

Commission Inter-IREM Premier Cycle

Des Mathématiques
en
Sixième

Programme du Cycle d'adaptation - 1996

SOMMAIRE

Avant propos	3
---------------------------	---

Préface : Christian MASSOT, Brigitte POULAIN (Responsables de la commission)	4
--	---

Présentation : Régine DOUADY (Présidente de l'ADIREM)	5
--	---

Introduction : Jean-Claude DUPERRET (IREM de Reims)	7
--	---

Première partie : Continuités, rupture, nouveautés

- Présentation : Jean-Claude DUPERRET	11
- Géométrie dans l'espace : des fiches tout au long de la brochure - IREM de Paris-Nord ...22, 32, 42, 48, 68, 78, 108, 114, 182	
- La multiplication des nombres décimaux : Joël BRIAND (COPIRELEM)	13
- Introduction des nombres relatifs : Claude ROBIN (IREM DE Poitiers)	23
- Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes : Denis BUTLEN, Anne-Marie MONTFRONT, Monique PEZARD (IREM de Paris VII et COPIRELEM)	33
- Les divisions en sixième : Anne-Marie MONTFRONT (IREM de Paris VII)	43
- Grandeur en classe de sixième : Marc PICOT (IREM de Lille)	49
- Le tour de l'aire : Georges COMBIER, René MULET-MARQUIS, Martine PHILIPPON (IREM de Lyon)	55
- Organisation et gestion de données : Jean-Claude DUPERRET (IREM de Reims)	69

Deuxième partie : Modes de représentation et de communication

- Présentation : Jean-Claude DUPERRET	79
- Lire et écrire en mathématique : Michel JAFFROT et Annick MASSOT (IREM des Pays de la Loire) Annie DUBUT et Brigitte POULAIN (IREM de Rouen)	81
- Des schémas pour consolider le sens de la numération et des opérations : Michèle MARTIN, Colette MERCIER, Paulette MOULI (IREM de Toulouse)	95
- Reconnaître un angle droit : René MULET-MARQUIS (IREM de Lyon)	109

- Quelques repères pour enseigner la géométrie au début du collège : Jean-Claude RAUSCHER (IREM de Strasbourg)	115
- Texte et dessin d'un registre à l'autre en passant par l'ordinateur : Marie-Claire COMBES (IREM de Montpellier)	128
- Comment construire une activité ? L'oiseau : Jean-Claude FENICE (IREM de Reims)	137

Troisième partie : Vers une démarche scientifique

- Présentation : Jean-Claude DUPERRET	141
- Narration de recherche, une nouvelle pratique pédagogique : Mireille SAUTER (IREM de Montpellier)	142
- De l'utilisation du contre-exemple au collège : Rémi DUVERT (IREM de Picardie)	154
- Une approche de la démonstration : Madeleine MAROT (IRERM de Poitiers)	163

Quatrième partie : Faire de la géométrie en classe de sixième. Quelques apports de l'outil informatique

- Autour du triangle : Daniel BERGUE (IREM de Rouen)	183
- Pour une meilleure appropriation du concept d'axe de symétrie B. TAILLARD (IREM de Besançon)	191
- Pavé droit : Marie-Thérèse LABAT	195

Annexes

- Quelques logiciels en géométrie	199
- Des éléments bibliographiques	203
- Adresses des IREM	206

Avant-Propos

ou

“ Histoire d’une brochure ”

De nouveaux programmes pour la classe de sixième sont parus en septembre 1995. Pour favoriser leur mise en place à la rentrée 1996, le Ministère de l'Education Nationale par la voie de la Direction des Lycées et Collèges, a voulu proposer aux enseignants une Brochure d'Accompagnement de ces programmes. Pour ce faire, il a contacté en novembre 1995 Régine DOUADY, alors Présidente de l'ADIREM. Pour réaliser une telle brochure, celle-ci a naturellement pensé à l'expérience de la Commission Inter Irem Premier Cycle, déjà auteur des *Suivis Scientifiques* (programmes de 1986 à 1989).

La DLC a donc attribué un certain nombre de moyens à cette commission, avec pour mission de réaliser cette brochure pour juin 1996, c'est-à-dire en six mois. Ce fut chose faite !

Malheureusement des problèmes d'ordre matériel ont tout d'abord retardé, puis empêché la diffusion de ce document par le Ministère de l'Education Nationale.

En décembre 1997, la Commission Inter Irem Premier Cycle se retrouve donc avec tout ce travail non diffusé. La reprendre pour l'actualiser conduit à de nouveaux délais, cela d'autant plus que cette commission finit en ce moment une brochure pour les programmes de cinquième, et a entamé le travail pour la quatrième. La décision a donc été prise par l'ADIREM de la diffuser dans l'état le plus vite possible.

Le lecteur voudra donc bien excuser les imperfections dues à une réponse très rapide à la commande du Ministère de l'Education Nationale, ainsi que certaines phrases ou passages qui ne seraient plus vraiment d'actualité.

PRÉFACE

Si les “*Suivis Scientifiques*”, ont pour objectif essentiel d’illustrer les nouveaux programmes de 1986 à 1989, cette brochure qui leur succède ne poursuit pas les mêmes buts. Une des premières raisons en est que les modifications de programmes ne sont pas de même nature, ils s’insèrent cette fois-ci dans une évolution liée aux changements intervenus dans les programmes de l’école élémentaire. Une autre raison, essentielle celle là, est l’évolution de la réflexion menée dans la commission Inter-IREM Premier Cycle depuis de nombreuses années ; le souci premier n’est pas de décrire des activités, mais de dire pourquoi on les a choisies.

Cette brochure destinée à être une aide à l’information des enseignants est aussi une aide à leur formation. Plus que des réponses aux enseignants, les articles proposés ont pour but de faire émerger des questions qui pourront être les points de départ d’une réflexion personnelle ou collective.

Nous avons essayé de faire partager certaines de nos convictions sur l’enseignement des mathématiques au collège et plus particulièrement ici sur l’enseignement en sixième. Ceci a conduit à des articles qui peuvent paraître parfois bien denses, malgré les nombreux exemples développés.

Nous tenons à remercier tous ceux qui ont participé à la réalisation de cette brochure.

Christian MASSOT et Brigitte POULAIN

Les responsables de la
Commission Inter-IREM Premier Cycle

PRÉSENTATION

Régine DOUADY
Présidente de l'ADIREM
Université Paris VII - IREM

Dans la scolarité obligatoire, le programme de mathématiques est conçu pour s'adresser à tous les enseignants et à tous les élèves d'un même niveau scolaire. Pourtant, les environnements où il doit être développé et autant que possible réalisé sont multiples, aux caractéristiques sociales et culturelles différentes.

Par ailleurs, les enseignants ont des conceptions différentes de ce que veut dire faire ou savoir des mathématiques. Toutefois, l'existence de contraintes institutionnelles jointe à l'idée qu'ils se font de leur métier d'enseignant, notamment en termes de gestion du temps, peut conduire certains d'entre eux à réduire fortement des marges de manoeuvre possibles.

Il est certain que mettre les élèves en situation d'avoir à prendre des initiatives, à prendre conscience de l'intérêt scientifique qu'il y a à mettre l'accent sur les interactions entre notions différentes impliquées dans un même problème, sur les relations entre les différents modes d'expression et de représentation...à se forger des concepts, demande du temps. Il faut du temps au professeur pour concevoir un ensemble de séquences organisées de façon cohérente avec un objectif précis d'apprentissage pour les élèves. Il faut du temps pour un déroulement effectif en classe qui prenne en compte les réactions des élèves et par suite l'éventualité d'adaptation par rapport aux prévisions. Il se peut que le professeur ne fasse pas son cours au moment prévu s'il a le souci que la grande majorité de ses élèves le reçoive efficacement, et qu'il ait l'impression d'avoir en chemin perdu du temps. L'expérience montre finalement qu'en fait, ce temps d'apprentissage évalué sur le long terme, loin d'être perdu, est plutôt gagné en capacité d'adaptation, de recherche, de cohérence et de contrôle sur les productions, de réinvestissement dans des situations nouvelles.

Les articles qui suivent sont des *documents d'accompagnement* pour la mise en œuvre du programme de sixième qui entre en vigueur en septembre 1996. Ils n'ont pas l'ambition de couvrir tout le programme. Ils veulent marquer, à travers des exemples significatifs, que la mise en œuvre du programme et le déroulement des échanges entre professeurs et élèves peuvent être analysés distinctement du point de vue des mathématiques, du point de vue des élèves et du point de vue du professeur et que ces analyses sont des aides à la décision ? Pour certaines situations présentées, l'auteur a fait un choix. Le lecteur pourrait en faire d'autres. L'important est de voir, pour chaque choix ce qui est en jeu mathématiquement et en termes d'apprentissage, et de mettre en rapport le résultat de la réflexion avec des objectifs qu'on s'est assignés, compte tenu de son public. Selon les articles, deux de ces pôles mathématiques, élèves-professeurs et les relations entre eux ont la priorité sur les autres, le troisième pôle étant constamment présent en arrière plan pour donner de la cohérence à l'ensemble.

Il existe 26 IREM en France organisés en un réseau dont les éléments fédérateurs sont l'Assemblée des Directeurs d'IREM, les 14 commissions Inter-IREM, le Comité Scientifique des IREM et la revue *REPERES-IREM*. C'est une structure où travaillent en équipe des enseignants intervenant à différents niveaux scolaires et universitaires qui permet à la fois d'être proche du terrain, au contact avec la diversité et les besoins locaux et de confronter et d'organiser la synthèse des informations et réflexions locales en vue d'un retour et d'une mise à l'épreuve sur le terrain.

Les articles qui suivent ont été sélectionnés et retravaillés par la Commission Premier Cycle en réponse à une certaine demande du Ministère de l'Education Nationale. Leur objectif a été de mettre l'accent sur un certain nombre de points particulièrement délicats ou nouveaux du programme de sixième et sur des types d'échanges entre professeurs et élèves, peut-être inhabituels et cependant fructueux.

Nous espérons que ces articles seront l'occasion de nouvelles réflexions et de nouveaux échanges avec une part encore plus large du milieu enseignant.

INTRODUCTION

Le statut des mathématiques change pour l'élève lors de son entrée en sixième, cette matière prenant une place dans un horaire déterminé, son enseignement étant confié à des spécialistes.

Bien entendu, tout au long de l'école élémentaire, l'élève a fait des mathématiques. Mais celles-ci s'inscrivaient dans un apprentissage global, la fédération des différentes disciplines, leur répartition, leur interaction étant assurées par l'instituteur ou le professeur d'école.

Le fait qu'elles deviennent une matière plus spécifique, et, ce qu'on peut d'ailleurs regretter, une matière relativement déconnectée des autres, pose un problème fondamental : pourquoi les mathématiques ? Et la question corollaire que vont naturellement se poser les élèves : pourquoi tant investir pour acquérir des connaissances dont on ne perçoit pas toujours l'utilité ?

Si effectivement les mathématiques ne sont vécues que comme un enchaînement de techniques, de règles, d'algorithmes souvent déconnectés de la réalité, leur apprentissage apparaîtra vite comme rébarbatif et stérile ; leur enseignement deviendra alors une suite de recettes, donnant des connaissances à court terme, non disponibles dans le temps.

Sans nier la nécessité d'un tel apprentissage, il est légitime, pour justifier la place des mathématiques, de comprendre en quoi elles participent à la construction de l'individu. Ce qui devient alors important, c'est la culture scientifique, et plus précisément ici la culture mathématique, c'est-à-dire un entraînement de la pensée à poser et résoudre des problèmes, en développant des modèles théoriques non contingents à la réalité. Leur apprentissage s'appuiera alors sur la recherche de la meilleure stratégie, du modèle le plus pertinent ; leur enseignement amènera à la notion d'expertise, les connaissances développées seront dynamiques et réorganisables entre elles.

Motivant ou s'appuyant sur la mise en place de nouveaux concepts et l'acquisition de règles, de techniques, d'algorithmes, l'activité mathématique est essentiellement la résolution de problèmes : elle est donc une constante confrontation au non savoir. Cette activité vit dans une communauté scientifique, ici la classe, qui permet successivement le débat, en soumettant aux preuves et réfutations les diverses possibilités de solution, et ensuite l'assurance de la certitude partagée lors de l'institutionnalisation. Elle permet ainsi

de développer des capacités et des comportements d'action (expertise) transférables dans d'autres domaines.

Tout cela peut paraître bien ambitieux. Et pourquoi n'aurions-nous pas d'ambition dans notre enseignement ? La vraie question est : "est-ce réalisable" ? Nous pensons que oui, et nous allons étayer cette affirmation dans cette brochure. Certes il n'est pas question de comparer l'activité mathématique que peut produire un élève de sixième à celle d'un chercheur, mais, dès le collège, avec des objectifs raisonnables, on peut mettre en place les premiers éléments d'une démarche scientifique.

Dans une première partie, nous illustrons, par quelques études de cas non exhaustives, comment s'inscrivent les connaissances du programme de sixième dans le collège et par rapport à l'école élémentaire :

- *En continuité* : quelles sont les connaissances qui s'appuient directement sur celles du primaire, et les prolongent ?
- *En rupture* : quelles sont celles qui, pour gagner une autre dimension, doivent remettre en cause le statut qu'elles avaient en cours moyen ?
- *En nouveauté* : soit parce que ce sont de nouveaux thèmes par rapport à l'école élémentaire ; soit parce que ce sont de nouveaux éléments d'apprentissage par rapport aux anciens programmes, dans la suite de la refonte des programmes de l'école élémentaire.

Dans une seconde partie, nous mettons en évidence la richesse des modes de représentation et de communication utilisés en mathématiques : du texte à la figure, du tableau au graphique, de la communication orale à la communication écrite, l'élève doit à la fois maîtriser ces différents registres, mais, ce qui est plus important et plus difficile, passer d'un registre à l'autre. Ceci doit faire l'objet d'un véritable apprentissage, apprentissage qui peut s'appuyer sur l'utilisation d'outils comme l'ordinateur.

Dans une troisième partie, nous proposons une réflexion sur la mise en place d'une démarche scientifique au collège. Cette réflexion s'articule autour de trois questions : quelles sont les démarches des élèves quand ils cherchent ? Quelles sont "les règles du jeu" mathématique que l'on peut établir dès la classe de sixième ? Quelle approche de la démonstration peut on y proposer ?

Dans une quatrième partie, nous nous tournons vers les technologies nouvelles, et tout particulièrement l'ordinateur, pour voir leurs apports dans les activités mathématiques. Qui, plus que la Commission Inter Irem Informatique pouvait dans le réseau des IREM prendre en charge cette dimension.

Si la commission Inter IREM Premier Cycle a eu la lourde tâche de faire cette brochure en moins de six mois, elle a pu s'appuyer sur la détermination de ses deux responsables Christian MASSOT et Brigitte POULAIN, et sur le dynamisme de tous ses membres. Tous les articles que vous y trouverez ont été écrits par des équipes d'enseignants de collège, représentés dans cette commission. Ils ne proposent pas que des activités et exercices tels que vous pouvez en trouver dans de nombreux et bons manuels de sixième, mais aussi une réflexion sur le pourquoi de telles activités.

Cette réflexion est la marque spécifique de notre travail dans les IREM ; elle s'appuie sur la collaboration des enseignants, des formateurs, des chercheurs.

Mais tous tenons pour finir à remercier tous ces nombreux enseignants anonymes qui, en particulier lors de stages, nous ont permis de faire avancer notre réflexion.

Cette brochure est la leur !

Pour la Commission Premier Cycle

Jean-Claude DUPERRET

PREMIÈRE PARTIE

Continuités, rupture et nouveautés

Lors d'un changement de programme, la première inquiétude de tout enseignant, inquiétude bien légitime, est : quels sont les contenus qui ont été modifiés ? À cette première question s'ajoutent vite deux questions corollaires fondamentales : cela va-t-il modifier les activités et les évaluations que je propose à mes élèves ? Cela va-t-il aussi induire des changements dans la gestion de ma classe ?

Si le changement de programme de mathématique de sixième actuellement proposé n'apparaît pas fondamental au niveau des contenus, il oblige cependant à une véritable réflexion sur sa mise en perspective avec ceux de l'école élémentaire. Plutôt que d'être exhaustif sur tous les points du programme, nous avons préféré illustrer des thèmes où cette réflexion est incontournable.

Le premier et vaste domaine auquel nous nous sommes intéressés est le *numérique et les opérations*. Se situer en continuité avec les apprentissages précédents et analyser en quoi les changements de programme de l'école élémentaire influenceront notre enseignement est parfaitement illustré par les nombres décimaux. Nous aurons à notre charge un travail beaucoup plus conséquent sur ces nombres : leur multiplication sera une nouveauté, aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant de sixième ! Et puisque nous parlons des opérations, il devient important d'assurer la suite de l'apprentissage de la division (des divisions devrions nous dire) ! Cet apprentissage se fera sous les deux angles complémentaires : mise en place des algorithmes et sens de l'opération. Tout ce travail est complété par le calcul mental, qui est une activité importante de l'école élémentaire : quel est son rôle dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution des problèmes ? Signalons enfin ce qui est une nouveauté pour les élèves, mais qui est traditionnel pour les enseignants : les nombres relatifs qui peuvent être le support d'une réflexion sur les conséquences de nos choix lors de l'introduction d'une notion.

Un second domaine est celui *des grandeurs et des mesures* : si ce thème relevait avant, presque exclusivement de l'école élémentaire, il nous faudra maintenant le prendre en compte au collège, aussi bien en terme de rupture que de continuité. Cette réflexion nous permettra de mieux analyser les confusions fréquentes entre les notions d'aire et de périmètre.

Un autre domaine est celui de *la gestion de données*. Endroit privilégié de rencontre avec le monde "réel" et les autres disciplines, il s'appuie sur de fréquents changements de registre (texte, tableau, graphique,...) et un esprit d'analyse critique. Le modèle de traitement et de validation le plus utilisé est la proportionnalité, et il est légitime de mener une réflexion à son sujet quand on voit son importance au collège.

Un dernier domaine est *la géométrie de l'espace* où l'objectif principal est d'aider l'élève à se fabriquer des images mentales. Pour cela, des situations simples et concrètes construites à partir du cube pourront permettre la mise en place de quelques unes de ses représentations planes, de se familiariser avec les notions de parallélisme et d'orthogonalité des droites et des plans dans l'espace, d'aborder la notion de volume en se rapportant à un dénombrement de cube-unités.

Plutôt qu'un article, nous avons préféré vous proposer tout au long de la brochure des fiches "prêtes à l'emploi" créées par le groupe élémentaire collège de l'IREM de Paris-Nord et extraites de la brochure "*Activités mathématiques au collège*" fascicule 2.

Jean-Claude DUPERRET

La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6^{ème} tant du point de vue du sens que de la technique.¹

Joël BRIAND - COPIRELEM

Les nouveaux programmes (1995) de l'école élémentaire, s'ils conservent la multiplication d'un décimal par un entier, excluent la multiplication de deux décimaux. La mise en application des nouveaux programmes a commencé à la rentrée 95 en CE2 pour atteindre le CM2 à la rentrée 97. Ainsi, la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6^{ème} tant du point de vue du sens que de la technique.

I- Etat des connaissances des élèves sortant de l'école élémentaire (en référence aux évaluations nationales de 1995)

Nous avons choisi les items qui se rapportent à la multiplication des décimaux.

N°	exercice	% réussite	Principales erreurs	%
Ex. 18b et 18c.	1,54×1000 7,14×100	59,3%	Application à tort de la règle des entiers : 1,54000	10,4%
			Déplacement inexact de la virgule : 15,4	9,8%
			Multiplication de la partie entière : 1000,54	
			et/ou de la partie décimale : 1000,54000	4,2%
Ex. 25	4,28	39%	1 498 ou 14 980 Autres réponses : on y retrouve des résultats où seule la virgule est fautive. On peut se demander si l'alignement des virgules des deux nombres donnés [...] n'induit pas un alignement de la virgule pour le résultat.	14,9%
	× 3,5			42,1%

¹ I.O. 6^{ème}, 1995

Dans l'évaluation 1995 les décimaux apparaissent dans des exercices de calcul, mais jamais dans des problèmes. Suite aux changements de programmes on ne devrait plus trouver d'exercices semblables à l'exercice 25 à partir de la rentrée 98.

II- Les nouveaux programmes de sixième

Dans la partie 2 "travaux numériques", des nouveaux programmes de la 6^{ème}, voici les contenus, compétences et commentaires des parties 2-1 2-2 et 2-3 concernant les travaux numériques des nouveaux programmes de 6^{ème}:

Partie 2-1 : Nombres entiers et décimaux : écritures et opérations (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
techniques opératoires	addition, soustraction et multiplication	...La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6 ^{ème} tant du point de vue du sens que de la technique.

Partie 2-2 : Quotient de deux entiers : (extraits)

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Ecritures fractionnaires	Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples. Savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division.	A l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en 6 ^{ème} s'appuient sur deux idées : le quotient a/b est un nombre. Le produit de a/b par b est égal à a .

Partie 2-3 : Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires : (extraits)

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires	Pour des nombres courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.	Il s'agit de pouvoir utiliser les différentes écritures fractionnaires d'un même nombre décimal.

Ces nouveaux programmes inspirent quelques commentaires :

1- L'ordre des parties pourrait faire croire qu'à l'école élémentaire, la construction des décimaux s'est effectuée avant celle des rationnels ². Or, si nous regardons les manuels diffusés pour les deux dernières années du cycle 3 (ex CM1 et CM2) on s'aperçoit que bon nombre d'entre eux introduisent les fractions simples, puis les fractions décimales (donc les décimaux), puis les écritures à virgules des fractions décimales. Il y a là une tendance à proposer une introduction plus proche de leur construction historique ³. Même si la plupart du temps, cette construction est montrée aux élèves et non pas mise en place par eux, l'école élémentaire prend peu à peu ses distances avec les constructions telles que le marquage de l'unité par une virgule dans un nombre associé à une mesure (que ce soit des unités du système métrique ou la monnaie). Il semble que les premières évaluations nationales aient en partie permis d'ouvrir un débat sur les obstacles didactiques que créait ce type d'introduction. Les élèves concevaient alors le nombre décimal, dans son écriture à virgule, comme un couple d'entiers. De ce fait ils pouvaient envisager comme licite, la notion de décimaux consécutifs, et l'impossibilité d'intercalation dans certains cas.⁴

2- Le mot "quotient" induit souvent l'idée de division. Beaucoup d'étudiants de première année d'IUFM (titulaires de licence) ont ce modèle des rationnels : un quotient est une division à effectuer. En revanche le mot "fraction" telle que $\frac{2}{3}$ est plus souvent envisagée comme un nombre-repère (2 fois $\frac{1}{3}$) sur une droite graduée, ou nombre-mesure.

