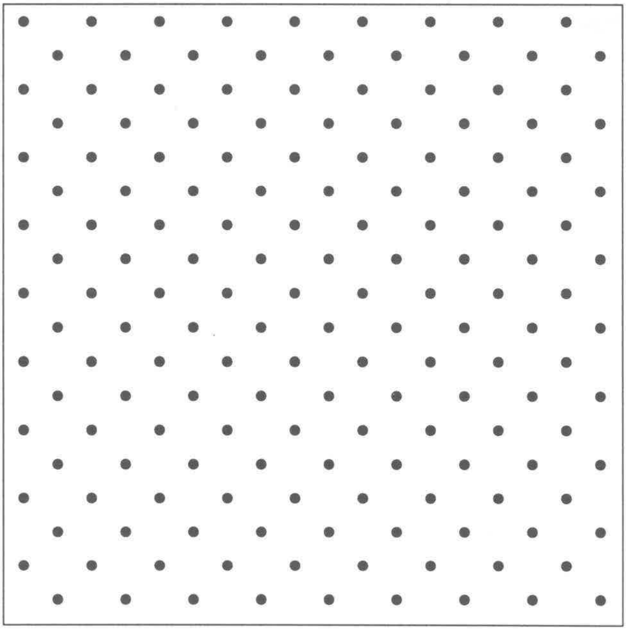
Pourtant on constate en quatrième ou en troisième un certain nombre de difficultés (en géométrie comme en algèbre), alors qu'en cinquième, quand ces notions sont enseignées, institutionnalisées, appliquées, elles semblent « passer » assez facilement.

Les difficultés de quatrième sont-elles liées à des exercices de cinquième « sans épaisseur » ou à l'accumulation de ces diverses notions auxquelles s'ajoutent des difficultés de structuration de l'écriture de calculs ou de textes géométriques ?

La réflexion que nous avons menée dans le cadre les programmes de cinquième s'inscrit dans une continuité cinquième-quatrième, les activités proposées ici nous paraissent avoir suffisamment de richesse pour constituer une base.

Pour quelques carrés de plus...





Reproduction autorisée !!

Initiation au raisonnement déductif en géométrie

Michèle MARTIN, Colette MERCIER, Paulette MOULI,
Maurice MOULY
IREM de Toulouse

1. Introduction

Initier les élèves au raisonnement déductif en géométrie c'est les préparer à la fois, à élaborer des justifications répondant à des critères spécifiques aux mathématiques et à communiquer ces justifications par écrit.

Dans cet article nous proposons, en nous appuyant sur les programmes de l'école primaire et du collège, et sur des travaux d'élèves, de mettre à jour et d'analyser les difficultés et obstacles rencontrés par les élèves dans les toutes premières phases de l'apprentissage de la justification en géométrie. Parallèlement nous proposerons des activités favorisant cet apprentissage.

2. Passage d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction

C'est dans le cadre d'une géométrie d'observation, à l'école primaire et au collège, que se construisent les premiers savoirs et savoir-faire en géométrie. Progressivement, à partir de la classe de sixième, la géométrie déductive enrichit et réorganise ces savoirs.

Il est important d'analyser tout d'abord les apports de ces deux démarches dans la construction des connaissances pour situer clairement les continuités et les ruptures. Face à une tâche, les élèves doivent en effet reconnaître, sans ambiguïté, le cadre dans lequel elle se situe (observation ou déduction) et les méthodes à mettre en œuvre pour la réaliser.

Apports et limites de la géométrie d'observation

Les apprentissages initiaux, particulièrement à l'école primaire, ont essentiellement pour objectif la reconnaissance par la vue de figures et de configurations. Les activités de reproduction, construction et transformation mises en œuvre ne visent pas uniquement à l'acquisition de compétences de tracé et de maniement d'outils. Elles permettent aussi la construction d'images mentales d'objets géométriques usuels. Ces images mentales sont un premier niveau d'abstraction indispensable pour que les élèves puissent identifier ces objets et leurs propriétés dans des positions variées et des environnements complexes.

Conjointement des activités de description de figures permettent l'appropriation par les élèves du vocabulaire précis donné par les programmes.

Toutes ces activités tiennent compte du développement psycho-cognitif de l'élève qui perçoit encore les figures de façon globale, c'est-à-dire que les propriétés repérées ont pour lui un caractère de simultanéité. A ce stade ils n'établissent entre elles, ni chronologie, ni relation de type déductif.

Dans ce contexte, justifier une affirmation consiste à expliciter une démarche comparative, de type descriptif, entre l'image mentale qu'ils ont de l'objet géométrique et la figure à identifier. Ces comparaisons mettent en œuvre des mesures, des pliages, des outils (équerre, compas, calque,...) qui, dans le cadre de la géométrie d'observation ont le statut de preuve, alors qu'ils auront seulement le statut de vérification dans la géométrie déductive !

Les justifications données sont du type "c'est un losange parce qu'il a ses côtés égaux, pas d'angle droit et posé sur un sommet".

Les images mentales sont donc souvent des savoirs imparfaits. Les conditions de l'apprentissage - regroupements distincts d'objets de même forme, ou leur représentation dans des positions privilégiées - induisent des propriétés parasites.

La reconnaissance par la vue doit donc être complétée, dès la classe de sixième, par la caractérisation par des propriétés. L'élève doit devenir capable de sélectionner dans cette figure des indices pertinents à deux titres :
- ils ont un statut de données (hypothèses) ;
- Ils sont choisis en fonction de la construction ou de la déduction attendue.

C'est là que se situe le passage à la géométrie déductive.

Motiver, en géométrie, le passage de l'observation à la déduction

L'élève doit adhérer à ce changement, et pour cela, il doit en éprouver la nécessité. Il faut donc l'amener à s'interroger, dès le début de la sixième et pendant toute sa scolarité, sur la validité de résultats obtenus à partir d'observations. "*Les études expérimentales (calculs numériques, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et de donner du sens aux théorèmes.*" *(cf. présentation des programmes du cycle central du collège).* A cette fin on peut par exemple :
- projeter des illusions d'optique (cf. Illusions d'optique au rétroprojecteur - IREM d'Orléans) ;
- choisir de faire réaliser des constructions aux conclusions trompeuses ou incertaines (exercices 1,2,3,4). Ces exercices sont en rupture avec des exercices de réinvestissement de propriétés établies ou de découvertes de propriétés nouvelles. **Leur objectif est de faire prendre conscience aux élèves qu'observer une figure ne permet pas d'établir des certitudes et**

que l'on doit se limiter à émettre des conjectures ;

- proposer des exercices montrant qu'utiliser des données dans un calcul ou un raisonnement permet de lever des doutes (exercices 5, 6, 7 et 8) ;
- faire comparer ces deux types d'activités qui correspondent à deux moments d'une démarche scientifique : le temps de l'observation qui débouche sur un questionnement et le temps de la validation qui permet d'établir des réponses.

<u>Organisation de ces activités.</u> Ces exercices doivent être l'occasion de confrontations de résultats et de débats, en petits groupes ou en groupe classe. Pour chacun des exercices, il faut donc prévoir :

- un temps individuel, chaque élève fait la figure et répond par écrit à la question posée ;
- ensuite, par groupes de quatre, les élèves comparent leurs résultats et rédigent sur transparent leurs principaux points d'accord et de désaccord pour les communiquer à la classe ;
- enfin, en classe entière, échange à partir des transparents.

<u>Objectifs de ces échanges.</u> Ce sont des moments privilégiés pour amener les élèves à :

- percevoir la différence entre conjecturer et affirmer et s'approprier ce vocabulaire ;
- apprivoiser le doute et le sentiment d'insécurité qu'il suscite ;
- se mettre en projet par rapport à l'acquisition de nouvelles connaissances qui permettront le passage de la conjecture à la démonstration, du doute à la certitude.

Exercice 1

a- Construire un triangle IAB, isocèle en I, tel que AB = 4 cm et IA = 2,2 cm. Tracer la perpendiculaire (Δ), en A, à [AI] et la perpendiculaire (Δ'), en B, à [BI] et appeler K leur point d'intersection.

b- Mesurer KA et KB. Que pensez-vous de ces longueurs ?

Exercice 2

Tracer [TS] de longueur 9 cm et d'un même côté de la droite (TS) les angles $\widehat{STx} = 15°$, $\widehat{TSy} = 150°$.

Appeler U le point commun de [Tx) et [Sy). Mesurer le segment [US].

Que pensez-vous des segments [US] et [TS] ?

Exercice 3
a- Tracer un parallélogramme MNPQ et, à l'extérieur de ce parallélogramme, [Mu) telle que $\widehat{MNu} = \widehat{NQP}$ et [Pv) telle que $\widehat{NPv} = \widehat{QNP}$.
b- (Mu) et (QP) se coupent en L et (Pv) et (MQ) en F. Que pensez-vous de [LP] et [MF] ?

Exercice 4
a- Construire un cercle de centre K et de rayon 5 cm et deux cordes [AB] et [AC] de ce cercle, mesurant respectivement 4 cm et 2,5 cm. La perpendiculaire (Δ) en B à [AB] et la perpendiculaire (Δ') en C à [AC] se coupent en E. Que pensez-vous de E ?
b- Même question avec deux cordes [AB] et [AC] dont vous choisirez les longueurs.

Exercice 5 (avant la symétrie centrale)
Tracer un rectangle MNPQ tel que MN = 12 cm et QM = 4 cm. Le cercle de centre M et de rayon MQ et le cercle de centre P et de rayon NP coupent [MP] respectivement en E et F.
Quelle conjecture peut-on faire pour [QE] et [NF] ?
Trouver d'autres conjectures relatives à cette figure.

Ces activités sensibilisent les élèves à la différence de statut entre :
- d'une part les mesures données par l'énoncé, communes à tous les élèves, traduites par des **égalités** "AB = 4 cm", des **déductions** "IB = 2,2 cm", des **affirmations** "IAB est isocèle" ;
- d'autre part les mesures effectuées sur la figure, soumises aux imprécisions de tracé et de lecture, traduites par le **symbole** ≈ "US ≈ 9 cm" et des énoncés de **conjecture** "TUS semble être isocèle" ; "E semble appartenir au cercle".

Elles permettent aussi de les habituer à conjecturer. Cependant il est important de souligner le caractère provisoire de ces conjectures ; ultérieurement on aura les moyens de les justifier et on pourra les énoncer comme des affirmations.

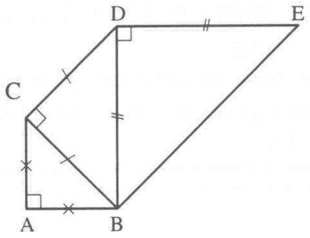
Exercice 6

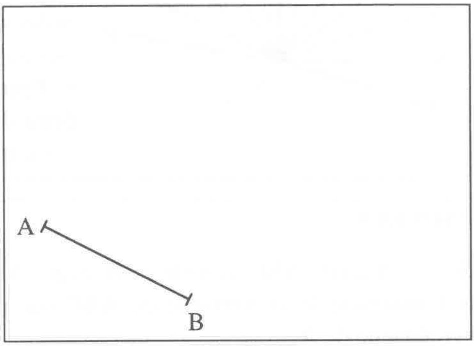
a- Utiliser les données codées sur la figure pour la reproduire dans le cadre ci-dessous, en utilisant les points A et B déjà placés dans ce cadre.

b- Trouver des segments parallèles et justifier votre réponse.

c- Mesurer les longueurs AB et BD. Les résultats que vous obtenez vous permettent-ils de conjecturer une comparaison simple entre ces longueurs ?

d- Mêmes questions pour CD et BE.

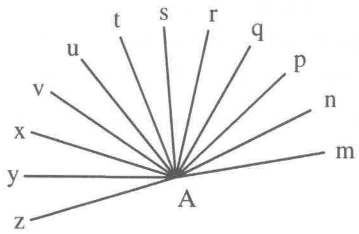




L'objectif de cet exercice n'est pas, à ce moment de l'apprentissage, la rédaction de la démonstration de BD = 2 × AB et BE = 2 × CD. L'objectif est de mettre les élèves en situation d'éprouver la supériorité du raisonnement, non seulement pour convaincre, mais aussi pour établir la comparaison des longueurs. En effet, après avoir obtenu les valeurs approchées de AB et BD le plupart des élèves ne “voient” pas de conjecture à leur sujet. La figure semble être perçue comme un objet figé et hermétique. Par contre, demander d'évoquer les connaissances associées au codage, induit une analyse de la figure porteuse de sens, lui confère un statut d'objet dynamique : les associations triangle rectangle isocèle / demi-carrés / carrés ACFB et CDGB conduisent aux comparaisons demandées.

Cet exercice permet de faire prendre conscience aux élèves de la différence entre **observation passive** de la figure, basée sur un repérage visuel, et une **observation active** qui consiste à interpréter la figure à partir de données et de connaissances associées.

Exercice 7



La figure ci-contre a été obtenue en traçant un angle $\widehat{mAn} = 17°$ puis en reportant au compas 11 nouveaux angles de 17°.

a- Faire la même figure avec $\widehat{mAn} = 15°$ et en reportant 11 fois cet angle au compas.

b- Peut-on faire une remarque pour les demi-droites [Am) et [Az) ? Justifier votre réponse.

Exercice 8

Soit un triangle ABC, isocèle en B, ayant $\widehat{ABC} = 120°$ et AB = 5 cm.

a- Construire le symétrique de ABC par rapport à (BC) et appeler E le symétrique de A.

b- Construire le symétrique de ABEC par rapport à (EC) et appeler K et S les symétriques respectifs de B et A dans cette symétrie.

c- Que peut-on dire des droites (AC) et (CK) ? (BC) et (CS) ? des points A, B, K et S ? Justifier vos réponses.

Exercice 9

a- Construire un losange IJKL et les médiatrices de ses côtés. Les points d'intersection de ces médiatrices sont les sommets d'un quadrilatère. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

b- Même question en remplaçant "losange" IJKL par "parallélogramme" IJKL.

L'observation ne permet pas de répondre aux questions telles que "[Am) et [Az) sont-elles opposées ? A, B, K et S sont-ils alignés ?" (exercices 7 et 8). Seul le calcul permet d'établir une certitude. Dans l'exercice 9, chaque élève peut observer, dans le cas de la figure qu'il a réalisée, la nature du quadrilatère formé par les médiatrices : mais c'est la mise en œuvre des propriétés des symétries qui permet de prouver que ce résultat est général.

Spécificité de l'argumentation mathématique

Cependant éprouver la nécessité de justifier ne suffit pas ; il faut aussi que les élèves découvrent la structure de l'argumentation mathématique.

L'argumentation qu'ils élaborent, par exemple, pour obtenir de leurs parents l'autorisation de regarder la télévision, n'est pas construite comme une démonstration :
- une surabondance d'arguments peut rendre plus convaincant ;
- on peut argumenter avec des promesses, c'est-à-dire avec d'éventuelles conséquences.

Ils sont heureusement très conscients que l'argumentation est bâtie en fonction de celui à qui elle s'adresse : leurs parents, par exemple, ne sont pas toujours sensibles aux mêmes arguments !

Donc ils sont prêts à s'adapter aux règles de l'argumentation mathématique - **on argumente avec des données, en nombre minimum, et avec des connaissances institutionnalisées** - si ces règles sont clairement définies et sont objet d'apprentissage.

3. Activités mettant en jeu des compétences indispensables à la pratique de la déduction

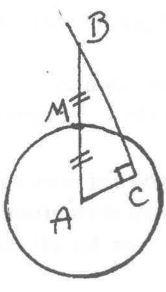
Compléter une liste de données et reproduire une figure à partir de ces données

Compétences essentiellement visées : reconnaître et expliciter les données codées sur une figure ; établir une chronologie.

Exercice 10

a- Compléter la liste des données par celles qui sont codées sur les figures à main levée ci-dessous.

b- Construire ces figures en vraie grandeur et écrire les étapes des constructions mises en œuvre.



Données

A centre du cercle

AC = 2 cm

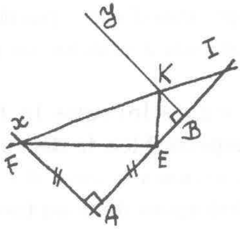
AB = 7 cm

Réponse élève

AB = 7,5 cm

[AC] ⊥ [BC]

MA = MB



Données

AB = 3,5 cm

AE = 2 cm

KB = 1,2 cm

I ∈ [FK) et

I ∈ [AB)

Réponse élève :

[Ax] ⊥ [AB]

[By) ⊥ [AB)

[FE] ⊥ [KE]

[Ax) // [By)

Bien que les figures à main levée soient un moyen de signifier la rupture entre ce type d'exercices et la reproduction copie conforme d'un modèle, les habitudes élèves consistant à prélever sur ces modèles des informations de leur choix sont tenaces. La construction d'une figure correspondant aux données étant ici liée à la mise en œuvre d'une chronologie pertinente, les élèves sont amenés :
- à remettre en cause le statut de donnée qu'ils ont attribué :
  * à la mesure $AB \approx 7{,}3$ cm
  * à la perception visuelle $[FE] \perp [EK]$
  * à la déduction $[Ax) // [By)$;
- à préciser la traduction de M milieu de [AB] par $MA = MB$ associé à $M \in (AB)$.

Mettre en cohérence figures, données, déductions et énoncés de théorèmes

<u>Compétences essentiellement visées</u> : maîtrise et mémorisation des théorèmes.

Qu'entendons-nous par "maîtrise d'un théorème" ? Un élève peut avoir mémorisé un théorème sans avoir accédé à son sens, car celui-ci est lié à sa fonction. Le savoir institutionnalisé, traduit par l'énoncé du théorème, est en effet indissociable de la déduction qu'il permet de réaliser. Ce savoir n'est donc acquis que s'il est opérant, c'est-à-dire s'il peut être mobilisé et investi dans des séquences déductives.

L'élève doit donc à la fois, avoir une bonne représentation des tâches de déduction et savoir analyser les énoncés des théorèmes et des exercices, pour en extraire les données et les déductions.

Il peut être nécessaire d'expliciter la tâche en utilisant des exemples hors du cadre mathématique. Par exemple s'il y a des empreintes d'ours sur la neige tombée deux heures auparavant alors je peux en déduire qu'un ours est passé là depuis deux heures au plus.

Données : empreintes d'ours - pas de chute de neige depuis 2 heures.

Déduction : un ours a effectué un passage au cours des deux dernières heures.

Cependant, même **lorsque la formulation des théorèmes en "si...alors..." respecte bien le découpage "si données alors déduction"** (ce qui n'est pas toujours le cas), **il convient de s'assurer que les élèves savent bien les distinguer dans un théorème**.

Les réponses des élèves à l'activité ci-dessous montrent qu'il y a des confusions, en particulier lorsque l'élève :
- en est au stade de la perception globale des figures (élève A),

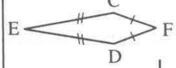
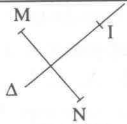
- éprouve des difficultés à analyser, ou restituer, des phrases trop denses pour lui (élève C),
- ne finalise pas le théorème : déduction non reliée aux données ou confusion entre répétition, reformulation et déduction (élèves B et D).

<u>Activité de restitution de connaissances</u> :

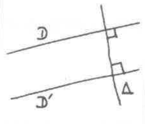
Avant cette activité, les connaissances relatives aux théorèmes ont été structurées sous forme de tableaux (cf. ci-dessous) élaborés par les élèves avec l'aide de leur professeur. Toutes les cases des tableaux ont alors été remplies et un jeu de deux couleurs a permis de repérer les données et les déductions exprimées dans les différents langages : codage des données, si possible, sur la figure / notations / phrases.

Deux séances sont consacrées ensuite, à des moments différents de l'année de sixième et de l'année de cinquième, à la reconstitution de ces tableaux par les élèves. En un premier temps, les élèves complètent un tableau partiellement rempli (exercice 11). Ensuite, par petits groupes, ils relèvent les réussites et les erreurs des réponses fournies par quatre élèves. Ces réponses (reproduites à la suite de l'exercice 11) sont choisies par le professeur en fonction de l'intérêt des échanges qu'elles pourront susciter lors d'un troisième temps de mise en commun.

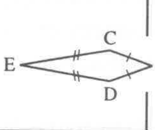
Exercice 11 : Complète les cases vides à partir des cases déjà informées de la même ligne.

Figures	Données	Déductions	Théorèmes
			Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, toute droite (Δ) perpendiculaire à l'une (D) est alors perpendiculaire à l'autre (D').
			
			Si un point I est sur la médiatrice Δ d'un segment [MN], alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

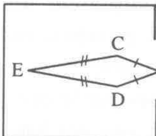
Réponse de l'élève A

	$D // D'$ $D \perp D'$ $D \perp D$	$D' \perp \Delta$	Si 2 droites D et D' sont parallèles, toute droite Δ perpendiculaire à l'une D est alors perpendiculaire à l'autre D'

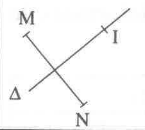
Réponse de l'élève B

	$EC = ED$ $CF = FD$	(EF) est médiatrice de [CD]	Si une droite coupe un segment en son milieu alors elle est médiatrice de ce segment

Réponse de l'élève C

	$EC = ED$ $CF = FD$	(EF) médiatrice de [CD]	Si un segment à un point équidistands des extrémités d'une droite alors elle est médiatrice de ce segment.

Réponse de l'élève D

	$IM = IN$	M et N sont équidistants de I	Si un point I est sur la médiatrice Δ d'un segment [MN], alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Autres propositions d'activités

Appropriation d'expressions mathématiques (reformulation, passage d'un langage à un autre, déduction) dès la sixième.

<u>Compétences visées</u> : production de sens et organisation des connaissances en îlots déductifs.

Exemple : l'écriture "OA = OB" doit être associée à "O est équidistant de A et B" ; "O est centre d'un cercle passant par A et B" ; "O appartient à la médiatrice de [AB]. Ces propriétés caractérisent des points O, A, et B qui peuvent être alignés ou non. Par contre "OAB est isocèle de sommet O" caractérise des points O, A, B non alignés et "O est le milieu de [AB]" signifie à la fois "OA = OB et O ∈ [AB]".

Classer des listes de propriétés dans l'ordre déductif ou les placer dans un organigramme (en cinquième)

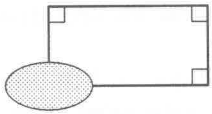
Compétence visée : analyse de relations de cause à conséquence et leur justification.

Exercice 12 : construire deux triangles isocèles ABK et ABL de base [AB]. a- Classer dans l'ordre déductif (c'est-à-dire, données puis déductions successives) toutes les affirmations suivantes : - (LK) est la médiatrice de [AB], - ABK et ABL sont isocèles de base [AB], - (LK) $\perp$ (AB) et H et H milieu de [AB], - KA = KB et LA = LB. b- Enoncer le théorème permettant de justifier l'une des déduction au choix.

Expliciter les propriétés associées aux constructions de figures simples (en sixième).

Compétence visée : caractérisation d'objets mathématiques.

Amener les élèves à prendre conscience qu'on peut construire un rectangle en utilisant 3 fois une équerre est une aide à la compréhension de l'énoncé "si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle".



Même si un nuage* cache le quatrième sommet du quadrilatère on peut affirmer que c'est un rectangle, que son quatrième angle est droit, et le justifier.

* L'emploi de caches ou de figures incomplètes dans un cadre imparti, est un moyen de signifier qu'on ne se situe pas dans une géométrie d'observation.

4. Réguler l'apprentissage de la démonstration par l'analyse de productions d'élèves, par les élèves.

Exercice 13 : Tracer un segment [AB] de 5 cm ; construire deux triangles isocèles IAB et JAB, de base [AB] ayant IA = 3 cm et JA = 7 cm. 1- Ecrire la liste des données. 2- Que pensez-vous de (IJ) ? Justifier votre réponse.

Déroulement de l'activité en trois étapes.

Premier temps : l'exercice ci-dessous a été donné à deux classes de cinquième, en travail individuel sur feuille, en classe, en décembre. (58 élèves - durée 20 min.).

Séquence suivante : deuxième et troisième étape. Par groupe de quatre, relever les réussites et les échecs des extraits de copies photocopiés dans le tableau page suivante - durée 20 min. (extraits représentatifs de l'ensemble des productions des élèves). Enfin confrontation des réponses classe entière - durée 30 min.

Au cours de cette séquence, les élèves se sont posés les questions suivantes :

a - Écrire IA = IB, est-ce écrire une donnée ou une déduction ?

b - Que faut-il coder dans une figure ?

c - Pourquoi le théorème "si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu alors elle est médiatrice de ce segment" n'est-il pas adapté à ce problème ?

d - La démonstration attendue était-elle à un ou deux pas (fallait-il énoncer un ou deux théorèmes ?) ?

Question a : la frontière entre reformuler une idée et déduire n'est pas parfaitement tranchée et ce qui peut être considéré comme une déduction, à justifier, en début d'apprentissage peut être ultérieurement assimilé à une reformulation.

A ce stade, qui est celui de l'initiation, pour éviter toute confusion il nous semble préférable de poser, comme principe de base, qu'écrire une liste de données, c'est recopier les informations telles qu'elles sont libellées dans l'énoncé, ou en utilisant les symboles correspondants.

Question b : Dans chaque classe des élèves ont signalé que "si l'on code tout, on ne sait plus très bien ce qu'il faut justifier". Deux suggestions ont été faites :

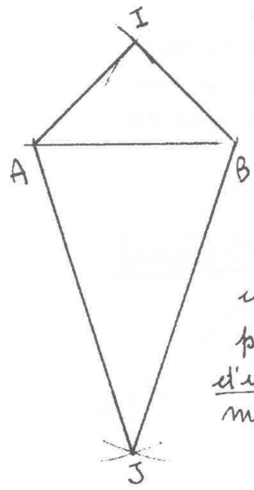
- ne coder que les données,
- ou utiliser des codages de couleurs différentes pour les données et les déductions.

Question c : en explicitant leur choix les élèves ont pu évacuer des représentations fausses et préciser des connaissances.

En effet pour certains élèves la propriété qui est visuellement plus opérante pour reconnaître une médiatrice est la perpendicularité au milieu du segment. Ils la considèrent donc aussi plus convaincante pour justifier. Expliciter et confronter les raisons de leurs choix les a aidés à différencier une démarche liée à l'observation - on identifie un objet mathématique avec les propriétés qui "sautent aux yeux" - et la démarche déductive - ces propriétés ne servent à justifier que si elles sont des données.

Question d : le point de départ de la justification étant les données "IAB et JAB isocèles de base [AB]" il fallait expliciter l'égalité des côtés. Cette étape est apparue d'autant plus nécessaire que six élèves ont fait une déduction erronée (cf. la copie de Michaël). Il était donc préférable de rédiger une démonstration à deux pas :

triangles isocèles de base [AB] → Premier pas → IA = IB et JA = JB → Deuxième pas → (IJ) médiatrice de [AB]



Guillaume

1°) Données

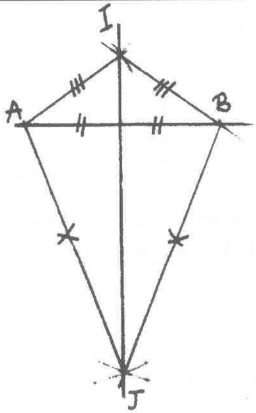
AB = 5 cm

IAB } isocèles
JAB

IA = 3cm

JA = 7cm

2°) (IJ) est la mediatrice de [AB] car si une droite possede deux points equidistants des extremités d'une droite alors elle est mediatrice de ce segment



Elodie

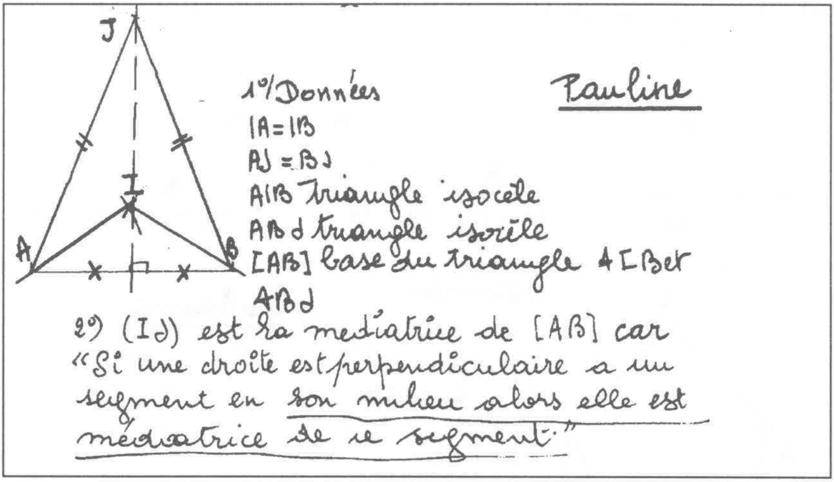
1° données

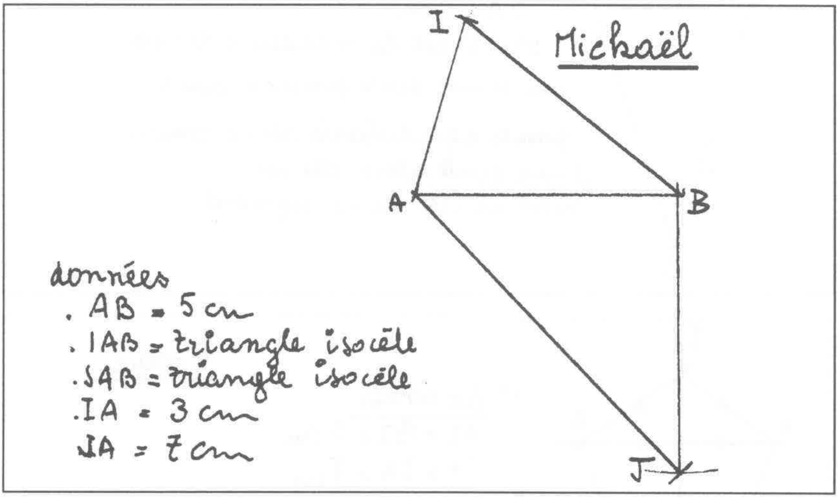
AI = BI = 3 cm

JA = JB = 7 cm

[AB] = 5 cm.

2°) (IJ) est mediatrice du segment [AB] car si un point est equidistant des extremités d'un segment alors elle est mediatrice de ce segment.





C'est en jouant, et à l'occasion d'échanges entre joueurs, que l'on s'approprie progressivement les règles d'un jeu. Le rôle de l'enseignant est donc de proposer des séquences déductives sollicitant alternativement toutes les connaissances à maîtriser.

Il est particulièrement important de veiller à ce que des propriétés plus prégnantes n'en éclipsent pas d'autres. Ceci conditionne en effet, pour l'élève, l'accès au choix de la propriété pertinente.

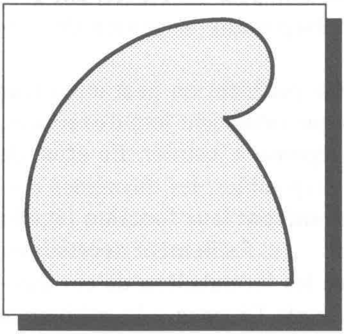
Dans le problème proposé ci-dessus, la construction de I et de J au compas aurait dû attirer l'attention des élèves sur la propriété d'équidistance. Mais pour certain, cette construction est un automatisme dont il faut régulièrement réactiver le sens afin que l'équidistance soit, pour les élèves, une propriété caractéristique aussi opérante que l'orthogonalité au milieu du segment.

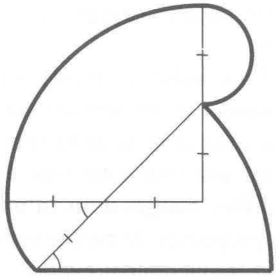
Pour aider les élèves à choisir le théorème pertinent on peut aussi leur demander de récapituler sur des fiches, ainsi que oralement lors d'exercices, tous ceux dont la déduction correspond à la réponse à justifier. En effet, de même que tout autre type d'outils, pour être disponibles, les théorèmes doivent **être rangés dans la mémoire des élèves suivant leur fonction** (établir des propriétés de parallélisme, d'orthogonalité ...) et **facilement accessibles**, donc fréquemment évoqués. Ceci suppose que les formulations de ces théorèmes soient fonctionnelles. Adapter par exemple l'énoncé « la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points situés à égale distance des extrémités d'un segment » à des questions de type direct ou réciproque ne relève pas de la compétence d'un jeune élève de collège. Les programmes insistent d'ailleurs sur la nécessité de formuler deux énoncés séparés.

5. Conclusion

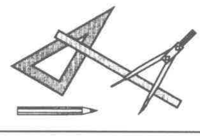
La géométrie déductive met donc en jeu des compétences spécifiques : reconnaissance et tri de données - liaison entre ces données, les connaissances et la déduction à établir. Mais ces compétences ne peuvent se développer qu'en interaction avec de nombreuses autres, en particulier avec les compétences de mémorisation à long terme, de traitement de l'information sous toutes ses formes (langue usuelle et langage mathématique, symboles, figures, codages) et de communication. Les débats entre élèves stimulent et motivent le développement de ces compétences, favorisent l'appropriation progressive des structures du raisonnement déductif, et préparent à la mise en forme rigoureuse de démonstrations écrites.

Le bonnet phrygien





Reproduis le bonnet en t'aidant de la figure codée.



Argumentation démonstration en cinquième

groupe "Du raisonnement à la démonstration"
IREM d'Orléans

1. Les programmes.

D'après les nouveaux programmes de Collège, une véritable activité mathématique consiste à :

1. identifier un problème,
2. conjecturer un résultat,
3. expérimenter sur des exemples,
4. bâtir une argumentation,
5. mettre en forme une solution,
6. contrôler les résultats obtenus,
7. évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.

Programmes et instructions insistent sur la nécessité d'habituer les élèves à raisonner et à conjecturer. Il faudra donc leur proposer des situations dans lesquelles une hypothèse émise ne peut pas être acceptée sans avoir été prouvée par une suite d'arguments qui prend, petit à petit, la forme d'une démonstration. A ces situations de conjectures, on doit associer des formes linguistiques qui traduisent l'incertitude : il semble que ... , on dirait que ...

Quand l'élève émet une conjecture, elle peut déboucher sur deux types de situations :

- la conjecture est fausse et, dans ce cas, on peut le prouver par un contre-exemple ou une démonstration du type « raisonnement par l'absurde » que certains élèves utilisent spontanément mais qu'il semblerait prématuré d'« enseigner» en cinquième,
- la conjecture est vraie et une démonstration permet d'en établir la véracité.

2 . Quelles activités proposer aux élèves en cinquième ?

Pour mettre en place de réelles séquences déductives, le professeur sera amené à faire des choix didactiques en fonction des exercices. Il pourra proposer aux élèves :

a) des exercices où la réponse n'est pas évidente, où il y a un doute ; une recherche d'arguments sera nécessaire à l'élève pour se convaincre lui-même,

b) des exercices qui amèneront des réponses différentes voire contradictoires et donc obligeront les élèves à débattre entre eux pour se convaincre mutuellement,

c) des activités de constructions qui demandent une analyse de la figure et une justification par des propriétés ou des calculs,

d) des exercices où on ne part pas d'une construction mais d'un texte décrivant une situation,

e) des exercices où il est nécessaire de trouver un contre-exemple pour montrer qu'une affirmation n'est pas vraie.

En résumé, on proposera des exercices où il existe un enjeu, une situation prêtant à conflit qui permettra l'instauration d'un débat dans la classe.

Pour atteindre cet objectif, on pourra élaborer des exercices faisant intervenir :
- les constructions justifiées de figures,
- les propriétés des figures (triangles, quadrilatères),
- la symétrie centrale et la symétrie axiale,
- les angles (un cheminement apparaît facilement et donne lieu à une rédaction précise avec étapes et justifications de type calculatoire),
- les aires,
- le calcul mental,
- les programmes et organisations de calculs.

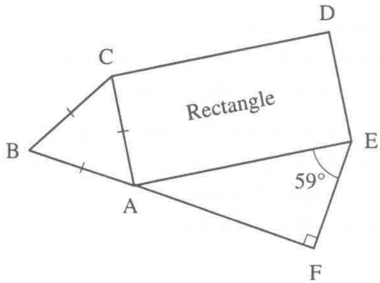
Les exercices suivants, que nous proposons à titre d'exemples, nous semblent répondre à ces conditions. Chacun d'eux peut donner lieu à plusieurs exploitations en classe, selon la façon dont la question est posée. Il sera du rôle de l'enseignant de provoquer le débat si nécessaire et, dans tous les cas, de l'exploiter avec ses élèves.

Dans tous ces exercices, l'objectif est de faire trouver des arguments s'appuyant sur des propriétés. Le travail peut se faire oralement et, en général, il nous semble prématuré d'attendre d'un élève de cinquième la rédaction d'une démonstration. On doit l'habituer progressivement à écrire la propriété utilisée ou le calcul choisi pour justifier sa réponse.

Exercice 1 :

Domaines concernés :
- Lire les données sur une figure codée.
- Utiliser la somme des angles d'un triangle.

Observe cette figure codée.
Les points B, A, F semblent alignés.
Le sont-ils ? Justifie ta réponse.

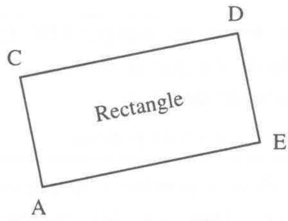


La manière de présenter l'exercice aux élèves et son exploitation conditionnent l'existence du débat et la mise en œuvre des outils de preuve. On peut imaginer plusieurs scénari, dont, par exemple :

- l'exercice est écrit au tableau et la figure est projetée ; les élèves ne peuvent donc pas être tentés de mesurer ou de vérifier sur la figure et doivent donc trouver une méthode pour justifier leur réponse ;
- chaque élève dispose du texte donné avec la figure ; les élèves travaillent par groupes de trois ou quatre et doivent se mettre d'accord sur une réponse ; un bilan collectif permet ensuite de provoquer le débat.

Variante de cet exercice :

Placer le point B à l'extérieur du rectangle de sorte que le triangle ABC soit équilatéral.
Placer le point F à l'extérieur du rectangle de sorte que $\widehat{AEF} = 59°$ et que le triangle AEF soit rectangle en F.
Les points B, A, F sont-ils alignés ?



Le débat risque d'être d'une autre nature que dans la version précédente. En effet, les élèves peuvent d'abord expliquer leur désaccord en pensant que leurs réponses différentes sont dues à des imprécisions dans la construction. En voulant refaire une figure plus précise, ils peuvent être encore plus gênés pour fournir une réponse et le seul moyen de se mettre d'accord est d'utiliser des propriétés.

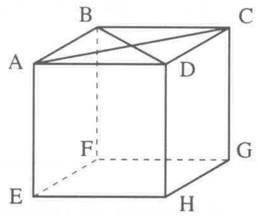
Exercice 2 :

Domaines concernés :

- Analyse de la représentation d'un cube en perspective.
- Propriétés des diagonales du carré.

On a représenté un cube en perspective.
Claude dit que les diagonales [BD] et [AC] sont perpendiculaires.
Elodie dit qu'il a tort.

Qui a raison et pourquoi ?



Contrairement aux exercices précédents, le dessin n'induit pas la conjecture.

La première activité de l'élève est une démarche d'analyse de l'objet à partir de sa représentation : voici un cube, donc ses faces sont des carrés ; ABCD étant un carré, on va en déduire que ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 3 :

Domaine concerné :

- Utiliser la propriété de la médiatrice d'un segment.

On donne un triangle ABC tel que AB = 6,1 cm, AC = 6 cm et BC = 6 cm.
Claude dit que la médiatrice du côté [AC] passe par B.
Anne dit que non.
Qui a raison et pourquoi ?

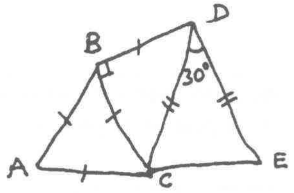
Pour répondre à la question, plusieurs stratégies seront utilisées par les élèves. Dans tous les cas, pour se mettre d'accord, il faudra faire un raisonnement en utilisant des propriétés.

Exercice 4 (d'après E.V.A.P.M.) :

Domaines concernés :

- Lire des informations sur une figure codée.
- Connaître et utiliser la somme des angles d'un triangle.

Voici la représentation à main levée d'une figure.



Calcule tous les angles de la figure en écrivant ton raisonnement.
Les points A, C, E sont-ils alignés ? Pourquoi ?

Comme dans l'exercice 1, on peut envisager plusieurs exploitations de l'exercice :

- le schéma est rétroprojeté et les élèves s'expriment sur la façon de trouver et de justifier les réponses,
- chaque élève dispose du schéma, les élèves cherchent en groupes et doivent se mettre d'accord sur les réponses et leurs justifications avant de faire un bilan collectif.

Dans les deux cas, il y a confrontation entre les points de vue des élèves ; les réponses, les arguments ont pour objectif de se convaincre et de convaincre les autres.

L'alignement de points peut maintenant être prouvé en cinquième avec deux outils : utilisation des conséquences de l'inégalité triangulaire et, comme dans cet exercice, calcul d'angles.

Exercice 5 :

Domaine concerné :

- Connaître les propriétés du parallélogramme.

On veut construire un parallélogramme ABCD tel que AB = 8 cm, BC = 5 cm et BD = 7 cm.
Ecrire le programme de construction en citant les propriétés utilisées dans le raisonnement.

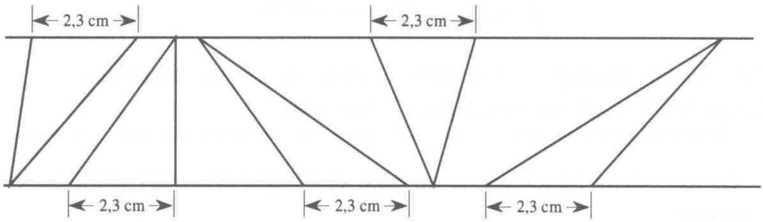
Cet exercice peut se faire en plusieurs étapes : recherche individuelle, discussion en groupes de trois, bilan et débat en classe entière avec comparaison des démarches mises en œuvre.

Exercice 6 :

Domaine concerné :

- Aire du triangle.

Dans une bande de papier, Eric a découpé cinq triangles différents. Lequel semble avoir la plus grande aire et peut-on le prouver ?



Le problème suscitera une discussion. En effet, on peut observer chez les élèves des comportements encore différents : certains ne dissocient pas l'accroissement du périmètre de l'accroissement de l'aire, d'autres pensent que la diminution de l'angle opposé au côté de 2,3 cm entraîne une diminution de l'aire du triangle. La seule validation sera l'utilisation de la formule.

Exercice 7 :

Domaines concernés :

- Exécuter une construction,
- Utiliser les propriétés des diagonales d'un rectangle.

Construis un rectangle ABCD.
Sur la même figure, construis un autre rectangle AECF.

On peut inciter les élèves à faire un schéma à main levée. La richesse vient du fait que les élèves construisent des figures différentes. Pour faire la figure, les élèves n'utilisent pas d'eux mêmes les propriétés des diagonales ; on peut leur poser une des deux questions qui suivent.

Comparer la longueur des segments [BD] et [EF]. Pour répondre, on utilisera la propriété des diagonales du rectangle pour prouver que les segments ont la même longueur.

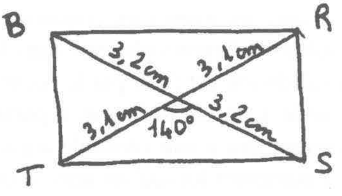
Où sont les points A, E, B, C, F, D ? Pour répondre, on utilisera la propriété des diagonales du rectangle pour prouver qu'ils sont sur un même cercle.

Exercice 8 :

Domaines concernés :

- Lire des informations sur une figure codée.
- Utiliser les propriétés des diagonales d'un rectangle.

On a représenté une figure à main levée.
a) Mathias affirme que BRST est un rectangle.
Que pensez-vous de cette affirmation et pourquoi ?
b) Cette figure a-t-elle un ou des axes de symétrie ?
Justifier.



Pour répondre à la question a), il faut argumenter en utilisant la propriété des diagonales du rectangle d'avoir la même longueur. Par contre, on peut prouver l'existence d'un parallélogramme puisque les diagonales ont le même milieu. Pour répondre à la question b), on a déjà dit que ce quadrilatère est un parallélogramme, que ce n'est pas un rectangle et, de plus, que ses diagonales ne sont pas perpendiculaires ; donc ce n'est pas un losange et on peut en déduire qu'il n'a pas d'axe de symétrie.

Exercice 9 :

Domaines concernés :

- Construire un triangle connaissant deux angles et un côté.
- Utiliser la somme des angles d'un triangle.
- Connaître la propriété des angles d'un triangle isocèle.
- Savoir ce qu'est la bissectrice d'un angle et être capable de la construire.

a) Construis le triangle ABC tel que $\widehat{ABC} = 54°$, $\widehat{CAB} = 71°$ et AB = 5 cm.

b) Le triangle ABC est-il isocèle ? Prouve-le.

c) Construis la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et celle de $\widehat{BCA}$; elles se coupent en I.

Calcule la valeur de $\widehat{BIC}$.

La construction du triangle permet d'obtenir un triangle que l'on peut « voir » isocèle. Seul, le calcul de l'angle $\widehat{BCA}$ prouvera qu'il ne l'est pas.

On propose ici un type de raisonnement par l'absurde puisque l'élève va être amené à écrire :« Si le triangle était isocèle, il aurait deux angles égaux ; ce n'est pas vrai, donc il n'est pas isocèle » (on utilise : si $P \Rightarrow Q$ alors $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.)

Pour calculer $\widehat{BIC}$, il faut utiliser deux propriétés : celle de la bissectrice d'un angle et celle de la somme des angles d'un triangle.

Dans les exercices concernant le domaine numérique, l'observation de résultats différents obtenus dans la classe nécessite la discussion. En général, la validation est faite par la recherche du calcul qui correspond à la situation donnée. Dans ce domaine, il paraît plus difficile de trouver des exercices qui donnent lieu à une véritable argumentation. Il nous paraît cependant possible d'argumenter lorsqu'on justifie un calcul mental, lorsqu'on infirme une idée reçue sur les pourcentages, ...

Exercice 10 :

Domaine concerné :

- Appliquer un pourcentage pour calculer une augmentation, une diminution.

Un objet coûtait 6 000 F le 1er janvier 1996 ; le 1er mai, son prix a augmenté de 10% ; le 1er août, son prix a diminué de 10%. Calculer son prix le 1er août.