²Remarque : à l'école élémentaire, le terme de fraction désigne indifféremment le nombre rationnel et une de ses écritures fractionnaires.

³Pour plus d'informations, voir l'article sur "La Disme" dans la brochure Angers 1996 de la COPIRELEM.

⁴ Bien souvent le lien entre l'ordre de la partie décimale des décimaux et l'ordre lexicographique est une découverte pour des étudiants se préparant au concours de Professeur des Ecoles ; voici un exercice " inhabituel " :

1°) Range du plus petit au plus grand les nombres suivants :

22 19 2010 10 1000 103 13 1412 2004 20

Dresse la liste de ces nombres dans l'ordre où ils apparaîtraient s'ils étaient rangés de la même façon que l'on range les mots d'un dictionnaire. L'ordre alphabétique correspondant à l'ordre normal des chiffres, c'est-à-dire 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Compare les deux listes. Sont-elles différentes ?

2°) Maintenant, on fait précéder chaque nombre de 0, on obtient :

0,22 0,19 0,2010 0,10 0,1000 0,103 0,13 0,1412 0,2004 0,20

Range ces nombres du plus petit au plus grand. Compare la liste obtenue aux listes précédentes.

L'idée d'associer quotient et division est très certainement un effet de l'enseignement ; le quotient a une signification polysémique à l'école élémentaire : quotient euclidien (ou quotient entier), quotient décimal, quotient exact (entier décimal ou rationnel), quotient approché (avec un reste décimal). En revanche, dans les instructions de 6^{ème}, la notion de quotient est nettement associée à celle de rationnel. Lorsque les élèves arrivent au collège, le professeur devrait prendre en compte ces différents points de vue.

3- La multiplication des décimaux entre eux relève explicitement maintenant de la classe de 6^{ème}. Notons au passage que le texte déclare : "aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux". Cela signifie-t-il "savoir interpréter le résultat de la division de deux décimaux à l'aide de la calculatrice" ?

III- Quelques pratiques scolaires relatives à l'enseignement du produit de deux décimaux

Voici quelques exemples de pratiques effectives repérées à l'école élémentaire ces dernières années.

Produit de deux décimaux à partir du produit d'un décimal par un entier :

Dans un premier temps, la multiplication d'un décimal par un entier est définie par réitération de l'addition :

par exemple : $1,6 + 1,6 + 1,6 + 1,6$ s'écrit aussi $1,6 \times 4$.

Cette définition ne peut être reprise pour le produit de deux décimaux. Quel sens donner au produit $0,148 \times 1,6$ par exemple ?

On sait que $148 \times 16 = 2\,368$ (dans $\mathbb{N}$) et que $14,8 \times 16 = 236,8$ (nouvelle opération définie de $\mathbb{ID} \times \mathbb{IN}$ vers $\mathbb{ID}$). La multiplication dans $\mathbb{IN}$ possède une propriété connue : "si l'on divise l'un des termes de la multiplication par 10 (100, 1000...), le résultat est divisé par 10 (100, 1000...). On fait donc remarquer à l'élève que $148 : 10 = 14,8$ et $2368 : 10 = 236,8$ permettent de retrouver le résultat de $14,8 \times 16$ nouvellement construit de $\mathbb{ID} \times \mathbb{IN}$ vers $\mathbb{IN}$.

Cette propriété montrée va être alors étendue. L'hypothèse est que "si l'élève a compris", il pourra alors trouver le résultat de chacun des produits suivants : $0,148 \times 1,6$; $14,8 \times 1,6$; $1,48 \times 1,6$, construisant ainsi une nouvelle opération (de $\mathbb{ID} \times \mathbb{ID}$ vers $\mathbb{ID}$) qui garde les propriétés connues de la multiplication de $\mathbb{IN} \times \mathbb{IN}$ vers $\mathbb{IN}$.

Ce passage peut être plus ou moins explicité en utilisant les outils des fonctions :

par exemple :

$$148 \times 16 = 1,48 \times 100 \times 1,6 \times 10 = 1,48 \times 1,6 \times 1000$$

1,48	multiplié par 100	148
× 1,6	multiplié par 10	× 16
?	divisé par 1000	2368

Produit de deux décimaux à partir de calculs d'aires :

Le problème posé aux élèves est le suivant : déterminer un moyen de calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 3,6 et 4,3, l'unité d'aire étant le carré de côté 1.

Plusieurs directions sont possibles :

Produit de deux décimaux qui s'appuie sur un calcul d'aire et sur des jeux d'écriture (à virgule et fractionnaires) :

$$13,427 \times 9,64 = \frac{13\,427}{1\,000} \times \frac{964}{100} \text{ qui se pratiquent par analogie avec ceux}$$

pratiqués dans IN (voir l'étude précédente). Cette approche suppose une connaissance approfondie des rationnels et de la multiplication dans cet ensemble.

Produit de deux décimaux à partir de la mesure effective de l'aire du rectangle :

Les élèves travaillent sur feuille de papier millimétré sur laquelle est dessinée un rectangle de 2,45 dm sur 2,7 dm. Le professeur demande aux enfants de retrouver l'aire du rectangle en dm².

Les savoirs concernant les unités de mesure des surfaces sont connus⁵. Attardons nous un instant sur les stratégies généralement observées :

1- Les enfants effectuent des tracés sur le papier millimétré. Ils recherchent des carrés de 1 dm de côté. Ils retrouvent rapidement les 2 × 2 dm². Il reste à " rassembler les bordures " en paquets valant 1 dm². Pour cela les démarches sont variées.

2- Certains élèves effectuent directement la multiplication de 245 par 27 et cherchent à donner une signification du résultat.

3- D'autres convertissent tout en mm², calculent l'aire en mm² et reviennent à la mesure en dm².

⁵ Toutefois, on sait que les élèves assimilent dm² et carré de un dm de côté, cm² et carré de un cm de côté.

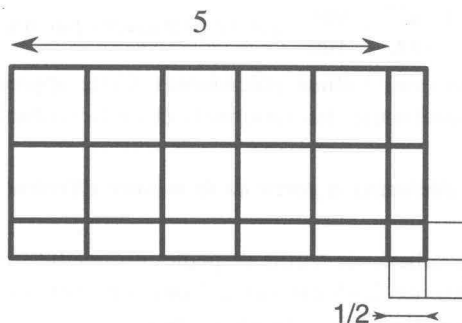
Le professeur a prévu un dessin sur lequel figure le rectangle des élèves ainsi que les rectangles 2×2 (en dm) et 3×3 (en dm) (ce schéma prouve que l'aire du rectangle recherchée est comprise entre 4 et 9 dm²). Ceci permettra d'écarter certaines erreurs issues de diverses stratégies.

Produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur le calcul d'aires :

On se donne un nombre entier de centimètres (8cm). On cherche le plus possible de rectangles ayant ce nombre comme demi-périmètre et on calcule son aire.

Dans un premier temps, les élèves résolvent ce problème dans les entiers. Ils déterminent les couples solution (1;7), (2;6), (3;5), (4;4) et déterminent les aires associées. Ensuite, arrivés à ce stade, ils sont capables de construire des rectangles ayant les dimensions faisant intervenir des fractions simples.

Il s'agit maintenant de calculer l'aire d'un tel rectangle. L'existence de cette aire est évidente pour l'élève.



Les élèves calculent les différentes parties de ce rectangle en utilisant la multiplication dans $\mathbb{N}$ et la multiplication d'une fraction par un entier (connue) et en calculant $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ en se ramenant au carré d'aire 1.

Il s'agit ensuite d'expliciter le calcul effectué :

Ils ont donc : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Il faut calculer $\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)$.

$$\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$5 \times 2 + 5 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 10 + \frac{5}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{4} = 13 + \dots + \frac{1}{4}$$

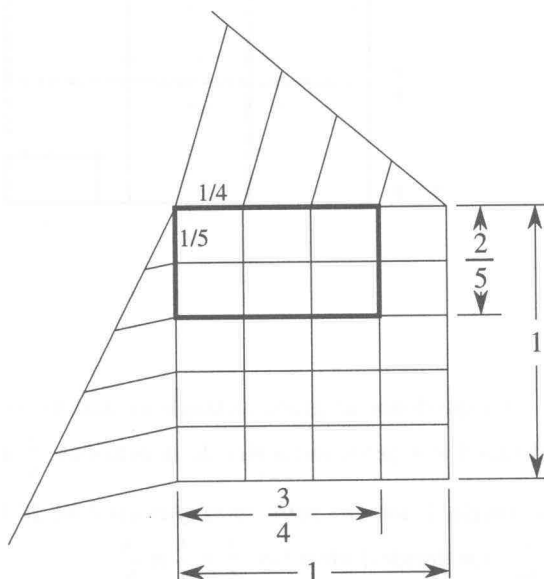
Produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur la juxtaposition d'aires :

Le produit de deux décimaux peut être considéré, dès le départ, comme un cas particulier du produit de deux rationnels en suivant l'une des approches possibles : fractionnement⁶ ou commensuration en fonction de l'introduction choisie pour les rationnels :

Première approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de "partages de l'unité") : soit à définir le produit de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$ en se référant aux mesures des surfaces :

Dans le carré unité (voir figure), il y a 20 rectangles élémentaires. Le rectangle d'aire $\frac{2}{5}$ multiplié par

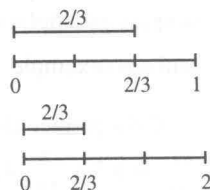
$\frac{3}{4}$ est formé de 6 rectangles élémentaires. Son aire est donc les $\frac{6}{20}$ de l'unité.



⁶ *fractionnement* : Une unité (de longueur, d'aire, de masse...) étant choisie, le rationnel $\frac{2}{3}$ est considéré comme 2 fois $\frac{1}{3}$.

commensuration : $\frac{2}{3}$ est considéré comme le nombre qui, multiplié par 3 donne 2 par report de mesure. Cela correspond au quotient de 2 par 3.

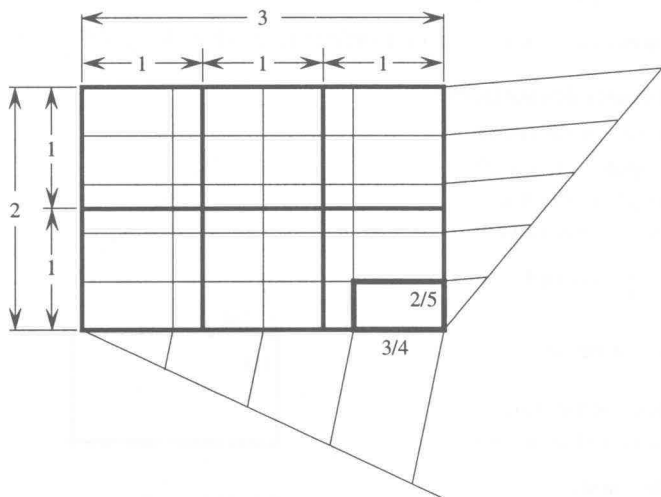
Pour une étude approfondie de ces deux modèles, voir : "Deux méthodes de mesures rationnelles", RATSIMBARAJOHN in Revue de Didactique des Mathématiques. Ed. La pensée sauvage. Volume 3-1, p. 65-112.



Deuxième approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de la "commensuration").

Soit à définir le produit de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$ en se référant aux mesures des aires :

il faut 5 longueurs de $\frac{2}{5}$ pour faire 2 et 4 longueurs de $\frac{3}{4}$ pour faire 3.



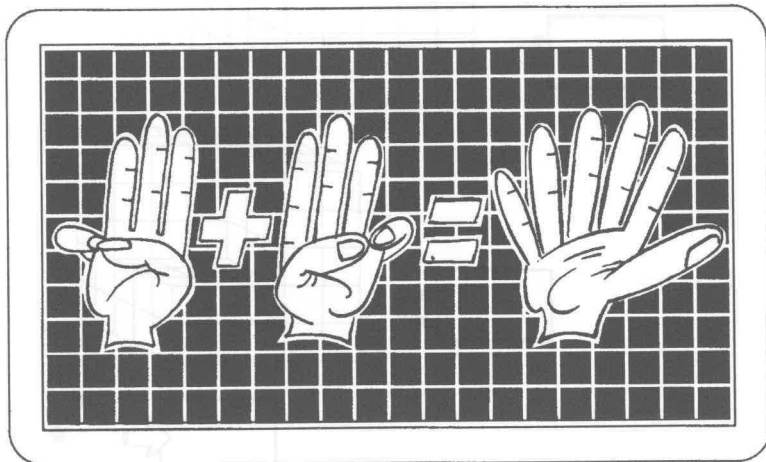
Ce qui donne un grand rectangle de dimensions 2 et 3 d'aire 2×3 soit 6. Il faut 5×4 petits rectangles de dimensions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$ pour obtenir le grand rectangle. L'aire des petits rectangles est donc 20 fois plus petite. Elle est de $\frac{6}{20}$. On décide d'identifier $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ et $\frac{6}{20}$.

Ce travail (première ou deuxième approche) fait sur quelques fractions simples est appliqué au cas des fractions décimales et institutionnalisé sur ce seul cas (exemple : $\frac{2}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{6}{1000}$).

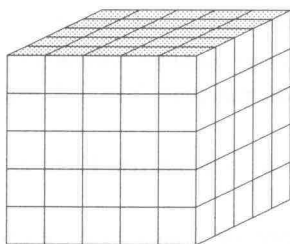
Cela permet alors de donner du sens à 3,7 par 4,56 ; 3,7 étant identifié à $\frac{37}{10}$ ou à $3 + \frac{7}{10}$, 4,56 à $\frac{456}{100}$ ou à $4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$, le produit $3,7 \times 4,56$ est donc égal à : $\frac{37}{10} \times \frac{456}{100}$ ou $\left(3 + \frac{7}{10}\right) \times \left(4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}\right)$.

IV-Bibliographie recherche et formation :

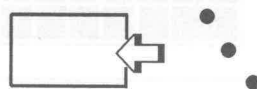
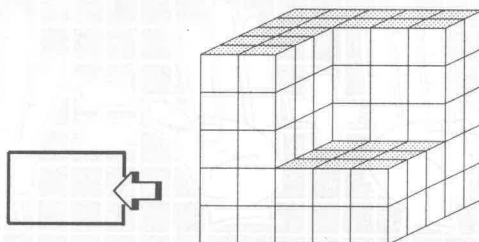
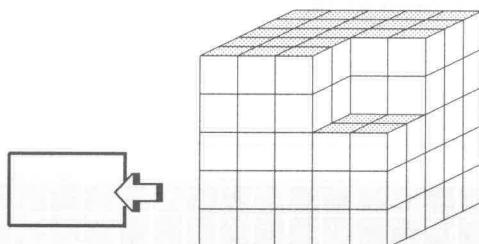
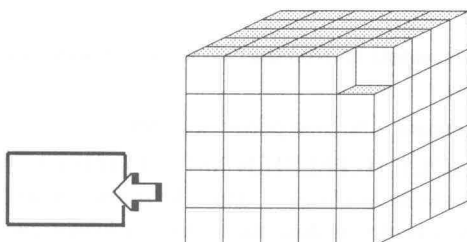
- BROUSSEAU G.(1980), "*Problèmes de didactique des décimaux*", dans *Recherche en Didactique des Mathématiques* 2/1, pages 37-128.
- RATSIMBA-RAJOHN (1982) : "*Deux méthodes de mesures rationnelles*".
RDM :Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 3-1 pages 65-112.
- COPIRELEM (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*. Elem math VIII Publication APMEP n°61.
- DOUADY R., PERRIN M.J. (1986) : "*les nombres décimaux à l'école et au collège*". IREM Paris VII.
- BROUSSEAU N.et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
- BERTE A. "*Mathématique dynamique*" Nathan pédagogie 1993.
- BRIAND J., HUET M.L.,PEAULT H.,PELTIER M.L : COPIRELEM (1995) "*La Disme*" et "*Etude de la Disme*", dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris 7, pages 43-78.



Le termite à cube



Tout au long de la brochure, nous proposons des fiches sur la géométrie dans l'espace



Combien reste-t-il de cubes après le passage du termite ?

Introduction des nombres relatifs

Claude ROBIN - IREM de POITIERS

Les programmes

L'examen du programme officiel de sixième nous apprend que les nombres relatifs doivent être introduits en sixième mais qu'aucune compétence n'est exigible sur les opérations, les règles sur l'addition et sur la soustraction seront étudiées en cinquième. En sixième, cette partie du programme est couplée avec le repérage sur une droite et dans le plan sans lien étroit avec le reste du programme de cette classe.

Les relatifs doivent donc apparaître :

- comme un moyen de se repérer sur une droite et dans le plan,
- comme des nombres.

L'aspect repérage, qui ne pose guère de problème, est largement développé dans les manuels. Mais que fait-on pour que les relatifs aient le statut de nombres ?

Le but de cet article est d'analyser des modes d'introduction des relatifs et de présenter une approche permettant à l'élève de se construire une représentation des relatifs principalement centrée sur l'aspect nombre.

Les acquis en début de sixième

Que sait un élève entrant en sixième sur les nombres relatifs ? A l'école élémentaire, aucune situation-problème ne peut faire penser aux élèves qu'en dehors des décimaux positifs connus, d'autres nombres peuvent exister. L'élève travaille sur des situations de vie courante ou des situations géométriques, il opère donc uniquement sur des nombres positifs.

Pourtant, des expressions telles que : "il fait moins cinq" ou "la voiture est garée au niveau moins deux" font partie du vocabulaire d'un enfant de 11 ans ou du moins sont compréhensibles par lui. Mais, pour lui, moins cinq et moins deux font partie du vocabulaire de la vie courante et n'ont aucun rapport avec les objets mathématiques que sont les nombres. Ces acquis pourront tout de même être exploités lorsque nous travaillerons sur le côté repérage mais ne sont d'aucune aide pour la construction du statut de nombre.

Objectifs

Quels objectifs doit-on poursuivre lors de l'introduction des relatifs ? Quels apprentissages doit-on assurer ? Quelles transformations doivent s'opérer chez l'élève ?

- L'élève doit changer son regard sur les mathématiques. Jusqu'en sixième, les mathématiques servent surtout à représenter le monde réel, à traiter des situations de la vie courante. A l'école élémentaire, pour résoudre les problèmes proposés, l'élève doit modéliser une situation qu'il a rencontrée ou plus exactement qu'il peut se représenter, les nombres correspondent à des situations de comptage ou de mesurage. Avec les nombres négatifs, il y a une rupture, on va plus loin dans le monde de l'abstraction. L'élève doit se construire une représentation de ces nouveaux nombres que l'on ne peut plus associer aux mêmes situations que celles déjà rencontrées. L'élève doit donc changer sa conception du nombre. La construction de ce nouvel ensemble d'objets mathématiques doit se faire et être vue comme une extension du sens de ce que l'on nomme nombre pour qu'il n'y ait pas une coupure avec les nombres positifs déjà connus.

- De plus, les relatifs ne prendront le statut de nombres que si l'élève est amené à rapidement opérer avec eux. Ces opérations devront amener l'élève à ne pas imaginer séparément les anciens et les nouveaux nombres mais, au contraire, à voir les décimaux positifs connus comme une partie de la grande famille des relatifs.

Pour atteindre ces objectifs ambitieux, nous aurons donc à choisir des situations d'introduction en cohérence avec les buts poursuivis.

Regard historique

Que peut nous apporter un survol de l'histoire des nombres relatifs sur les contextes d'apparition et les obstacles rencontrés ?

Cette histoire est longue, lacunaire et tourmentée :

- longue car, si les Chinois utilisaient les nombres négatifs dès le I^{er} siècle, les notaient différemment des positifs et utilisaient toutes les propriétés des règles de calcul, il a fallu attendre, en Occident la fin du XIX^e siècle pour qu'ils prennent leur statut de nombres avec la construction formelle des ensembles de nombres (Hankel 1867).

- lacunaire car les nombres négatifs ne sont apparus en Occident qu'au XV^e siècle avec les travaux de N. CHUQUET.

- tourmentée car jusqu'au XIX^e siècle même si les grands scientifiques utilisaient ces nombres et les règles de calcul, beaucoup d'entre eux refusaient de les admettre comme racines d'équations, niaient l'existence de quantités

négatives isolées, ne pouvaient concevoir qu'il puisse exister des nombres "moindres que rien".

" Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?" CARNOT - Géométrie de position (1803) .

Le contexte dans lequel sont apparus les nombres négatifs est celui des équations où ils seront longtemps utilisés comme des auxiliaires de calculs : les données et les résultats sont positifs mais la résolution impose le passage par des nombres négatifs. Beaucoup plus tard le calcul algébrique fut un autre contexte d'utilisation ; quant au contexte du repérage il n'est apparu qu'au XVIII^e siècle en liaison avec la représentation des fonctions.

Ce rapide survol nous montre qu'il est utopique de croire que les relatifs puissent prendre un statut de nombres en quelques séances surtout si celles-ci ne portent que sur des situations de repérage. De plus, l'histoire nous montre bien que les nombres négatifs sont apparus, non pour une modélisation du monde réel mais pour une nécessité interne aux mathématiques.

Or, au collège, les commentaires des programmes mettent l'accent sur la résolution de problèmes concrets et sur le fait que les notions nouvelles doivent être introduites comme réponses à un problème posé. Peut-on utiliser les enseignements de l'histoire et rester en cohérence avec les programmes ? En sixième, les élèves doivent être initiés aux équations et savoir trouver un nombre manquant dans une opération c'est-à-dire résoudre des équations telles que $a + x = b$, $a - x = b$, $a \times x = b$, a et b étant des nombres positifs. Mais cette initiation doit prendre appui sur des situations concrètes. En effet, nombre de situations peuvent se modéliser par de telles équations mais aucun problème concret ne peut avoir de solution négative. Alors, peut-on utiliser des supports concrets et assurer tous les apprentissages précédemment cités ?