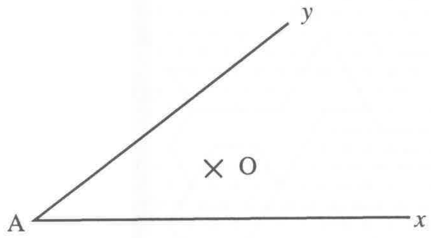
D'instinct, la plupart des élèves ne feront pas le calcul et répondront que le prix n'a pas changé. Seuls, les élèves qui auront calculé le prix après augmentation puis le prix après diminution pourront répondre à la question. On peut arriver à la conclusion : « Si on augmente de 10% puis si on baisse de 10%, cela équivaut à une baisse de 1% ».

Cet exercice montre bien que chacun doit parfois se méfier de ses propres idées à priori ; l'important est de pouvoir en débattre dans la classe pour admettre éventuellement que l'on s'est trompé au vu du raisonnement des autres.

3. Exemples d'exercices qu'il nous semble difficile de proposer en cinquième (ou, quelles sont les limites au travail sur la démonstration en cinquième ?).

D'une manière générale, il est difficile de faire démontrer, en cinquième, des propriétés qui concernent toute une famille de figures comme, par exemple, démontrer que dans un triangle équilatéral les hauteurs sont égales. Ces problèmes, que l'on peut qualifier de "génériques" seront progressivement introduits en quatrième.

Il est souvent difficile de demander des preuves qui utilisent les propriétés de la symétrie centrale comme, par exemple, terminer la construction d'un parallélogramme pour lequel on donne les supports de deux côtés et le centre.



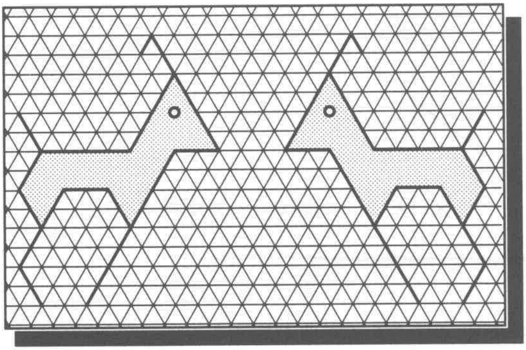
D'autre part, les exercices trop formels sont à éviter.
Nous avons trouvé l'exercice suivant dans un manuel de cinquième :

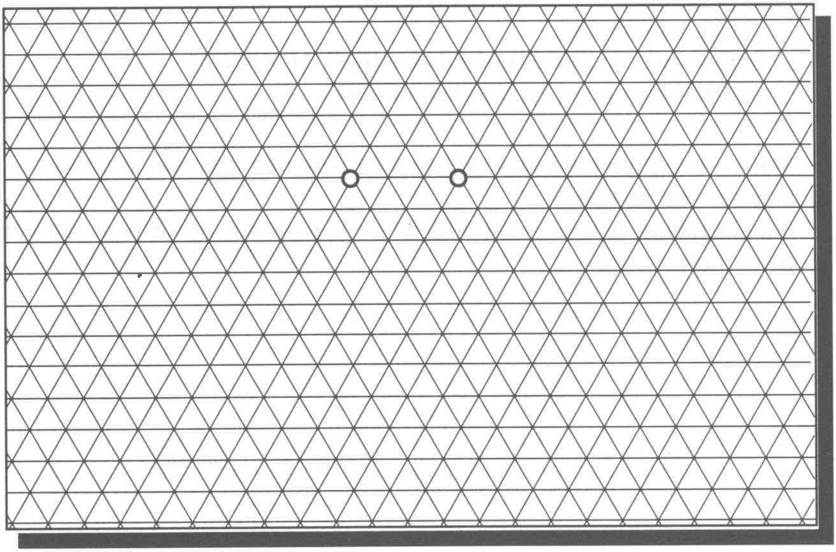
> Soit un parallélogramme ABCD et I le milieu de [AB]. La droite passant par B et parallèle à (DI) coupe (DC) en J.
> a) Faire un dessin.
> b) Que peut-on dire du quadrilatère IBJD ? Pourquoi ?
> c) Démontrer que J est le milieu de [CD].

Cet exercice, proposé en évaluation en début de seconde, a obtenu un taux de réussite de 40% !

En cinquième, il nous paraît difficile de le proposer, même pour susciter un débat dans la classe.

Vis à vis





SIXIÈME PARTIE

Un enjeu fort : l'apprentissage de la langue mathématique

On entend souvent dire que des élèves maîtrisent mal la langue française.

Le premier article nous rappelle que si l'élève utilise bien sûr sa langue maternelle pour faire des mathématiques, celles-ci ont néanmoins leur propre langage reposant sur l'utilisation d'une codification spécifique avec des règles et des symboles.

Comme piste de réponse, il nous invite à un véritable chassé-croisé entre des écritures mathématiques, des éventuelles reformulations et leurs traductions dans la langue maternelle.

Si de telles activités peuvent permettre d'affiner chez nos élèves le sens des écritures mathématiques, on ne peut se cacher l'énormité de la tâche dans le domaine géométrique, où ils doivent produire un « discours intelligible ».

C'est donc surtout dans le domaine de l'algèbre que nous allons continuer notre réflexion, nous appuyant pour cela sur Condillac, qui, en 1798, écrivait : « Les mathématiques sont une science bien traitée dont la langue est l'algèbre ». Mais qu'est-ce que l'algèbre : la résolution d'équation ? l'étude de structures ? ...

Le second article nous propose un éclairage historique pour mieux situer cette question dans notre enseignement actuel. Au regard de cette histoire, l'apprentissage de cette langue mathématique prend son premier sens dans le souci de l'homme de résoudre des problèmes.

Et pour ce faire, il doit transformer des problèmes, issus de la réalité, en problèmes abstraits pour lesquels il crée des modèles de traitement. Cet article nous montre comment une telle démarche nécessite un apprentissage sur trois fronts :

- la modélisation comme passage du réel à l'abstrait,
- le calcul littéral comme mode d'expression de ces informations abstraites,
- le calcul algébrique comme mode de traitement de ces informations.

De nombreuses activités de cinquième ou de quatrième illustrent les deux derniers points.

Une tentative d'approche du langage mathématique

Francis REYNES - IREM D'Aquitaine

« Un compte rendu d'expérience pour commencer... Enseignant en licence de physique, voici de nombreuses années que je me désole de la médiocrité du français utilisé par les étudiants dans leurs copies : orthographe déficiente, vocabulaire stéréotypé, syntaxe boiteuse. J'ai, un jour, décidé de proposer, outre les problèmes de physique, quelques travaux plus culturels, d'ordre historique ou épistémologique, et même linguistique. Surprise : les copies étaient rédigées dans une langue correcte et parfois inventive ; (...) C'est la preuve, d'une part, que le rapport à la langue, chez ces jeunes scientifiques, n'est pas rompu et que leur compétence reste entière, et, d'autre part, que nous, enseignants, n'avons pas su les persuader, dès le collège, que la science aussi passe par la langue. (...) Une analyse un peu sérieuse des difficultés de l'enseignement des sciences, comme de leur diffusion médiatique, montre qu'elles découlent d'abord d'une méconnaissance des problèmes que pose l'énonciation dans la langue commune de connaissances formelles. (...) Savoir dire et savoir faire vont de pair. » (J.M. LEVY-LEBLOND : *La pierre de touche*.)

Constatation assurément aussi aisée que banale : le langage mathématique n'est pas une langue maternelle. Conséquence aussi fondamentale qu'incontournable : on ne pense pas de façon "naturelle" en langage mathématique : on pense d'abord dans sa langue maternelle.

Deuxième constatation : le langage mathématique n'est pas une « langue vivante » : son objet et son fonctionnement sont autres. Même s'il utilise pour une large part la langue usuelle, il en spécifie (et parfois en détourne) le sens et l'usage. Le recours au formalisme s'est avéré historiquement nécessaire pour permettre le développement des concepts, et a facilité leur mise en oeuvre. Un ordinateur produit des résultats de façon « machinale » grâce à un langage convenablement formalisé : plus rien de « vivant » dans un tel processus, mais une construction logique, cohérente et rigoureuse.

Deuxième conséquence : pas de « bain linguistique » pour assimiler le langage mathématique.

S'il est vrai que la maîtrise d'une langue étrangère devient effective dans la mesure où l'on est capable de penser directement dans cette langue, sans passer par l'intermédiaire de sa langue maternelle, en est-il de même pour le langage mathématique ? L'un des intérêts du formalisme est de permettre, grâce à des automatismes de fonctionnement, d'alléger une gestion du sens qui pourrait s'avérer trop lourde et trop lente. Mais il faut bien qu'au bout du processus on **retrouve** le sens. **Ce qui suppose que l'on ait mis du sens au commencement**. Ce qui veut dire que si **l'utilisation** d'un formalisme pose des problèmes, la difficulté se situe en amont : c'est le **processus de formalisation** qui doit être élucidé et rendu transparent, sans quoi ce qui est une élaboration logique et cohérente sera perçue et traitée comme un fatras de formules magiques, et l'on connait trop bien cette tendance régressive de nos élèves ...

Pour ce faire nous ne voyons guère que le moyen « traditionnel » : thème et version, qui permet de ne pas automatiser prématurément le traitement des écritures. Par exemple, si l'on instaure trop isolément l'équivalence de « $x + m = t$ » et de « $x = t - m$ », on risque d'occulter le sens des opérations, les liens entre les concepts de somme, différence, opposé, et d'installer, même implicitement, la "règle magique" : « *quand on change de côté, on change de signe* » qui fera immanquablement des ravages lorsqu'on passera au domaine multiplicatif, $2x = 3$ donnant $x = 3 - 2$ ou $x = 3/(-2)$.

Nous présentons ici quelques activités élaborées au cours de ces dernières années dans le but constant de **donner du sens au langage mathématique en étudiant sa formalisation**. Nous sommes à présent convaincus que de tels exercices doivent être proposés dès la classe de sixième. L'expérience nous a prouvé que, contrairement à un avis plus ou moins répandu, l'usage des lettres ne pose pas de problème insurmontable pourvu que son introduction s'effectue avec lenteur, constance, et dans un contexte adéquat de prise de sens, en particulier en liaison avec l'apprentissage de la propriété de substitution par égalité, propriété décisive s'il en est.

Pour que le langage mathématique puisse se constituer en outil il faut non seulement l'*utiliser* en tant qu'outil mais également l'*étudier en tant qu'objet*, tant dans son fonctionnement interne que dans ses liens de sens avec la langue usuelle.

« Ce qu'on appelle improprement le "langage mathématique" est un symbolisme. Le symbolisme mathématique est une écriture. Il ne se parle pas, sinon par l'intermédiaire d'une langue traditionnelle. Il ne peut engendrer à lui seul aucune structure allocutive de la parole. (...)

On dit souvent que le symbolisme logico-mathématique n'a pas de sens. La formule est équivoque. Elle ne veut pas dire que tout se réduit à quelque bruitage insignifiant accompagné d'usure de salive et de craie. Mais elle veut dire deux choses : d'une part qu'il n'y a pas de signification matérielle ou d'intuition empirique mais seulement une signification formelle ou conceptuelle qui réside dans la cohérence des rapports ; d'autre part, elle veut dire que l'on opère directement sur les symboles en vertu des valeurs syntaxiques qui leur ont été conférées par définition au départ, symboles qui constituent comme de nouveaux objets maniables suivant certaines règles opératoires. »

(Edmond ORTIGUEZ : *Le discours et le symbole.*)

Un premier travail consiste à apprendre à **discriminer**, parmi les diverses écritures rencontrées, celles qui sont des **dénominations d'objets** de celles qui sont des **phrases**. C'est élémentaire, certes ; c'est loin d'être superflu ! Il est révélateur de constater par exemple combien d'élèves de quatrième considèrent une expression telle que » *la perpendiculaire à (D) passant par A* » comme une phrase, sous prétexte qu'elle contient un verbe ... L'utilisation d'un **symbole relationnel** pour traduire un **groupe verbal** (=, <, >, //) a souvent pour effet pervers de faire perdre de vue qu'il sert à construire des **phrases**. Afin d'aiguiser un peu l'esprit critique nous proposons également quelques écritures mal formées ou carrément ineptes : cela amène son lot de surprises, des écritures pourtant parfaitement valides étant souvent prises, au début tout au moins, pour des inepties, par exemple « *le triple de douze* » ou « *le quart de quinze* » ...

Voici deux exemples de telles activités, l'un en algèbre, l'autre en géométrie. Il est facile d'en adapter le contenu au niveau visé.

SAVOIR DISCRIMER LES ÉCRITURES

Exemple 1 :

Complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient

	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
Le double de seize				
2×16				
32 est le double de 16				
$32 = 2 \times 16$				
Le triple de quinze				
3×15				
$15 = 8 + 7$ donc $3 \times 15 = 3 \times (8 + 7)$				
$3 \times 15 \neq 45$				
$3 \times 8 + 7)$				
La moitié de treize				
13/2				

$13/2 = 6$				
La somme de douze et de trente				
$12 + 30 = 42$				

Exemple 2 :

Lis les informations, regarde le dessin. Complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient.

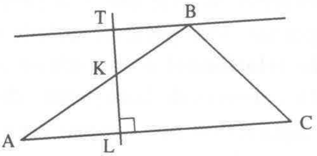
ABC désigne un triangle quelconque

K désigne un point du segment [AB].

Δ désigne la parallèle à (AC) passant par B.

D désigne la perpendiculaire à (AC) passant par K.

D coupe (AC) en L et Δ et T.



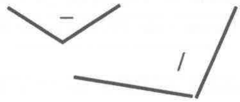
	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
K				
$K \in [AB]$				
$(AK) \neq (KB)$				
$[AK] + [KB]$				
AB				
$AK + KB = AB$				
$AB + BC = AC$				
la parallèle à (AC)				
La parallèle à (AC) passant par B				
$\Delta = (BT)$				
$L \notin [AC]$				
$(AL) = (AC)$				
La perpendiculaire à (AC)				
La perpendiculaire à (AC) passant par L				
$\Delta \,//\, (AC)$				
$D \perp (AC)$ et $(AC) \,//\, \Delta$ donc $D \perp \Delta$				
$AK + KT + TB$				
$D = (TL)$				
$L \perp (AC)$				

« Contrairement à certaines apparences, *le symbole a pour fonction essentielle de rendre inséparable la forme et le sens.* C'est par là qu'il se distingue du mot (...).

(…) on peut très bien respecter la grammaire et raisonner de façon incohérente, confuse, équivoque ; les règles de la grammaire et les règles de la logique représentent deux juridictions différentes. Les règles de l'expression symbolique au contraire constituent directement une grammaire logique, une syntaxe logique. Il n'y a plus qu'une seule juridiction. » (E. ORTIGUEZ)

Traduire, coder, décoder : activités indispensables, médiations nécessaires pour **construire** la forme et le sens, donner forme au sens, débusquer le sens dans la forme. L'utilisation de **schémas** est intéressante en ce qu'elle propose un troisième mode d'expression à mi-chemin entre le figuratif et le conceptuel. "Le schéma objective ce qu'il représente, tout en demeurant abstrait. (…) Le schéma, parce qu'il structure et organise le travail cognitif de prise d'information et de mémorisation, est très utilisé dans l'enseignement." (Sciences et Avenir, Décembre 95). La manipulation de plusieurs signifiants pour un même signifié crée des **transferts de sens d'un mode d'expression à un autre, générateurs de compréhension.**

Voici un exemple fondé sur ce principe. Nous en verrons d'autres.

DÉNOMINATION	FORMULE	SCHÉMA DE CALCUL
		217 196 28 
		217 196 28 
	$23 + 9 \times 5$	23 9 5
Le produit de 23 + 9 et de 5		23 9 5

La différence de 75 et de 45/3		75 45 3
Le quotient de 56 par 10 – 3		56 10 3

DESIGNATION	FORMULE et CALCUL
	$7 \times 12 + 56 =$ ...... + ... = ...
Le produit de 7 et de 12 + 56	
La différence de 37 et de 72/4	
	$25 - (40 - 19) =$ =
La somme de 7x9 et de 56/8	
	$12 \times 13 - 7 =$
Le produit de 12 et de 13 – 7	
	$(73 - 45)/4 =$
Le quotient de 192 et de 24 – 8	
La différence de 192/24 et de 8	
	$(49 + 77)/18 =$
Le quotient de 108 et de 17 + 19	
	$63 + 36/9 =$
	$(63 + 36)/9 =$
Le quotient de 234 et de 4 × 9	
	$(234/4)/9 =$
La différence de 7 × 8 et de 27 + 18	
	$7 \times 13 - 273/13 =$
La somme de 11 × 7 et de 11 × 8	
	$11 \times (7 + 8) =$
La somme de 156/12 et de 4	
	$156/(12 + 4) =$
	$7 \times 26 - 18 =$
	$7 \times (26 - 18) =$

Le sens des opérations s'articule autour de plusieurs pôles : leur enracinement dans le concret, les relations qui les unissent et les différencient, leur fonctionnement formel.

Là encore, nous utilisons au maximum les trois modes d'expression précédemment évoqués : langue "naturelle", schémas, langage mathématique.

Les quatre fiches suivantes sont proposées en cinquième et quatrième.

DIFFERENCE

1er exemple :

Pierre pèse 74 kg, Anne pèse 56 kg. Complète : 56 + … = 74.
18 est donc le nombre qu'il faut…………..à……pour égaler…… .
On l'appelle la………….. de……et de…… , et on écrit : …= … – … .

2ème exemple : B ∈ [AC], AB = 4,7 cm et AC = 8,2 cm. Fais un dessin :

Complète : 4,7 +… = 8,2
3,5 est donc le nombre qu'il faut …………… à……pour égaler …… .
On l'appelle la……………..de … et de … , et on écrit : …… = … – … .

3ème exemple : Complète : 28 +……= 41.
13 est donc le nombre qu'il faut…………….. à……pour égaler…… .
On l'appelle la……………..de ……et de…… , et on écrit :… = … – … .
D'autre part, comme 28 + 13 = 13 +… , on a aussi : 13 +… = … .
28 est donc le nombre qu'il faut …………….. à …… pour égaler …… .
On l'appelle la ……………..de ……et de…… , et on écrit :… = … – … .

Finalement on obtient trois égalités équivalentes :

+ = ; = – ; = –

4ème exemple : Reprends le 3ème exemple avec :

32,9 +…… = 50,4

……………………………………………………………………………

La différence de m et de t est le nombre « d » qu'il faut …………….. à

….. pour égaler …… On a alors les trois égalités équivalentes :

t + = ; = – ; = – .

Lorsqu'on connait une de ces égalités, il faut être capable de retrouver les deux autres ! Alors entraîne-toi :

17 + 24 =	17 = –	24 =
28 + 37 =	=	=

+ =	= 45 − 32	=
+ =	= 31 − 8	=
+ =	= −	= 63 − 28
+ =	= −	= 53 − 26
t + 19 = 43	=	=

ADDITION ET SOUSTRACTION

Complète les schémas et les égalités

$7 \underset{-5}{\overset{+5}{\rightleftarrows}} 12$	7 + 5 = 12 − =	$5 \underset{-}{\overset{+7}{\rightleftarrows}} 12$	5 + = 12 − =
$9 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}} 15$	9 + = 15 − =	$6 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}} 15$	6 + = 15 − =
$13 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	13 + 8 = − =	$8 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =
$\underset{-5}{\overset{+9}{\rightleftarrows}} 26$	+ = − =	$9 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =
$8 \underset{-m}{\overset{+m}{\rightleftarrows}} 14$	+ = − =	$m \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}} 12$	+ = − =
$k \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	k + 7 = − =	$7 \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =
$\underset{-}{\overset{+27}{\rightleftarrows}}$	9 + 27 = − =	$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =
$a \underset{-}{\overset{+5}{\rightleftarrows}} b$	+ = − =	$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =
$\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	r + d = − =	$d \underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$	+ = − =

Invente à ton tour trois exemples semblables .

QUOTIENT

1er exemple : Julien pèse 72 kg, son chat pèse 4 kg.
Complète : $4 \times \ldots\ldots = 72$.
18 est donc le nombre qu'il faut ....par ......pour égaler ....
On l'appelle le .... de......et de......, et on écrit : ... = ... / ... .

2ème exemple : B ∈ [A C], AB = 0,8 cm et AC = 9,2 cm. Fais un dessin :
Complète : $0{,}8 \times \quad = 9{,}2$.
11,5 est donc le nombre qu'il faut ....par ......pour égaler ....
On l'appelle le ....de ...... et de ...... , et on écrit : ...= .../ ... .

3ème exemple : Complète : $28 \times \ldots\ldots = 364$.
.... est donc le nombre qu'il faut ....par ......pour égaler ....
On l'appelle le .... de ...... et de ...... , et on écrit : ... = .../ ... .

D'autre part, comme $28 \times \ldots\ldots = \ldots\ldots \times 28$, on a aussi : $13 \times \ldots = \ldots$.
28 est donc le nombre qu'il faut .... par ......pour égaler ....
On l'appelle le ....de ...... et de ......, et on écrit : ...= ... / ... .

Finalement on obtient trois égalités équivalentes :

$\times \quad = \quad ; \quad = \quad / \quad ; \quad = \quad /$

4ème exemple : Reprends le 3ème exemple avec :
$12{,}5 \times \ldots\ldots = 42{,}5$

Le quotient de u et de s est le nombre « k » qu'il faut............... par ..... pour égaler ...... On a alors les trois égalités équivalentes :

$s \times \quad = \quad ; \quad = \quad / \quad ; \quad = \quad /$.

Lorsqu'on connait une de ces égalités, il faut être capable de retrouver les deux autres ! Alors entraîne-toi :

$7 \times 13 =$	$7 = \quad /$	$13 = \quad /$
$=$	$8 = 96 /$	$= \quad /$
$=$	$=$	$17 = \quad / 9$
$27 \times s =$	$=$	$=$

MULTIPLICATION ET DIVISION

Complète les schémas et les égalités :

$3 \underset{/4}{\overset{\times 4}{\rightleftarrows}} 12$	$\times \quad =$ $/ \quad =$	$4 \underset{/}{\overset{\times 3}{\rightleftarrows}} 12$	$4 \times 3 \quad =$ $12/ \quad =$
$7 \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} 56$	$7 \times \quad =$ $56/ \quad =$	$8 \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} 56$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$6 \times \quad = \quad 54$ $/ \quad =$	$9 \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} 84$	$\times \ 12 =$ $/ \quad =$	$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$13 \underset{/m}{\overset{\times m}{\rightleftarrows}} 91$	$\times \quad =$ $/ \quad =$	$m \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$k \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$k \times 12 \ = \ 60$ $/ \quad =$	$12 \underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$5 \times 15 = \quad t$ $/ \quad =$	$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$a \underset{/}{\overset{\times 8}{\rightleftarrows}} b$	$\times \quad =$ $/ \quad =$	$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$
$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$f \times u = \quad p$ $/ \quad =$	$\underset{/}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$	$\times \quad =$ $/ \quad =$

Invente à ton tour trois exemple semblables.

Il est capital de bien distinguer les deux “domaines d’opérations” que nous qualifions de *domaine additif* et *domaine multiplicatif*, à la fois pour éviter des erreurs sur le sens des opérations (cf. la fiche “Traductions” ci-après) et pour préparer leur mise en relation par la distributivité de × sur +. Mais les distinguer ne signifie pas les séparer arbitrairement. Les opérations forment un véritable *nœud conceptuel* générateur de confusions (trop) bien connues ... Lorsque des concepts interfèrent fâcheusement — comme *aire* et *périmètre* — on sait qu'il est vain d'espérer dissiper les zones d'ombres en les traitant de façon disjointe dans le temps : c'est ignorer les relations qu'ils entretiennent, c'est feindre de croire qu'il suffit de casser le thermomètre pour faire tomber la fièvre. Il faut remonter à la source, travailler le nœud, affronter la complexité intrinsèque de la situation. C'est pourquoi nous "mélangeons" rapidement les quatre opérations, d'une part pour apprendre à discriminer les deux domaines et les priorités opératoires, d'autre part pour mettre en évidence les similitudes de fonctionnement des opérations réciproques : la division est à la multiplication ce que la soustraction est à l'addition (le comportement "pathologique" de zéro dans le domaine multiplicatif sera élucidé plus tard, grâce à la distributivité de × sur +).