Les manuels

Un détour vers les manuels scolaires les plus couramment utilisés nous donne un éventail des supports possibles pour l'introduction des relatifs en sixième. Nous allons étudier leurs avantages et leurs inconvénients pour ainsi mieux cerner les apprentissages qu'ils permettent et les conceptions des nombres relatifs qu'ils peuvent installer.

Les modèles contextes les plus couramment utilisés pour illustrer les nombres relatifs sont :

- l'ascenseur,
- l'échelle des temps,

- la température,
- l'altitude et la profondeur.

Ces quatre situations peuvent en effet permettre d'introduire les nombres négatifs. Ils offrent des avantages :

- partir de situations concrètes, connues ou facilement imaginables par les élèves. L'utilisation de l'échelle des temps et de l'altitude-profondeur permet également de faire un lien avec l'histoire et la géographie.
- utiliser certains acquis des élèves comme pour les températures,
- aboutir rapidement sur le côté repérage demandé par les programmes.

Mais l'utilisation exclusive de ce genre de situations présente des inconvénients qui peuvent engendrer des blocages : lorsque nous codons une température inférieure à zéro ou une date antérieure à la naissance de J.C. par des relatifs, il ne s'agit que de **repérage** par rapport à une origine arbitrairement choisie. Se posent alors deux questions :

- comment ces repères vont-ils acquérir le statut de nombres ? Vont-ils entrer dans le domaine mathématique ou rester dans celui de la vie courante ?
- quelles opérations pouvons-nous faire avec eux ? Il n'y a aucun sens à ajouter ou à multiplier deux repères.

A ce moment ces situations ne touchent que le côté ordinal du nombre et ne peuvent donc à elles seules donner aux relatifs leur statut de nombres.

Prenons l'exemple de la température :

Si j'ajoute (ou si je multiplie) la température -6 du matin et la température 2 de midi, qu'est ce que je peux obtenir ? Rien de significatif ! Nous sommes donc devant des "nombres" avec lesquels on ne peut faire ces opérations puisque ce sont des repères. En revanche, on peut faire la différence de deux températures et dans ce cas-là, on obtient un écart, de même qu'en faisant une différence de deux "dates" on obtient une durée.

Pour éviter ce problème, nous faisons alors résoudre ce genre d'exercice à nos élèves : " Le matin il fait -7° , dans la matinée la température augmente de 10° . Combien fait-il à midi ? " Cet exercice a pour but de faire modéliser cette situation par l'opération $-7 + 10 = 3$ (ou $(-7) + (+10) = (+3)$) et la réponse "il fait 3° à midi" est attendue. Analysons le statut de -7 , de 10 et de 3 : -7 et 3 sont des repères et 10 est une variation. Dans cette situation, coexistent et interagissent des états (les repères de température, les dates,...) et des variations.

Les variations peuvent être aussi bien négatives que positives. Elles peuvent s'ajouter algébriquement dès qu'on peut les transporter (ce sont les mêmes 7° entre 3° et 10° qu'entre -4° et 3°). Les états sont repérés par la

variation à partir de l'origine fixée arbitrairement (fusion de la glace, naissance de J.C...).

Ce sont les variations qui portent le statut de nombre. Il y a cependant une opérations entre états qui est significative, c'est la *moyenne*.

Un autre contexte se rencontre dans les manuels (mais beaucoup plus rarement, un seul manuel sur les quatre étudiés) pour l'introduction des relatifs. Il s'agit du goal average au football. On dispose de deux nombres : les buts pour et les buts contre et le goal average est le bilan des deux premiers. Ce goal average, appelé différence dans le manuel étudié, est interprété

- soit comme une différence : buts pour – buts contre

$$10 - 7 = 3$$

$$3 - 11 = -8$$

- soit comme une somme de deux relatifs que l'on doit coder auparavant, les buts pour en nombres positifs et les buts contre en nombres négatifs.

$$(+10) \text{ et } (-7) \text{ donne } +3$$

$$\text{ou } (+10) + (-7) = +3$$

$$(+3) \text{ et } (-11) \text{ donne } (-8)$$

$$\text{ou } (+3) + (-11) = (-8)$$

le signe + de l'addition est alors synonyme de "et", sens couramment utilisé pour l'addition des relatifs.

Une situation analogue est utilisée dans le cas des bilans gain-perte ou recette-dépense.

Ces situations ont l'avantage de présenter le relatif comme un nombre qui intervient dans une opération, aspect qui ne pouvait être mis en avant dans les quatre premières situations présentées, souvent utilisées. L'interprétation du goal average comme une différence nous semble plus porteuse car le nombre relatif apparaît comme résultat d'une opération connue entre des nombres connus, il n'y a donc aucun artifice préalable, il s'agit ici de trouver un résultat à une soustraction jusqu'ici considérée comme impossible.

Nous reviendrons longuement sur ces soustractions impossibles dans la dernière partie de cet article.

Pour conclure sur ces modes d'introduction qui se réfèrent à des situations concrètes, nous pouvons dire qu'ils peuvent contribuer à la découverte de ces nouveaux nombres mais leur utilisation exclusive présente des écueils importants : tout d'abord, la plupart d'entre eux introduisent le relatif uniquement comme un repérage. De plus, l'utilisation excessive des situations concrètes risque de provoquer des blocages lors de l'introduction de la multi-

plication en quatrième. Dans les situations concrètes, la multiplication est le plus souvent une opération externe. On ne peut pas plus multiplier des gains entre eux que des pertes entre elles. De plus, il n'y a pas de situations concrètes simples qui donnent un sens au produit de deux nombres négatifs.

Donnons toutefois un contexte possible :

- un ascenseur descend de trois étages par minute, deux minutes plus tôt, il était six étages plus haut. Mathématiquement, le modèle est $d = v.t$. Pour $v < 0$ et $t < 0$, le produit $v.t$ est > 0 .

Finalement, les négatifs interviennent de trois façons :

- pour mesurer les variations,
- pour repérer des points ou des états par rapport à une origine qui ne soit pas un "zéro absolu" (par exemple celui des températures ou le big bang pour le temps),
- dans le calcul algébrique (dans la résolution d'équations par exemple) où tous les nombres sont traités de la même façon. Si le calcul modélise une situation, on ne se pose la question de la signification qu'à la fin pour le résultat.

Ce troisième aspect est moteur dans la construction des nombres négatifs, comme il l'est pour les rationnels et comme il le sera plus tard pour les nombres complexes.

Enfin, si l'élève n'est pas détaché du modèle concret, il aura du mal à concevoir que les relatifs négatifs ne doivent leur existence qu'au rôle qu'ils prennent en mathématiques à la fois dans la résolution des équations et dans la construction des ensembles de nombres.

Les soustractions impossibles

Toute cette étude nous a amené à envisager un autre mode d'introduction qui permet d'aborder le relatif comme réponse à une soustraction jusqu'ici impossible pour l'élève, c'est-à-dire à résultat non positif. Cette méthode, testée dans des classes, semble donner satisfaction dans l'immédiat pour l'introduction des nombres relatifs et ne pas provoquer de blocage pour l'apprentissage des opérations, car, d'emblée, le relatif se présente comme un nombre et son utilité ne peut être mise en doute. Le nombre négatif est une réponse à un problème que l'on pose : faire en sorte que toutes les soustractions des nombres déjà connus soient possibles.

Détaillons un peu ce mode d'introduction peu développé car non rencontré dans les manuels.

1^{ère} étape

Au tableau, la soustraction $5 - 7$ est posée. Deux réponses sont possibles :

$$“ 5 - 7 = 2 ”$$

Les élèves font l'opération dans le sens où elle est possible, ils comptent l'écart entre ces deux nombres. Cette réponse peut rapidement être mise en défaut.

$$“ 5 - 7 \text{ est impossible car } 5 \text{ est plus petit que } 7 ”.$$

C'est en effet ce que les élèves ont appris à l'école élémentaire. Le professeur doit alors amener les élèves à se placer dans un autre contexte purement mathématique. On veut faire en sorte que toutes les soustractions soient possibles. Quelles références ont les élèves pour attaquer cette question ? Comment peuvent-ils contrôler la validité d'une réponse proposée ? L'intérêt est donc purement mathématique, les nombres négatifs vont permettre d'effectuer des soustractions jusqu'ici sans réponse.

2^{ème} étape

Une liste de soustractions est alors donnée aux élèves. Le premier objectif est que les élèves repèrent celles qu'ils savaient déjà traiter, qu'ils les effectuent et vérifient qu'ils ne se sont pas trompés. Le deuxième objectif est qu'ils proposent une réponse argumentée pour les autres.

Exemples : $10 - 4$; $15 - 7$; $100 - 85$; $89 - 98$; $2,5 - 1,3$; $0,01 - 0,1$; $0,7 - 0,73$...

méthode attendue :

1) un critère de reconnaissance des soustractions possibles : les $a - b$ pour lesquelles $a > b$.

2) une méthode de vérification des résultats. Par exemple, $10 - 4 = 6$ est le nombre qui ajouté à 4 donne 10. De même pour $15 - 7$; $100 - 85$; ...

Question : dans la soustraction $89 - 98$, 89 est plus petit que 98. Peut-on trouver un nombre qui ajouté à 98 donne 89 ?

$98 + ? = 89$. Les connaissances antérieures amènent à proposer $98 - 9 = 89$.

Cela va conduire à revenir sur le sens de l'expression “ajouter un nombre à un autre” et convenir, à partir d'exemples numériques et de référence à une échelle graduée déjà rencontrée (température, ascenseur...), que faire la soustraction $98 - 9$ et faire l'addition $98 + (-9)$ ont la même signification.

Dans le déroulement, ce travail peut être individuel dans un premier temps pour que chaque élève se questionne et que le professeur sache comment se situent ses élèves par rapport au savoir en perspective et non encore établi. Si les élèves ont l'habitude de travailler en groupes, on peut demander aux élèves de comparer leurs réponses et de se mettre d'accord, chaque réponse devant faire l'unanimité dans le groupe. Si cette structure de classe

n'est pas pratiquée, on peut, tout de suite, collectivement, faire une synthèse en demandant, pour chaque opération, toutes les réponses trouvées et questionner les élèves sur leur méthode pour trouver les réponses.

Pour les soustractions données, il est intéressant de donner des nombres entiers et des nombres non entiers et ainsi de tester le degré de maîtrise de l'ordre sur les décimaux et sur les opérations.

3^e étape

Cette phase a pour objectif, du côté des élèves, de faire expliciter, de faire un lien entre addition et soustraction et de les familiariser avec les nombres négatifs comme réponse à des additions à trous. L'objectif est aussi de prolonger le travail sur les équations étudiées dans le domaine des entiers et des décimaux positifs. La résolution peut se faire par recours au sens des opérations.

Exemples :

$$2 + \square = 10 ; 17 + \square = 5 ; \square + 13 = 5 ; 35 + \square = 21 ; 145 + \square = 72 ; \\ 12,5 + \square = 8,5$$

Les nouveaux nombres vont permettre de trouver une solution à une équation du type $a + \square = b$, a et b étant positifs.

Les 2^{ème} et 3^{ème} étapes peuvent donner lieu à du calcul mental à condition de choisir des nombres simples. L'objectif est de se représenter mentalement ce que l'on fait et non d'appliquer une règle, aucune règle n'étant à institutionnaliser en sixième.

4^e étape

Une brève synthèse permet de prendre de la distance par rapport au contexte de travail et d'institutionnaliser l'existence de nombres autres que ceux déjà connus et qui viennent les enrichir pour offrir un domaine de réponses à toutes les soustractions.

Les élèves peuvent, dès lors, concevoir que ces nombres soient représentés sur une droite graduée qui complète et étend les échelles particulières rencontrées dans les situations concrètes déjà travaillées (température, altitude-profondeur...).

La représentation graphique des nombres par une droite graduée régulièrement offre un appui autre que le calcul pour se familiariser avec le franchissement du zéro et avec l'ordre. Calcul et représentation graphique se fécondent mutuellement, en particulier en étant chacun un domaine de contrôle pour l'autre.

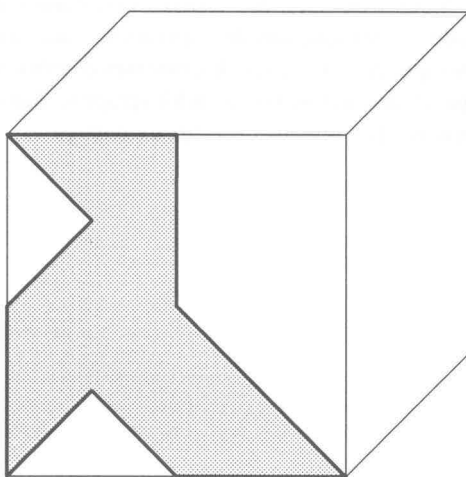
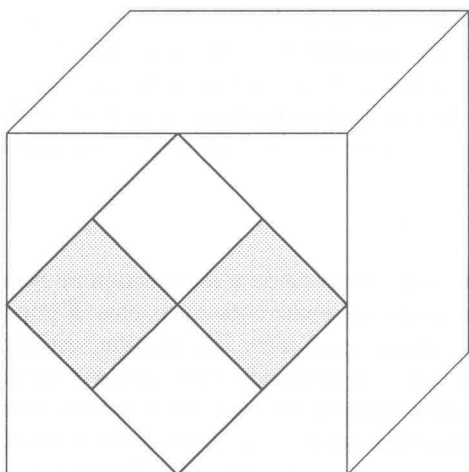
Les nombres négatifs interviennent ici comme réponses à une opération à faire. Pour les élèves qui ne savent pas encore effectuer les opérations demandées, la représentation sous forme d'échelle graduée est essentielle comme outil d'investigation et de contrôle. Elle suggère un ordre dont on verra qu'il est compatible avec les opérations. Le bon fonctionnement des opérations et de l'ordre permet aux nouveaux éléments de prendre le statut de nombre qui s'installera progressivement dans le temps. On peut, et on a intérêt, prolonger ce travail par des exercices de repérage sur la droite et dans le plan, et aussi par la recherche de problèmes qui mettent en jeu des nombres relatifs positifs et négatifs.

Conclusion

En guise de conclusion, notons qu'aucun mode d'introduction ne peut, à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés en sixième. Il importe donc de varier les situations (repérage, gain-perte, soustraction, variations transformation à appliquer à un état...) et de prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut aux nombres relatifs, négatifs comme positifs sans discrimination, et à ne pas créer d'obstacle didactique à la mise en place de l'addition et surtout de la multiplication.

Vous trouverez des repères historiques plus détaillés, une analyse des modes d'introduction des opérations, une étude des difficultés à surmonter ainsi que des exemples de contextes d'utilisation pour chaque niveau du collège et des éléments de bibliographie dans une brochure de l'IREM de Poitiers *"Les nombres relatifs au collège"*.

Cubisme



Pour chacun des cubes, reproduis le dessin de la face avant sur les deux autres faces visibles



Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes

**Denis BUTLEN, Anne-Marie MONFRONT, Monique
PEZARD
IREM Paris VII - COPIRELEM**

Dans cet article, nous appelons calcul mental aussi bien le calcul mental tel qu'on l'entend traditionnellement, que le calcul que l'on peut qualifier de "rapide" ou de "réfléchi". Si besoin, les élèves peuvent écrire des calculs ou des résultats intermédiaires. Par contre, le recours aux algorithmes écrits standards n'est pas licite dans ce type d'activités.

1 - Pourquoi faire du calcul mental en sixième ?

Le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour tester les conceptions numériques des élèves et leur disponibilité :

C'est un moment où l'on peut mettre à distance les algorithmes écrits et de ce fait, avoir accès plus aisément aux conceptions numériques : le temps étant limité, la nécessité de calculer rapidement amène les élèves à abandonner, dans bien des cas, les algorithmes opératoires standards, sûrs mais trop lents, et à mettre en oeuvre des procédures révélatrices des conceptions qu'ils se font des nombres ; ces conceptions sont évidemment liées à la numération (décimale), aux propriétés des opérations (fonctionnant souvent de façon implicite).

Prenons un exemple : calcul du produit 32×25 :

Si le calcul est fait mentalement et vite, l'élève peut être amené à abandonner l'algorithme standard au profit de procédures plus économiques mais nécessitant des décompositions additives ou multiplicatives des facteurs et ceci en liaison avec les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité par rapport à l'addition...). Voici plusieurs types de calculs possibles :

$$32 \times 25 = 30 \times 25 + 2 \times 25 = 10 \times 75 + 50 = 750 + 50 = 800$$

$$32 \times 25 = 32 \times 20 + 32 \times 5 = 32 \times 2 \times 10 + 32 \times 5 = 64 \times 10 + 160 \\ = 640 + 160 = 800$$

$$32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$$

$$32 \times 25 = 32 \times 100 / 4 = 3200 / 4 = 800$$

$$32 \times 25 = 32 \times 50 / 2 = 1600 / 2 = 800$$

etc...

L'élève choisit telle ou telle procédure dans un souci d'économie mais aussi de sa pratique et de sa familiarisation avec certains algorithmes. Ce choix est un compromis personnel entre le recours à la mémoire, la disponibilité des décompositions des nombres, la maîtrise des propriétés des opérations, la fatigue due aux calculs intermédiaires,...

Le calcul mental nous semble être un moment privilégié de l'apprentissage pour :

- enrichir les conceptions numériques et leur domaine de disponibilité,
- accroître la familiarisation de l'élève avec les nombres et les opérations,
- faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations,
- enrichir, diversifier, étendre les procédures de calcul.

Les séances de calcul mental sont des espaces de travail intensif :

- du point de vue individuel : les élèves travaillent vite, changent plus ou moins rapidement de techniques, de démarches, sont amenés à en explorer de nouvelles ;
- du point de vue collectif : on peut constater une réelle émulation, une dynamique dans la classe. De plus, s'il y a explicitation, les élèves sont amenés à comparer les différentes procédures, à effectuer un choix entre celles-ci, choix dépendant de la nature des données et des calculs à effectuer et de ce fait à enrichir leurs capacités calculatoires.

Ce sont en général des activités motivantes.

On constate un gain de temps provenant de l'économie réalisée par le non-recours à l'écrit et par le rythme, la succession rapide des activités.

Le calcul mental peut être une aide à la résolution de problèmes :

Le calcul mental libère de l'espace mental pour résoudre des problèmes numériques : Nous avons constaté au cours de nos recherches qu'un entraînement régulier au calcul mental améliore les performances pour une certaine catégorie de problèmes numériques : ces problèmes doivent être assez familiers aux élèves mais pas trop. L'exemple type semble être celui des problèmes additifs des compositions de transformations, exemple : *Au premier arrêt d'un autobus 8 personnes montent, au second arrêt 12 personnes descendent, au troisième arrêt 9 personnes descendent. Y a-t-il plus ou moins de*

personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt, combien en plus ou en moins ?

Quand le modèle sous-jacent au problème n'est pas très familier à l'élève, il semble qu'un entraînement régulier au calcul mental libère de l'espace mental, mobilisé auparavant par le traitement des opérations, au profit de la représentation du problème (*). Ainsi, les élèves des classes entraînées au calcul mental non seulement calculent mieux mais aussi reconnaissent davantage les opérations à effectuer ; les erreurs de "modèle" sont alors moins nombreuses.

Le calcul mental permet de jouer sur la "taille" des nombres intervenant dans un problème et par là peut favoriser une meilleure représentation de celui-ci.

Le problème suivant est très mal réussi par des élèves de sixième : " combien de menus différents peut-on constituer avec 6 entrées, 12 plats et 7 desserts différents ? ".

Ils ne reconnaissent pas une structure multiplicative. En général, ils cherchent à établir la liste exhaustive de toutes les solutions en essayant d'organiser leur recherche. Une telle procédure conduit à un échec dans le cas du produit cartésien de trois ensembles dont le nombre d'éléments est supérieur à 5.

L'élève peut engager des stratégies de résolution en recourant à des données plus faibles (produit de deux ensembles, nombres d'éléments plus petits que 5) mais ces procédures ne sont pas performantes dans le cas initial.

C'est pour cela qu'il est indispensable d'initialiser une recherche dans un domaine numérique plus complexe avant de recourir à d'éventuelles simplifications des données.

Le calcul mental accroît les capacités d'initiative des élèves : Comme nous allons le montrer dans l'exemple qui suit cette introduction, une pratique régulière de calcul mental autorise l'élève :

- à jouer sur la taille des nombres (simplifier les données numériques) ;
- à rechercher des procédures de résolution non "standards", à faire des essais, à recommencer, à accepter de faire des erreurs... ;
- à explorer rapidement différentes voies de résolution du problème ;

(*) voir D.BUTLEN et M. PEZARD : « Rapport entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution des problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire et du début du collège », actes du 22ème colloque de la COPIRELEM, Douai 1995.

- à ne pas recourir immédiatement à certains algorithmes fiables mais parfois coûteux...

Cette phase de tâtonnement utilisant le calcul mental peut être déterminante pour trouver la ou les procédures conduisant à la réussite.

2 - Un exemple de recherche : le problème des briques

Le problème posé

“On empile des briques de 0,1 mètre de hauteur pour construire un mur de 2 mètres de haut. Combien de briques empile-t-on les unes sur les autres ? ”

Cet exercice est en général très mal réussi quand il est posé dans un devoir écrit. La reconnaissance de l'opération à effectuer ainsi que l'obtention du résultat de l'opération sont deux obstacles importants. Beaucoup d'élèves ne proposent rien ou écrivent une opération en “tentant leur chance”, sans chercher vraiment à comprendre.

Voyons comment la pratique du calcul mental et de la résolution mentale des problèmes peut en partie lever ces difficultés.

Recherche individuelle

Les élèves sont entraînés à mettre en oeuvre diverses procédures qui leur permettent d'aborder le problème même s'ils n'en voient pas encore la solution.

Des procédures d'essais

On trouve par exemple : (des exemples de ce qu'ont écrit des élèves figurent entre les guillemets)

- compter combien de fois on doit ajouter 0,1 pour obtenir 2.

“ 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = 2 ”

- calculer en plusieurs étapes, soit le nombre de briques dans une hauteur de 1 mètre, puis de 2 mètres : “ $0,1 \times 10 = 1$ donc 20 briques”, soit la hauteur de 2 briques et donc le nombre de briques “ $0,1 \times 2 = 0,2$ donc 20 briques”.

- des multiplications de 0,1 par divers nombres pour trouver lequel donnera 2.

“J’ai essayé de multiplier par plusieurs nombres et de me rapprocher de 2 le plus possible ”.

Avec ces tentatives, fructueuses ou non, les élèves donnent du sens à la question posée, étape évidemment nécessaire mais qu'ils sautent parfois !

Les procédures d'exploration et d'essais ont un statut reconnu, encouragé par le professeur ; cela permet à tous les élèves de participer. Dans cette recherche plus souple, des élèves proposent des idées qui font avancer dans la compréhension et la résolution du problème alors que ces élèves seraient peut-être bloqués, dans un travail écrit habituel, par la nécessité de produire une rédaction et une présentation rigoureuses. Cette façon de travailler donne aussi l'occasion d'être actifs et de s'investir à des enfants qui partent battus dans une demande classique où, pour remplir quand même le "contrat scolaire", ils se contentent d'écrire et d'effectuer une opération sans ou presque sans référence au sens du problème.

Des recherches de modèle du problème sans utiliser les valeurs données

On trouve par exemple :

- traduction par une expression littérale très contextualisée, les lettres évoquant les grandeurs :

$$\text{" B } \quad \quad \quad \text{M " } \quad \text{ou} \quad \text{" B } \times \text{ N ? = M "}$$


- expression du modèle par une phrase sans nombre : *"la hauteur d'une brique multipliée par le nombre de briques est égale à la hauteur totale"*
- transformation des nombres donnés par des nombres plus "simples" : *"je remplace par exemple 0,1 par 5 et 2 par 50, alors je sais le faire"*.
- conversions en centimètres.

La pratique du calcul mental est propice à ce détour éliminant, dans un premier temps, les nombres "difficiles". En effet, pour oser négliger en début de recherche les nombres qui sont jugés compliqués, il faut que la peur d'avoir à réaliser une opération avec ces nombres n'envahisse pas trop l'enfant, qu'il puisse être assez libéré pour ne pas en faire une priorité sachant qu'ensuite il pourra traiter la question avec de bonnes chances de réussite. Une pratique régulière des calculs, une amélioration de l'habileté opératoire donnent cette disponibilité nécessaire à l'appropriation du problème.

Les élèves l'expriment dans ces extraits de comptes-rendus rédigés quelques temps après : *"Quand un nombre nous fait peur, on le change en chiffre plus facile" , "ou par une lettre". "J'ai converti en cm car je trouve que c'est plus simple parce que les nombres sont entiers"*.

(Dans ces comptes-rendus, nous avons accepté que les élèves utilisent le mot "chiffre" dans le sens qui lui est donné dans le langage médiatique et non dans le langage du professeur de mathématiques).

Des recherches avec des opérations à “trou”

On trouve soit directement la présentation $0,1 \times ? = 2$, soit après les procédures d’essais, soit après les recherches avec des lettres ou avec d’autres nombres : ($5 \times ? = 50$ donc $0,1 \times ? = 2$). La division ($2 : 0,1$) est très rarement directement écrite.

Mise en commun

Chacune des propositions d’élèves apporte un éclairage personnel sur la résolution du problème ; il est important de faire une mise en commun. L’élève enrichit alors sa compréhension du problème traité ; il peut découvrir des méthodes auxquelles il n’avait pas pensé qu’il pourra réinvestir dans la résolution d’autres problèmes.

Le professeur a intérêt à choisir l’ordre des procédures présentées à la classe pour que la méthode “standard” ne s’impose pas avant d’avoir été réellement construite par chacun grâce à cette mise en commun.

Après l’écoute de diverses stratégies, pour l’ensemble de la classe, c’est la multiplication à “trou” qui traduit le mieux la résolution du problème : “*Si on connaît le nombre de briques, en le multipliant par 0,1 on obtient 2. On écrit $0,1 \times ? = 2$* ”.

Cette étape permet d’écrire la division qui avait rarement été écrite directement dans la recherche individuelle.

Voici ce qu’écrivent des élèves dans leur compte-rendu : “*Pour être sûr de réussir un problème, on peut quelquefois le résoudre à l’envers.....Alors on trouve l’opération parce qu’une multiplication à trou correspond à une division. De même, une addition à trou correspond à une soustraction*”.

La technique de l’opération sous contrôle du sens

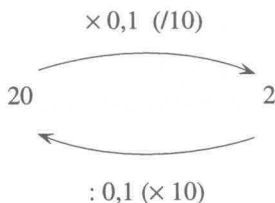
Il reste alors à savoir effectuer la division obtenue.

Dans le contexte, le résultat est trouvé par beaucoup d’élèves. On peut ainsi retrouver une propriété déjà rencontrée : “Si on divise par un nombre inférieur à 1, le quotient est plus grand que le dividende”, règle qui va à l’encontre de tant de situations de divisions “courantes” qu’elle est difficile à accepter ; et s’en convaincre à nouveau dans une situation bien comprise n’est pas à négliger.

Un des buts du problème posé est de décontextualiser le procédé de division pour arriver à des règles utilisables dans d’autres situations, mais il faut que ces règles aient pris assez de sens avant de fonctionner de façon automatique.

Là encore, le retour sur la multiplication donne du sens à la recherche du

résultat : on retrouve d'abord dans le contexte, sur des exemples comme $0,1 \times 3$ ou $0,1 \times 20$, la règle de multiplication par 0,1 et la justification du décalage de la virgule au résultat. La règle inverse se comprend ou se retrouve alors plus aisément.



“Pour diviser par 0,1, on multiplie par 10”.

En 6^{ème}, la règle est loin d'être acquise.

Rappelons que l'on peut lire dans les programmes de 1^{ère} ES (B.O. du 24/09/92) : “Le sens d'un produit par un nombre positif inférieur à 1 étant un obstacle réel, on utilisera les pourcentages pour faire progresser cette notion”. Alors cinq ans avant, pour des élèves moins sélectionnés, quand il s'agit de division, il est absolument nécessaire qu'ils soient confrontés à diverses situations où la règle prend sens avant qu'ils arrivent à la décontextualiser et à pouvoir l'utiliser avec maîtrise. L'algorithme général de la division n'est pas ici le meilleur outil à utiliser. Pourtant des élèves réussissent par cette technique et divisent consciencieusement 20 par 1 sans négliger une étape ! Tandis que d'autres s'arrêtent perplexes devant cette “curieuse” division.

$$\begin{array}{r|l}
 2 : 0,1 & \\
 \hline
 20 & 1 \\
 -2 & \\
 \hline
 00 & 20 \\
 -0 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

C'est l'occasion de remettre en place la propriété utilisée pour diviser par un décimal : “on obtient le même quotient si l'on multiplie dividende et diviseur par le même nombre”. Ici, en maîtrisant cette règle sans en faire une partie de l'algorithme que l'on déroule sans contrôle, on obtient très aisément le résultat.

$$\begin{array}{c}
 n = 2 : 0,1 \\
 \times 10 \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \times 10 \\
 n = 20 : 1 \\
 n = 20
 \end{array}$$

C'est la règle que les élèves réinvestissent le plus, quand elle convient, dans les exercices suivants.

Après

De nombreux exercices sont ensuite donnés.

Les uns portent sur les techniques que l'on vient de revoir : $12 \times 0,1$; $12 \times 0,3$; $15 : 0,1$; $15 : 0,3$

Les autres sont des problèmes de soustraction ou de division où le modèle d'addition ou de multiplication "à trou" aide à résoudre.

III) Un exemple de mise en œuvre

Les observations que nous avons décrites dans le travail précédent s'inscrivent dans une progression générale intégrant une pratique régulière de calcul mental et d'explicitation de procédures de résolution.

Le professeur de la classe consacre environ une heure par période de trois semaines à des activités de calcul mental et de résolution mentale de problèmes.

Cette heure se décompose ainsi : trois petites séances de 10 minutes de calcul mental, une séance plus importante de 30 minutes où plus de temps est consacré à l'explicitation de procédures de calcul.

En effet, pour que cette pratique soit rentable, il est indispensable de prendre le temps de faire expliciter, par les élèves, les procédures mises en œuvre (qu'elles conduisent ou non à un résultat juste). La comparaison des différentes procédures permet à chacun de déterminer son choix en fonction de ses conceptions numériques, de sa familiarité avec les opérations et la numération.

Nous avons même régulièrement amené les élèves à rédiger de courts textes collectifs résumant ce qu'il est important de retenir de l'ensemble des activités de calcul mental pratiquées.

Voici des exemples d'activités que l'on peut conduire à propos des fractions. Nous pensons qu'il est indispensable de proposer des activités de calcul mental très diverses :

- calcul rapide sur des nombres : $2 + \frac{1}{2}$; $1 - \frac{2}{7}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; ...

- ordre de grandeur : des deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{5}$, laquelle est plus petite que

1 ?

- transformations mentales d'écritures : donne quatre écritures différentes de $\frac{35}{8}$ en utilisant les signes +, -, $\times$

- des résolutions mentales de problèmes :

2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe. Le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au $\frac{2}{3}$ de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?

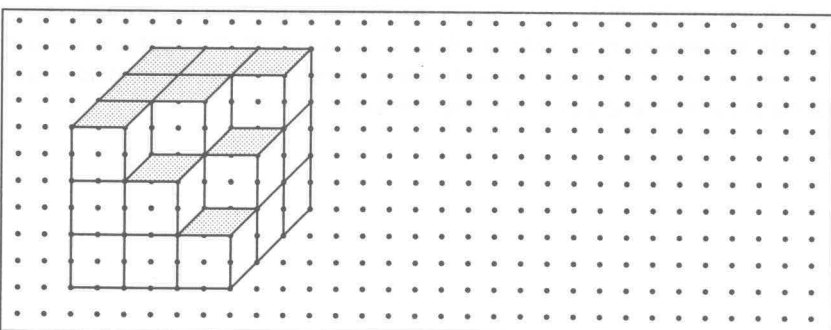
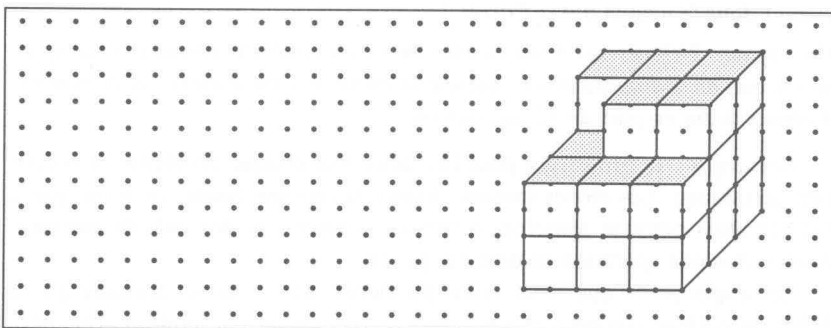
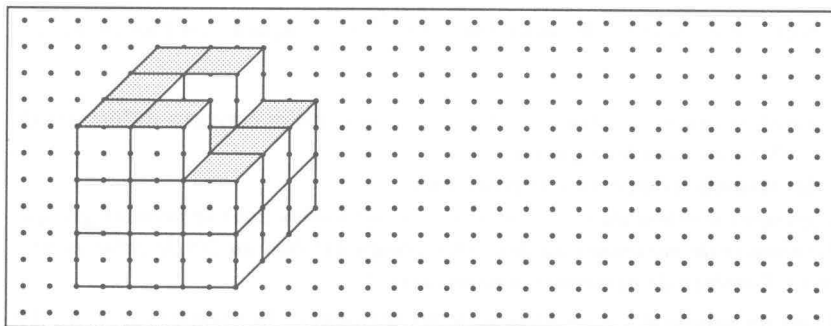
Dans un wagon il y a un groupe de 80 personnes. Au premier arrêt, les $\frac{3}{8}$ du groupe descendent mais $\frac{1}{8}$ du groupe remonte. Combien y a-t-il de personnes dans le wagon après l'arrêt ?

On sait que 2 élèves sur 3 ont eu plus de 12 au contrôle. Donner 3 exemples de classes en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

Remarque : le professeur peut lire deux fois chaque problème, il n'écrit rien au tableau. Les élèves doivent donner la réponse finale, ils n'ont pas à rédiger mais peuvent toutefois écrire les données ou des calculs intermédiaires. Aucune opération ne doit être posée.

Les expériences que nous avons pu mener tant à l'école primaire qu'au début du collège (sixième et cinquième) montrent qu'une pratique régulière de calcul mental incluant la résolution mentale de problèmes numériques accroît les compétences calculatoires des élèves et favorise la "prise de sens" lors de résolutions écrites de problèmes. La diversité des approches avant l'exposé d'une résolution standard aide à l'appropriation du modèle sous-jacent et favorise une meilleure compréhension.

Il manque une pièce (1)



Dessine la pièce manquante à chacun des solides pour qu'il devienne un cube.



Des divisions en sixième

Anne-Marie MONFRONT - IREM Paris VII

« *La division est une opération en cours d'acquisition en début de Collège* ». Il reste en effet un long chemin à parcourir pour construire les significations de la division, pour relier ou classer toutes les situations que l'on traite avec l'algorithme de la division. En 6ème, à travers l'étude de situations variées, les conceptions des élèves sur la division vont évoluer, intégrant ou modifiant des conceptions anciennes. (*)

Les connaissances et les compétences qu'il nous paraît souhaitable de développer en sixième

Elles ont pour source et pour but la compréhension et la résolution des problèmes.

A) La division euclidienne

C'est une opération qui concerne les entiers naturels (nous dirons ici entiers). A deux nombres entiers a et b , elle fait correspondre **deux nombres entiers** : le quotient euclidien et le reste euclidien ; le reste peut être égal à 0 ; le quotient aussi, cependant peu de situations « naturelles » correspondent à ce cas. Cette division se traduit par l'égalité :

$$a = (b \cdot q) + r \text{ avec } r < b.$$

La recherche du quotient et du reste peut se faire par diverses techniques. Certaines sont très proches de pratiques courantes : additions répétées de b pour approcher a , soustractions répétées de b à partir de a pour approcher 0. Elles donnent du sens à l'égalité ci-dessus, à l'encadrement de a par des multiples de b puis à l'algorithme classique de la division.

B) La division

C'est une opération qui, à deux nombres a et b fait correspondre **un seul nombre**, le quotient. Elle se traduit par l'égalité $b \cdot x = a$; le quotient x est le nombre qui multiplié par b donne a . En ce sens, elle est à rapprocher, du point de vue structurel, de la soustraction, opération inverse de l'addition.

(*) M.J. Perrin-Glorian. « Sens, algorithme et représentations symboliques. » Mathématiques et langage. Les Actes du Congrès des Conseillers Pédagogiques. Versailles 1994. Hachette éducation.

Cette division est adaptée à des situations où interviennent des grandeurs continues et elle nécessite **l'extension du domaine numérique**. On peut avoir à diviser deux entiers : le quotient est un entier, un décimal non entier, ou un nombre non décimal d'où la construction et l'écriture fractionnaire de nouveaux nombres. On peut aussi avoir à diviser un décimal par un entier ou par un décimal non entier ; en 6^{ème}, il s'agit d'une première approche qui sera reprise en 5^{ème}. Il restera à diviser deux rationnels non décimaux, ce qui sera abordé en 4^{ème}.

Pour calculer le quotient, les stratégies pertinentes avec les entiers, comme les additions ou soustractions successives, ne sont en général plus performantes. L'encadrement entre deux multiples du diviseur ne correspond qu'au cas où le diviseur est entier et ne donne que les valeurs approchées entières du quotient. C'est l'algorithme classique mis en place avec la division euclidienne qui permet de calculer dans tous les cas soit la valeur exacte du quotient soit des valeurs approchées. Il vaut mieux réserver le mot quotient à la valeur x définie comme terme manquant d'une multiplication et utiliser les expressions valeur exacte du quotient et valeur approchée du quotient au lieu de quotient exact et quotient approché.

C) La réponse à donner à un problème

Elle doit tenir compte du sens de la situation et pas seulement du résultat de la division posée. On peut avoir par exemple à prendre :

- la valeur entière par excès du quotient ;
- la partie entière du quotient de deux décimaux non entiers ;
- la valeur approchée du quotient avec une précision donnée.

Une série de problème mettant en jeux divers aspects de la division : des partages en parts égales

A) Des énoncés

Ces problèmes peuvent être donnés en début d'apprentissage ou au contraire après d'autres activités plus riches et plus variées où le traitement nécessite choix et succession d'opérations.

Ils ont pour but de bien cerner les questions concernant la division en jouant sur des situations semblables avec des nombres différents et des situations différentes, collections discrètes ou grandeurs continues, avec les mêmes nombres.

Les enfants ont à terminer l'énoncé et à résoudre. Dans le bilan collectif, ils discutent des précisions à apporter, des questions que l'on peut poser et ils proposent des solutions.

- 1- On partage 32 bonbons entre 5 enfants....
- 2- Avec 32 mètres de ficelle, on fait 5 guirlandes de même longueur....
- 3- On fait des groupes de 5 élèves dans une classe de 32 élèves....
- 4- On fait des guirlandes de 5 mètres dans une ficelle de 32 mètres....
- 5- 6- 7- 8- mêmes énoncés que 1- 2- 3- 4- en remplaçant en remplaçant 32 par 30.
- 9- On partage 8 mètres en 3 parties égales....
- 10- On partage 10,2 mètres en 3 parties égales....
- 11- On partage 10,2 mètres en 7 parties égales....
- 12- Combien de morceaux de ficelle mesurant 4 mètres de long peuvent être coupés dans une ficelle de 39,2 mètres de long ? Quelle longueur de ficelle restera-t-il ?

(Evaluation à l'entrée en 6^{ème} - 1994)

B) Choix des énoncés.

Il donne l'occasion de distinguer les types de partages équitables selon la nature de la grandeur à partager.

1- Partages de collections discrètes. (élèves, bonbons)

Sous certaines conditions à préciser, ils se traduisent par une division euclidienne, le reste peut être nul ou non. Les partages de bonbons et les groupements d'élèves (problèmes 1-3-5-7) relèvent de ce modèle. Mais, ils sont perçus comme différents par les élèves.

Au point de vue du sens, les uns concernent la recherche de la valeur d'une part la plus grande possible (partage de 32 ou 30 bonbons, problèmes 1 et 5), les autres la recherche du nombre de parts (nombre de groupes d'élèves avec 32 ou 30 élèves, problèmes 3 et 7). La réponse à donner n'est pas toujours le quotient euclidien, il faut tenir compte du sens de la situation et de la question que l'on peut poser. Par exemple, on peut dire qu'il est impossible de ne faire que des groupes de 5 élèves dans la classe de 32 élèves, on peut proposer 7 groupes dont 6 de 5 élèves et 1 de 2 élèves ou d'autres solutions.

Au point de vue numérique aussi, les partages sont différents ; les uns fournissent un reste non nul (les 32 bonbons et les 32 élèves, problèmes 1 et 3), les autres (les 30 bonbons et les 30 élèves, problèmes 5 et 7) « tombent juste » ou « n'ont pas de reste » comme on entend souvent pour exprimer

que la collection complète a pu être partagée.

2- Partages de grandeurs continues.

a) La manipulation ou l'évocation du partage en un nombre donné de parts fournit la conviction de l'existence du quotient avant le moyen de le calculer et la nécessité d'étendre le domaine numérique pour le définir. Elles permettent de comprendre que, dans le cas de grandeurs continues, le partage de la quantité totale en parts égales (ici, 32 mètres puis 30 mètres en 5 parties égales) est toujours possible alors que le partage de la totalité d'une grandeur discrète en parts égales ne se réalise que si le nombre à partager est multiple du diviseur. L'ordre des problèmes (travailler sur le nombre 32 avant 30 pour les bonbons et pour la ficelle) peut aider à mieux distinguer les situations de grandeurs discrètes ou continues. Le cas particulier, 30 partagé en 5 donne 6 n'a pas le même sens dans les deux problèmes : pour les bonbons, cas particulier où la collection complète peut être partagée (le reste vaut 0) ; pour la ficelle, cas où le quotient est un entier.

Parmi les problèmes de partages d'une longueur en un nombre donné de parts, trois concernent la division d'un entier par un entier (partage de 32 ou 30 ou 8). Selon le cas, le quotient est un entier, un décimal non entier ou un nombre non décimal. L'algorithme de la division en donne soit la valeur exacte soit des valeurs approchées à diverses approximations. On remarquera que l'on peut toujours diviser un entier par un entier mais que l'expression « a est divisible par n » signifie que le quotient de a par n est un entier.

Le problème d'une grandeur continue partagée en parts égales se traduit par la recherche du « nombre » x tel que $a : n = x$ c'est-à-dire tel que $n \cdot x = a$ avec n entier. Le nombre a étant la mesure d'une grandeur continue, il peut être un nombre décimal non entier comme dans les problèmes avec 10,2 mètres à partager en 3 ou 7 (en 6^{ème}, on n'étend pas davantage le domaine des nombres à diviser).

b) D'autres problèmes de partages sur les grandeurs continues consistent à chercher un nombre de parts donc un nombre entier, les deux nombres donnés étant des décimaux entiers ou non (les guirlandes de 5 mètres dans 32 ou 30 mètres et le dernier problème).

La recherche du nombre de parts et du reste semble assez bien acquise sur les grandeurs discrètes (groupes de 5 élèves, problèmes 3 et 7) et par « imitation » sur les grandeurs continues mesurées avec des nombres entiers (guirlandes de 5 mètres, problèmes 4 et 8). Mais la très faible réussite au problème 12 dans l'évaluation en début de 6^{ème} de 1994 montre qu'il y a là une véritable difficulté pour les élèves. Ils ont besoin de manipuler, de faire des

schémas, de tenter des procédures d'essais, de chercher des éléments de validation pour s'approprier le problème. Et que dire de la recherche du reste si l'on remplaçait les données 39,2 mètres en coupons de 4 mètres par 7,3 mètres en coupons de 1,2 mètre ; après le traitement de la division par l'algorithme, les élèves ont du mal à savoir quel est le reste : 1 mètre ou 0,1 mètre.