Complète les schémas puis les égalités équivalentes.

$\begin{array}{ccccc} & \times 3 & & +7 & \\ m & \longrightarrow & 3\times m & \longrightarrow & 19 \\ & \longleftarrow & 12 & \longleftarrow & 19 \\ & / & & - & \end{array}$	$3 \times m + 7 =$ $3 \times m = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $m = \ldots\ldots / \ldots\ldots = \ldots\ldots$
$\begin{array}{ccccc} & -5 & & /2 & \\ k & \longrightarrow & & \longrightarrow & 7 \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & 7 \\ & + & & \times & \end{array}$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 7$ $\ldots\ldots = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $k - \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$
$\begin{array}{ccccc} & /5 & & -3 & \\ t & \longrightarrow & & \longrightarrow & 2 \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & 2 \end{array}$	
$\begin{array}{ccccc} & +4 & & \times 2 & \\ y & \longrightarrow & & \longrightarrow & 11 \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \end{array}$	
$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \longleftarrow & & \longleftarrow \end{array}$	

TRADUCTIONS

Pour chacune des phrases suivantes :

1°) Donne un nom (une lettre) aux nombres inconnus indiqués par le texte.

2°) Traduis la phrase par une égalité.

3°) Représente les deux schémas qui traduisent la situation.

4°) Ecris les deux égalités équivalentes à celle écrite au 2°).

5°) Traduis chacune de ces deux égalités par une phrase en français.

ATTENTION : POUR T'AIDER À BIEN COMPRENDRE CE QU'IL FAUT FAIRE, LES DEUX PREMIERS EXERCICES ONT ÉTÉ PARTIELLEMENT RÉSOLUS : COMPLETE LES.

I) **La hauteur de l'Empire State Building est supérieure de 124 mètres à celle de la tour Eiffel.**

1°) J'appelle « a » la hauteur en mètres de l'Empire State Building et « b » celle de la tour Eiffel.

2°) a = ... + ...

3°) $\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$ | $\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$

4°) b = ... | 124 = ...

5°) La hauteur de la Tour Eiffel est inférieurs de .... mètres à celle de ....

La différence de hauteur entre .... et .... est de ....

II) **Un concorde vole deux fois et demie plus vite qu'un airbus.**

1°) J'appelle « c » la vitesse d'un concorde et « r » celle d'un airbus (mesu-reés avec la même unité, par exemple en km/h).

2°) c = ...

3°)

$\rightleftarrows$ | $\underset{-}{\overset{+}{\rightleftarrows}}$

4°) r = ... | 2,5 = ...

5°) Un airbus vole ....

Le ....(on dit aussi "le ......" entre la vitesse d'un ....et celle d'un .... est de ....

Nous allons revenir plus en détail sur la fiche « TRADUCTIONS ». Voici les résultats d'un exercice du type « TRADUCTION » proposé dans deux classes de sixième après quatre séquences de travail au cours desquelles huit phrases avaient été traduites (quatre par domaine d'opérations). Les résultats sont donnés en pourcentages, pour une cinquantaine d'élèves.

Trois phrases ont été données :

I Le rapport entre le nombre d'habitants de la Chine et celui de la France est de 19,7.

II Un litre d'aluminium pèse 5,1 kg de moins qu'un litre de fer.

III La masse de la planète Mars est le dixième de celle de la Terre.

1°) Dénominations

	correct	incorrect
I	70	30
II	78	22
III	80	20

2°) Traduction par une égalité

	correct	vrai mais équivalent	erreur sur la place des nombres	erreur de domaine
I	14	40	6	40
II	42	36	16	6
III	38	26	16	20

3°) Schémas

	2 bons	1 bon	2 fois le même	1 bon et changement de domaine	2 faux
I	36	8	6	8	42
II	58	6	20	0	16
III	46	4	14	4	32

4°) Egalités

	2 correctes	2 fois la même ou 1 correcte	2 fausses
I	32	20	48
II	44	36	20
III	36	26	38

5°) Traduction des égalités en phrases

	2 correctes	1 correcte	1 répétée	faux ou vide
I	6	22	14	58
II	14	32	16	38
III	22	44	12	22

QUELQUES COMMENTAIRES

1°) Les réponses incorrectes sont toutes du genre « *J'appelle C la Chine* », « *J'appelle M la planète Mars* » : manque de précision et de rigueur dans la dénomination, souvent lié à un manque de « courage » pour donner une définition qui demande d'écrire deux lignes ... Les élèves manifestent souvent une répugnance à **rédiger** des explications : ce fait est à relier d'une part, évidemment, à leurs difficultés d'expression en Français, d'autre part à une espèce d'à priori qui sous-entendrait qu'en Mathématique on n'a pas besoin de « faire des discours »...

2°) a) Fréquente confusion des domaines d'opérations : elle s'effectue presque toujours dans le même sens : le domaine additif est employé à la place du domaine multiplicatif. C'est un obstacle didactique connu. Il faut reconnaître qu'en l'occurence, la langue française n'est pas d'une limpidité exemplaire, la multiplication s'exprimant par « fois plus » et la division par « fois moins » ...

b) Fréquente traduction inadéquate de la phrase donnée, non pas dans le fond (égalité équivalente) mais dans la forme. Là encore, manque de précision et de rigueur.

3°) Les erreurs sont en général dépendantes de celles commises au **2°),** la cohérence est plutôt bonne.

4°) Bonne correspondance avec les scores de réussite au **3°)**, le transfert de sens s'effectue donc assez bien.

5°) C'est le plus difficile, et de loin !

Il semble que les élèves s'expriment plus facilement en langage schématique ou mathématique qu'en français, mais cela ne signifie pas forcément qu'il leur soit plus facile de coder que de décoder : ne serait-ce pas une tentative d'échapper aux contraintes de l'expression et de la compréhension du français ?

Pour ce genre d'exercices, une collaboration avec le collègue de français semble indispensable. Il faut évidemment qu'il accepte de "jouer le jeu" car, si faire du français en cours de math nous apparait de plus en plus comme un passage obligé, la réciproque n'est pas évidente ...

* * *

L'introduction des **nombres négatifs** est l'une des grandes nouveautés du Collège. Elle engendre un problème spécifique lié à la **notation de l'opposé**. Le signe « – », considéré exclusivement jusqu'alors comme un signe opératoire, va acquérir un second sens (ou un sens second) en devenant aussi un signe prédicatoire se traduisant par « *l'opposé de* » — sens qui sera fondamental pour le calcul littéral. Corrélativement, le sens premier va se modifier puisque des écritures telles que « 7 – 12 » vont **acquérir un sens**. Pire encore, la relation entre addition et soustraction va se transformer et se complexifier à son tour : soustraire restera bien sûr la réciproque d'additionner mais pourra également se traduire par « additionner l'opposé », ce qui permettra alors de **donner du sens** à la soustraction d'un nombre négatif. Assurément, il n'est pas évident de se retrouver dans ce véritable carrefour de significations, encore moins de le construire, beaucoup moins, en tout cas, que notre dextérité de spécialiste nous porte à le croire.

Les difficultés liées à la notation de l'opposé restent cachées tant que l'on se cantonne au numérique, mais elles éclatent et perdurent lorsqu'on aborde l'Algèbre : on sait que, pour une proportion significative d'élèves de première, « *– x est négatif puisqu'il y a un signe moins devant le x* ». Posez seulement, en troisième, les questions suivantes : « Sachant que *"l'opposé de truc"* s'écrit *"– truc"*, **écrire :** 1°) L'opposé de – 3. 2°) L'opposé de m + 7. 3°) La somme de l'opposé de m et de 7. » Les réponses vous convaincront facilement de la nécessité d'un travail centré sur l'utilisation et le sens d'un codage.

De même se prolonge jusqu'en Première la confusion entre écritures du type **m – t** et **t – m**, ou la non reconnaissance de l'égalité de **m – t** et de **–t + m.**

De même s'installe la « recette magique » :« *lorsqu'il y a un signe moins devant la parenthèse, on change les signes à l'intérieur lorsqu'on enlève les parenthèses* » qui donne souvent le résultat suivant : $-(x + 3) = x - 3$ car « *puisqu'il n'y a pas de signe devant x, il n'y a là rien à changer* » ...

Dès la classe de cinquième, où apparait le concept d'opposé, il y a donc un travail considérable à faire pour le mettre en place, c'est-à-dire pour **le relier aux autres concepts et outils** déjà présents (addition, soustraction, parenthèses), sans perdre de vue que ce nouveau concept va **rétroagir** sur les autres. Tout cela se reflète, se traduit dans le langage utilisé, dans **les** langages utilisés. Il faut donc élucider le système de notations dans son fonctionnement opératoire et significatif, le mettre en place de façon que l'élève puisse accéder au sens et aux capacités opératoires que recèle ce système.

Voici quelques exemples d'exercices élaborés dans cette optique :
EN PARTICULIER, **SI a + b = 0 , ON A :**

$$a \underset{-}{\overset{+b}{\rightleftarrows}} 0$$

a + b = 0 *équivaut à* b =
On dit alors que « b est l'opposé de a ».
Alors on a aussi : b + = *équivaut à* a =
On dit alors que « a est ».

CONVENTION D'ECRITURE :

Le nombre « 0 – m » est noté « – m », ce qui se lit : « moins m ».

L'écriture « – m » signifie donc « l'opposé de m ».

FINALEMENT on a trois phrases équivalentes et leurs traductions :

a est	=
b	=
a et b sont	+ =

Deux nombres sont opposés lorsque leur est égale à
Nous avons fait le lien entre addition et soustraction, entre addition et opposé, entre soustraction et opposé. Il reste à établir la

RELATION ENTRE « ADDITION », « OPPOSE » ET « SOUSTRACTION » :

AUTREMENT DIT : Soustraire b à a revient à – b

Soustraire un nombre revient à son .

TRADUCTION : Truc – Machin = Truc + ( )

Cette propriété est fondamentale, car c'est elle qui va nous permettre de trouver les lois algébriques dont nous aurons besoin pour effectuer des calculs où l'addition et la soustraction se « mélangent ». Elle permet en effet de remplacer une différence par une somme et de profiter ainsi des propriétés de l'addition que l'on connait.

TRADUCTIONS

Français	Mathématiques
La somme de 37 et de m	....
....	$-(37+m)$
L'opposé de la somme de – 17 et de u	....
La somme de 19 et de l'opposé de k	....
....	$-19+k$
L'opposé de la somme de 19 et de k	....
L'opposé de la somme de m et de – 8	....
....	$-7+(-t)$

TRADUCTIONS ET EQUIVALENCES

Compléter par les égalités et les phrases en Français équivalentes :

1°)	7 est l'opposé de $m-5$	$7=$ ....
2°)	13 et $t+8$ sont opposés	$13+$ .... $=$ ...
3°)	....	$31=-(a+9)$

RESOLUTION D'EQUATIONS

I) Déterminer le nombre x pour que 7 soit l'opposé de $x-12$	
1°) en utilisant la définition : ...... + ... = ...	2°) en utilisant une égalité équivalente : $x-12=$ .....
II) Déterminer le nombre y pour que 9 soit l'opposé de $y+13$	
1°) en utilisant la définition :	2°) en utilisant une égalité équivalente :
III) Déterminer le nombre z pour que – 13 soit l'opposé de $z+7$	
1°) en utilisant la définition :	2°) en utilisant une égalité équivalente :
IV) Déterminer le nombre t pour que – 5 soit l'opposé de $12-t$	
1°) en utilisant la définition :	2°) en utilisant une égalité équivalente :

REMARQUES :

Utiliser systématiquement les deux méthodes permet non seulement d'effectuer les transferts de sens déjà évoqués, mais aussi de percevoir l'intérêt d'**avoir le choix des traductions** pour trouver la plus performante, la plus facile à mettre en œuvre.

De tels exercices obligent à **penser au sens de ce qu'on écrit** : on ne peut guère les réussir sans cela. D'autre part, la nécessité de la cohérence des résultats est assez bien ressentie. Ainsi facilitent-ils notablement la familiarisation avec le langage algébrique.

Ce que nous venons de dire à propos du concept d'opposé et de sa notation se répète évidemment à bien d'autres occasions, par exemple avec celui d'inverse, avec celui de puissance et la notation des exposants ou encore, en troisième, avec celui de racine carrée. Il est donc nécessaire de recommencer à chaque fois des exercices de **traduction** pour mettre en évidence et enraciner le sens des écritures.

Nous n'avons abordé jusqu'ici que quelques problèmes liés au langage algébrique.

Nous dirons seulement quelques mots du **langage géométrique** car il demande une approche différente et requiert une étude spécifique. En effet, excepté le codage de certains noms d'objets (segments, droites, distances, angles) et de quelques rares liens verbaux (//, $\perp$), il est infiniment moins formalisé que le langage algébrique. Les objets géométriques ne relèvent pas des mêmes traitements que les objets algébriques (tout au moins à un niveau élémentaire, avant l'utilisation de l'outil vectoriel) : avec eux pas d'opérations, pas d'algorithmes, pas d'automatisation de certains processus, pas de modèles dûment répertoriés (il n'y a pas de « démonstrations du premier degré » !). La géométrie analytique est une traduction algébrique de situations géométriques qui, une fois ces traductions effectuées, utilise l'outil algébrique en tant que tel. Mais la géométrie « *pure* » que l'on tente de faire pratiquer à partir de la quatrième se fonde essentiellement sur la **production et l'organisation d'un DISCOURS intelligible, cohérent et logique.** Dans ces conditions, le langage géométrique apparait bien davantage comme **une restriction, une spécification, une particularisation de la langue « naturelle »** que comme un langage propre, autonome.

De ce fait, il nous semble de plus en plus avéré que les (énormes) difficultés rencontrées (et durement ressenties) par les élèves ne sont pas, loin s'en faut, d'origine essentiellement géométrique, mais qu'elles ont leurs racines profondes dans les rapports confus et laborieux qu'ils entretiennent avec la langue française. Par exemple, tel élève capable d'effectuer correctement une construction géométrique « à la règle et au compas » échouera totalement pour la justifier rationnellement. On touche ici à des questions extrêmement profondes et délicates, comme la distinction entre « *savoir* » et « *savoir faire* » ou la dialectique de la gestion mentale simultanée de plusieurs données et de la rédaction forcément chronologique d'un exposé. Il est facile et banal de constater à quel point une bonne maîtrise de la langue écrite constitue un facteur privilégié de réussite dans la résolution d'un problème géométrique. Une cause majeure de blocage réside en effet dans la difficulté à **remplacer un énoncé par un énoncé équivalent**, c'est-à-dire, une fois de plus, à **traduire** une formulation en une autre (exemple « de base » : MA = MB équivaut à M est un point de la médiatrice de [AB]).

Le langage algébrique est certes contraignant car son codage est plutôt rigide. Mais sa syntaxe, ses lois, sont clairement définies et peuvent être assez aisément appelées à la rescousse : il peut devenir par là-même sécurisant, les « rails » à suivre sont assez visibles.

En revanche le langage géométrique est beaucoup plus libre, plus souple. Hormis l'usage approprié des mots « techniques », sa seule contrainte est celle de la rigueur logique. Du coup, les "garde-fous" sont beaucoup moins apparents. Il requiert donc une pensée plus agile et plus sûre d'elle-même. C'est sans doute pour cela que les erreurs que l'on y rencontre nous semblent parfois plus « graves ». Mais confondre « inverse » et « opposé » n'est-il pas aussi grave que confondre « médiatrice » et « bissectrice » ? Et nos exigences ne sont-elles pas exagérées, s'il est vrai que « personne ne met en doute la pensée mathématique ou logique, mais la plupart des gens ne tiennent guère à s'en servir (...) On montre facilement que, dans les circonstances normales de la vie, l'homme moyen est capable tout au plus d'accepter l'enchaînement de deux syllogismes simples (...) mais qu'au-delà il abandonne purement et simplement l'exercice de la pensée déductive. »

(Abraham A. MOLES : *Les sciences de l'imprécis*)

Si l'on peut, à la rigueur, jouer le rôle du professeur de français pour l'étude du langage algébrique, cela nous semble tout à fait impossible lorsqu'on aborde la géométrie : le champ est trop vaste, les interactions trop nombreuses et profondes pour que l'on puisse faire l'impasse sur sa collaboration. Quelques exemples : la fonction des conjonctions de coordination, la distinction entre conjecture et certitude, cause et conséquence, affirmation et preuve, particulier et général, constatation et déduction, l'usage du conditionnel, l'emploi des articles définis et indéfinis ...

La rigidité de nos structures institutionnelles est telle qu'il ne nous est guère possible de mettre en place de façon sérieuse et régulière une collaboration « métadisciplinaire » que nous considérons comme de plus en plus nécessaire. Les élèves eux-mêmes sont tellement imprégnés par le cloisonnement disciplinaire qu'ils n'apprécient guère que ce soit le professeur de français qui rende (et surtout corrige !) une interrogation écrite du type de la fiche « Traductions » ... Alors faut-il souhaiter que l'on en arrive à ce que cela « fasse partie du programme » ? ! Certes non quant à la lettre, mais assurément pour ce qui est de l'esprit.

L'accès au calcul littéral et à l'algébrique :

un enjeu du collège

Jean-Claude DUPERRET ; Jean-Claude FENICE
IREM de Reims

« Le calcul algébrique est un outil. Pour quoi faire ? L'idéal serait que cet outil n'apparaisse pas comme un carcan rigide ne servant à rien d'autre qu'à s'enrichir lui-même en fonctionnant à vide, mais au contraire comme un moyen de simplifier les problèmes. Bref, que cet outil soit construit comme réponse à des classes de problèmes. »

Conclusion d'un groupe de travail IREM animé par F. COLMEZ

« L'usage de symboles et de lettre a mis longtemps à se dessiner. Cependant le calcul algébrique a été possible sans recours aux symboles et aux lettres, ce qui a été néanmoins un obstacle à son développement. Notons que pour certains, les symboles n'étaient pas nécessairement une aide. Si Herigone, vers 1645, écrit : «J'ai inventé une nouvelle méthode pour formuler des démonstrations, résumées et intelligibles, sans usage de quelque langage », Hobbes, le philosophe, rétorque vers la même époque : « les symboles sont pauvre mesquinerie, même en tant que nécessaire échafaudage de démonstration. Les symboles, même s'ils raccourcissent l'écriture, ne font pas comprendre plus vite que si c'était écrit en mots ... car il y a un double travail de l'esprit, l'un de réduire les symboles en mots qui sont eux-mêmes symboles, l'autre d'atteindre aux idées dont elles sont le signe.

Peut-on gommer de notre enseignement les errements historiques et faire comme si l'usage des lettres et du symbolisme allait de soi ? »

CHEVALLARD

Algèbre : approche historique et épistémologique[1]

Au début étaient les problèmes !

Que ce soit au XVIII[e] avant Jésus-Christ, à Babylone, ou au III[e] siècle avant Jésus-Christ, avec Euclide, ou au III[e] siècle après Jésus-Christ, avec

[1] Cette partie sur l'aspect historique s'appuie beaucoup sur le travail de Jean-Paul GUICHARD (IREM de Poitiers) et a pu bénéficier de remarques et compléments éclairés d'Evelyne BARBIN et de Henri PLANE (IREM de Paris VII).

Diophante, on retrouve dans l'histoire le rôle fondamental des mathématiques : résoudre des problèmes. Si à chacune de ces époques on assiste à une résolution essentiellement géométrique, on voit aussi poindre les algorithmes qui nous emmèneront vers les équations. Diophante va déjà loin dans cette voie, en utilisant explicitement « un nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités » dénommé « arithme ».

Puis vint Al Khwarizmi !

C'est toujours à des problèmes de toutes sortes (problèmes d'héritage entre autres) que se consacrent les mathématiciens arabes du IX^{e} siècle. Mais l'un d'entre eux, Al Khwarizmi, originaire de Bagdad, va introduire une rupture fondamentale : en regroupant différentes sortes de problèmes qui se résolvent par le même algorithme, il déplace l'objet d'étude qui devient la résolution d'équations.

Nous allons rapidement examiner deux aspects de sa « méthode » : tout d'abord les transformations de base qui permettent de ramener tout problème à une forme canonique ; ensuite la validation des algorithmes de résolution par la géométrie. Pour aider à la lecture, nous traduisons son texte en utilisant des « lettres », mais nous insistons sur le fait qu'il n'y a pas de x et de x^2 chez lui, ce qui montre bien la distinction essentielle entre l'algèbre et la littéralité.

Les transformations de base :

- *"al jabr"* (d'où vient le mot algèbre), qui peut se traduire par *compensation, restauration, remplissage, reboutement,...* (au XVI^{e} siècle, un « algébriste » était un rebouteux !)
  Exemple : « Si 3 choses diminuées de 5 valent 2 choses, je compense avec 5 ; alors 3 choses diminuées de 5 et augmentées de 5 valent 2 choses augmentées de 5 ; 3 choses valent donc 2 choses et 5. »
  Traduction moderne :
  $$\begin{aligned} 3x - 5 &= 2x \\ 3x - 5 + 5 &= 2x + 5 \\ 3x &= 2x + 5 \end{aligned}$$
  "al jabr"
  Il s'agit de supprimer les « – »

- *"al-muqabala"* qui peut se traduire par *mise en opposition, confrontation, balancement :*
  Exemple : « Si 3 choses valent 2 choses et 5, alors 1 chose vaut 5. »
  Traduction moderne
  $$\begin{aligned} 3x &= 2x + 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$
  "al muqabala"

Il s'agit de regrouper les termes semblables dans un même membre (celui où elles sont en nombre positif, car il n'y a pas de négatif chez Al Khwarizmi).

- *"al-hatt"*

Exemple : « Si 2 carrés et 42 valent 20 choses, alors 1 carré et 21 valent 10 choses. »

Traduction moderne :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 42 &= 20x \\ x^2 + 21 &= 10x \end{aligned}$$

"al hatt"

Autre exemple : « Un demi-carré vaut 5 choses et 3, alors 1 carré vaut 2 fois 5 choses et 2 fois 3. »

Traduction moderne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= 5x + 3 \\ x^2 &= 2 \times 5x + 2 \times 3 \\ x^2 &= 10x + 6 \end{aligned}$$

"al hatt"

Il s'agit ici de multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre pour arriver à une forme canonique.

On voit combien ces transformations sont proches de celles que nous enseignons à nos élèves (ajouter ou retrancher ...; multiplier ou diviser ...)

La résolution par la géométrie

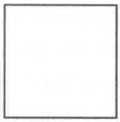
Al Khwarizmi étudie les équations du premier et deuxième degré en les ramenant, à l'aide de transformations ci-dessus, à l'une des six formes canoniques (en langage moderne) :

$$ax^2 = bx \ ; \ ax^2 = c \ ; \ bx = c \ ; \ x^2 + bx = c \ ; \ x^2 + c = bx \ ; \ bx + c = x^2$$

Regardons comment il termine alors la résolution en utilisant la géométrie d'Euclide, sur la forme $x^2 + bx = c$.

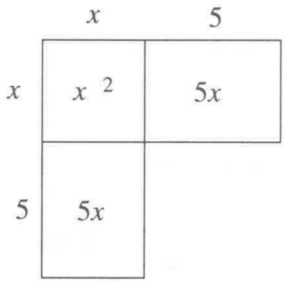
Exemple : « Un carré et 10 choses valent 39 ($x^2 + 10 = 39$) »

1) On construit un carré de côté x :

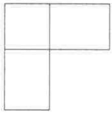


x

2) On borde ce carré de deux rectangles dont l'aire respective est $\frac{10\,x}{2}$. On obtient donc 5 comme autre dimension.

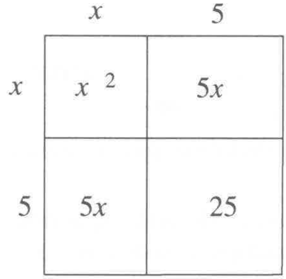


Cette figure



appelée "gnomon", montre bien l'influence des Grecs sur les Arabes, qui furent leurs fidèles traducteurs.

3) On complète alors le grand carré :



• L'aire de ce carré est $x^2 + 2 \times 5x + 25$.

• Or $x^2 + 10x = 39$, donc l'aire de ce carré est 64.

• Donc le côté de ce carré est 8.

• Or, le côté de ce carré est $x + 5$.

• D'où : $x = 3$.

(Al Khwarizmi ne parle pas de l'autre racine de cette équation, car pour lui, 64 n'a qu'une seule racine : 8.)

Regarder $x^2 + 10x$ comme le "début" d'un carré, c'est bien le fondement de la résolution des équations du second degré en Première.

Viète invente le calcul littéral

En 1591, Viète écrit son « *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle* », ouvrage dans lequel il généralise et formalise l'utilisation des lettres :

« Afin que cette méthode (la mise en équation) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre *A* ou par toute autre voyelle, *E, I, O, U , Y*, et les grandeurs données par les lettres *B, C, D,* ou toute autre consonne. »

Mais si Viète crée un tel langage, ce n'est pas pour formaliser l'écriture, mais, comme il le dit dans son traité, pour se donner de nouveaux outils pour résoudre les problèmes.

On peut noter qu'on a régressé dans cette formalisation, et quand nos élèves de troisième découvrent « l'équation » $y = mx + p$, ils se demandent bien quel est le statut de chacune de ces lettres.

Descartes systématise la « résolution par l'algèbre »

En 1637, Descartes initie une méthode qui va porter son nom, la méthode cartésienne, méthode qui consiste à « algébriser la géométrie ».

Descartes opère ainsi un renversement systématique entre l'algèbre et la géométrie : en effet, jusque là, les mathématiciens démontraient leurs algorithmes de résolution par la géométrie, comme on l'a vu chez Al Khwarizmi, en s'appuyant sur le Livre V d'Euclide sur la mesure. Lui indique comment résoudre « tous les problèmes » de géométrie par l'algèbre.

« Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité de deux façons : ce qui se nomme une équation. »

L'algébrisation des problèmes va donner une importance croissante au calcul littéral, en systématisant la manière de s'en servir pour leur résolution.

L'algèbre et l'analyse

En regardant les lettres x, y ... non plus comme des quantités fixes, connues ou inconnues, mais comme des quantités variables, l'algèbre rejoint l'analyse. La force simplificatrice de l'algèbre va s'imposer, chaque fois qu'elle le pourra dans ce domaine de l'analyse : travail sur des quantités infinitésimales, dx, dy, ... ; algébrisation des limites ...

Et nos élèves de lycée ne s'y trompent pas : ils s'attachent très vite aux formules sur les dérivées $(f + g)' = f' + g'$, ... , en oubliant le concept délicat de dérivée en ce point.

Le domaine des structures

Avec Gauss, Grassmann, Cayley, Boole, ... les calculs vont porter sur des objets de plus en plus divers : congruences, vecteurs, matrices, ensembles, éléments logiques ... et vont donner naissance au XIX^e siècle à l'algèbre symbolique qui assure une nouvelle rupture : ce ne sont plus les « choses » désignées par les lettres, « choses » de plus en plus quelconques et diverses, qui vont être l'objet d'étude, mais les opérations que l'on effectue sur elles. C'est l'arrivée des structures, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, ... , et la structure suprême, celle qui gère trois opérations, deux internes et une externe, et les liens qui les unissent : l'algèbre !

L'algèbre et l'enseignant (de mathématiques)

Si vous demandez à un enseignant de collège ce qu'est l'algèbre, il vous dira l'accès au littéral, à la résolution d'équations et à leur utilisation pour résoudre des problèmes. Si vous demandez la même chose à un universitaire, il vous répondra les structures, et vous demandera de préciser s'il s'agit d'algèbre générale, d'algèbre linéaire ou multilinéaire, d'algèbre de Boole... Voilà des contenus bien différents pour la même étiquette !

Mais si vous rencontrez un collègue ayant franchi la cinquantaine (il y en a encore en activité !), lui vous dira qu'il se demande bien au fond ce qu'est l'algèbre : avant 1970, il enseignait au long du collège arithmétique et algèbre, faisant un raccourci de Diophante à Descartes en passant par Viète. En 1970, on lui apprend que l'algèbre, ce n'est pas du tout ça : c'est l'arrivée des mathématiques modernes et l'étude des structures, une transposition de l'université au collège qui a coûté très cher. Il s'en remet péniblement lorsqu'en 1978 on remet un peu plus à l'honneur les nombres, remettant à une juste place la construction de leurs ensembles. En 1986, il voit disparaître le mot algèbre. C'est dans les travaux numériques qu'il retrouve ce qu'il faisait avant 1970, renouant en ceci avec l'histoire.

Dans ces programmes de 1986, ainsi que dans ceux de 1996 qui leur sont très proches, on peut cependant regretter de n'avoir pas conservé un minimum de structures, pour mettre en évidence, outre les propriétés usuelles des opérations (naturelles chez beaucoup d'élèves), la distributivité comme lien essentiel entre multiplication et addition, l'existence des symétriques, opposé et inverse, comme validation de la résolution des équations.

L'algèbre, le collégien, le lycéen et l'étudiant (en mathématiques)

Les programmes de 1986 ont donc remis à l'honneur la première partie de l'histoire de l'algèbre : s'attaquer à des problèmes d'arithmétique, comme Diophante ; apprendre à traduire les problèmes dans un langage symbolique qui ne soit pas contingent à la réalité, mais à des règles clairement établies, comme Viète ; utiliser ce langage pour transformer ce problème en équation comme Descartes ; apprendre à ramener de telles équations à une forme canonique ($bx = c$; au collège éventuellement $ax^2 = c$) comme Al Khwarizmi. Il est important qu'une telle démarche scientifique, même si elle est difficile, soit enseignée à tous, c'est-à-dire au niveau du collège.

Si notre collègien devient un lycéen scientifique, il abordera la deuxième partie de l'histoire, celle qui donna naissance à l'analyse : il verra que ces deux domaines ont des finalités très différentes, qu'on pourrait caricaturer en disant que l'algèbre est la science de l'exactitude, alors que l'analyse est celle de l'approximation. Il comprendra que tout ce qui peut s'algébriser dans l'analyse en sera simplifié (algèbre des limites,...). il apprendra que l'analyse est indispensable pour certaines équations (existence et unicité d'une solution sur un intervalle d'une équation du type $f(x) = \lambda$), voire, plus tard, pour établir certains résultats fondamentaux en algèbre, comme le théorème de d'Alembert (tout polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré à coefficients complexes a n racines complexes distinctes ou confondues) qu'il est impossible de montrer avec une démarche purement algébrique.

Si, de lycéen scientifique il devient étudiant en mathématiques, il aura accès à la troisième partie de l'histoire : celle des structures.

En ceci, on peut dire que l'ensemble du cursus est cohérent, et en tout cas validé par l'histoire !

Quelques réflexions didactiques

Faire des mathématiques, enseigner des mathématiques

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Voilà une question bien vaste et bien ambitieuse à laquelle nous n'avons certes pas la prétention de répondre dans sa globalité. Mais au regard de l'histoire, nous pouvons dire qu'à l'origine, faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes.

Pourquoi, dès l'aube de l'humanité, l'homme a-t-il cherché à résoudre des problèmes, ses problèmes ? Pour se construire une intelligibilité du monde dans lequel il vit. En quoi les mathématiques l'ont-elles aidé dans cette tâche ? En créant des modèles !

Résoudre des problèmes, c'est développer chez l'individu une démarche scientifique, et par là même, des capacités et des comportements d'action transférables dans d'autres domaines : choisir ou construire le modèle le plus pertinent, rechercher la meilleure stratégie, valider,...

Enseigner des mathématiques, c'est donc mener de front deux objectifs :

- apprendre à modéliser,
- enseigner les modèles.

Cette tâche est une véritable gageure, mais elle est essentielle pour amener l'élève à apprendre l'aller-retour entre la situation et le modèle.

Mathématiques et "réalité"

Si faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes, ces problèmes prennent leur sens dans la « réalité ». Mais si les mathématiques se construisent à partir du monde réel de façon pragmatique, elles idéalisent très rapidement ce réel en créant des modèles fondés sur des règles non contingentes à la réalité. En ce sens, les mathématiques ne sont pas la réalité, ce qui renvoie à la question : « Où se situe-t-on lorsqu'on résout un problème ? »

Pour répondre à une telle question, il faut clarifier la notion de problème. Nous en ferons, de façon très grossière, 3 catégories :

① Les problèmes « *réels* », c'est-à-dire ceux issus de la réalité.

② Les problèmes *semi-idéalisés*, c'est-à-dire ceux pour lesquels il reste à faire une « transformation d'informations », mais où le modèle de traitement et de validation est clairement établi.

③ Les problèmes *idéalisés*, c'est-à-dire ceux qui sont donnés dans le modèle.

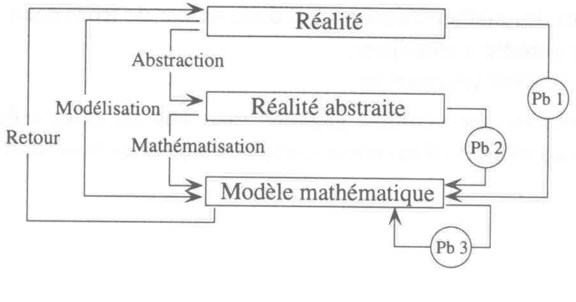
Dans notre enseignement de collège, et plus particulièrement en « algèbre », ce sont essentiellement ces deux dernières catégories qu'on rencontre, ce qui renvoie à une autre question : « Y a-t-il vraiment modélisation dans ce que nous demandons à nos élèves ? »

Pour clarifier cette question, nous introduirons un nouveau concept : « la réalité abstraite », concept intermédiaire entre la réalité et les mathématiques. Ce concept nous paraît devoir remplir une double finalité :

1 - A partie d'une situation réelle, créer une situation épurée, idéale, abstraite, entrant dans un champ de situations déjà reconnues, pour lesquelles l'accès à la mathématisation devient un acte « raisonnable ».

2 - A partir d'un modèle mathématique, créer un champ de problèmes où l'habillage « concret » permettra de revenir à une pseudo-réalité, champ de problèmes où la mathématisation sera donc au niveau du réflexe, champ qui constitue les situations abstraites définies ci-dessus.

On peut résumer cela par le schéma suivant :



Ceci nous amène à quelques réflexions sur l'interaction entre mathématiques et réalité :

- Les mathématiques permettent d'expliquer, de valider, de modéliser des situations issues du monde réel.
- Inversement, ces situations permettent de motiver l'apprentissage des mathématiques.
- Il ne peut y avoir de passage de la réalité aux mathématiques sans passage à l'abstraction : abstraire, c'est idéaliser une situation pour qu'elle puisse se mathématiser ; abstraire, c'est simplifier ; abstraire est peut-être l'acte le plus important que nous ayons à apprendre à nos élèves.

Mais revenons à l'algèbre : l'algèbre est un modèle de « traitement », qui se construit au collège. C'est le lieu privilégié des problèmes « semi-idéalisés ». La réalité ne va pas donner de sens à l'algèbre, mais va motiver son enseignement.

Quelques problèmes pour motiver le recours à l'algébrisation[2]

Examinons les deux problèmes suivants, classiques de quatrième, qu'on retrouve dans un chapitre regroupant problèmes et résolution d'équations du premier degré (modélisation et modèles).

Problème 1

Quatre allumettes mises bout à bout avec une cigarette de 7 cm mesurent 25 cm en tout. Quelle est la longueur d'une allumette ?

On pourrait bien sûr s'interroger sur la « réalité » d'un tel problème pour un élève de quatrième ! Mais notre problème est plutôt centré sur la question :
« Pourquoi irait-il chercher l'algèbre - équation $4x + 7 = 25$ - pour résoudre un problème qu'il sait faire depuis longtemps par “l'arithmétique”, celle-ci assurant la cohérence avec le sens “externe” du problème ? ». Il en va de même avec tous les problèmes se modélisant par une équation du type $ax + b = c$.

2 Certains de ces problèmes sont issus du manuel IREM de Lorraine. Choisis pour leur intérêt, ils ont cependant été dévoyés de leur objectif. Que les auteurs veuillent bien nous en excuser.

Problème 2

Bernard a 3 fois l'âge d'André plus 4 ans, et il a 4 fois l'âge de Claude plus 2 ans. André et Claude ont le même âge. Quel est l'âge de Bernard ?

Ici « l'arithmétique » peut se trouver en défaut[3], et la possibilité de résoudre l'équation « $3x + 4 = 4x + 2$ » devient un enjeu pour la résolution du problème. Si on fait cette résolution, on peut être amené à écrire $-x = -2$. Où est le sens d'une telle phrase mathématique par rapport au problème ? C'est une rupture considérable pour l'élève de quatrième : ***accepter de résoudre un problème par algèbre, c'est accepter d'en perdre le sens externe. Il faut donc soigneusement construire le sens interne.*** Et pour ceci, il faut être bien clair avec les élèves sur :

- ce qui relève des conventions (écriture, priorité des opérations, rôle des parenthèses,...) qu'on ne peut justifier que par le souci de cohérence d'écriture,
- ce qui relève des propriétés liées à la structure de corps, qu'il faut flécher de façon précise, même si les structures ne sont plus objet d'enseignement au collège.

Seul un travail dans le modèle permettra à l'élève d'acquérir assez d'aisance dans le traitement des équations pour qu'il ose en faire un outil « naturel » pour la résolution de problèmes. On ne pourra échapper aux « gammes » !

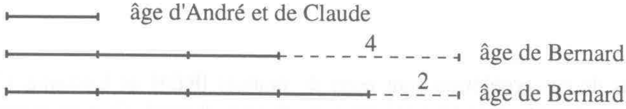
Lorsqu'une inconnue en cache une autre

Dans le problème n°3, lui aussi issu d'un manuel de quatrième, le texte du problème fait clairement apparaître deux inconnues.

Problème 3

Le périmètre d'un rectangle est 80 mètres. La longueur mesure 20 m de plus que la largeur. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

[3] Les tenants de l'arithmétique pourront certainement dire que l'algèbre n'est pas ici nécessaire, et que les élèves trouveront ce problème sans passer par la résolution d'une équation, par exemple en s'aidant d'un schéma :



Mais on ne peut nier que le passage à l'algèbre est une "force" dans ce problème.

Qu'attend-on en quatrième ? Que l'élève arrive à faire de la substitution sans l'écrire, c'est-à-dire en ayant choisi une des dimensions comme inconnue, par exemple la longueur, qu'il soit capable d'arriver à :

$$2(x + (x - 20)) = 80.$$

Qu'est-il naturel d'attendre ? $\begin{cases} x = y + 20 \\ 2(x + y) = 80 \end{cases}$

Or ce traitement relève du programme de troisième. En proposant ce problème trop tôt, ne perdons-nous pas l'occasion de mettre en évidence la force simplificatrice de l'algèbre ? L'arrivée de la deuxième inconnue va marquer la dominance de l'algèbre comme modèle de traitement. Si l'on veut aborder avec nos élèves de tels problèmes dès la quatrième, il faut clairement distinguer avec eux deux temps dans la mathématisation :

- le recensement des inconnues, le jeu des contraintes mutuelles, le choix de la plus pertinente, c'est-à-dire celle qui permettra aux autres de s'écrire facilement en fonction d'elle ;
- la mise en équation proprement dite.

On retrouve ici la démarche de Descartes.

On peut parfaitement travailler sur des problèmes conduisant à l'utilisation de deux « lettres », ne débouchant pas nécessairement sur une équation. A titre d'exemples :

Problème 4

- La somme de deux nombres pairs est-elle paire ou impaire ?
- La somme de deux nombres impairs est-elle paire ou impaire ?
- Le produit de deux nombres entiers consécutifs est-il pair ou impair ?

De tels exercices donnent aux lettres le statut d'outil de démonstration, et amènent à la question :

Faut-il vraiment se mettre dans la réalité pour qu'il y ait problème ?

Pour répondre à cette question, appuyons-nous sur le problème n°5, devenu un grand classique proposé chaque année par l'un de nous deux à ses élèves de troisième :

Problème 5

Deux nombres ont pour somme 300.
De combien augmente leur produit si j'augmente chacun d'eux de 7 ?

Il faut chaque année reprendre l'énoncé avec eux pour les aider à bien comprendre le problème.

A partir de là, immanquablement, surgissent des stratégies numériques, d'abord avec des nombres « sûrs », 150 et 150, puis des choix plus arbitraires.

Le constat général : « il augmente de 2 149 » dans tous les cas conduit à se poser la question de la généralisation et de la validation.

Le passage au littéral fait l'objet d'une longue négociation !

$$(a + 7)(b + 7) = ab + 7a + 7b + 49 = ab + 7(a + b) + 49$$
$$= ab + 7 \times 300 + 49 = ab + 2\,149.$$

Par contre, la plupart des élèves abordent alors facilement la suite :

- si la somme est S, l'augmentation est $7S + 49$
- si l'augmentation de chaque facteur est n, l'augmentation du produit est $300n + n^2$
- si la somme est S, et n l'agmentation de chaque facteur, le produit augmente de $nS + n^2$.

Le retour à la création par chacun de problèmes où ils définissent n et S assure le retour au sens du problème initial.

Nous tirerons trois conclusions d'une telle activité :

- Elle est pour nous une activité de modélisation, car elle comporte deux composantes essentielles :
  - un champ de problèmes,
  - une méthode d'investigation.
- Elle montre la force de l'algèbre comme outil de généralisation qui assure le passage du numérique au littéral (ici avec la distributivité).
- Elle illustre le fait qu'il vaut mieux un « vrai » problème posé directement dans les mathématiques, que de « faux » problèmes pseudo-concrets dont l'habillage cache parfois une absence de mathématiques !

Les élèves feront de la résistance...

Les activités proposées dans la suite concerneront d'abord les élèves de cinquième, car ce niveau, nous semble-t-il, est le premier creuset de la subtile alchimie supposée transférer et étendre les capacités acquises sur des expressions numériques au domaine algébrique. Ce n'est pas tâche facile, car, nous l'avons déjà mis en évidence, il faut avancer simultanément sur deux terrains :

- l'un conceptuel et paradoxal : installer dans l'esprit des élèves une représentation de l'algèbre comme outil d'expression et de résolution efficace, alors que leur niveau en calcul algébrique ne pourra pas permettre d'aborder rapidement des problèmes nécessitant véritablement son utilisation ;

- l'autre technique : leur apprendre un algorithme de résolution, impliquant le renoncement à des méthodes arithmétiques bien assises sur le sens du problème, et jusque là suffisantes.

Développons un peu : supposons que nous ayons réussi à entraîner nos élèves dans le sillage de notre conviction. Il reste encore que la mise en équation d'un problème soulève bien des difficultés :

- l'élève doit reconnaître l'inconnue du problème, accepter de la désigner par une lettre et d'opérer sur elle comme il le ferait sur un nombre connu ;
- de plus, il doit savoir traduire les données (le plus souvent verbales) d'un énoncé en une chaîne d'opérations écrites en ligne, en respectant les conventions d'écriture.

C'est pour lui une démarche doublement difficile. Il doit d'un côté accepter des conventions d'écriture, opérer sur une « chose » (une lettre) qui « ne donne pas de résultat » (voir plus loin : statut de l'égalité), donc vide de sens, et de l'autre aller à l'encontre de sa pratique habituelle de résolution. Comme il l'a appris à l'école élémentaire, il part de ce qui est connu, et, *le sens de l'énoncé éclairant le choix des opérations,* de résultat numérique en résultat numérique, il aboutit à la valeur inconnue, cherchée.

Malheureusement, dans la résolution algébrique que l'on veut substituer à cette démarche, une fois le problème traduit en équation, on applique une méthode de résolution indépendante du sens du problème posé. Celui-ci *n'indique plus le choix des étapes de la résolution* : il va même *devenir un obstacle* à l'acquisition de l'algorithme... Les règles algébriques de résolution, elles, reposent sur une *justification mathématique* (la structure algébrique des nombres : tout nombre possède un opposé, il existe un inverse pour tout nombre non nul, tout nombre est régulier pour l'addition, tout nombre non nul est régulier pour la multiplication). Mais pour être opérationnelles, elles vont donner lieu à des algorithmes, voire des « recettes » (transposition d'un membre dans l'autre,...). La perte de sens fait obstacle, le problème n'éclaire plus la démarche, et pour que l'élève accepte de renoncer à ses méthodes arithmétiques, il faut proposer rapidement des problèmes qui les mettent en échec.

EN CINQUIEME : Calcul numérique ... algébrique ... mise en équation ... résolution ...

Les activités proposées ci-après illustrent les étapes de la démarche adoptée (elles sont à varier et multiplier) :

1. Asseoir la pratique de l'écriture et du calcul des expressions numériques.
2. Faire accepter de nouveaux statuts de la lettre dans une expression.
3. Faire prendre conscience que le symbole « = » n'est pas seulement employé pour annoncer un résultat (représentation malheureusement confortée par la touche $\boxed{=}$ des calculatrices de collège).
4. Faire découvrir qu'utiliser des lettres, avec de nouvelles significations, permet de traduire économiquement des programmes de calcul, des énoncés de formules, pour une utilisation facilitée.
5. Faire constater que savoir transformer des expressions permet de résoudre des problèmes.
6. Faire apprendre à résoudre une équation traduisant un problème, vérifier les solutions, les interpréter.

a - Du numérique ...

Une maîtrise suffisante du calcul numérique apparaît comme prérequis au transfert de compétences de l'arithmétique à l'algèbre. C'est pourquoi nos premières activités préparatoires en cinquième insistent sur la pratique du calcul mental (utilisation de nombres simples), la connaissance des priorités opératoires (utilisation des parenthèses, priorité de la multiplication,...), des conventions d'écriture et de lecture. Les manuels traitent généralement abondamment cette étape. Nous rappellerons simplement les intentions qui sous-tendent ces activités :

➟ *Faire rappeler aux élèves la signification des parenthèses* : elles indiquent l'ordre d'exécution lorsque plusieurs opérations de natures différentes sont présentes dans un programme de calcul écrit en ligne.

➟ *Faire utiliser les parenthèses* pour écrire en ligne une telle suite d'opération. A titre d'exemple, on peut varier les exercices suivants :

L'exercice 1 se situe à un simple niveau de reconnaissance : savoir *reconnaître* une écriture correctement parenthésée (remarque : à ce moment de l'apprentissage, aucune convention de simplification n'a encore été présentée). C'est l'occasion de faire constater qu'organiser n opérations « en ligne » nécessite $n - 1$ parenthèses. La prise de conscience de la « lourdeur » consécutive de l'écriture facilitera alors l'acceptation des conventions à venir.