Cette situation est aussi l'occasion d'aborder une autre difficulté ; on la trouve par exemple dans le problème suivant : « Combien de coupons de 0,3 mètre peut-on faire sur une longueur de 6 mètres ? ». Le quotient supérieur au dividende met en défaut le « théorème en acte » fortement ancré chez les élèves et qui a jusque-là bien fonctionné : « quand on divise, on obtient un nombre plus petit que le nombre à diviser » (voir l'article de cette brochure sur calcul mental et résolution de problèmes).

Pour aller plus loin

D'autres situations correspondent au cas plus général où ni le diviseur ni le quotient ne sont des entiers (proportionnalité, longueurs, aires et volumes). La résolution de ces problèmes nécessite l'extension du sens de la division : le quotient x des deux décimaux a et b existe toujours, c'est le nombre qui multiplié par b donne a , il peut être décimal ou non décimal ; il vérifie l'égalité $b \cdot x = a$ (c'est le terme manquant d'un produit).

Les exemples de division concernant les partages de grandeurs continues en un nombre de parts donné sont un bon point de départ pour cette extension puisqu'on y cherche aussi le terme manquant d'un produit.

Mais avant cette dernière étape, il faut mettre en place « *la multiplication des nombres décimaux* » qui « *est une nouveauté de la classe de sixième tant du point de vue du sens que de la technique* ».

Des p'tits cubes, un gros cube, ...

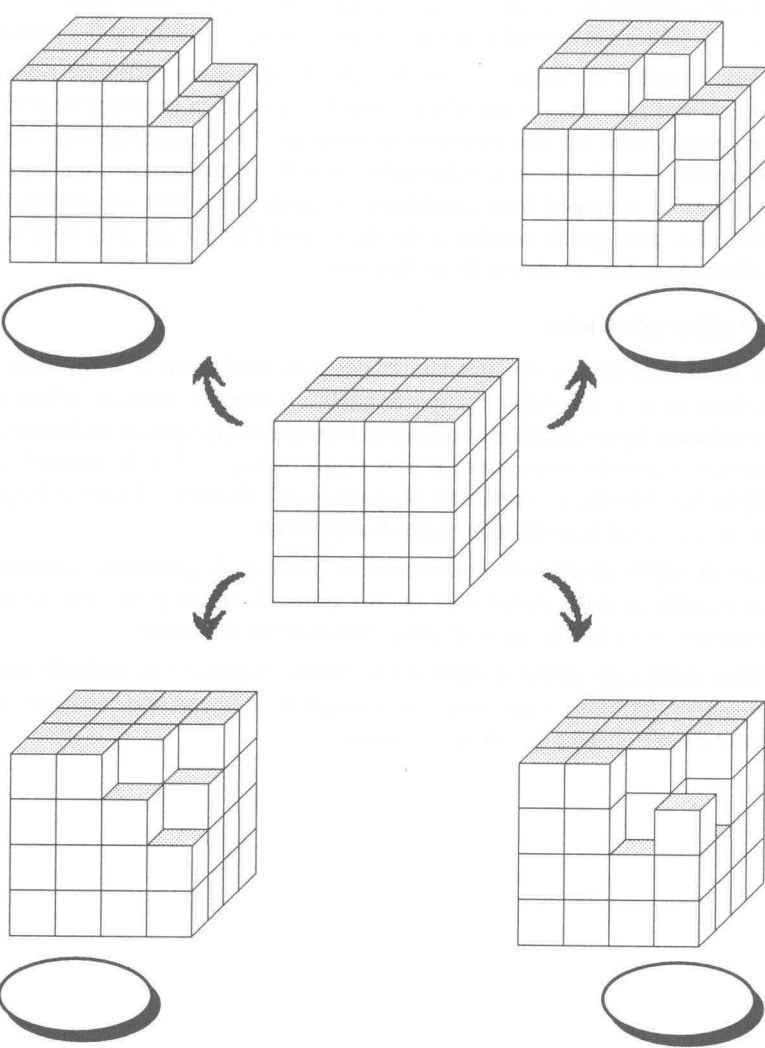


Diagram illustrating a 4x4x4 cube and four different solids formed by removing some of its small cubes. The solids are arranged around the central cube, with arrows indicating the transformation. Each solid has a shaded top layer, suggesting a specific pattern of removal.

Combiens a-t-on retiré de petits cubes pour obtenir chacun de ces solides ?



Grandeur en sixième

Marc PICOT - IREM de LILLE

Qu'est-ce qu'une grandeur ?

“Voilà un de ces mots dont tout le monde croit avoir une idée nette et qu'il est pourtant assez difficile de bien définir [...]

Quoiqu'il en soit, les mathématiciens définissent ordinairement la grandeur : ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution”.

(Diderot - D'Alembert)

Pourquoi un travail spécifique sur les grandeurs ?

“...au cours du même siècle, [le XX^e] les grandeurs ont disparu des mathématiques. Alors qu'elles avaient été au long de l'histoire, le matériau même de l'élaboration des nombres ...”¹

Nous pensons qu'il est fondamental de développer la notion de grandeur avant et indépendamment de la mesure : ainsi, les grandeurs seront, pour l'élève, un support solide pour le numérique. Une fois l'idée de grandeur amorcée, la mesure viendra conforter le concept de grandeur.

Il est important que les élèves comprennent qu'à un même objet puissent être associés différentes grandeurs. Par exemple pour chaque individu, on peut parler de sa taille et de son poids. Il est important qu'ils apprennent à ne pas les confondre (ce qui arrive souvent avec aire et périmètre !).

L'activité suivante a pour objectif de les aider à prendre conscience de cette diversité des grandeurs et à éviter les confusions qui peuvent s'ensuivre.

Activité : Classement d'objets d'après leur grandeur

Pour faire émerger le concept de grandeur, on propose aux élèves de classer des “objets” d'après leur *grandeur* :

Que signifie la phrase : “Cet objet est aussi grand qu'un autre ? ”

Une liste de mots est écrite au tableau :

En voici deux exemples :

Premier exemple de liste : (avec des adjectifs)

Sac à dos ; mi-temps ; mer ; taille ; boule de pétanque ; parfum ; périmètre ; chanson ; tapis ; pause ; hauteur ; bébé ; odeur ; triangle ; sac de

¹ Le Sens de la Mesure Nicolas Rouche, professeur à l'Université de Louvain-la-Neuve

plomb ; largeur ; casserole ; affiche ; fusée ; rouge ; étendue ; vie ; disque ; ficelle ; glace ; pré ; air ; peinture ; clocher ; paquet ; poster ; train ; profondeur ; trousse ; récréation ; toiture ; verre ; valise ; rapide ; court ; léger ; spacieux ; ouvert ; fermé ; cher ; ...

Deuxième exemple de liste : (sans adjectif)

livre ; armoire ; collège ; trousse ; ficelle ; ballon ; champ ; table ; maison ; jardin ; oeil ; cravate ; récréation ; repas ; chaussure ; chaise ; spaghetti ; cours ; route ; vacances ; règle ; équerre ; classe ; cartable ; chemise ; arbre ; terrain de foot ; voiture ; département ; électricité ; ...

Consigne :

On dira que deux objets choisis dans la liste sont comparables si la question suivante a un sens : “ lequel des deux objets est le plus grand ? ”

Dans un premier temps, on trace au tableau quelques colonnes, sans titre. Dans chaque colonne, on écrira une liste d'objets comparables. On ajoutera des colonnes si nécessaire.

On traite des exemples avec les élèves :

* exemple où deux objets seront écrits dans la même colonne :

“ *le jardin est plus grand que la cour* ”. On peut dire : le jardin est plus étendu que la cour. En tête de la colonne où figureront les mots *jardin* et *cour*, on écrira l'adjectif : *étendu* ; les élèves proposent d'écrire aussi : *vaste*. (voir le tableau en annexe).

* exemples “non” :

“ *la cour est plus grande que la ficelle* ” ; les deux mots *cour* et *ficelle* ne peuvent pas figurer dans la même colonne.

“ *le parfum est plus grand que ...?* ” Qu'est-ce que la grandeur “parfum” ? On ouvre une colonne des inclassables. Notons que cette colonne peut évoluer : “ *j'ai consommé plus d'électricité que mon voisin* ”. Qu'est-ce que la grandeur “électricité” ?

Les élèves (individuellement ou en groupe) ont un temps de réflexion pour proposer des appariements.

Pendant la première séance, les colonnes sont remplies d'après les adjectifs proposés : colonne des objets longs, courts, larges, colonne des objets étendus, vastes, immenses, colonne des gros, volumineux, spacieux, colonne des lourds, légers, celles des inclassables, celles des “autres”. Parfois, les élèves proposeront des nouvelles colonnes : celles des longs en durée, des chauds, froids. Plus tard, on ajoutera des colonnes : [angle], [vitesse] ².

Dans tous les cas, un mot n'ira dans une colonne que s'il obtient l'adhésion de la classe.

Gestion des ambiguïtés :

“la trousse est plus longue que la ficelle” L’élève place la ficelle à côté de la trousse et on voit bien qu’on peut dire vrai ou faux ! Le débat lèvera cette ambiguïté : on parlera de la largeur, de la hauteur de la trousse.

“la salle 4 est plus grande que la salle 12” . On parle de l’aire des salles ; on pourrait parler de son “volume”.

“la table est plus grande que la trousse” : la trousse tient sur la table donc elle plus petite que la table ! Il faudra convaincre les élèves que : *tient sur* n’est pas synonyme de : *est plus petite que*.

Les débats apprendront à préciser les différentes notions attachées à un objet ; on apprendra à préciser : la hauteur du pavé, le volume du pavé, à moins que le contexte ne permette de décider sans ambiguïté.

Validation :

Rangement des objets : deux objets figurent dans une même colonne s’ils permettent de formuler des phrases du type

... est aussi grand que ...

... est plus petit que ...

... est deux fois plus grand (petit) que ...

en précisant que les adjectifs grand ou petit peuvent être avantageusement remplacés par un autre adjectif (écrit dans la même colonne que les mots étudiés).

Mise en forme du travail réalisé :

On donne un nom à chaque colonne. On remarque alors que les élèves nomment *surface* la colonne des étendues, qu’ils sont surpris de trouver la largeur, la profondeur et la hauteur dans la colonne des longueurs. Les élèves ajoutent par exemple la colonne “angle” lors de la rencontre de cette notion.

Ce travail fait émerger les difficultés liées au choix des modèles mathématiques et aux unités de mesures. Il débouchera sur un tableau , qui sera complété au long de l’année (lignes et colonnes). (Le tableau proposé en annexe est celui obtenu par mes élèves après plusieurs mises au point).

Ce tableau permet aux élèves de distinguer différentes grandeurs. Ils apprennent à préciser le point de vue sous lequel ils étudient un objet : le polygone est vu sous plusieurs aspects : son périmètre, sa surface, son encombrement.

Cette différenciation des grandeurs nous semble suffisante en sixième, mais on ne peut pas évidemment se limiter à cette différenciation pour que le concept de grandeur se construise.

² la vitesse n’est jamais apparue spontanément chez les élèves de sixième

Réflexion sur grandeur

Nous proposons un condensé des réflexions qui nous a conduit à faire ce travail sur les grandeurs.

1) Grandeur et mesure :

Ces deux notions sont étroitement liées.

Le numérique envahit nos habitudes : les machines de notre siècle donnent directement la *mesure* de l'objet sur un cadran : poids, prix, longueur, vitesse ...

La mesure est le lien entre l'objet et le nombre, le pont entre la géométrie et le numérique. Elle est indispensable pour la notion de nombre réel.

La distinction entre la grandeur et sa mesure n'est pas toujours très claire. Par exemple, au fil des années, le mot surface va prendre le statut de l'*objet*, alors qu'en 1960, il servait plutôt à rendre compte de la *grandeur*, l'aire servant à mesurer, pour être aujourd'hui considérée comme la grandeur.

L'usage répand cette confusion entre grandeur et mesure : dès qu'on parle d'aire, on se réfugie souvent dans la formule. Nous pensons que l'emploi prématuré des formules opacifie la notion de grandeur et favorise les confusions entre les diverses grandeurs attachées au même objet.

2) Grandeurs mesurables ; grandeurs repérables :

Nous n'avons abordé que la notion de classement des grandeurs. Nous avons laissé volontairement de côté des notions importantes attachées à cette notion. Nous en dirons quelques mots, sans aucun développement.

Il convient de distinguer les grandeurs "mesurables" (celles qu'on peut sommer, découper), et les grandeurs "repérables". Les longueurs, les aires sont "mesurables"; tandis que les températures, les dates, les pressions ne le sont pas.

Notons que l'enseignement au Collège rend certaines grandeurs ambiguës : les angles posent peu de problèmes tant qu'on reste plus petit que l'angle plat (difficulté liée à l'usage courant du rapporteur de 0 à 180 degrés), mais on a du mal à les sommer... ou bien on change d'angle ? (et d'instrument aussi).

Il faut distinguer ces deux aspects des grandeurs : on ne traite pas la grandeur "heure" de la même manière que la grandeur "durée", la grandeur "température" de la même manière que la grandeur "quantité de chaleur". On rapprochera cette distinction avec les relatifs : les relatifs "repérés" n'ont pas le même statut que les relatifs "dynamiques", ceux que l'on somme algébriquement.

Existe-t-il des grandeurs qui ne seraient ni repérables, ni mesurables ?

Un gros chagrin (voir tableau) ? Reste à convaincre les élèves que ce ne sont pas des grandeurs !

Conception unidimensionnelle ou pluridimensionnelle :

Une autre notion attachée à celle de grandeur est sa conception unidimensionnelle ou pluridimensionnelle.

L'exemple du volume sera éclairant :

“Le volume est une grandeur physique qui peut être mesurée directement (cas des récipients) : elle supporte à ce titre des propriétés unidimensionnelles (G. Vergnaud)”

On peut transporter un certain volume de liquide d'un récipient à un autre, le répartir entre plusieurs récipients. A condition de ne rien perdre dans la manipulation, le volume global n'est pas altéré. On peut comparer un volume à un autre, le mesurer par rapport à une unité choisie ; tout cela qu'il soit plein, creux, liquide, solide.

“ En même temps, la mesure du volume peut être calculée par une combinaison sur des grandeurs d'une autre nature (surface - longueur, ou bien longueur - longueur - longueur) ; cela met en oeuvre , au-delà des formules, une conception bi ou tridimensionnelle du volume (ib.)

Acquérir le volume en temps que quantité pluridimensionnelle, c'est réaliser que le volume du parallélépipède est le produit d'une aire et d'une longueur ou de trois longueurs, qu'une homothétie de rapport k sur les longueurs multiplie le volume par k^3 . Cela suppose la capacité pour l'élève de différencier les différentes quantités attachées à un objet. Ces capacités dépassent l'élève de sixième.

En général, les adolescents maîtrisent aires et volumes sous leur caractère unidimensionnel. Mais il faut noter qu'à ce stade, les élèves établissent un lien entre les grandeurs. Exemple : “ les deux parallélépipèdes ont le même volume, car ils ont le même poids, bien qu'un l'un soit plus penché que l'autre ”. Mais le même élève affirmera qu'ils ont aussi la même aire latérale, ou il acceptera que le volume du cône tend vers 0 quand le sommet part à l'infini .

Grandeurs quotients ; grandeurs produits :

Nous mettons à part l'étude de ces grandeurs, les programmes les renvoient aux classes ultérieures. Elles seront source de nouvelles difficultés dans l'apprentissage : comment sont définies des vitesses, des débits, des masses volumiques, une puissance électrique ? Comment “ somme-t-on ” ces grandeurs ? Pourquoi la vitesse moyenne n'est-elle pas la moyenne des vitesses ?

Annexe

...est aussi grand que ...			... est plus petit que ...			... fait deux fois plus que ...		
NOMS	LONGUEUR	SURFACE ¹	VOLUME	MASSE	ANGLES	DURÉE	AUTRES	INCLASSABLE
ADJECTIFS	long, court	étendu, vaste	volumineux, gros, spacieux	lourd, léger	ouvert, fermé	long, court	chaud	foncé, tendre
EXEMPLES	taille, ficelle, profondeur, largeur, hauteur, fil tendu, périmètre, chemin, cravate, chaussure...	tapis, feuille, mer, tableau, disque, affiches, cour, jardin, champ...	valise, doseur, dé, trousse, ballon, vase, bouteille, maison...	sucré, fruit	angle	pause, récréation, cours, vacances, repas	température, pression	couleur, yeux, parfum
								
MODÈLES	segment, cercle	carré, rectangle, disque	cube, parallélépipède, sphère					
MESURE UNITÉ	mètre	mètre carré	mètre cube (2)	kilogramme	degré	heures, minutes, secondes		

¹ Ce n'est pas une coquille : dans un premier temps, les élèves veulent le mot surface. On le corrigera après.

² Les élèves n'ont pas pensé au titre. Les grandeurs Volume et Capacité sont-elles différentes ?

Le tour de l'aire

Georges COMBIER - René MULET-MARQUIS

Martine PHILIPPON

IREM de LYON

Cet article reprend la partie relative à la classe de sixième de la brochure de l'IREM de Lyon : Le tour de l'aire en collège.

Présentation

Cet article a une double source : la recherche et les stages de formation. La recherche ¹ porte à l'origine sur les problèmes posés par l'enseignement des décimaux et sur les rapports entre le numérique et le géométrique à l'école élémentaire. Les stages qui faisaient suite aux évaluations à l'entrée en sixième ont permis une analyse par les enseignants des erreurs de leurs élèves qui a confirmé que le concept d'aire, en cours d'élaboration à ce stade de la scolarité, ne se construit pas indépendamment de celui de longueur et de périmètre.

Les connaissances et les compétences qu'il nous paraît souhaitable de développer en sixième

Notre but est de permettre à l'élève de construire, en les différenciant l'un de l'autre, les concepts d'aire et de périmètre. Pour cela, il faut qu'il sache associer au périmètre la mesure du contour de la figure. De plus, il doit avoir conscience que la connaissance du périmètre d'un polygone se résume à la connaissance de la longueur de ses côtés alors que pour déterminer son aire, il est nécessaire de mesurer d'autres dimensions que les côtés (après avoir effectivement ou mentalement soit transformé le polygone en une figure de base : rectangle, triangle..., soit l'avoir décomposé en figures élémentaires). Une étape importante de la construction de ces concepts est la dissociation de l'aire d'une figure de sa forme. Ceci vaut en particulier pour l'unité d'aire qu'il est possible de construire sous une grande variété de formes.

L'élève doit également dépasser, la conception spontanée de la variation conjointe des périmètres et des aires et savoir que, dans le cas d'une figure faite de deux figures accolées, il y a additivité des aires, mais pas des périmètres.

¹ Douady R., Perrin-Glorian M.J. 1989

Il faut aussi, bien sûr, que l'élève sache que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant la longueur par la largeur et ne généralise pas abusivement ce calcul. Cette formule doit être associée à la multiplication qui permet de dénombrer les carrés unités nécessaires pour paver ce rectangle. On peut alors installer la correspondance entre les unités d'aire (image du pavage du carré unité par des carrés unités, de rang immédiatement inférieur) et permettre à l'élève de gérer les changements d'unités en prenant appui sur cette image.

Enfin il nous paraît nécessaire de prendre en compte la notion d'encombrement qui ne fait pas usuellement l'objet d'un apprentissage (ce n'est pas une notion mathématique) mais dont nous faisons l'hypothèse qu'elle vient parasiter chez certains élèves les notions d'aire et de périmètre. Nous donnons à ce mot son (ses ?) sens usuel : par exemple un rectangle de $36\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ est plus encombrant qu'un rectangle de $10\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ bien qu'il ait une aire plus faible car il ne rentre pas dans une feuille standard.

Du côté des programmes et des mathématiques

Voici quelques-unes des compétences exigibles citées dans les nouveaux programmes en vigueur à la rentrée 96 : *Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple, comparer des périmètres, comparer des aires, calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle, effectuer pour les longueurs et les aires des changements d'unités de mesure*. Les commentaires invitent à déterminer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, de quadrillages et d'encadrements. L'ensemble des activités proposées dans ce texte se place tout à fait dans le cadre proposé par les programmes.

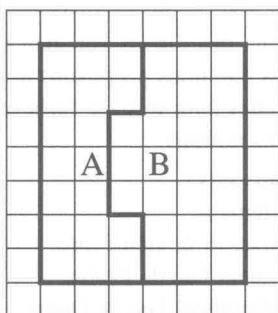
On peut dire que derrière la détermination de l'aire par report, découpages et recollements se trouve l'invariance par isométrie, que lorsque l'on décompose une figure en figures élémentaires pour calculer ensuite son aire on met en jeu l'additivité et qu'enfin, le fait qu'elle soit définie à une constante multiplicative près correspond aux problèmes de changements d'unités.

Du côté des élèves

À l'entrée en sixième, les notions d'aire et de périmètre sont en cours d'acquisition. Elles sont souvent associées pour l'élève à des formules plus qu'à leur signification géométrique : de nombreuses erreurs relèvent d'un usage inadéquat des formules que l'on peut estimer lié à l'absence de contrôle par le sens géométrique (par exemple, calculer le périmètre d'un triangle en ajoutant ses côtés et en multipliant par deux). Nous avons également constaté

que ces notions ne sont pas clairement distinguées, d'une part entre elles, et d'autre part des caractéristiques de la figure comme sa forme ou son encombrement. Par exemple, dans les évaluations d'entrée en sixième, de nombreux élèves, connaissant les périmètres de deux triangles les ajoutent pour calculer le périmètre de la figure formée par les deux triangles accolés. On peut supposer que cette erreur provient de l'utilisation d'un "théorème-élève" : "comme on assemble les formes, on additionne les périmètres des deux figures pour obtenir le périmètre total". Dans ces mêmes évaluations, on peut trouver l'exercice suivant :

Exercice 36 (1992)



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre. Entoure dans chaque cas la réponse qui convient

- a. L'aire de la parcelle A est la plus grande
Les deux parcelles ont la même aire
L'aire de la parcelle B est la plus grande

Explique ton choix :

- b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand
Les deux parcelles ont le même périmètre
Le périmètre de la parcelle B est le plus grand

Explique ton choix :

Réponse b. "Le périmètre B est plus grand que celui de A parce que B a plus de carreaux".