L'exercice 2, demandant d'organiser l'ordre du calcul par des parenthèses, se situe à un niveau plus difficile - synthèse des connaissances, création - mais il motive bien les élèves, et peut même faire l'objet d'une compétition dans la classe.

Exercice 1

Samedi après-midi, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 7,20F, un lot de 5 stylos à 7,50F le lot, 3 cahiers identiques, de même prix. On lui a rendu 43F lorsqu'il a donné son billet de 100F à la caissière.
Pour calculer le prix d'un cahier, lesquels de ces calculs écrits en une seule ligne te semblent donner la réponse correctement ?

$$A = 100 - 43 - 7{,}20 \times 4 + 7{,}50 : 3$$
$$B = 100 - (43 - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3)$$
$$C = [(100 - 43) - ((7{,}20 \times 4) + 7{,}50)] : 3$$
$$D = (100 - 43) - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3)$$
$$E = [((100 - 43) - (7{,}20 \times 4)) - 7{,}50] : 3$$

Exercice 2

Compléter l'expression « 3 ... 3 ... 3 ... 3 » avec une ou plusieurs des quatre opérations, et des parenthèses, de façon à obtenir tous les nombres de 0 à 10.
(On peut utiliser quatre « 4 », et demander les nombres de 0 à 15, ou quatre « 6 » et demander les nombres de 0 à 20).

Au passage, on encourage le calcul mental grâce à la simplicité des nombres choisis.

➡ *Faire découvrir les conventions* : L'utilité, sinon la nécessité, d'utiliser des conventions pour alléger l'écriture des « programmes de calcul en ligne » étant apparue dans le bilan fait avec les élèves, on propose de découvrir ces règles grâce à la calculatrice (scientifique, type Collège : une calculatrice rétroprojetable est souhaitable...). Celle-ci devient alors outil d'apprentissage, et prendra un statut de référent pour rappeler les conventions oubliées.

a - On fait rappeler d'abord, en calculant sur des expressions comme $(2 + 3) + (8 + 7)$, $(2 \times 3) \times (5 \times 10)$, la particularité de ces deux types de suites d'opérations qui laissent une totale liberté de l'ordre du calcul. On fait constater parallèlement que cela ne fonctionne plus, ni avec la soustraction, ni avec la division, ni avec les « mélanges » d'opérations.

b - Avec la calculatrice, étude de la « frappe en suivant » (mélange d'opérations « réciproques » + et – ; ou × et :). On fait découvrir qu'en l'absence de parenthèses, une suite d'additions et de soustractions (respectivement de mutiplications et de divisions) se calcule de gauche à droite. Exemple :

Calcul à exécuter	Résultat affiché à chaque frappe	Remarques
$3 + 8 - 7 + 2 =$	3 ; 3 ; 8 ; 11 ; 7 ; 4 ; 2 ; 6	La calculatrice effectue...

c - On fait ensuite découvrir qu'en l'absence de parenthèses, la multiplication (la division) est prioritaire sur l'addition et la soustraction.

d - Des manipulations analogues, sur des expressions utilisant 3 ou 4 opérations différentes, permettent de trancher dans des cas comme $5 + 3 \times 12 : 4$ ou $5 + 12 : 4 \times 2 - 1$. Malgré l'absence de problème posé en amont pour les motiver, ces exercices techniques sur des nombres simples mobilisent bien l'attention des élèves, entraînent au calcul mental, et peuvent même être l'occasion d'un jeu de compétition intergroupes dans la classe.

Remarque : on constate que s'installe souvent une sorte de priorité de l'addition sur la soustraction, lors du calcul « à la main ». L'expression « $11 - 8 + 1$ », par exemple est fréquemment calculée comme $11 - 9$. Ceci peut durer jusqu'en troisième pour un pourcentage non négligeable d'élèves, dans les sommes algébriques : c'est le moment d'en débattre en groupe, de faire prendre conscience du non-respect de la convention dans ce genre de pratique, et de l'incidence sur le résultat.

b - ... au littéral : des lettres pour quoi faire ?

Les élèves ont déjà rencontré l'utilisation des lettres dans les formulaires, et pratiqué des exercices de substitution. Dans $a = b \times h : 2$, les lettres ont encore souvent un simple statut d'abréviation ; le signe « = » celui d'annonceur du « résultat » d'un programme de calcul. Nous allons donc maintenant travailler à faire évoluer ces statuts (chacun des exercices suivants ne constitue bien sûr qu'une illustration du type d'activité que l'on peut mener).

L'exercice 1 vise à :

- faire distinguer, en comparant des expressions numériques, les composants invariants de celui qui se comporte comme une lettre (laquelle prend dans ce cas le statut de *paramètre*, beaucoup plus délicat à accepter que le statut d'inconnue, nous y revenons plus loin),
- faire remarquer l'économie de la traduction algébrique (d'une expression fonctionnelle, dans ce cas), aussi bien en lecture qu'en écriture.

Exercice 1

Pour remplir le tableau des prix de ses différents sachets de chocolats, un commerçant a effectué les calculs ci-dessous :
$30 + 2 \times 5$; $30 + 2 \times 6$; $30 + 2 \times 7$; $30 + 2 \times 8$; $30 + 2 \times 9$ ... etc, jusqu'à $30 + 2 \times 25$
Il veut communiquer par téléphone celle liste de calculs à un collègue. Comment pourrait-il raccourcir le message? (c'est-à-dire éviter de dicter exactement ce qui est écrit ?).

Les diverses suggestions suscitent un débat : si aucun élève ne l'a proposée, l'utilisation d'une lettre pour désigner la seule variable de cette situation doit être apportée par le professeur.

Ensuite, les exercices d'expression littérale de situations (à support numérique et/ou géométrique) doivent être multipliés, ainsi que les exercices de substitution de valeurs numériques dans une formule donnée (voir plus loin, exercices proposés en quatrième). Il s'agit d'installer un nouveau statut de l'utilisation d'une lettre : celui de *paramètre*. Il devra lutter contre celui d'*abréviation* (h pour *hauteur,* c pour *côté*,...) sans doute déjà rencontré, ne serait-ce que dans les formulaires. Si cet usage peut éventuellement revenir par la suite, une fois le statut de paramètre accepté, comme aide à rappeler la signification des différentes grandeurs en jeu dans un même problème, il semble plus judicieux, pendant la période d'apprentissage du calcul littéral, de s'écarter de cette représentation « abréviation ». Viète et Descartes distinguaient clairement dans leur notation le statut d'**inconnue** (valeur à *déterminer*, dans un contexte de données connues) et celui de **paramètre** (valeur *indéterminée, pouvant être quelconque dans la situation étudiée*), utilisant pour celui-ci les première lettres de l'alphabet et pour celui-là les dernières. Cette précaution raisonnable semble avoir disparu de nos manuels, et même de nos habitudes. Mais pour l'élève, entre la recherche d'un nombre inconnu, en quelque sorte préexistant et désigné provisoirement par une lettre acceptée comme nombre, et les manipulations sur une égalité d'expressions littérales où les lettres ne désignent plus rien de précis, il y a une **énorme rupture de contrat**. Et lorsque la distinction est possible, changer de notation de façon cohérente, selon que l'on se place sur l'un ou l'autre terrain, peut aider à expliciter cette rupture : on peut présenter par exemple *l'identité* relative à la différence de deux carrés sous la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, la *mise en équation* d'un problème sous la forme $26 - x^2 = 1$, et souligner à chaque occasion la différence fondamentale entre ces deux situations.

L'exercice 2 va dans ce sens. Il veut conduire les élèves à :
• accepter que la lettre ne désigne pas une valeur « fixée à l'avance », en lui donnant successivement des valeurs différentes (statut de paramètre) ;
• considérer une égalité comme une *phrase* qui peut être fausse ou vraie, selon la valeur attribuée à la lettre ;
• se mettre d'accord sur ce que signifie : « égalité de deux expressions *littérales* » (notion d'identité).

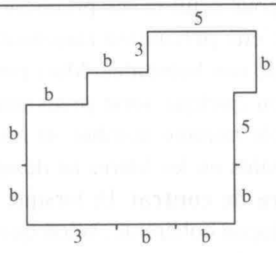
Exercice 2

Lucie a calculé les expressions « $n \times n$ » et « $2n$ » pour $n = 0$, puis pour $n = 2$.
Elle conclut : l'expression « $n \times n$ » est égale à l'expression « $2n$ ».
Etes-vous d'accord ? Expliquez.

L'exercice 3 demande de « calculer sur des lettres », à savoir, transformer une expression littérale pour prouver son identité à une autre. Les élèves doivent, à ce niveau, se dégager des vérifications numériques et *faire confiance aux règles de transformation* (distributivité ici) pour valider l'identité ... C'est un cap d'abstraction difficile, il nécessite que la distributivité soit bien acceptée comme propriété générale permettant deux écritures d'une même valeur. La question 2) demande de réinvestir cette compréhension sur l'identité en choisissant la plus simple des trois formules équivalentes pour calculer aisément, sans que ce soit demandé explicitement. Les élèves qui utilisent la formule d'Eric, restant attachés au calcul élémentaire du périmètre, risquent fort de n'avoir pas compris la distributivité.

Exercice 3

Pour exprimer le périmètre de ce polygone en fonction de b, Eric, Elodie, Marc ont écrit :
• Eric :
$b + 2 + b + 3 + 5 + b + 2 + 5 + b + b + b + 3 + b + b$
• Elodie : $8b + 20$
• Marc : $4 \times (2b + 5)$.



1. Ces expressions sont-elles égales ? Si oui, prouvez-le.
2. Calculer ce périmètre pour $b = 1$, puis pour $b = 4$, puis pour $b = 20$.

c) Et enfin, des équations en cinquième ...

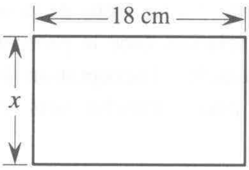
En cinquième, la résolution de problèmes à une inconnue s'appuie sur le « sens » des opérations. L'élève doit d'abord être capable de retrouver la suite d'opérations partant de ce qui est inconnu pour aboutir au connu, en utilisant les valeurs numériques données par l'énoncé, pour ensuite « défaire » ces opérations en ordre inverse. Si certains élèves parviennent à exprimer directement le programme de calcul de l'inconnue, d'autres ne maîtrisent pas encore cette compétence ; on peut y retravailler avec eux en abordant par exemple des problèmes du type suivant :

Exercice 1

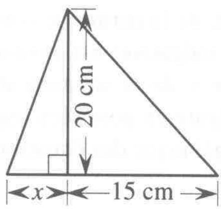
Pour chacun de ces problèmes :

- Ecrire le programme de calcul qui donne l'aire de la figure.
- Analyser l'ordre des opérations, puis écrire le calcul de la dimension inconnue x.

L'aire de ce rectangle est 45 cm^2
Calculer la longueur x



L'aire de ce triangle est 200 cm^2
Calculer la longueur x



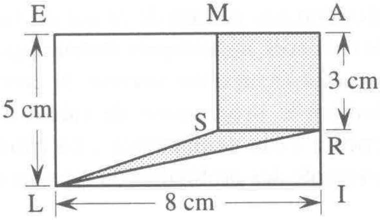
La première question demande en fait la mise en équation du problème, dans deux cas où la traduction littérale peut « partir de x », ce qui permet ensuite la résolution arithmétique (on « remonte » à x).

Comme nous l'avons souligné au début de cet article, l'algèbre ne s'impose pas dans des problèmes, mais il n'est pas encore question de proposer l'inconnue dans chaque membre, et encore moins deux inconnues ... Cependant, pour un élève de cinquième, l'apparition de la même inconnue à deux endroits de l'énoncé, ou à deux endroits du programme de calcul, peut déjà bloquer la résolution arithmétique précédente, et motiver la littéralisation.

C'est l'objectif de l'exercice 2 :

Exercice 2

AILE et MARS sont deux rectangles.
Le point M est situé sur [EA].
A quelle distance de A faut-il placer le point M pour que l'aire de la surface grisée soit la moitié de celle du rectangle ?



Enfin, le recours à l'algèbre prendra légitimement le champ sur la résolution arithmétique dans les problèmes qui font appel aux nombres relatifs. Cependant la traduction d'un énoncé avec ces nombres ne peut être naturelle pour l'élève de cinquième : c'est un apprentissage à conduire. La présentation très directive de la mise en équation dans l'exercice suivant vise à obliger les élèves à contourner la résolution arithmétique qui émergerait sinon encore très majoritairement. Il s'agit de faire prendre conscience que donner à x un statut de nombre relatif permet de traduire l'ignorance où l'on est, dans cette situation, de la nature de l'inconnue (gain ou perte ?). Le signe de la solution trouvée (négative) est ensuite à interpréter, en relation avec le problème. La « culture » de la solution arithmétique fait obstacle : l'acceptation de solutions négatives possibles représente un pas de plus à franchir vers le traitement algébrique des équations.

Exercice 3

L'enfer du jeu

Hier Marcel jouait au poker avec les dangereux Alfred et Joël. Au début de la partie, il possédait 260F. Il ne se rappelle plus quelle somme il a gagnée ou perdue au premier tour de jeu, mais au deuxième tour, il a gagné 150F. Au troisième tour, il a perdu 320F, et au suivant il a gagné 180F. Il possédait alors 160F après ce dernier tour... Combien a-t-il gagné, ou perdu, au premier tour ?

1 - On a appelé x le gain ou la perte que l'on cherche.
Compléter la traduction de l'énoncé commencée ci-dessous :

$$\ldots\ldots + x + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

2 - Résoudre cette équation. Que s'est-il passé au premier tour ?

EN QUATRIEME : Calcul littéral ... égalité ... mise en équation ... algorithme de résolution ...

Les commentaires des programmes insistent sur l'apprentissage « *conduit très progressivement* » du calcul littéral, soulignant au passage « *la difficulté importante* » de « *l'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques* ». On vient de voir comment ce travail peut être préparé en cinquième, il doit être poursuivi.

En quatrième, le jeu dialectique entre cet apprentissage et celui de la résolution de problèmes par la mise en équation s'accentue. En cours d'année, les progrès accomplis par les élèves en calcul algébrique, leur capacité accrue à donner du sens aux expressions littérales, et leur représentation nouvelle de l'égalité, vont nous autoriser à mettre véritablement en échec les pratiques de résolution arithmétique pour proposer un nouvel outil.

Si la résolution d'équations de la forme $ax + b = c$, bien que non exigible, a été initiée en cinquième, alors l'algorithme de « simplification » des équations du premier degré, présenté en quatrième, tendra vers un but plus facilement identifié, qui aura du sens pour les élèves (arriver à une égalité de la forme « x = valeur numérique »). Sinon il risque de se présenter comme une suite de manipulations formelles aléatoires, dont le critère d'arrêt est flou : il n'est pas rare de voir une « résolution » s'arrêter sur un « résultat » (souligné ou encadré !) du type :

$$x = \frac{3x + 1}{2}.$$

Les exercices d'analyse, de production et de transformation d'écritures littérales sont assez nombreux dans les manuels. Il est cependant recommandé de les lier le plus souvent possible à une situation qui les motive. Les activités de transformation sont les plus difficiles (on lira avec profit l'article écrit par une équipe de l'IREM de Strasbourg, dans « *Des chiffres et des lettres au Collège* - 91/92 - Bulletin Inter-IREM 1er Cycle » pages 147 à 177), et les plus mal réussies. Elles supposent l'acceptation du statut de la lettre, la compréhension de la finalité de la transformation, et une analyse fine des expressions nécessitant une bonne connaissance des conventions de priorité, de la distributivité ... Les « gammes » seront nécessaires, mais la virtuosité n'est pas le but recherché. Cependant la compréhension de l'algorithme de résolution en dépend : c'est la capacité à appréhender les transformations possibles d'une expression littérale, à en anticiper le résultat, qui permet de conduire correctement les étapes de cet algorithme. L'élève qui « passe » de

« $\frac{x+1}{2} = 3x$ » à « $\frac{1}{2} = 2x$ » maîtrise apparemment plus mal les priorités opératoires que celui de la résolution.

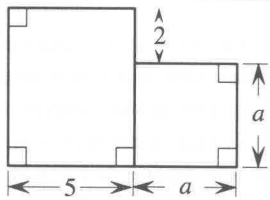
Transformation d'écritures littérales

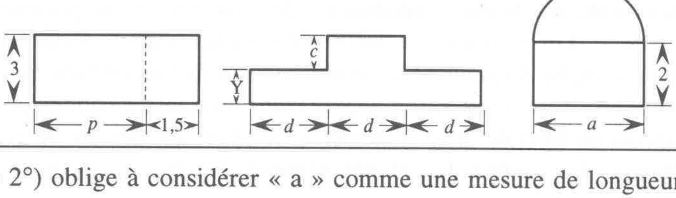
Dans les activités proposées ci-après, nous reprenons la démarche adoptée en cinquième, en insistant davantage sur la traduction d'un énoncé, le sens de l'égalité, dans des situations plus complexes, parallèlement à la recherche d'une meilleure maîtrise du calcul littéral (certains exercices de cette partie peuvent éventuellement être abordés dès la cinquième : le nouveau découpage du collège permet un étalement plus souple de l'initiation, particulièrement lorsque le professeur garde sa classe sur les deux années du cycle central). Nous pouvons alors soumettre aux élèves des problèmes mettant réellement en difficulté les méthodes arithmétiques, au profit de la résolution algébrique. L'outil « algorithme de résolution » pourra alors légitimement devenir objet d'étude.

Dans l'exercice 1, à partir d'un support géométrique, on veut, comme en cinquième, faire élaborer une expression, et réciproquement obliger à donner du sens à une expression en faisant inventer un support géométrique correspondant. On travaille la capacité à opérer sur des lettres, et à changer de registre géométrique ↔ numérique.

Exercice 1 ***(d'après IREM de Poitiers)***

1. L'aire de la figure dessinée ci-contre est exprimée par la formule :
   $a^2 + 5a + 10$ (vérifier !)
2. Avec la même longueur a dessiner une figure dont l'aire est exprimée par la formule : $2a(a + 1)$
3. Exprimer le périmètre et l'aire des trois figures ci-dessous :





Le 2°) oblige à considérer « a » comme une mesure de longueur, et, en analysant la hiérarchie du calcul, reconnaître un modèle de « formule » d'aire : produit de deux mesures de longueurs. Pour la grande majorité des élèves, il n'est pas évident d'assimiler $2a$ et $(a + 1)$ aux deux dimensions d'un rectangle (pour la traduction la plus simple ; la transformation en $2a^2 + 2a$ fournit une autre illustration géométrique possible).

L'activité présentée ci-après revient sur le statut de l'égalité - « assertion dont la vérité est à examiner » -, en abordant de plus celui des lettres dans une expression littérale - inconnue, variable, indéterminée.

Exercice 2

Voici plusieurs égalités...

A) $25 - 4 = 3 \times 4$	B) $2x \times 3y = 6xy$	C) $13 + 4 = 21 - 4$
D) $AB^2 + BC^2 = AC^2$	E) $10 + x = y$	F) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
G) $3(x - 1) = 4$	H) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$	
I) $AB + BC = AC$	J) $xy + x = (1 + y)x$	

K) V désigne le volume du cylindre de révolution de hauteur 4, r désignant le rayon de la base : $V = 4\pi r^2$

Quel classement de ces égalités proposez-vous ? D'après quels critères ?

Cette activité est proposée aux élèves travaillant par petits groupes (3 à 4 élèves). Du premier classement souvent proposé (avec des lettres/sans lettres) on affine vers un second classement par le débat dans la classe : égalités vraies/égalités fausses/égalités pour lesquelles on ne peut pas décider immédiatement (cela dépend de la valeur attribuée aux lettres). C'est l'occasion :

➞ d'approcher la notion **d'identité** (égalité toujours vraie, quelle que soit la valeur de la lettre) : on souligne à cette occasion la nécessité du calcul littéral comme outil de démonstration : l'accumulation des valeurs « solutions », sans contre-exemple trouvé, a-t-elle force de preuve ? C'est un moment important du débat dans la classe;

➞ de revoir comment établir qu'une assertion est fausse : il suffit qu'il existe un contre-exemple, une valeur de la (des) variable(s) qui rend l'égalité fausse ;

➞ de continuer à faire évoluer le statut de la lettre : acceptée comme **inconnue** d'un problème en cinquième où elle désigne alors pour les élèves une valeur prédéterminée, qu'il va falloir trouver (exemple : G), elle peut être valeur **indéterminée** (paramètre), sans référence à une situation concrète (exemple : H), voire **variable** dont dépend la valeur d'une grandeur (exemple : l'expression fonctionnelle E) ; c'est au professeur de le faire émerger au cours du débat, et à chaque nouvelle occasion par la suite.

L'exercice 3, ludique, oblige les élèves à donner du sens à des expressions littérales. Ils doivent opérer sur les lettres (factoriser, réduire - à un niveau simple), pour comparer, puis compléter des expressions littérales, pour qu'elles désignent un même nombre. Le carré n°2 conduit d'abord à résoudre deux équations (vues en cinquième) puis à utiliser les formules trouvées dans le carré n°1. Les élèves peuvent valider leur travail en vérifiant si le carré est bien « magique ».

Exercice 3

Le carré n° 1 ci-dessous est un carré magique : la somme S des nombres calculée en ligne, en colonne et en diagonale est la même.

a		b	$a+3$
	$a+5$	$a+6$	$a+8$
	$b-4$	$a+10$	$a+4$
		$a+1$	

Carré magique n°1

25	10		

Carré magique n°2

1. Exprimer S en fonction de a et de b.
2. Compléter toutes les cases du carré n°1.
3. Utiliser les formules trouvées pour compléter le carré magique n° 2.

Extrait de "Petit x", numéro spécial Activités Novembre 1992

Le type d'exercice suivant, en demandant, sur des exemples numériques d'abord, puis sur des expressions littérales, d'employer l'égalité et un langage mathématique pertinent pour *traduire le même nombre de deux manières différentes*, ou *d'exprimer une relation entre plusieurs inconnues*, prépare à la mise en équation.

Exercice 4

1) A votre avis, quand on écrit : $25 = 4^2 + 3^2$, veut-on mettre en évidence :

a- Que l'addition des carrés de 3 et de 4 donne 25 comme résultat ?

b- Que le nombre 25 est une somme de deux produits ?

c- Que le nombre 25 est la somme des carrés de deux entiers consécutifs ?

....

2) Quelle propriété des nombres 1, 2 et 3 met en évidence l'écriture :

$$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 ?$$

3) x désigne un nombre inconnu, et la lettre n représente un nombre entier naturel. Dans chaque cas suivant, traduire en français ce que nous apprend l'égalité proposée sur x et n :

- $x = n + 1$
- $x = n - 1$
- $x = 2n$
- $x = n^3$

4) Quelle(s) écriture(s) choisissez-vous pour désigner trois nombres entiers consécutifs quelconques ? Entourez ce qui vous semble convenir :

a , $2a$ et $3a$; x, y et z ; $a, a + 1$ et $a + 2$; 5 , 6 et 7 ?

Les compétences travaillées dans l'exercice précédent (en particulier au 3°) devront être réinvesties dans l'exercice 5 suivant, pour exprimer « nombres consécutifs » dans sa signification générale. Après discussion sur la signification de « peut être », les élèves proposent d'abord une accumulation de valeurs particulières (impaires), mais sans arriver à une justification, voire une certitude, de la non-existence d'un résultat pair. le passage à l'expression littérale est alors suggéré. La démonstration de la « non-parité » de cette expression passe par une **transformation de l'écriture**. Il est important de faire prendre conscience aux élèves, dans la phase finale de l'activité, que l'on a fait une démonstration d'une propriété numérique grâce au calcul littéral, et quelles en sont les étapes.

Exercice 5

Vrai ou faux ? ... A démontrer !

La somme de deux nombres entiers consécutifs peut être un nombre pair.

On peut multiplier ensuite les exercices de ce type, faisant travailler à la fois sur la compréhension d'une assertion (distinction entre « il existe...» et « pour tout... ») et la démonstration (recherche d'un contre-exemple, ou mise en forme littérale ?)

Exercice 6

Vrai ou faux ?

1. La somme de deux multiples de 3 est, dans tous les cas, un multiple de 3.
2. Il peut arriver que le produit de deux multiples de 3 ne soit pas multiple de 9.

....

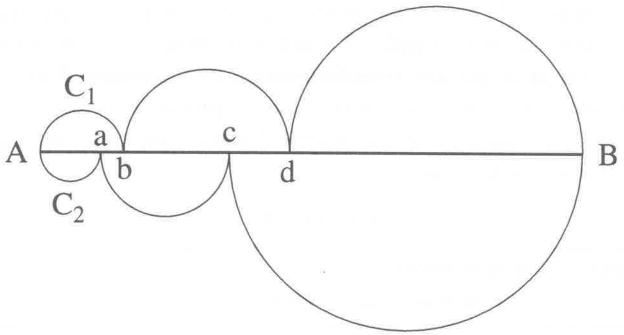
3. (N'ayez pas peur !) Le produit de la somme d'un entier et de son double, par son triple, est toujours le carré d'un nombre entier.

Remarques : Dans cet exercice, donné dans le registre numérique, on fait utiliser des propriétés opératoires connues en cinquième : associativité de la multiplication, factorisation simple. Dans le 3), selon le choix de la stratégie de transformation de « $(n + 2n) \times 3n$ » adopté, la preuve apparaît plus ou moins rapidement ; il est bon d'en débattre (développer, ou factoriser d'abord ?).

A partir d'un support géométrique, « visuel », l'exercice 7 motive la conjecture, provoque le besoin de preuve. Pour prouver, il faut traduire dans le registre numérique, puis algébrique pour le 4°. Il faut là encore transformer des expressions littérales pour pouvoir les comparer.

Exercice 7

Pour aller de A à B, on peut suivre la ligne droite [AB], ou passer par les demi-cercles.



1. Lequel des trois chemins semble le plus long ?
2. En prenant les mesures qui vous semblent nécessaires, exprimez la mesure du chemin AB, celle du chemin C_1, et celle de C_2.
3. Le résultat constaté est-il encore vrai si on modifie la position des points a, b, c et d ?
4. Comment écrire la preuve ?

Extrait de "Petit x", nuéméro spécial Activités Novembre 1992

L'exercice 8, partant également d'une situation géométrique, révèle une propriété non évidente à priori pour les élèves (Théorème de Viviani). Il demande un guidage assez fort, car le changement de point de vue (de la géométrie aux longueurs, puis des longueurs aux aires) est loin d'être naturel, mais il met bien en évidence la force du langage algébrique : la manipulation des expressions littérales **explique** le résultat (par la factorisation possible de la mesure du côté), ce qui disparaît dans le seul calcul arithmétique. Nous essayons d'en faire prendre conscience aux élèves, à l'issue de cette activité...

Exercice 8

1. Construire un triangle équilatéral TRI, de hauteur 6 cm.
2. Placer un point P à l'intérieur, et construire les projetés E, F et G de P, orthogonalement sur [TR], [RI] et [IT].
3. Mesurer pour évaluer la somme PE + PF + PG.
4. Recommencer avec d'autres positions de P.
5. Que peut-on conjecturer ?
6. Pour le prouver ... une indication ? Découper le triangle en 3 triangles de sommet P, puis exprimer l'aire de TRI de deux manières...

Equations

Nous nous sommes attachés jusqu'ici essentiellement à donner du sens aux expressions littérales, et à mettre en évidence l'intérêt de leur utilisation pour démontrer des propriétés générales. Les compétences en calcul ayant évolué, nous pouvons aborder la résolution de problèmes à une inconnue dans des situations plus complexes qu'en cinquième, et où le passage dans le registre algébrique va apparaître aux élèves comme nécessaire.

L'exercice 9 est destiné à faire émerger les représentations des élèves sur la notion d'équation. On constate souvent la confusion entre *expression littérale* et *équation*. Il faut donc que chaque élève soit capable de contrôler lui-même s'il a traduit un problème par une équation : présence d'une **égalité** et d'une inconnue (au moins). Cette prise de conscience doit l'inciter à rechercher systématiquement dans un problème *une inconnue* ***et*** *une relation d'égalité à traduire.*

Exercice 9

Qu'est-ce qu'une équation ?

Dans ce tableau, entoure au crayon les cases contenant des *équations*.

$2(x-5)+3x$	$y=2$	$2x+4=2$
$2(4-1/2)=3+4$	$4=3x+2y$	$4x=5-3x$

L'exercice 10 fait redéfinir la notion de *solution d'une équation*, et fait prendre conscience au passage du statut conditionnel de l'égalité d'une part, et de la possibilité de l'existence de plusieurs solutions, voire d'aucune, d'autre part.

Exercice 10

Qu'est-ce qu'une solution d'une équation ?
Vrai ou faux ?
- le nombre -1 est une solution de l'équation : $2x + 2 = 0$.
- N'importe quel nombre est une solution de l'équation : $y - 1 = 1 + y$.
- Aucun nombre n'est solution de l'équation : $2x + 3 = 2(x + 1)$.
- Le nombre 7 est une solution de l'équation : $x + 3 = 2x - 8$.
- N'importe quel nombre est une solution de l'équation : $0 \times y = 0$.
- L'équation $x + 2y = 2$ n'a qu'une solution : le couple de valeurs (1 ; 0,5), (c'est-à-dire : $x = 1$ et $y = 0{,}5$).
- Le nombre 4 est la solution de l'équation $x^2 = 16$. Il ne peut pas y en avoir d'autres.

L'exercice 11 veut faire découvrir la notion « d'équations plus ou moins faciles à résoudre », ayant la même solution. La justification de l'équivalence n'est pas abordée ici : il s'agit uniquement de faire savoir que l'on peut parfois remplacer une équation complexe par une équation simple *donnant facilement la solution*. La comparaison des *formes des équations* est demandée, pour initier le travail qui va suivre : certains élèves peuvent déjà pressentir (en comparant par exemple « $2x + 3 = 5x$ » et « $3 = 3x$ ») l'algorithme de transformation permettant de « passer » de l'équation complexe donnée à l'équation simple ayant la même solution.

Nous considérons encore « $x = a$ » (a étant une valeur connue) comme une *équation*, pour éviter de conforter la représentation d'égalité « dynamique », annonciatrice d'un « résultat », vite installée dans l'esprit de nos élèves. C'est encore une égalité conditionnelle, équivalente à l'équation initiale ; elle a donc le même statut, mais là, la solution est évidente, unique : a.

Exercice 11

a- Ces équations ont chacune une solution. Associer les équations qui ont la même solution :

$\boxed{A}$ $2x + 3 = 5x$; $\boxed{B}$ $2(x + 9) = 4x$; $\boxed{C}$ $2x + 12 = 5x + 9$; $\boxed{D}$ $5x - 1 = x$

$\boxed{E}$ $3 = 3x$; $\boxed{F}$ $x = 0{,}25$; $\boxed{G}$ $x + 9 = 2x$; $\boxed{H}$ $4x = 1$; $\boxed{I}$ $9 = x$.

b- Lorsque plusieurs équations ont la même solution, laquelle permet de trouver ***le plus facilement*** cette solution ? ....

c- On voit immédiatement la solution de l'équation « $9 = x$ » : le nombre 9.
Peut-on affirmer qu'il en est de même pour l'équation « $3x + 85 = 5x + 27$ » ?
A-t-elle une solution ? Une seule ?
Voyez-vous comment trouver l'équation simplifiée (de la forme « x = nombre connu ») ayant la même solution ?
d- Inventer des équations qui ont la même solution.

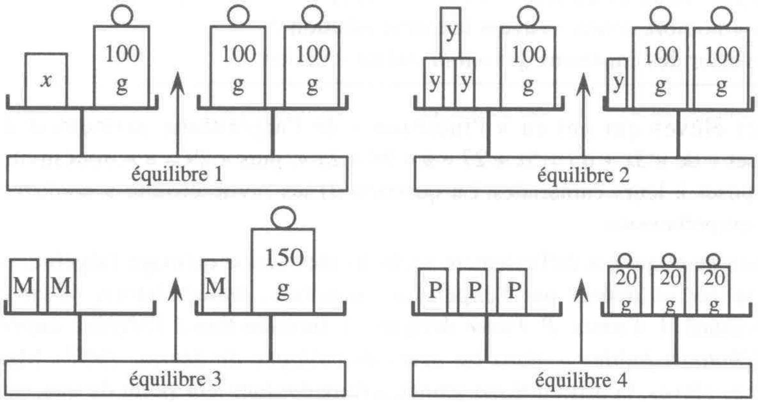
Les élèves qui ont eu « l'intuition » de l'algorithme permettant de « passer » de « $3x + 85 = 5x + 27$ » à « $58 = 2x$ », puis « $29 = x$ », sont invités à l'exposer à leurs camarades. La question d) les invite ensuite à confirmer leur compréhension.

Pour ceux qui ont difficilement accès à l'abstraction qu'exige l'algèbre, on peut tenter un détour par l'expérience concrète, manipulatoire (*d'après G. Vergaud, A. Cortès, P. Favre-Artigue : « Introduction à l'algèbre auprès des débutants faibles », dans les actes du colloque de Sèvres, 1987*). Mais pour ces élèves, la difficulté est grande à faire évoluer leur point de vue, tant qu'ils restent attachés au contrat didactique élémentaire : *trouver la valeur inconnue*, par quelque moyen que ce soit - le plus « économique » - et en évitant si possible de se confronter à des techniques mathématiques qui peuvent leur paraître inutilement complexes. Le professeur, lui, vise *l'apprentissage d'une méthode* transférable à d'autres problèmes, et on peut dire qu'à ce niveau, il y a une forte rupture du contrat, un malentendu difficile à dissiper entre les intentions de l'un et des autres. Il faut donc essayer, au cours de cette activité, de forcer les élèves « faibles » à quitter le concret pour abstraire : concentrer leur attention sur les *étapes de la démarche*, leur faire *expliquer leur choix*, et *traduire mathématiquement* les manipulations physiques.

L'exercice 12 est l'occasion d'une première verbalisation : traduction de l'équilibre par une égalité des masses, recherche d'une manipulation concrète élémentaire permettant la « lecture » de la masse cherchée (les élèves en difficulté disent ou pensent souvent qu'il suffit de tout retirer des plateaux et de refaire la pesée de la masse inconnue ; il faut ici renégocier le contrat : on doit manipuler uniquement ce qui est donné sur les plateaux. Les masses marquées utilisées incitent à retirer la même valeur sur chaque plateau.

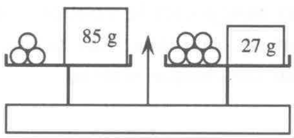
Exercice 12

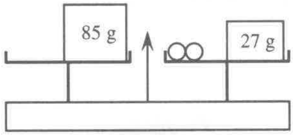
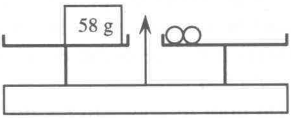
On peut comparer une **égalité** *à l'équilibre d'une balance Roberval.*
Pour chacun des équilibres ci-dessous, indiquer comment on peut découvrir la masse inconnue :



L'exercice 13, ne proposant plus la décomposition des masses marquées en masses égales, oblige à *abstraire la démarche précédente* : il faut soustraire, et non plus « retirer ». On exige alors la traduction mathématique des manipulations permettant le passage d'un équilibre à un autre, tout en explicitant le **but de ces manipulations** (fondement de l'algorithme de résolution d'une équation).

Exercice 13

Savoir transformer un équilibre complexe en un équilibre simple, donnant la masse inconnue :		
On veut déterminer la masse inconnue d'une de ces boules  identiques, par des manipulations	Décrire chacune de ces manipulations, et son but : ← 1) On nous propose cet équilibre initial : *on a la même masse sur chaque plateau*, des boules des deux côtés. On peut donc trouver un nouvel équilibre :	Traduire chaque étape en langage algébrique ← ………

	2) On a .... sur chaque plateau. On a *toujours la même masse sur chacun,* et il n'y a plus de boules que d'un seul côté. Les 27 g empêchent cependant de connaître leur masse !	
	3) On a	

L'exercice 14, proposé ensuite, demande de généraliser la démarche en mettant l'accent sur le but de chaque opération agissant sur les deux membres (Quelle est la ligne directrice suivie ? Que cherche-t-on à faire disparaître ?).

Exercice 14

Comparer la démarche précédente à celle ci-dessous, et indiquer le but de chaque transformation :

Si une valeur de x rend vraie l'égalité : $6x + 10 = 2x + 30$

Alors, il est vrai aussi que :	$6x + 10 - 2x = 2x + 30 - 2x$	but : ....
Alors il est vrai aussi que :	$6x - 2x + 10 = 2x - 2x + 30$	
Alors il est vrai aussi que :	$4x + 10 = 30$	
Alors il est vrai aussi que :	$4x + 10 - 10 = 30 - 10$	but : ....
Alors il est vrai aussi que :	$4x = 20$	
Alors il est vrai aussi que :	$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$	but : ....
Alors il est vrai aussi que :	$x = 5$	

La seule solution possible est donc le nombre 5.

Vérifions cependant qu'il rend bien vraie l'égalité initiale :

Vérification :

$$6 \times \boxed{5} + 10 = 30 + 10 = \mathbf{40} \text{ ; et } 2 \times \boxed{5} + 30 = 10 + 30 = \mathbf{40}$$

Conclusion : ***Le nombre 5 est bien la solution unique de l'équation initiale.***

L'exercice 15 finalise cet apprentissage, prolongeant ce qui a été abordé en cinquième : savoir traduire un problème sous forme d'une équation permet de le résoudre plus aisément qu'avec la méthode arithmétique. Celle-ci oblige à gérer à chaque étape toutes les contraintes du problème, alors qu'une fois la mise en équation effectuée, l'algorithme libère de la référence continuelle au sens.

Exercice 15

Problème 1 Histoire d'âge	**Problème 2** "A pied ou à mobylette ?"	**Problème 3** Pas si bête que ça.
Laetitia a 15 ans. Sa mère a 40 ans. Quel est le nombre x d'années dans lequel l'âge de la mère sera le double de l'âge de la fille ?	Pour s'entraîner au marathon, Bernard part faire un footing à la vitesse de 15 km/h. Son frère David veut le rejoindre en mobylette. Il part deux heures plus tard et roule à la vitesse de 40 km/h. Quel temps x en heures mettra-t-il pour le rattraper ?	Un âne porte 15 sacs de farine et 2 kilogrammes de pommes. Un mulet porte 2 sacs de farine et 40 kilogrammes de pommes. L'âne souffle fort. « De quoi te plains-tu ? » dit le mulet, « nous portons la même charge. » Quelle est la masse x en kilogrammes, d'un sac de farine ?

Voici quatre équations :

Equation A : $15x + 2 = 2x + 40$

Equation B : $15(x + 2) = 40x$

Equation C : $40 + x = 2 \times 15$

Equation D : $x + 40 = 2(x + 15)$

Parmi ces quatre équations, une seule ne traduit aucun des problèmes. Dites de quelle équation il s'agit...

Redonnez alors son équation à chaque problème, puis déterminez chaque réponse.

Cette dernière étape de la connaissance et du savoir-faire des élèves s'inscrit dans la durée. Certains acceptent vite la mise en équation comme moyen de résolution de problèmes, d'autres sont plus réfractaires à cette abstraction qui, pour eux, ne simplifie rien, tant qu'ils n'auront pas acquis une certaine familiarité avec la manipulation de symboles et de règles d'écriture. La mise en échec de leurs procédures arithmétiques (souvent peu solides, et se combinant avec des difficultés de compréhension du texte, de mémorisation, d'appréhension des interactions entre les données) par des problèmes introduisant l'inconnue des deux côtés du signe « = » n'est plus alors pour eux une motivation mais le plus souvent une source de découragement, voire un critère d'arrêt de leur travail. Il reste donc, pour ceux-là, à multiplier patiemment, sous des formes variées, les allers-retours entre le numérique et le littéral, pour la conquête du sens à donner à un texte de problème, et à sa traduction algébrique.

Contribution de la Commission Inter-IREM

MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE

Découvrir le parallélogramme

Gilles BOURON - IREM des Pays de la Loire

Logiciel utilisé

Cabri-Géomètre version II sur PC.

Connaissances préalables

Vocabulaire sur les quadrilatères (côtés, sommets, angles,...)

Objectifs

Objectifs propres aux séquences

A partir de deux "dessins" apparemment identiques, montrer qu'une "figure" est définie par ses propriétés.
Faire l'inventaire des propriétés du parallélogramme.
Reconnaître les "conditions suffisantes" pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, et le construire avec les "outils" appropriés.

Objectifs généraux et méthodologiques

Rédiger un programme de construction.
Savoir rédiger une démonstration en n'utilisant que les propriétés suffisantes à cette démonstration.

Conditions de travail

Classe de 24 élèves - Deux séquences d'environ une heure chacune.

Première séquence : en salle informatique, un ou deux élèves par ordinateur, avec une fiche de travail à compléter.

Chaque poste de travail dispose d'une disquette sur laquelle sont enregistrés : une figure (Première partie) et trois menus restreints (Deuxième partie).

Chaque élève dispose d'une fiche de travail en deux parties.
La deuxième partie n'est distribuée à l'élève qu'après avoir fait le travail d'observation demandé dans la première partie.

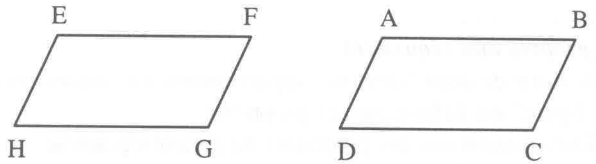
Deuxième séquence : en classe, un ordinateur avec tablette de rétro-projection.
A l'issue de cette séquence une fiche de cours donnant la définition et les propriétés du parallélogramme est réalisée.

Déroulement de la première séquence

<u>Première partie</u>

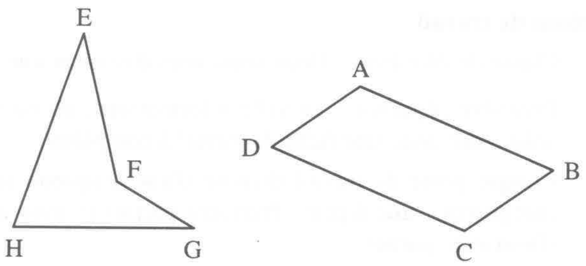
L'objectif de cette première partie n'est pas la production d'une figure. Il s'agit d'un travail d'observation de deux quadrilatères dont l'un est un parallélogramme.

Les élèves chargent le fichier demandé (*voir fiche élève*), et obtiennent à l'écran les quadrilatères EFGH et ABCD.



Les sommets du quadrilatère EFGH sont des points libres ; pour le quadrilatère ABCD, seuls les points A, B et D sont libres, le point C étant créé comme le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

Les élèves sont invités à saisir et déplacer les points et à observer. Ils peuvent ainsi obtenir l'écran suivant :



Les élèves observent que le point C est soumis à une contrainte.

Cette contrainte impose au quadrilatère ABCD de vérifier certaines propriétés qu'ils doivent conjecturer et noter sur leur fiche de travail.

<u>Observations et commentaires</u>

Tous les élèves observent que les côtés opposés sont parallèles et de même mesure. Les outils "parallèles ?" et "distance & longueur" les confortent dans cette conjecture.

Les propriétés concernant les angles sont plus difficiles à percevoir pour certains, il a été nécessaire d'utiliser l'outil "mesure d'angle".

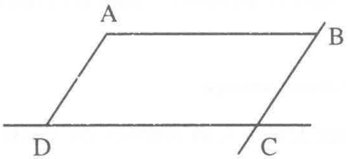
Seuls cinq élèves ont constaté l'existence d'un centre de symétrie. Pour les autres, il a été nécessaire de le construire.

Quelques erreurs (diagonales de même longueur, et existence d'axes de symétrie) ont dû être corrigées en utilisant les possibilités du logiciel.

<u>Deuxième partie</u>

Les élèves doivent maintenant construire un parallélogramme ABCD en ne disposant, à chaque question, que de certains outils, pour cela il leur est demandé de charger des menus restreints *(voir fiche élève).*

1) Avec : **point, segment** et **droite parallèle.**



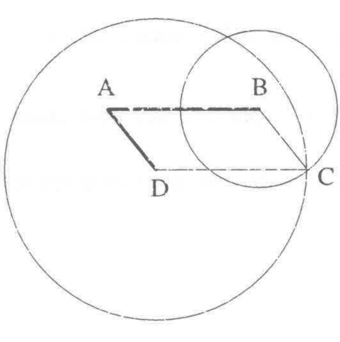
<u>Observations et commentaires</u>

La figure est réalisée à l'écran sans difficulté.

La propriété du parallélisme des côtés opposés étant celle qui a été le plus facilement perçue par les élèves, la classe accepte de prendre comme définition : "Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles".

La construction sur papier est faite en référence au travail fait à l'écran et il s'en suit une plus grande rigueur dans la rédaction du programme de construction.

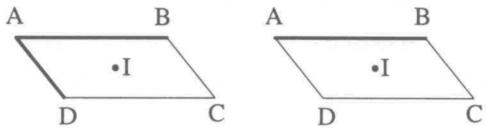
2) Avec : **point, segment** et **compas.**



<u>Observations et commentaires</u>

Les élèves, dans leur ensemble, réalisent cette construction sans difficulté. Si le choix du point d'intersection des deux cercles ne pose pas de problème, il va être nécessaire de préciser ce choix lors de la rédaction du programme de construction.

3) Avec : **point, segment, milieu** et **symétrie centrale.**



<u>*Observations et commentaires*</u>

Deux "stratégies" sont utilisées :

- Construire les segments [AB] et [AD], puis le milieu I du segments [DB], et enfin le symétrique de A par rapport à I.

- Construire le segment [AB] et un point I, puis les symétriques de A et B par rapport à I.

Déroulement de la deuxième séance

Les constructions précédentes sont reprises en classe entière, et projetées au tableau. Chacune de ces construction permet de constater qu'il suffit d'avoir :

soit l'outil "droite parallèle",
soit l'outil "compas",
soit l'outil "milieu" et l'outil "symétrie centrale"

pour pouvoir construire un parallélogramme.

Les propriétés suivantes sont alors énoncées :

"Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme",

"Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même mesure alors c'est un parallélogramme",

"Si un quadrilatère a un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme",

"Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme",

Ces propriétés peuvent alors être justifiées par une démonstration si le niveau de la classe le permet.

Une fiche résumé de cours est faite à l'issue de cette deuxième séquence.

FICHE DE TRAVAIL ELEVE

Première Partie

Charge le fichier Figure_1.fig.

Déplace les points que tu peux saisir et modifie les figures à l'écran.