Cette erreur peut être interprétée comme l'utilisation d'un autre "théorème-élève" : "quand on compare deux figures, celle qui contient le plus de carreaux est celle qui a le plus grand périmètre".

Plus généralement, on peut faire l'hypothèse que les élèves placés dans une situation où ils doivent fournir une réponse utilisent la grandeur la plus facile à calculer ou à percevoir.

Indépendamment des évaluations, nous avons fait passer à nos élèves, avant, tout enseignement sur ce thème, un test où ils devaient calculer l'aire d'un rectangle, convertir des mesures d'aires et dessiner une surface de un demi-centimètre carré d'aire.

Ce test nous a permis de mettre en évidence trois points importants :

- 1 - Même quand l'élève calcule correctement l'aire du rectangle, l'unité utilisée est souvent le cm.
- 2 - Les changements d'unités d'aire (m^2 - cm^2 ...) se font massivement en utilisant les règles de changement d'unités de longueur.

- 3 - Si l'élève doit tracer une figure d'aire $1/2 \text{ cm}^2$, il dessine très souvent un carré dont le côté mesure $1/2 \text{ cm}$.

La dénomination “centimètre-carré” attache l'unité à une forme : le carré, et à une longueur : le centimètre, qui est la mesure de son côté.

Donc, de la même manière, pour l'élève, le $1/2 \text{ cm}^2$ est attaché à une forme : le carré, et à une longueur : le demi-centimètre qui est la mesure de son côté.

Une progression en classe de sixième

1 - Comparaison d'aires par découpage et recombinaison²

Les objectifs

Nous souhaitons faire expliciter les conceptions des élèves sur aire et périmètre lors de la première activité sur ces thèmes que nous proposons aux élèves. En évitant le recours systématique aux formules pour trouver l'aire ou le périmètre nous voulons travailler sur le sens de ces notions.

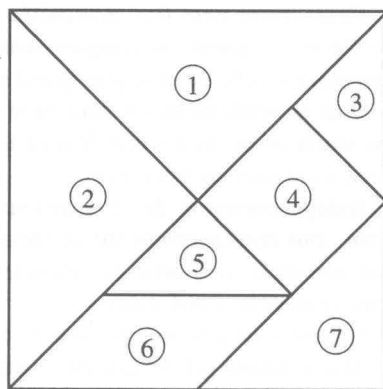
Cette première activité vise les apprentissages suivants :

- L'aire se conserve par découpage et recollement.
- Des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
- L'aire et le périmètre varient indépendamment l'un de l'autre.
- L'aire et l'encombrement varient indépendamment l'un de l'autre.

Le matériel

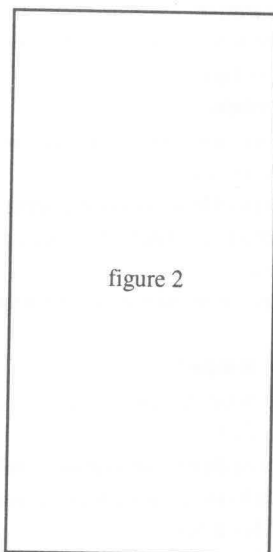
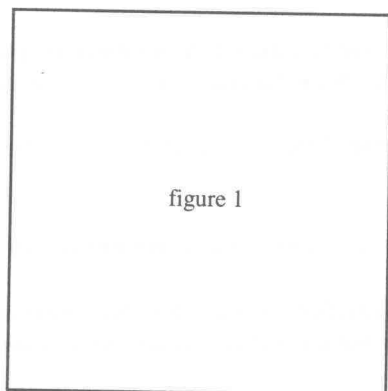
- 1 tangram et 1 feuille avec les trois figures par élève
- 1 feuille “réponse” par groupe de 3 ou 4 élèves (identique à la fiche-élève)
- 3 feuilles blanches
(format 15×11) par groupe.

LE TANGRAM

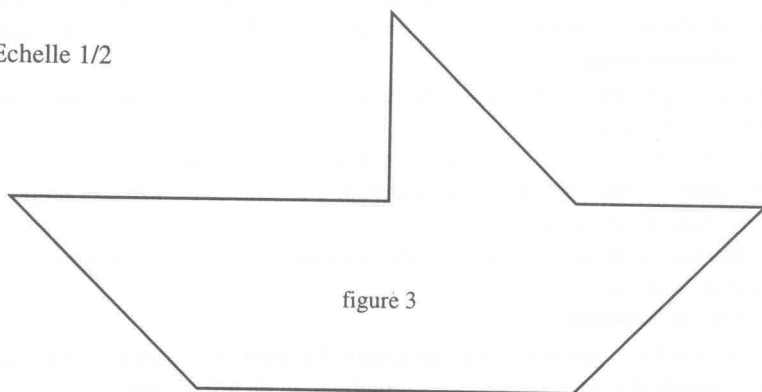


² Cette activité a été développée à partir d'une idée d'une équipe d'enseignants de CHAMBON-FEUGEROLLES.

- 1 - Découpe soigneusement les pièces numérotées du Tangram.
- 2 - En utilisant ces pièces reconstitue la figure 1
- 3 - En utilisant ces pièces, compare les aires des figures 1, 2 et 3.



Echelle 1/2



Les figures 1 et 2 ont la même aire ; la figure 3, plus “encombrante” que les deux autres, a une plus petite aire.

La figure 1 a le plus petit périmètre, la figure 3 le plus grand.

La figure 3 peut être obtenue par recollement de différentes manières : la pièce du tangram inutilisée peut être différente suivant les cas.

Déroulement de l'activité

A - Première phase

Durée : 55 minutes. Chaque élève dispose d'un tangram et d'une feuille avec les trois figures.

→ Premier temps :

Consigne : Découpe les pièces du tangram et utilise ces pièces pour reconstituer le carré (figure 1).

Les élèves travaillent individuellement sur la figure 1. Si un élève ne parvient pas à refaire la figure 1, il peut consulter le tangram "entier" dont dispose le professeur.

Il s'agit, dans cette partie, de familiariser l'élève avec un travail de type "puzzle".

→ Deuxième temps :

Consigne : Utilise les pièces que tu as découpées pour comparer les aires des figures 1, 2 et 3.

Les élèves travaillent tout d'abord individuellement. La contrainte consistant à imposer l'utilisation des pièces a pour but d'éviter le recours aux formules pour calculer les aires.

Ensuite les élèves travaillent en groupes de 3 ou 4 pour comparer et valider leurs résultats et, éventuellement, pour une entraide, si celle-ci est nécessaire.

→ Troisième temps :

Quand le groupe estime avoir terminé, le professeur remet une feuille "réponse" par groupe.

Consigne : Ecrivez vos conclusions et montrez comment vous y êtes arrivés. Vous pouvez coller les pièces du tangram que vous avez utilisées pour pouvoir comparer les aires.

Les groupes sont aussi invités à coller les pièces non utilisées pour le bateau à côté de celui-ci.

→ Mise en commun

Les feuilles "réponse" sont affichées. La mise en commun porte sur la comparaison des aires par pavage permettant de mettre en lumière :

- L'égalité des aires de deux figures de formes différentes (cas du carré et du rectangle).
- L'aire d'une figure est inférieure à l'aire de la figure de référence si toutes les pièces ne sont pas réutilisées (cas du bateau et du tangram).
- Le recollement de pièces différentes peut permettre de reconstituer une même figure (cas du bateau).

On peut travailler avec les élèves sur le fait que l'aire du tangram est égale à l'aire du bateau plus un carré, un parallélogramme ou un triangle (ce

sont les pièces qui peuvent rester) donc que ces pièces de formes différentes ont la même aire. S'il n'y a pas accord dans la classe, sur le fait que ces pièces ont la même aire, il est possible de proposer un travail en groupe pour comparer par découpage les aires des pièces non utilisées pour paver le bateau.

B - Deuxième phase

Durée : 10 minutes. Les élèves sont en groupe (les mêmes que précédemment) ; ils disposent toujours de la feuille sur laquelle se trouvent les trois figures (des feuilles supplémentaires sont disponibles si les élèves en font la demande).

On distribue une feuille 15×11 par élève.

Consigne : *Est-il possible de reproduire exactement chacune de ces figures sur cette feuille ?*

Il n'est pas demandé de la reproduire ; on autorisera le travail par superposition.

Les élèves constatent qu'il est impossible de reproduire la figure 3 sur une feuille de cette dimension.

La mise en commun porte sur la distinction entre l'encombrement et l'aire, la figure la plus encombrante étant, ici, celle qui a la plus petite aire.

C - Troisième phase

Durée : 20 minutes. Le matériel est le même mais les élèves disposent d'un double-décimètre.

Consigne : *Compare les périmètres des figures 1, 2 et 3.*

Dans un premier temps, le travail est individuel ; les groupes sont reformés ensuite.

Chaque groupe rédige sa réponse sur une feuille avec les trois figures et fait figurer ses mesures et ses calculs.

Mise en commun :

Les réponses des différents groupes sont répertoriées au tableau :

La discussion porte d'abord sur les écarts constatés sur le périmètre d'une même figure et renvoie à la précision du mesurage (notion de tolérance).

Les mesures sont refaites si l'écart est trop important.

L'essentiel portera sur le rangement des périmètres.

Finalement, une mise en commun se fait sur la comparaison des deux classements : suivant l'aire et suivant le périmètre.

Les deux figures 1 et 2 ont la même aire, mais pas le même périmètre ; la figure 3, qui a la plus petite aire, a le plus grand périmètre.

Des prolongements possibles

Si cette activité peut faire évoluer les conceptions des élèves, elle ne permet pas à elle seule, de construire les notions d'aire et de périmètre. A d'autres moments de l'année, on pourra proposer :

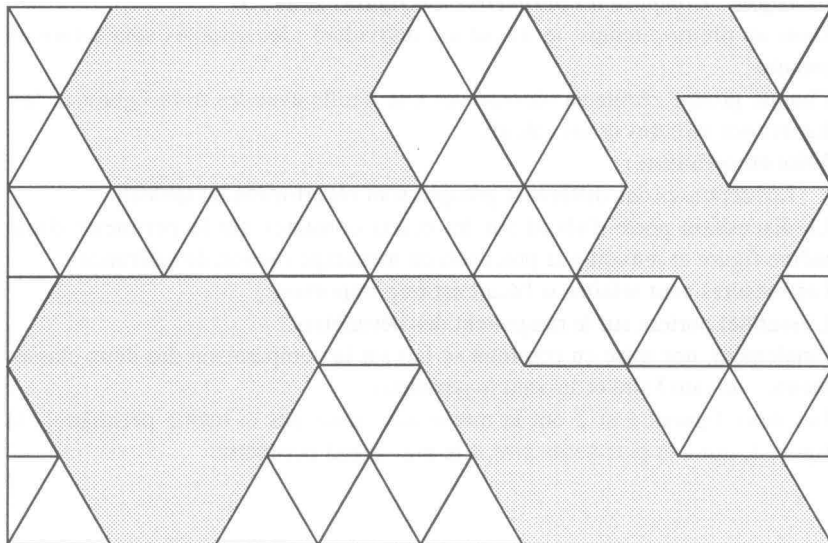
- Après avoir donné une figure aux élèves, le professeur leur demande s'il est possible de la transformer de façon à obtenir une figure d'aire plus petite et de périmètre plus grand, d'aire plus petite et de périmètre plus petit, d'aire plus grande et de périmètre plus grand que ceux de la figure donnée.
- Après avoir donné une figure, le professeur demande de construire des figures ayant la même aire et de comparer leurs périmètres (peut être donné sur papier blanc ou sur réseau).
- De la même manière, il peut demander de construire des figures ayant le même périmètre et de comparer leurs aires.

Remarquons que ces activités peuvent tout à fait constituer un point de départ.

Dans les activités qui suivent, nous nous proposons d'installer la notion d'aire, sans perdre de vue la distinction existant entre aire et périmètre.

2 - Comparaison d'aires sur réseau à mailles polygonales régulières.

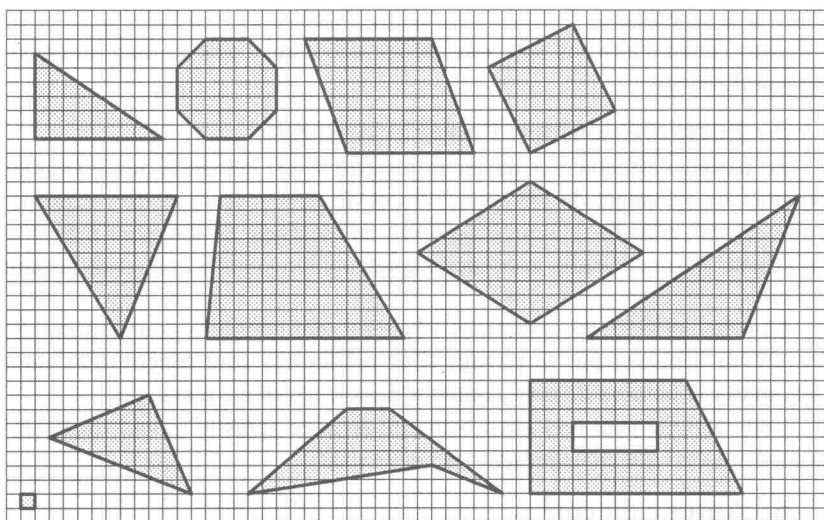
Il est demandé aux élèves de comparer les aires de ces polygones puis leurs périmètres.



Spontanément, les élèves choisissent de compter les mailles contenues à l'intérieur de chaque polygone. Ils attribuent ainsi une mesure à l'aire de chaque figure après avoir choisi implicitement la maille du réseau pour unité d'aire, ce qui permet le classement des aires. La comparaison des périmètres peut s'effectuer de manière similaire en choisissant pour unité de longueur le côté d'une maille. Le fait que la comparaison des aires et des périmètres conduise à deux classements différents des figures étonne encore de nombreux élèves. Toutefois, cet étonnement ne suffit pas toujours pour mettre en œuvre les différences entre les grandeurs aire et périmètre dans les problèmes. Par exemple, il arrive encore que, pour déformer un rectangle en un triangle de même aire, certains élèves dessinent un triangle de même périmètre que le rectangle donné.

3 - Mesures d'aires sur quadrillage à maille carrée

L'unité étant le carreau, il est demandé aux élèves de donner la mesure de l'aire de chacune des figures ci-dessous.



L'activité a pour but :

- de faire percevoir que le comptage des carreaux contenus à l'intérieur de la figure ne suffit pas, que le découpage des carreaux dans le but de paver la figure est souvent source d'erreur ;
- d'installer l'idée qu'il est préférable de recourir à des figures simples dont on peut facilement connaître l'aire (rectangle, triangle rectangle). La figure dont on cherche à évaluer l'aire peut être :

- soit décomposée en figures simples et son aire obtenue par addition des aires des figures qui la composent ;
- soit encadrée dans une figure simple et son aire est alors obtenue par différence des aires.

Cette activité doit déboucher sur l'installation de l'image du triangle rectangle comme "moitié" d'un rectangle.

4 - Les unités légales d'aire

Nous faisons le choix de commencer par le centimètre-carré, facilement appréhendable par les élèves à la suite des activités précédentes. Sur papier millimétré, le millimètre-carré est identifié et sa relation avec le centimètre-carré mise en évidence. Il est fait de même pour le décimètre-carré et sa relation avec le centimètre-carré. Les carrés d'aire 1 dm^2 réalisés par les élèves sont découpés et assemblés pour obtenir le mètre-carré. L'objectif est, à travers des images fortes, de fixer l'idée qu'il faut :

- multiplier l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement supérieur ;
- diviser l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement inférieur.

5 - Formule donnant l'aire du rectangle

Le travail s'effectue sur papier millimétré. Il est demandé aux élèves de dessiner un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 4 cm et d'en exprimer l'aire en cm^2 , puis de recommencer avec un rectangle de longueur 6,5 cm et de largeur 3,5 cm et enfin avec un rectangle de longueur 6,2 cm et de largeur 3,7 cm.

La calculatrice et les opérations à la main sont interdites pour contraindre les élèves à passer par le pavage. Des difficultés sont rencontrées pour dénombrer le nombre de mm^2 contenus dans le troisième rectangle.

Cette activité peut tout aussi bien être abordée après le travail sur le cm^2 et de demi- cm^2 que nous présentons maintenant.

6 - Autour du cm^2

Objectifs de cette activité

L'activité proposée vise aux apprentissages suivants :

- Savoir que l'unité d'aire n'est pas attachée à la forme "carré", bien que sa dénomination renvoie à la forme "carré" (la forme carré étant cependant souvent la forme privilégiée pour paver).
- Savoir que de demi- cm^2 est la moitié de l'unité d'aire et non un carré de côté $1/2 \text{ cm}$.

- Donner du sens au cm^2 à travers le $1/2 \text{ cm}^2$ en dissociant l'aire de la forme.
- Avoir un premier contact avec la propriété : si la longueur est multipliée par k , l'aire est multipliée par k^2 .

Matériel

Une feuille quadrillée de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ par élève.

Nous n'avons pas choisi le quadrillage $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ qui induit certains découpages, en particulier le $1/4 \text{ cm}^2$.

Déroulement

A - Première phase

→ Premier temps :

Consigne : Tracer sur la feuille plusieurs figures de formes différentes qui ont toutes pour aire 1 cm^2 .

Les élèves travaillent individuellement en utilisant, s'ils le souhaitent, leur matériel de géométrie. Si un élève s'arrête après avoir construit un carré, le professeur l'invite à produire d'autres figures de formes différentes, comme l'indique la consigne.

→ Deuxième temps :

En utilisant le rétroprojecteur et un transparent quadrillé $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, on procède au recensement des différentes formes obtenues : les élèves se succèdent pour dessiner leurs propres productions. Chaque figure est discutée quand elle est proposée par son auteur. La validation est obtenue en pavant le carré unité par découpage et recollement de la figure proposée.

→ Troisième temps :

Les élèves sont invités à compléter leur production afin d'obtenir un large éventail de figures d'aire 1 cm^2 (au moins 10). Cette phase peut aussi être réalisée à la maison.

B - Deuxième phase

→ Premier temps :

Consigne : Trace sur ta feuille une figure dont l'aire est $1/2 \text{ cm}^2$.

→ Deuxième temps :

Les élèves se regroupent par 4. Ils se mettent d'accord sur une figure qu'ils proposeront à la classe.

→ Troisième temps :

Un porte parole de chaque groupe vient dessiner sur le rétroprojecteur la production du groupe. Il est invité à réaliser son dessin même si celui-ci a déjà

été réalisé par un autre groupe, ceci, pour avoir une représentation des productions de la classe. A ce stade, l'enseignant peut rencontrer deux situations :

Premier cas : Parmi les figures proposées se trouve une réponse correcte. Le professeur demande alors à la classe de faire un choix en argumentant (ils feront référence au pavage du carré unité à l'aide de la figure produite : il faut deux figures identiques pour paver le cm^2).

Deuxième cas : Toutes les figures sont fausses.

Le professeur dessine alors sur le transparent la figure suivante :



Il demande à chaque groupe de trouver son aire. Les réponses des groupes sont recensées : parmi celles-ci devrait figure le $1/2 \text{ cm}^2$. Le professeur invite alors les élèves à comparer cette figure à leurs productions : le débat qui s'instaure doit permettre la distinction entre $1/4 \text{ cm}$ et le $1/2 \text{ cm}^2$: le $1/2 \text{ cm}^2$ est une surface dont l'aire est la moitié de celle d'un cm^2 et non un carré de $1/2 \text{ cm}$ de côté. Il est alors temps de revenir aux figures trouvées précédemment.

→ Quatrième temps :

Consigne : Trace sur ta feuille plusieurs figures ayant une aire de $1/2 \text{ cm}^2$.

Il s'agit à ce moment de permettre aux élèves de réaliser une petite collection de figures afin de bien intégrer la notion : la forme n'est pas obligatoirement le carré et les longueurs ne sont pas obligatoirement divisées par 2.

Et enfin...

L'utilisation des formules d'aire et périmètre figurant au programme de la classe de sixième sera l'occasion de retravailler ces notions en visant à la fois le sens et la nécessaire automatiser de certains calculs et en continuant à mettre l'accent sur leurs différences, notamment l'additivité des aires mais pas des périmètres.

Conclusion

L'ensemble des activités proposées est l'occasion pour les élèves de développer deux conceptions de la figure. La première consiste à envisager la figure comme un ensemble de segments (conception "contour") dont on privilégie ceux formant le tour. La deuxième amène à se représenter la figure comme un ensemble de pièces (conception "puzzle"). Ces deux visions de la figure n'épuisent pas les différents points de vue qu'il faut être capable d'adopter en géométrie suivant les problèmes abordés. Une troisième conception doit être construite : percevoir la figure comme constituée d'un ensemble de sous-figures pouvant se superposer, contrairement à la conception puzzle. Extraire une sous-figure, même élémentaire comme un angle droit peut

BIBLIOGRAPHIE

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN MJ, 1989, "*Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surfaces planes*", Educationnal studies in Mathematics, Vol 20 N°4 p.387-424.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN MJ, 1984-1985 "*Aires de surfaces planes*", Petit x N°6 p. 5-33 et Petit x N°8 p. 5-30, IREM de Grenoble.

1. COMBIER G., PHILIPPON M., 1994, "*Aire et périmètre. Le tour de l'aire en collège*", Brochure IREM de Lyon.

DOUADY R. et PERIN-GLORIAN MJ, 1989, "*Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surfaces planes*", Educationnal studies in Mathematics, Vol 20 N°4 p.387-424.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN MJ, 1984-1985 "*Aires de surfaces planes*", Petit x N°6 p. 5-33 et Petit x N°8 p. 5-30, IREM de Grenoble.

1. COMBIER G., PHILIPPON M., 1994, "*Aire et périmètre. Le tour de l'aire en collège*", Brochure IREM de Lyon.



What are some ways we can help protect our environment?

One way is to recycle paper and plastic.

Another way is to conserve water by turning off the tap when brushing teeth.

We can also walk or bike instead of driving a car.

Planting trees helps absorb carbon dioxide from the air.

Using energy-efficient light bulbs saves electricity.

Reducing meat consumption can lower greenhouse gas emissions.

Supporting local farmers reduces transportation-related emissions.