Il y a un point que tu ne peux pas saisir ? Lequel ? ☐

Fais « bouger » ce point en en déplaçant d'autres, et note alors tes observations :

Quand je saisis et déplace le point ..., le point .... se déplace et j'observe :
....
....
Quand je saisis et déplace le point ..., le point .... se déplace et j'observe :
....
....
Quand je saisis et déplace le point ..., le point .... se déplace et j'observe :
....
....

Note les propriétés du quadrilatère ABCD qui te semblent toujours vraies, quand tu les modifies.

Propriétés sur les côtés :
....
....
Propriétés sur les angles :
....
....
Vois-tu des éléments de symétrie ? Lesquels ?
....
....

Le quadrilatère ABCD s'appelle ☐

(si tu ne connais pas le nom, demande-le à ton professeur).

Deuxième Partie

1) Charge le menu parall_1.men. *(outils : point - segment - droite parallèle)*
Construis à l'écran un quadrilatère ayant les mêmes propriétés que le quadrilatère ABCD observé.
Réalise cette figure ci-dessous et rédige le programme de construction.

Programme de construction
....
....
....
....

2) Charge le menu parall_2.men. *(outils : point - segment - compas)*
Mêmes consignes.

Programme de construction
....
....
....
....

3) Charge le menu parall_3.men. *(outils : point - segment - milieu - symétrie centrale)*
Même consignes.

Programme de construction
....
....
....
....

Aire du triangle

Marie-Claire COMBES, Danielle GUILHAUMOU
Jean-Marc RAVIER, François ROUX
IREM de Montpellier

Logiciel utilisé : Géoplan, GéoplanW ou Cabri II

Pour utiliser ces logiciels, des fiches d'aide peuvent être demandées à l'IREM de Montpellier.

Objectifs cognitifs : Etudier la formule de l'aire d'un triangle.
Introduire la notion de médiane.

Objectifs méthodologiques :

Découvrir des propriétés.
Rédiger et formuler des énoncés.
Travailler en groupe.

Connaissances préalables :

• *en mathématiques :* Savoir calculer l'aire d'un rectangle.
Savoir reconnaître un triangle rectangle.
Savoir tracer une hauteur d'un triangle.

• *en informatique :* Aucune.

Situation pédagogique :

• Le travail se fait par groupe de quatre élèves.

Un ordinateur est à la disposition de chaque groupe. Lorsque c'est nécessaire, un élève modifie la figure sur l'écran de l'ordinateur et les élèves observent afin de découvrir une propriété. Les élèves la formulent correctement et, après accord dans le groupe, complètent les fiches de travail élève.

• Un bilan en classe entière est fait à la fin de la deuxième partie.

Commentaires sur la séquence :

Cette séquence a été construite dans le souci de donner du sens à l'activité mathématique. C'est ainsi que les droites hauteur et médiane sont définies à partir de leur fonctionnalité.

D'autre part, le choix d'introduire la formule de l'aire d'un triangle à partir du triangle rectangle au lieu du parallélogramme nous semble plus en continuité avec les activités sur les aires à l'école primaire et en classe de sixième.

Par ailleurs, l'ordinateur apparaît ici comme médiateur du travail de groupe. Perpendiculairement à la table informatique, on peut mettre une table et c'est autour de cette table que les élèves s'assoient, discutent et complètent les documents ; les élèves observent ce qui se passe à l'écran, l'un d'entre eux fait évoluer la figure à l'aide des touches du clavier.

1ère partie : Calcul d'aire avec quadrillage (Travail papier).

Le but est de réinvestir que l'aire d'un triangle rectangle est la moitié de celle d'un rectangle ; ce qui permet de calculer après “découpage” l'aire d'un triangle quelconque. Cette idée reste essentielle pour donner du sens à la formule finale.

2ème partie : Découverte de la formule de l'aire d'un triangle (Travail avec un ordinateur)

Elle doit permettre à l'élève de trouver la formule de l'aire d'un triangle à partir d'observations de triangles ayant la même aire.

Dans un premier exercice A, il s'agit de découvrir la propriété suivante : des triangles ayant un côté commun [BC] ont la même aire lorsque les troisième sommets se trouvent sur une parallèle à (BC).

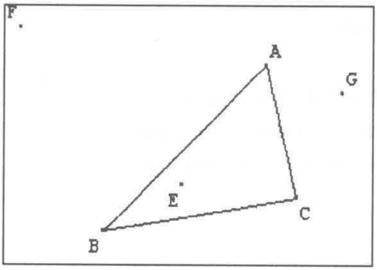
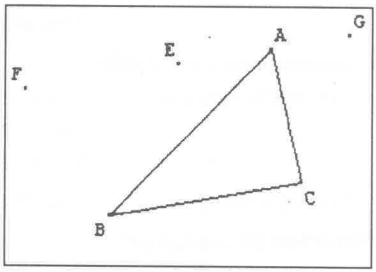


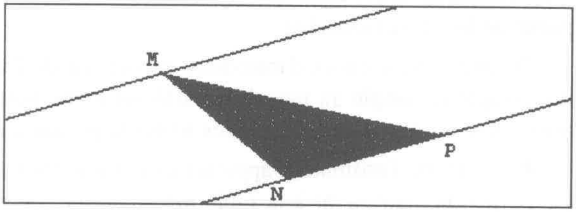
figure initiale



exemple de figure finale

Il est possible de faire apparaître la droite parallèle à (BC) passant par A afin de vérifier que les points E, F et G appartiennent bien à cette droite. Sous Géoplan et GéoplanW, la commande est obtenue en appuyant sur la touche $\boxed{\mathbf{D}}$. Sous Cabri II, un bouton est disponible en déplaçant la page vers le haut (touche $\boxed{\mathbf{Ctrl}}$ et souris).

Dans un deuxième exercice B, réciproquement, en déplaçant un point sur une parallèle à un segment, les élèves constatent que les triangles obtenus ont la même aire.



exemple de figure

La recherche des longueurs communes à tous ces triangles (le côté [NP] et le segment [NH] que les élèves peuvent faire apparaître) et l'utilisation des triangles particuliers que sont les triangles rectangles permettent de trouver la formule. (Certains élèves utilisent aussi un triangle MNP isocèle de sommet principal M et le rectangle correspondant).

Suivant les connaissances des élèves, la hauteur pourra être introduite ici comme outil permettant de calculer l'aire du triangle.

Un bilan en classe entière semble indispensable à ce moment.

3ème partie : Exercices

Pour gérer l'hétérogénéité de la classe, cette fiche pourra être donnée en fin de deuxième partie.

4ème partie : Partage d'un triangle en parties égales (travail avec un ordinateur, puis papier)

Elle a pour but d'introduire d'une façon originale la médiane comme étant une droite qui partage un triangle en deux triangles de même aire.

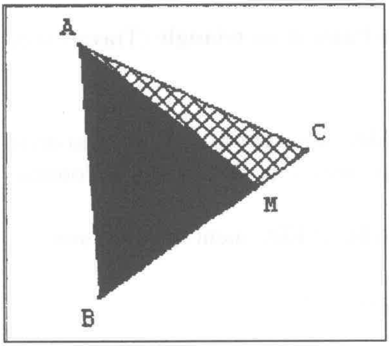


figure initiale

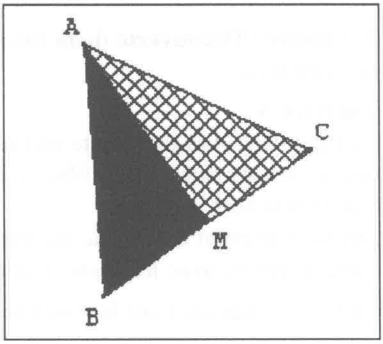


figure finale

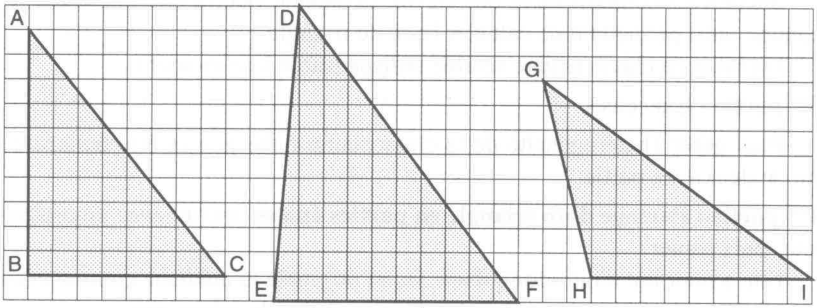
Les élèves cherchent la position du point M, mobile sur le segment [BC], pour que les aires des triangles ABM et ACM soient égales.

Le travail papier qui suit permet de réinvestir la formule de l'aire et la notion de hauteur. Dans cet objectif, l'application finale pourra être prolongée par la construction d'un partage en trois ou cinq triangles de même aire.

FICHE DE TRAVAIL ELEVE

1ère partie : Calcul d'aire avec quadrillage (Travail papier)

En utilisant le quadrillage pour mesurer les longueurs, calculer l'aire de chaque triangle. Expliquer sur le dessin la méthode utilisée.



Aire (ABC) = ... Aire ((DEF) = ... Aire (GHI) = ...

2ème partie : Découverte de la formule de l'aire d'un triangle (Travail avec un ordinateur)

Exercice A

La figure à l'écran représente un triangle ABC, trois points E, F, G et, si on le désire, les triangles EBC, FBC, GBC. Les aires sont calculées par l'ordinateur et affichées à l'écran.

Déplacer le point E afin que les triangles ABC et EBC aient la même aire.

Faire de même avec les points F et G.

Faire des remarques sur la position des points.

....

....

Déplacer les points B et C afin d'avoir un autre triangle ABC.

Recommencer la recherche des positions des points E, F et G pour que les quatre triangles aient la même aire.

Les remarques précédentes restent-elles vraies ?

....

....

Exercice B

La figure à l'écran représente deux droites parallèles (d) et (d'). Sur la droite (d) est dessiné le segment [NP] et sur la droite (d') se trouve un point mobile

M. L'aire du triangle MNP est calculée par le logiciel et est affichée à l'écran.

Déplacer le point M et observer la valeur de l'aire.

Faire une remarque.

....

....

Modifier la figure en déplaçant les pointrs N et P.
Déplacer à nouveau le point M. Les remarques précédentes restent-elles vraies ?

Pour deux positions particulières du point M, on obtient un triangle dont le calcul de l'aire est très simple. Quelle est alors sa nature ? Faire ci-dessous une figure à main levée illustrant chaque cas. Indiquer les deux longueurs qu'il faut mesurer pour calculer l'aire.

Reprendre un point M correspondant à un triangle quelconque. Faire apparaître le segment [MH]. Où retrouve-t-on les deux longueurs dont la mesure est nécessaire pour calculer l'aire du triangle ?

....

....

En déduire la formule de l'aire d'un triangle.

....

....

Connaissez-vous le nom que porte la droite (MH), c'est-à-dire la droite qui passe par un sommet d'un triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé ?

....

....

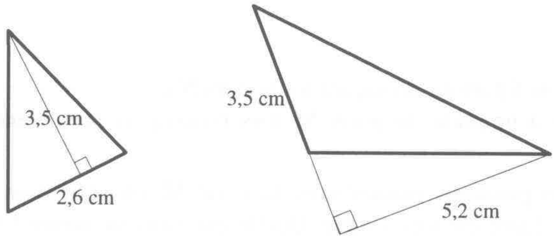
Quel est le rôle de cette droite dans cette activité ?

....

....

3ème partie : Exercices

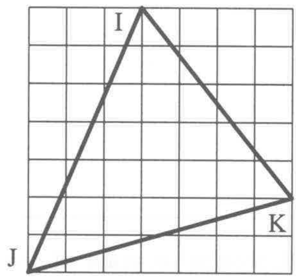
1 - Calculer l'aire des triangles ci-dessous sans aucune mesure supplémentaire.



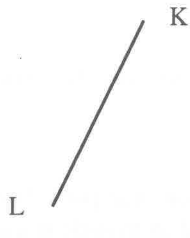
2 -

a) Calculer l'aire du triangle ci-contre en utilisant chaque fois une hauteur différente (faire les constructions et mesures nécessaires).

b) Calculer l'aire d'une quatrième façon en utilisant le quadrillage. Comparer avec les résultats trouvés précédemment.



3 - Construire quatre triangles ayant tous le segment [KL] pour côté ; l'aire de chacun d'eux étant de 10 cm^2.



4ème partie : Partage d'un triangle en parties égales. Travail avec un ordinateur, puis papier.

a) Travail avec un ordinateur.

La figure à l'écran représente un triangle ABC et un point M mobile sur le segment [BC]. Les aires des triangles ABM et ACM sont calculées par le logiciel et affichées à l'écran.

Déplacer le point M et rechercher sa position pour que les aires soient égales. Que dire du point M ? Comment peut-on le vérifier avec l'ordinateur ?

....

....

Déplacer le point M, puis les points A, B et C. Recommencer la recherche du point M avec cette nouvelle figure. A-t-on la même conclusion ?

....

....

b) Travail papier
Dessiner à droite un triangle DEF et appeler I le milieu du segment [EF].
Calculer les aires des triangles DEI et DFI.

Ces aires sont-elles égales ? Aurait-on pu l'expliquer sans calcul ?

....

....

c) Définition et propriété
Connaissez-vous le nom que porte la droite qui passe par un sommet d'un triangle et par le milieu du côté opposé ?

....

....

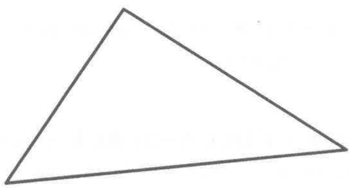
Quel est le rôle de cette droite dans cette activité ?

....

....

d) Application

Partager le triangle ci-contre en quatre triangles de même aire.
Justifier la construction.



....

....

....

....

Des logiciels *

logiciels outils

Cabri Géomètre2 (windows) ***Editeur*** : Texas Instruments

logiciel en licence mixte

Nouvelle version du logiciel permettant une intégration plus facile des figures dans un traitement de texte et proposant de nouvelles fonctionnalités en particulier une ergonomie plus conviviale, des outils géométriques supplémentaires (transformations, géométrie analytique etc.) On peut en trouver une version sur le site de « EDUCASOURCE ».

Geospace (windows)

Version avec là aussi de nouvelles fonctionnalités du logiciel de constructions géométriques, en particulier on peut faire construire les patrons de polyèdres personnels sans avoir comme avant à choisir dans une liste donnée. On peut en trouver une version sur le site de « EDUCASOURCE ».

Quelques didacticiels

SMAO 5ème ***Editeur*** : Chrysis

devrait paraître sous windows comme le SMAO 6ème.

Calculs numériques ***Editeur*** : Chrysis

Version CD ROM de *Calnum* permettant de travailler en particulier les fractions en quatrième.

Le site « EDUCASOURCE » permet d'accéder à de nombreuses sources d'information (banque de données, imagiciels,....) repérées pour leur intérêt dans la préparation d'un cours. Par exemple **Lilimath** qui est téléchargeable.

Son adresse internet est : **http://www.educasource.education.fr**

---

* Complément de la rubrique « *Quelques logiciels de Géométrie* » de la brochure «*Des mathématiques en sixième* »

DES ÉLÉMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

BROCHURES IREM

Les documents précédés d'un * sont cités dans des articles de cette brochure.

IREM de Besançon

- Géométrie dans l'espace - Activités pour la classe en collège (1993).

IREM de Brest

- Gestion de données et statistiques au collège (1997).

IREM de Limoges

- Une année en sixième en math - tome 1 : Des activités aux synthèses (1997) en collaboration avec le CRDP du Limousin.

IREM de Lorraine (Nancy)

- Problèmes concrets 6ème-5ème (1990).

IREM de Lyon

- Aire et périmètre - Le tour de l'aire au collège (1994).
- Une équipe au collège (1997).

IREM de Montpellier

- *Enseigner la géométrie de l'espace - Activités de la sixième à la seconde (1992).
- Enseigner la géométrie plane en intégrant l'outil informatique (niveau collège) (1992).
- Narration de recherche (1992).

IREM des Pays de la Loire (Nantes)

- *Les outils mathématiques dans les autres disciplines au collège (1994).
- Enseignement par situations-problèmes - La proportionnalité du CM2 à la seconde (1991).
- Apprendre en groupe ou des élèves actifs en mathématiques (1994).
- *Enseigner les mathématiques autrement en sixième (1997).
- *Enseigner les mathématiques autrement au cycle central (1999).

IREM de Paris-Nord

- Les transformations - fascicule n° 1 : pour commencer.
- Activités mathématiques au collège :
  - Carnets de stage fascicule 1 (1995)
  - Carnets de stage fascicule 2 (1996)
  - Carnets de stage fascicule 3 (1997)

IREM de Picardie (Amiens)

- Diagnostiquer pour adapter son enseignement (1996).
- *Langage et raisonnement. Réflexions et exercices autour de quelques petits mots (1996).

IREM de Poitiers

- *Les nombres relatifs au collège (1996).
- Répertoire des connaissances - Fichiers méthodes (1991).

Des affiches pour la classe :

Triangles / Droites remarquables du triangle / Sphère-cercle / Déplacements / Perpendiculaires-Parallèles / Bissectrice / Angles / Perspective / Aires - Périmètres.

IREM de Rennes

- Lire et écrire des textes mathématiques au collège (1992).
- Modules en mathématiques au collège (1997).
- La proportionnalité au collège (1997).
- Quelles lectures pour quelles tâches ? (1996).

IREM de Rouen

- Des activités pour raisonner au collège (1991).
- Autour de la notion d'activité (1995).
- *Des activités pour lire et écrire au collège (1996).
- Géométrie dans l'espace. Du collège au lycée (1996).

IREM de Strasbourg

- La proportionnalité au collège (1996).
- Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique (1996).
- *Voir et raisonner : la conquête de l'espace au collège (1997).

IREM de Toulouse

- Des activités géométriques au collège - Cumuler des savoirs ou des savoir-faire ou développer des capacités.

PUBLICATIONS APMEP

En particulier dans les Bulletions verts n° 402, 403 et 406.

AUTRES DOCUMENTS

- Petit x - IREM de Grenoble - 3 numéros par an.
- Repères IREM - revue des IREM - 4 numéros par an.
  (voir plus particulièrement les numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23, 25).
- Des chiffres et des lettres au collège - Bulletin inter-IREM premier cycle (1991-1992).
- Histoire des mathématiques pour les collèges - IREM de Paris VII-Edition cedic.
- Problème ouvert et situation-problème - IREM de Lyon.

ADRESSES DES IREM

BESANÇON Faculté des Sciences La Bouloie - 25030 Besançon Cedex
tél. 03 81 66 61 92 *Télécopie : 03 81 66 61 99*

BORDEAUX Institut Lamartine - I.F.E. - 40 rue Lamartine - 33400 Talence
tél. 05 56 84 89 74 *Télécopie : 05 56 84 89 72*

BREST U.F.R. Sciences - 6, av. Victor Le Gorgeu - 29285 Brest Cedex
tél. 02 98 01 65 44 *Télécopie : 02 98 01 64 41*

CAEN IUT Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen
tél. 02 31 44 27 91 *Télécopie : 02 31 94 32 59*

CLERMONT FERRAND Université Clermond-Ferrand II
Complexe scientifique des Céseaux - 63177 Aubière Cedex
tél. 04 73 40 70 98 *Télécopie : 04 73 40 70 78*

DIJON Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques
9, avenue Alain Savary - BP 400 - 21011 Dijon Cedex
tél. 03 80 39 52 30 *Télécopie : 03 80 39 52 39*

GRENOBLE BP 41 - 38401 St Martin d'Hères Cedex
tel. 04 76 51 46 62 *Télécopie : 04 76 51 42 37*

LILLE Univ. des Sciences et Techniques - 59655 Villeneuve d'Asq Cedex
tél. 03 20 43 41 81 - 03 20 43 41 82 *Télécopie : 03 20 33 71 61*

LIMOGES 123, Avenue Albert Thomas - 87060 Limoges Cedex
tél. 05 55 45 72 31 - 05 55 45 72 49 *Télécopie : 05 55 45 73 20*

LORRAINE Université Nancy I - Faculté des Sciences - BP 239
54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex
tél. 03 83 91 21 99 *Télécopie : 03 83 91 25 73*

LYON Université Lyon I - 43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex
tél. 04 72 44 81 24 - 04 72 43 13 82 *Télécopie : 04 72 44 80 67*

MARSEILLE Faculté des Sciences de Luminy - 70, rue Léon Lachamp
13288 Marseille Cedex
tél. 04 91 26 90 00 - 04 91 41 39 40 *Télécopie : 04 91 82 93 43*

MONTPELLIER Univ. Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon - C.C.040 - 34095 Montpellier Cedex 5
tél. 04 67 14 33 83 - 04 67 14 33 84 *Télécopie 04 67 62 39 09*

NANTES : *Pays de la Loire* - 2, rue de La Houssinière - BP 92208
44382 Nantes Cedex 3
tél. 02 51 12 59 40 *Télécopie : 02 51 12 59 41*

Antenne LE MANS - Université du Maine - Av. Olivier Messiaen
72017 Le Mans Cedex
tél. 02 43 83 32 15 *Télécopie : 02 43 83 35 56*

NICE Université Nice - Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2
tél. 04 92 07 65 11 - 04 92 07 65 15 *Télécopie : 04 92 07 65 10*
ORLÉANS Université d'Orléans, BP 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
tél. 02 38 41 71 90 *Télécopie : 02 38 41 71 93*
PARIS-NORD Université Paris-Nord - Avenue Jean Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
tél. 01 49 40 36 40 *Télécopie : 01 49 40 36 36*
PARIS VII Université Paris VII - C.P.7018
2, Place Jussieu - 75251 Paris Cedex 05
tél. 01 44 27 53 83 - 01 44 27 53 84 *Télécopie : 01 44 27 56 08*
AMIENS-PICARDIE 48, rue Raspail, BC 619 - 02322 Saint-Quentin
tél. 03 23 62 76 45 - 03 23 62 62 98 *Télécopie : 03 23 64 82 62*
POITIERS 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers Cedex
tél. 05 49 45 38 77 *Télécopie : 05 49 45 40 50*
REIMS Moulin de la Housse, BP 1039 - 51687 Reims Cedex 2
tél.03 26 05 32 08 *Télécopie : 03 26 85 35 04*
RENNES Campus Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
tél. 02 99 28 63 42 *Télécopie : 02 99 28 16 38*
ROUEN Université de Rouen - 1 rue Thomas Becket BP 153
76 135 Mont Saint-Aignan
tél. 02 35 14 61 41 *Télécopie : 02 35 14 61 41*
STRASBOURG 10, rue Général Zimmer - 67084 Strasbourg Cedex
tél.03 88 41 63 07 *Télécopie : 03 88 41 64 49*
TOULOUSE Université Paul Sabatier - 118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
tél. 05 61 55 68 83 *Télécopie : 05 61 55 82 58*
ANTILLES-GUYANE Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences de Pointe-à-Pitre
97159 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
tél. 0 590 93 86 97 *Télécopie : 0 590 93 87 28*
0 590 93 86 43
- Section Guadeloupe : Cité Scolaire de Baimbridge - Bt P - 3ème étage
B.P. 17 - 97110 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
- Section Martinique : IUFM - Pointe des Nègres
97200 Schoelcher (Martinique)
- Section Guyane : 12, rue Louis Armstrong
97310 Kourou (Guyane)

Achevé d'imprimer par CORLET Imprimeur, S.A. Colombelles
3, Chemin de Mondeville à Giberville - 14460 Colombelles
N° d'imprimeur : 8382 Dépôt légal : juin 1999