Properly disposing of hazardous waste prevents contamination.

Conserving energy at home by sealing drafts keeps heat in during winter.

Choosing products made from sustainable materials supports responsible sourcing.

Educating others about environmental issues encourages collective action.

Participating in community clean-up events removes litter from the environment.

Using reusable shopping bags reduces single-use plastic waste.

Opting for digital communication over printed documents saves paper.

Supporting renewable energy sources like solar and wind power promotes clean energy.

Being mindful of water usage while showering conserves a precious resource.

Composting food scraps reduces landfill waste and creates nutrient-rich soil.

Choosing public transit or carpooling reduces traffic congestion and emissions.

Protecting natural habitats preserves biodiversity and ecosystems.

Monitoring and reducing personal carbon footprint contributes to global climate goals.

Advocating for stronger environmental regulations ensures long-term protection.

Engaging in citizen science projects helps researchers understand environmental changes.

Purchasing locally sourced seasonal produce supports sustainable agriculture.

Maintaining lawns and gardens responsibly avoids excessive pesticide use.

Using eco-friendly cleaning products minimizes toxic chemical exposure.

Responsible fishing practices ensure healthy fish populations for future generations.

Supporting conservation organizations funds vital environmental research and programs.

Being a conscious consumer influences market demand for sustainable products.

Implementing green building practices improves indoor air quality and energy efficiency.

Encouraging children to participate instills lifelong environmental stewardship values.

Collaborating with neighbors fosters community resilience and shared responsibility.

Staying informed about environmental news enables proactive decision-making.

Expressing gratitude for nature's beauty inspires appreciation and care.

Embracing a holistic lifestyle integrates environmental consciousness into daily choices.

Recognizing progress motivates continued efforts towards a greener future.

Understanding the interconnectedness of all life forms deepens respect for the planet.

Fostering a sense of wonder and awe encourages deeper connection with the natural world.

Celebrating small victories builds momentum for larger positive change.

Sharing knowledge and experiences amplifies individual impact through collective action.

Remaining hopeful and optimistic fuels perseverance in the face of challenges.

Committing to ongoing learning keeps us updated on the latest environmental science and solutions.

Practicing mindfulness cultivates awareness of our presence in the natural world.

Connecting with nature regularly renews our spirit and reinforces our commitment to stewardship.

Remembering that every action counts empowers us to make meaningful contributions.

Working together, we can create a sustainable and thriving planet for ourselves and future generations.

The journey towards a greener world is ongoing, but the path forward is clear if we act now.

Let's embrace our role as stewards of the Earth and strive for a better tomorrow.

Together, we can make a difference and leave a legacy of environmental care.

Our actions today shape the world we live in tomorrow.

Let's choose wisely and act boldly for the good of our planet.

The future is bright, and it starts with the choices we make today.

Let's inspire hope and drive positive change through our everyday actions.

Every step counts towards a more sustainable and beautiful world.

Let's work together to protect the planet we call home.

Our shared responsibility is to ensure a healthy and vibrant future for all.

Let's cherish the Earth and its resources, knowing they are finite and precious.

By taking simple steps, we can achieve significant positive impact.

Let's lead by example and encourage others to join the movement for sustainability.

Our collective effort will create a lasting legacy of environmental stewardship.

Let's commit to making eco-friendly choices a habit, not just a trend.

Together, we can build a resilient and sustainable future for generations to come.

Let's embrace the challenge and rise to the occasion of protecting our planet.

Our passion for the environment is our greatest strength and motivation.

Let's channel that passion into actionable steps that drive real change.

Remember, the smallest actions can have the biggest impact when multiplied.

Let's stay motivated and inspired by the progress we are achieving together.

Our dedication to the environment is a testament to our love for the planet.

Let's continue to learn, grow, and evolve as environmental stewards.

Our commitment to sustainability is a promise to ourselves and the future.

Let's hold each other accountable and support one another along the way.

Our shared vision is a world where nature thrives and humanity flourishes.

Let's work tirelessly to make that vision a reality for everyone.

Our environmental journey is a continuous cycle of growth and discovery.

Let's embrace the challenges and celebrate the triumphs of our sustainable living.

Our ultimate goal is a harmonious relationship between humans and the natural world.

Let's strive for balance and respect the intricate web of life around us.

Our environmental stewardship is a sacred trust passed down through generations.

Let's honor that trust by acting with integrity and compassion for the planet.

Our actions speak louder than words, so let's ensure they reflect our true values.

Let's be the change we want to see in the world, starting from within.

Our environmental commitment is a reflection of our character and conscience.

Let's live authentically and align our lives with the principles of sustainability.

Our shared purpose is to create a world where everyone has access to clean air, water, and land.

Let's prioritize the well-being of the planet alongside our economic needs.

Our environmental advocacy is a call to action for all who care about the future.

Let's stand up for what is right and fight against environmental injustice.

Our collective voice is powerful enough to effect meaningful systemic change.

Let's amplify our message and demand accountability from those in power.

Our environmental leadership is defined by our courage to take bold action.

Let's challenge the status quo and push for innovative solutions to complex problems.

Our commitment to the environment is a testament to our faith in a brighter future.

Let's believe in the power of hope and envision a world full of possibility.

Our environmental journey is a testament to our unwavering dedication to the planet.

Let's stay focused on our mission and remain resilient in the face of adversity.

Our shared responsibility is to ensure a healthy and vibrant future for all.

Let's work together to protect the planet we call home.

Our environmental stewardship is a sacred trust passed down through generations.

Let's honor that trust by acting with integrity and compassion for the planet.

Our actions speak louder than words, so let's ensure they reflect our true values.

Let's be the change we want to see in the world, starting from within.

Our environmental commitment is a reflection of our character and conscience.

Let's live authentically and align our lives with the principles of sustainability.

Our shared purpose is to create a world where everyone has access to clean air, water, and land.

Let's prioritize the well-being of the planet alongside our economic needs.

Our environmental advocacy is a call to action for all who care about the future.

Let's stand up for what is right and fight against environmental injustice.

Our collective voice is powerful enough to effect meaningful systemic change.

Let's amplify our message and demand accountability from those in power.

Our environmental leadership is defined by our courage to take bold action.

Let's challenge the status quo and push for innovative solutions to complex problems.

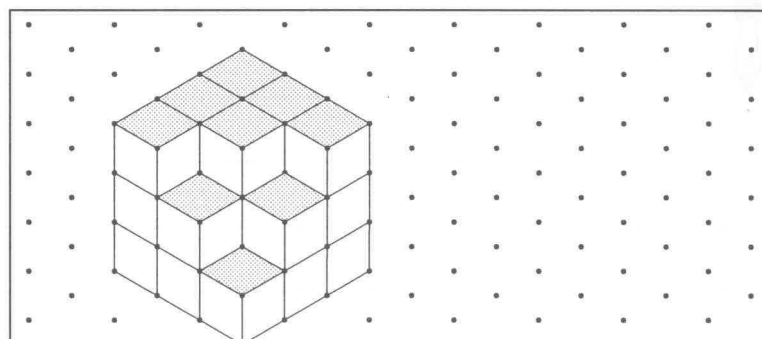
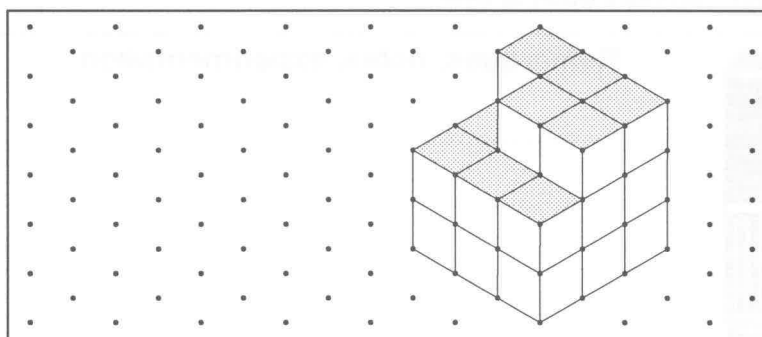
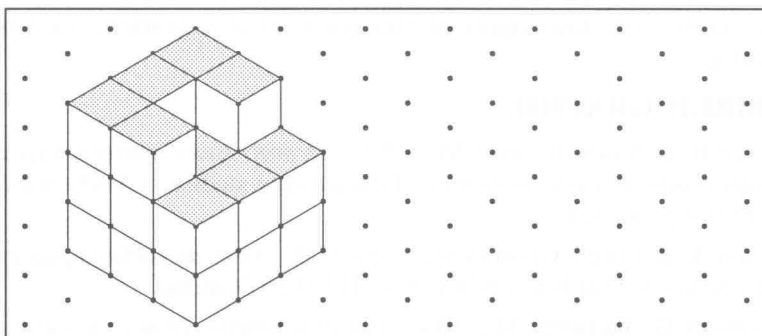
Our commitment to the environment is a testament to our faith in a brighter future.

Let's believe in the power of hope and envision a world full of possibility.

Our environmental journey is a testament to our unwavering dedication to the planet.

Let's stay focused on our mission and remain resilient in the face of adversity.

Il manque une pièce (2)



Dessine la pièce qui manque à chacun des solides pour qu'il devienne un cube.

Organisation et gestion de données

Jean-Claude DUPERRET - IREM de Reims

Cette partie du programme est “naturellement” celle où les mathématiques et la réalité vont être le plus en interaction. Si les mathématiques ne sont pas la réalité, elles permettent d’expliquer, de valider, de modéliser des situations issues du monde “réel”, et, inversement, ces situations permettent de motiver l’apprentissage des mathématiques.

C’est dans cette partie que l’élève va de façon privilégiée développer des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations, en s’appuyant sur de fréquents changements de registres. Partant d’un texte, souvent écrit en français, comportant un certain nombre de données chiffrées, il devra déjà organiser ces données, par exemple sous la forme de tableau ou de graphique, deux cadres dont il faut développer l’interactivité dès la sixième. Puis des calculs permettront de transformer ces données, de les synthétiser. De même, les résultats pourront eux aussi être donnés dans différents registres suivant la nature du problème étudié : texte, tableau, graphique, résultat numérique...

C’est enfin dans cette partie qu’apparaît le mieux le rôle social et culturel des mathématiques. La lecture, l’interprétation, l’utilisation de diagrammes, tableaux, graphiques, leur analyse critique aident l’élève à mieux comprendre le monde dans lequel il vit, et, en cela, contribuent à son éducation civique. La liaison avec l’enseignement d’autres disciplines, en particulier sciences de la vie et de la terre, géographie, technologie lui permettent de mieux intégrer ses connaissances dans une vision plus large.

Comment les mathématiques vont-elles participer à la réalisation d’un tel enjeu ? En proposant des modèles de traitement et de validation ; et, parmi tous ces modèles, celui qui va permettre de gérer le maximum de situations est la proportionnalité. Si ce modèle est un des plus développés au collège, il reste cependant un modèle difficile et à haut risque. Il faut à son sujet rappeler que son enseignement relève de beaucoup de disciplines, et que les mathématiques n’en sont que le lieu de systématisation. Il faut aussi éviter le risque du “tout proportionnel” et du “tout linéaire” en proposant des situations de non proportionnalité.

Pour les élèves le concept de proportionnalité est difficile. Il est donc normal que tout enseignant, dès la sixième, se pose la question : pourquoi ?

Une première raison est peut-être la tendance de notre enseignement à vouloir trop rapidement tout unifier. Illustrons cela par deux exemples utilisant les pourcentages : dans une classe, il y a 8% d'élèves redoublants ; les cigarettes ont augmenté de 8% . Si ces deux situations relèvent de la proportionnalité, si les deux utilisent le même pourcentage, ce pourcentage n'a pas du tout la même signification par rapport à la situation. Peut-on en effet considérer avec le même regard un pourcentage exprimant le rapport d'une partie à un tout et un pourcentage exprimant une augmentation ? Il faut donc accepter que dans la tête des élèves, il y ait des proportionnalités correspondant à des champs de problèmes différents. Le rôle de l'enseignement des mathématiques est à terme (quatrième-troisième) de les unifier dans un grand modèle.

Partant de ce constat, quelles réflexions et quelles activités proposer aux élèves ? Il est bien entendu impossible d'être exhaustif, et les trois thèmes proposés ci-après ne se veulent pas des références, mais des exemples. Le but y est de développer chez l'élève cet esprit critique d'analyse par rapport à des situation "réelles", tout en développant des modèles de travail, en particulier la proportionnalité.

THEME 1 : Un pourcentage ne peut donner que ce qu'il a !

Un certain nombre de "mots" peuvent permettre de "représenter" une partie par rapport à un tout : proportion, rapport, fraction, fréquence, pourcentage. Chacun d'eux a sa spécificité, que nous n'étudierons pas ici. Nous choisissons donc le plus neutre : le pourcentage, en considérant que les règles d'utilisation et d'action qui s'y rattachent ont été travaillées.

Réflexion à mener avec les élèves :

Je veux comparer les collèges Albert Camus et Paul Langevin au niveau des redoublements en classe de troisième en 1996. A Albert Camus, il y a eu 15 redoublants, à Paul Langevin 12. Une conclusion immédiate est qu'il y a plus de redoublants à Camus qu'à Langevin. Mais je regarde les effectifs de chacun des collèges : il y avait 125 élèves en troisième à Camus, et 80 à Langevin. Un calcul (à mener avec les élèves) donne donc un taux de doublement de 12% à Camus et de 15% à Langevin. Le taux de doublement est donc plus élevé à Langevin qu'à Camus.

L'exemple précédent montre que pour comparer deux populations, on peut le faire soit de façon absolue, soit de façon relative. On peut parfois trouver dans le texte de la question si on attend plutôt l'une ou l'autre des comparaisons. Dans l'exemple précédent, si on demande : dans quel collège

y a-t-il le plus de “redoublants”, on attend une comparaison absolue ; mais si on s’intéresse au “redoublement”, on attend plutôt la comparaison relative (même si le mot “taux” n’est pas prononcé). Cela n’est pas toujours très clair : par exemple, si je veux savoir de deux pays lequel est le plus peuplé, est-ce que je m’intéresse à la densité de population, ou au nombre d’habitants !

Activité :

Dans une petite ville de France, il y a deux collèges : le collège Pierre Brossolette et le collège Gaston Bachelard. Le premier a 45% de garçons et 55% de filles. Le second a 60% de garçons et 40% de filles. Y a-t-il plus de garçons ou de filles scolarisés en collège dans cette ville ?

Malgré la réflexion précédemment menée, il se trouvera certainement des élèves pour répondre spontanément : les garçons ! D’autres au contraire seront plus prudents. Certains iront peut-être jusqu’à dire qu’il faut connaître les effectifs de chaque collège pour répondre ! On pourra de toute façon relancer (et boucler !) cette activité en proposant trois types d’effectifs. Par exemple :

- * 420 élèves à Brossolette et 360 à Bachelard, ce qui donnera 405 garçons et 375 filles.
- * 520 élèves à Brossolette et 260 à Bachelard, ce qui donnera 390 garçons et 390 filles.
- * 740 élèves à Brossolette et 300 à Bachelard, ce qui donnera 513 garçons et 527 filles.

THEME 2 : Faut-il joindre les points ?

Les graphiques sont devenus des outils fondamentaux de communication. Il est hors de question en quelques lignes d’entrer véritablement dans les problèmes soulevés par leur enseignement. Pour ceux qui souhaiteraient aller plus loin dans cette réflexion, ils trouveront matière dans la Brochure Inter Irem 1^{er} cycle “Des chiffres et des lettres” , en particulier avec le travail de l’IREM de Rouen.

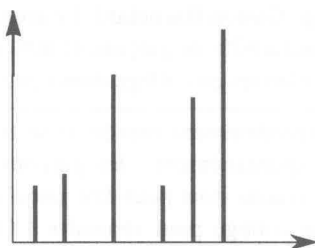
Réflexion à mener avec les élèves :

On propose aux élèves un certain nombre de graphiques , bons ou moins bons, clairs ou surchargés, “vrais” ou “faux”. A partir de cet échantillon, on peut dégager trois qualités nécessaires à une bonne réalisation.

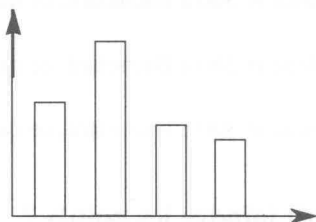
- * *la lisibilité* : il ne faut pas que, par une surcharge d’informations, l’essentiel de ce qui doit être communiqué n’apparaisse pas ;

- * *l'autosuffisance* : il faut qu'il puisse être lu, interprété et compris sans avoir recours à d'autres sources d'information ;
- * *la validité* : il faut qu'il puisse être validé (ou invalidé) par des règles mathématiques (ex : proportionnalité des effectifs et des longueurs, des effectifs et des aires, ...).

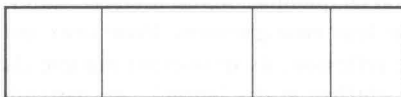
Pour une même situation, il peut être intéressant de produire plusieurs graphiques, et de comparer les différences de qualité d'information qu'ils donnent. Par exemple, si on étudie la série des notes obtenues à un devoir, on peut, dans un premier temps, faire un diagramme en bâtons :



Puis, en regroupant les notes suivant quatre catégories ; de 0 à 5, de 6 à 10, de 11 à 15, de 16 à 20, on peut faire un diagramme en barre :



et un diagramme en bande représentant ces quatre catégories d'élèves :

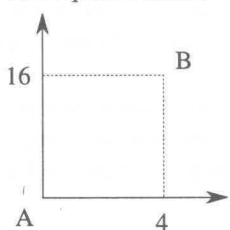


Le diagramme en bâtons est le plus précis ; le diagramme en barre donne une photographie rapide de la classe ; le diagramme en bande fait apparaître la place de chaque catégorie par rapport à la classe. Ces graphiques ci-dessus ne représentent évidemment pas la même situation.

Si on peut passer du diagramme en bâtons au diagramme en barre, le retour est impossible, car les informations sont insuffisantes. C'est là un problème important : quelles informations puis-je m'autoriser à ajouter en fonction de celles que j'ai et de la connaissance de la situation ?

Activité :

Voici quatre situations :



- 1) Le prix d'un croissant est 4 F.
- 2) Le prix d'un mètre de tissu est 4 F.
- 3) Quel est le périmètre d'un carré en fonction de la longueur du côté (en cm) ?
- 4) Quelle est l'aire d'un carré en fonction de la longueur du côté (en cm) ?

Question 1 : En graduant convenablement dans chaque cas les axes, vérifier que les points A et B

appartiennent à la représentation graphique de chacune des situations.

Question 2 : Pour chaque situation, est-il "correct" de joindre A et B à la règle ?

Tracer le segment [AB], c'est considérer que tous les points de [AB] appartiennent à la représentation graphique de la situation. Un débat avec les élèves permet de voir que :

- Dans la situation 1 : seuls les points à coordonnées entières "ont du sens", donc tracer [AB] n'est pas "correct" (bien que l'on soit dans une situation de proportionnalité !).
- Dans la situation 2 : le problème ici est bien plus délicat. Reste-t'on sur l'aspect "concret" ? Si 1,60 m de tissu acheté a du sens, 1,63 m est déjà d'une précision guère "réelle", et que dire de 1,63297 m, ou encore $\sqrt{2}$ m et π m ! Idéalise-t on ? Alors tout ce qui précède est "correct", et tous les points de [AB] conviennent.

Il faut aussi , au delà du statut des nombres employés tenir compte de la précision de la lecture possible du graphique.

- Dans la situation 3 : cette situation est déjà ici "idéalisée", et tous les points de [AB] conviennent.
- Dans la situation 4 : quelques contre-exemples permettront de vérifier que les points ne sont pas alignés (on n'est pas dans une situation de proportionnalité).

Theme 3 : " Au hasard ! "

Les médias nous "baignent" quotidiennement dans des sondages, des simulations, des enquêtes statistiques... Tout cela semble passer par le mot magique "échantillon". Pourquoi travailler sur des échantillons ? Comment les constituer ? Quelle crédibilité accorder aux résultats qu'on en tire ?

Réflexion à mener avec les élèves

Je suis un fabricant de “pétards”. Voyant arrivé le 14 juillet, je m’inquiète de savoir si mes pétards sont en bon état. Pour être sûr de l’état de mon stock, je peux évidemment tous les essayer. Je pourrais alors affirmer, j’en avais 97% de bons. Mais je n’aurai plus de stock !

Je suis un homme politique, et j’aimerais “prévoir” les résultats des prochaines élections nationales. Je peux évidemment interroger tous les français votants. Mais comment les contacter tous ? Où ? Combien de temps me faudra-t-il ?

La réponse est de travailler sur une partie de la “population”. Dans le premier cas, on essaiera par exemple un pétard sur 150. Dans le second cas, on se contentera d’interroger 1000 personnes. Une telle partie est un échantillon. Une première question fondamentale est : “ Qu’est ce qu’un bon échantillon ? “. C’est une partie de la population qui, pour la question que j’étudie, me donne sensiblement les mêmes réponses que la population toute entière.

Dans le premier exemple, il faudra donc que l’échantillon me donne 97% de bons pétards. Dans le second exemple, il devra me donner la photographie du résultat des élections.

Une question corollaire encore plus fondamentale est : “Comment faire un bon échantillon ? ”. La réponse immédiate est : “par un tirage au hasard ? ”. Mais comment faire un tirage au hasard ? Par exemple, pour le cas des élections, je peux décider de me mettre sur une place dans le centre d’une ville, et d’interroger les 1000 premiers passants. On voit bien tout de suite que les résultats ne seront pas les mêmes si je suis dans une ville de province, dans une grande ville, ou dans une ville de banlieue.

En fait, pour éviter les “catastrophes” que pourrait amener le hasard sur l’enquête menée, on décide en général de constituer un échantillon à partir de critères objectivement définis. Une méthode particulièrement employée est la “méthode des quotas”, qu’on trouve développée par l’IREM de Montpellier dans la brochure “*Des chiffres et des lettres*” déjà citée. Illustrons cette méthode sur un exemple.

Activité :

Je voudrais connaître les émissions télévisées préférées du collège Georges BRASSENS. Mais ce collège a 800 élèves, et, pour des raisons de temps, je ne peux interroger individuellement ces 800 élèves. Je décide donc de n’interroger qu’un échantillon de 60 élèves. Comment constituer un échantillon représentatif ?

Après la réflexion précédemment menée, on peut rapidement convenir avec les élèves qu'un échantillon de soixante élèves tirés au hasard ne serait peut-être pas représentatif. Il faut donc dégager des critères objectifs de constitution de cet échantillon. Deux peuvent être assez facilement mis en avant : le sexe et l'âge. Si une fille de dix ans a une admiration sans borne pour "Dorothée", la préférence d'une adolescente de quinze ans ira plutôt à "Hélène et les garçons", tandis qu'un garçon de quinze ans sera peut-être plus sensible à la retransmission de matchs de football.

Voici donc la répartition des élèves du collège en fonction de ces deux critères :

	Filles	Garçons
1985	50	40
1984	100	120
1983	90	110
1982	80	70
1981	60	80

On peut alors traduire cette répartition en pourcentages :

	Filles	Garçons
1985	6,25%	5%
1984	12,5%	15%
1983	11,25%	13,75%
1982	10%	8,75%
1981	7,5%	10%

On applique alors ces pourcentages à soixante, en gérant les problèmes d'arrondi ! (En particulier, on essaie de garder l'équilibre de la population du collège par corrections successives des arrondis.)

	Filles	Garçons
1985	4	3
1984	7	9
1983	7	8
1982	6	5
1981	5	6

On va donc constituer un échantillon en prenant (et là vraiment au hasard !) 4 filles de 1985, 3 garçons de 1985, ..., 6 garçons de 1981.

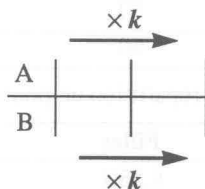
La gestion d'une telle activité pose de façon très forte le problème des arrondis, et ce n'est pas le moindre des débats à avoir avec les élèves. Il faut aussi noter dans l'exemple proposé, que les nombres choisis ne sont pas le fruit du hasard ! Il vaut évidemment mieux travailler avec les données réelles de son collègue.

* * * * *

Les trois thèmes que nous venons de traiter utilisent essentiellement la proportionnalité comme méthode de travail (en mettant évidemment à part la relation liant l'aire d'un carré à son côté).

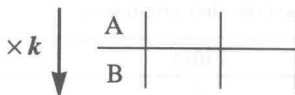
Cette forte présence nous invite à revenir sur ce modèle, et, au delà des raisons pédagogiques, d'analyser en quoi il est difficile d'un point de vue purement mathématique. Je m'appuierai pour cela sur une réflexion que m'a proposée Rudolf BKOUCHE (IREM de Lille) : on peut donner deux définitions de la proportionnalité dont l'équivalence ne va pas de soi.

La première s'appuie sur les *rapports internes* :



Deux espèces de grandeurs A et B (possédant la propriété d'additivité) étant données, une relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs est une correspondance qui conserve les "rapports internes". Par exemple, dans un mouvement uniforme, le rapport des distances parcourues est égal au rapport des durées du parcours.

La seconde s'appuie sur les *rapports externes* :



Les grandeurs A et B étant mesurées, le rapport de la mesure d'une grandeur de l'espèce B par la mesure de la grandeur correspondante de l'espèce A est constant. Par exemple, dans un mouvement uniforme, le rapport de toute distance parcourue à la durée correspondante est constant. On retrouve ici la notion de coefficient de proportionnalité, qui, dans l'exemple proposé, s'appelle la vitesse.

La première définition pose un problème fondamental : comment définir un rapport interne ? La réponse est *la mesure*, qui n'est rien d'autre qu'une correspondance proportionnelle entre grandeur et nombres. De façon plus précise la mesure d'une grandeur est le nombre qui exprime le rapport de cette grandeur à la grandeur unité.

Les hésitations des élèves sur le lien entre ces deux définitions nous rappellent que leur équivalence est loin d'être évidente, et c'est le rôle de l'enseignement des mathématiques que de l'établir. La relation entre rapports externes et rapports internes se traduit en effet par l'équivalence des relations

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

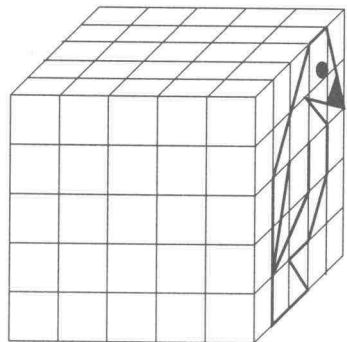
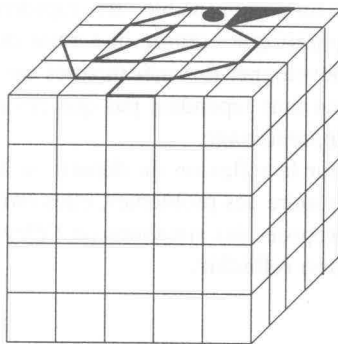
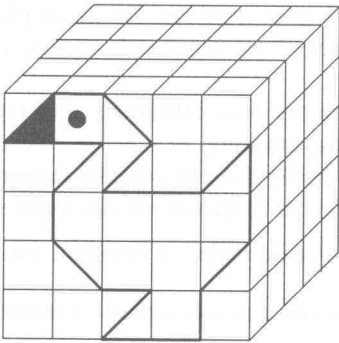
Si une façon commode et usitée de régler ce problème est le

passage par les produits en croix, il faut bien voir que ceci consiste à remplacer un concept par une procédure.

Et nous touchons là un point sensible : très rapidement pour les élèves, la proportionnalité n'apparaît que comme une suite de procédures. Si on ne peut nier l'intérêt de développer des mécanismes qui permettent une économie dans le travail, il ne faut cependant pas que ces mécanismes deviennent l'objectif principal d'apprentissage.

Nous revenons là sur la réflexion du départ : si les mathématiques donnent des outils pour résoudre des problèmes, elles ont aussi un rôle d'analyse critique. Il faut donc proposer des situations où l'élève ne doit pas se contenter d'**agir**, mais doit aussi **réfléchir**.

Les oiseaux



Complète les autres faces du cube en y dessinant l'oiseau qu'on voit déjà sur une face.

DEUXIEME PARTIE

Modes de représentation et de communication

Lorsque nous proposons un travail à nos élèves, nous ne mesurons pas toujours la complexité des tâches qu'il aura à effectuer. Il nous arrive souvent aussi de considérer du domaine de l'inné des comportements et des capacités qui relèvent en fait d'un véritable apprentissage.

Les nombreux registres de représentation utilisés en mathématiques, les passages fréquents de l'un à l'autre dans la résolution de problèmes illustrent bien le propos ci-dessus : à partir d'un texte, l'élève devra produire une figure, ou remplir un tableau, ou faire un graphique,... ; Il devra ensuite rédiger une solution. Il lui faudra décoder, formuler, traiter, communiquer des informations. De telles compétences nécessitent un véritable apprentissage, nécessité renforcée par le fait que les capacités qui y sont développées sont générales, et particulièrement utiles dans d'autres domaines aussi bien disciplinaires que professionnels.

Les mathématiques sont une discipline d'expression, et participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue. Leur enseignement va donc être confronté aux problèmes liés à la lecture et à l'écriture, difficultés renforcées par la spécificité du texte mathématique. L'amélioration de l'écrit est un objectif important de la classe de sixième.

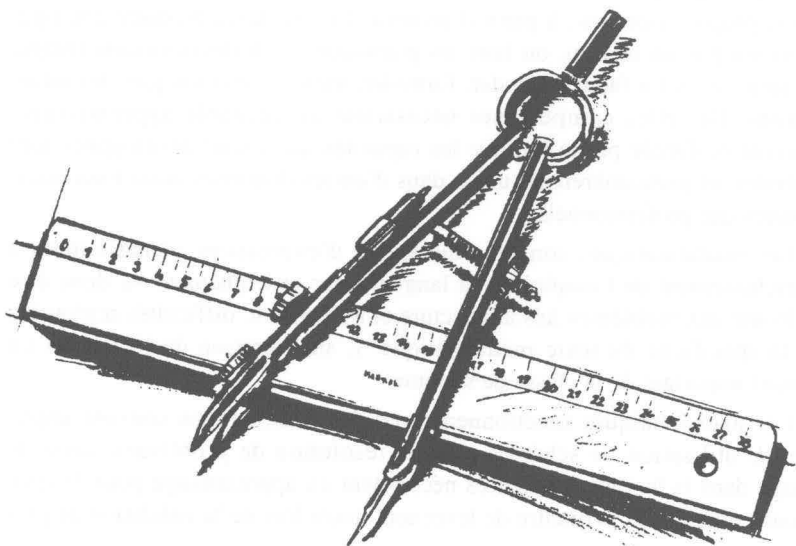
Les mathématiques fonctionnent avec des codifications souvent implicites. L'utilisation de schémas pour la résolution de problèmes, celle de codage dans la lecture des figures nécessitent un apprentissage pour devenir un outil efficace, et permettre de lever tout doute lors de la validation de proposition.

S'il est un endroit privilégié pour développer des compétences de changement de registres, et la capacité à les coordonner, c'est bien la géométrie. Dès la sixième on peut proposer des activités mettant en jeu le passage du texte à la figure, de la figure à la figure, de la figure au texte.

Les situations de communication émetteur-récepteur participeront à cet apprentissage, en laissant à l'élève la possibilité d'une écriture "intermédiaire". L'ordinateur peut devenir un outil médiateur particulièrement intéressant et motivant.

Mais quels meilleurs moteurs que la classe et la dynamique d'une activité pour faire vivre des situations où se développent ces capacités d'expression, d'argumentation et d'organisation ?

Jean-Claude DUPERRET



Lire et écrire en mathématique

Annick MASSOT et Michel JAFFROT

IREM de NANTES

Annie DUBUT et Brigitte POULAIN

IREM de ROUEN

Introduction

Lire et écrire : des compétences déterminantes en mathématique

Dans les finalités et objectifs des nouveaux programmes, les mathématiques sont présentées comme :

- une *discipline de formation générale* (*),
- un *outil* : les mathématiques doivent permettre aux élèves de résoudre des problèmes tout en développant leur autonomie,
- une *discipline d'expression* :

Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Ainsi que d'autres disciplines, les mathématiques ont en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules, tableaux, schémas). L'usage largement répandu des moyens actuels de traitement de l'information et de communication exige une bonne maîtrise de ces formes variées d'expression.

Il est aussi précisé : *“L'objectif est d'entraîner les élèves à mieux lire et à mieux comprendre un texte mathématique et aussi à produire des textes dont la qualité est destinée à être l'objet d'une amélioration progressive.”*

Dans les tests d'évaluation à l'entrée en sixième, les compétences telles que lire un énoncé, un tableau, un dessin, produire un texte, rédiger une justification... sont évaluées. Les pourcentages de réussite correspondant à ces objectifs sont très variables, ceux correspondant à la lecture sont généralement bons, en revanche ceux qui concernent argumentation et description sont faibles.

D'où viennent les difficultés ?

Le passage de l'école élémentaire au collège s'accompagne d'une rupture importante, la part de l'écrit y est plus grande. Il est, par exemple, fréquent à

(*) Les parties en italique sont extraites des programmes de Sixième.

l'école élémentaire qu'une consigne soit lue par l'enseignant. Par contre, dès la sixième, l'élève est de plus en plus souvent seul devant une consigne écrite.

L'origine des difficultés des élèves ne réside-t-elle pas dans la lecture des énoncés et des consignes, celle des figures et de leurs codages, dans les notations utilisées ? Tout ceci étant étroitement lié au contexte du problème et à la connaissance des concepts mis en oeuvre.

Par exemple un contexte particulier peut permettre la réussite d'un exercice malgré une connaissance incomplète du langage utilisé et engendrer une représentation confuse ou fausse d'un mot. Dans un autre contexte cette mauvaise représentation, que l'élève ne perçoit pas puisqu'elle a fonctionné, peut conduire à un échec.

Certaines difficultés ne relèvent-elles pas aussi des attentes implicites des enseignants et de leurs exigences prématurées par rapport aux productions écrites et pas seulement du manque d'attention, du manque de travail des élèves...?

Faire écrire les élèves en classe, cela prend du temps, c'est difficile à exploiter, l'effet n'est pas toujours immédiat. Mais les faire écrire, c'est les **mettre en activité** et en situation de **producteurs**, d'autant plus qu'en leur faisant formuler leurs idées sur le papier, ils sont amenés à préciser leur vocabulaire, à améliorer leur expression, à approfondir leur pensée...

C'est aussi l'occasion pour le professeur d'essayer de mieux comprendre les stratégies mises en oeuvre et les difficultés mathématiques rencontrées.

Simultanément à l'apprentissage des notions mathématiques, il est donc nécessaire de donner une véritable place à l'apprentissage de la lecture et de l'écriture dans notre discipline.

Depuis quelques années des activités de "lecture d'énoncés et de consigne" et des activités de "communication" ont été développées en particulier par Jean-Michel Zakhartchouk (Cahier pédagogique n°336) et l'IREM de Rennes (Lire et écrire en math).

Dans la suite de cet article, des pistes de travail, des activités sont proposées pour la classe de sixième. **Elles se donnent comme objectif d'améliorer les compétences de tous les élèves.** Les activités proposées mêlent souvent lecture et écriture car il s'agit d'apprendre à envoyer un message et d'apprendre à en recevoir un.

Pour “LIRE ET ÉCRIRE” : des propositions.

Les activités que nous proposons ont été menées dans des classes où certains modes de fonctionnement ont été instaurés. Selon les objectifs visés, travail individuel, travail en petit groupes ou travail en groupe-classe sont alternés. Les travaux individuels, en particulier ceux de rédaction sont indispensables pour améliorer l'expression écrite. Les travaux de petits groupes, surtout lorsqu'il y a contrainte de production commune oblige les élèves à échanger, à argumenter. Le travail en groupe-classe permet une mise en commun, une mise au point et dans certains cas, la mise en place de “débats”.

Au cours de ces “débats”, les élèves s'écoutent, expriment leurs idées, exposent leurs démarches, communiquent leurs résultats, les discutent. Le professeur permet à chacun de s'exprimer et il aide les élèves à dégager une conviction commune. Cela nécessite un apprentissage pour les élèves comme pour...le professeur.

Si certaines activités sont indiquées comme pouvant être menées dès le début de l'année, la plupart sont à répartir tout au long de l'année, selon les renseignements issus de l'évaluation sixième, selon la progression mathématique retenue, en ayant comme souci de varier les types d'activités. Dans l'ordre présenté les activités d'écriture prennent une place de plus en plus grande.

Chaque titre de paragraphe correspond à un objectif plus particulièrement visé dans les activités présentées. Certaines d'entre elles sont ou seront détaillées dans les brochures IREM citées en référence, d'autres sont issues de stages.

A- Lire un tableau de données

D'après les résultats de l'évaluation sixième, un petit nombre seulement d'élèves rencontrent des difficultés dans la lecture de tableaux. Ce point peut donc être travaillé dès le début de l'année dans le cadre de séances de remédiation, d'autant plus qu'il est utile dans de nombreuses matières.

Les erreurs proviennent de l'incompréhension de ce que représentent les lignes et les colonnes d'un tableau et de la difficulté de la lecture croisée, suivre une ligne et descendre simultanément une colonne.

Un premier travail se fait à l'oral, en prenant comme support les exercices non réussis cette année ou des exercices du même type des évaluations précédentes, en multipliant les questions concernant la lecture en lignes et la lecture en colonnes. Ensuite un travail de lecture croisée permet aux élèves

d'expliciter les méthodes qu'ils ont utilisées. Enfin des questions sont posées incluant des difficultés de lecture (par exemple, "plus de", "au plus"...), les difficultés sont explicitées.

Ce travail peut être prolongé par la rédaction de questions, sur ces tableaux, par les élèves, questions auxquelles ils auront à répondre.

Activités pour lire et écrire en math IREM DE ROUEN

B - Apprendre à repérer des données superflues :

Les **données superflues** dans les textes sont toujours pour les élèves une source de difficultés.

Des exercices peuvent être proposés demandant de repérer les données, les données utiles à la résolution du problème et celles qui sont inutiles. On peut choisir ces exercices dans les cahiers d'évaluation sixième (Ex 4 p. 3, 1995), et dans de nombreux manuels.

C - Lire un texte pour faire une figure : "Le terrain de badminton"

Cet exercice donné **dès la première séance de géométrie de l'année**, est une activité complexe qui permet le démarrage de la géométrie sans que les élèves aient l'impression de "déjà vu".

Ce travail doit te permettre de construire une figure que tu reconnaîtras peut-être...

Trace un rectangle KNMB tel que $KN = 16\text{ cm}$ et $NM = 6\text{ cm}$

Marque les points O et T sur le segment [KN] tel que :

$KO = NT = 5,6\text{ cm}$

Trace la demi-droite (Ox) perpendiculaire au segment [KN] ; elle coupe le segment [BM] au point A.

Trace la droite (uv) parallèle au segment [OA] et passant par T, la demi-droite (Tv) coupe le segment [BM] au point D.

Marque le point J milieu du segment [KB] et le point I milieu du segment [MN].

Marque le point E milieu du segment [OA] et trace le segment [JE].

Termine le rectangle TNIU.

Efface les demi-droites (Tu), (Dv) et (Ax).

Que représente la figure que tu as obtenue ?

Après une lecture individuelle, il est demandé aux élèves s'ils ont des questions à poser. Cela permet un premier travail en classe entière sur les données, le vocabulaire, les consignes, les notations... En groupe, les élèves préparent des questions en fonction des problèmes rencontrés. Chacun doit rendre la figure demandée à la fin de la séance sur feuille non quadrillée.

A partir de quelques productions choisies par le professeur et mises sur transparents en fonction des apprentissages visés, il est demandé aux élèves de lire en silence les figures proposées et d'écrire ce qui va ou non. Un débat est alors organisé.

Cette activité permet de faire un point sur le vocabulaire, d'en introduire éventuellement du nouveau en fonction de questions que l'élève s'est posées. Il en est de même pour les notations de géométrie et les conventions de dessin.

Par exemple, on note un quadrilatère avec des lettres majuscules et en "tournant" à partir d'un sommet quelconque, une même lettre en majuscule et en minuscule peut avoir deux significations... Comment, où marque-t-on un point et pourquoi (lisibilité du dessin...), où écrit-on le nom d'une droite ? Pourquoi ?

Cette activité permet de travailler des notions mathématiques, ici, de "parallèles" et "perpendiculaires". Elle permet aussi de faire remarquer l'importance du soin et de la précision de l'exécution...

Une fiche, sur ce qu'il y a à retenir, peut-être commencée :

- un quadrilatère se note...
- un point est marqué par...
- ...

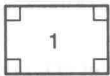
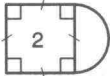
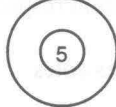
Les outils mathématiques dans les autres disciplines au collège - IREM de Nantes

D - Associer des textes donnés et des figures données : "Marions-les"

Cette activité demande d'associer des textes et des figures.

12 dessins

12 textes

    	A - Trace deux cercles qui ont le même centre et des rayons différents. B - Trace un triangle ABC rectangle en A. Trace la perpendiculaire à (BC) passant par A. Elle coupe (BC) en H. C - Construis un carré et, à l'intérieur un quart de cercle ayant pour rayon le côté du carré et pour centre l'un des sommets. D - Construis un triangle équilatéral. E - Trace un cercle de 2,5 cm de rayon, puis un autre cercle de même centre et de rayon 1,5 cm. F - Construis deux triangles rectangles ayant un côté de l'angle droit en commun. G - Trace un carré et ses deux diagonales.
--	---

Cette activité permet de découvrir qu'une figure peut correspondre à plusieurs énoncés ou qu'un même texte peut correspondre à plusieurs figures. Après un travail individuel, une mise en commun est faite par deux et un bilan en classe entière est réalisé.

Quelques outils et quelques activités pour l'apprentissage de la démonstration
Repère IREM n°8 - IREM de Nantes

E - Lire plusieurs textes différents pour faire une même figure

Les élèves sont groupés par trois. Il est distribué trois textes différents par groupe. Tous les textes aboutissent à la même figure.

un énoncé :

- Trace deux droites perpendiculaires (D) et (D') qui se coupent en A.
- Place sur (D) le point M tel que $AM = 8$ cm et place sur (D') le point R tel que $AR = 5$ cm.
- Construis la parallèle à la droite (D') passant par M puis la perpendiculaire à la droite (D') passant par R. Ces deux droites se coupent en S.
- Place le point I milieu de [AM].
- Construis la parallèle à la droite (IR) passant par S et la parallèle à la droite (IS) passant par R. Ces deux droites se coupent en E.
- Trace le segment [IE], il coupe le segment [RS] en O.
- Repasse la figure AMSER en rouge.

un autre énoncé :

- Trace trois droites (D₁), (D₂) et (D₃) parallèles telles que (D₁) et (D₂) d'une part et, (D₂) et (D₃) d'autre part, soient distantes de 5 cm.
- Trace une droite (D) qui coupe perpendiculairement (D₁), (D₂) et (D₃) respectivement en I, O et E.
- Sur (D₁), place les points M et A tels que $IM = IA = 4$ cm.
- Sur (D₂), place les points S et R tels que $OS = OR = 4$ cm. M et S sont d'un même côté de la droite (IE).
- Trace les segments [MS], [AR], [RE], [SE], [IS] et [IR].

un autre :

- Trace un losange IRES dont les diagonales [IE] et [RS] mesurent respectivement 10 cm et 8 cm.
- Trace le rectangle RSMA sachant que I est un point d'un de ses côtés.
- Trace [IR] et [IS].

La mise en commun fait apparaître que la moindre erreur produit des des-
sins non attendus, de réaliser qu'on peut écrire différemment une description
ou un programme, qu'on peut plus ou moins condenser un texte...

Stage apprentissage à la démonstration - IREM de Nantes

F - Apprendre à poser des questions sur une figure géométrique

Cette activité amène les élèves à apprendre à analyser une figure de géo-
métrie en distinguant données et propriétés observées.

1 - Construire :

Un segment $[AB]$ de 5 cm et de milieu O .

Le cercle C de diamètre $[AB]$

Le cercle L de centre B et de rayon AB .

La droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par O coupe C en I et J .

La droite perpendiculaire à la droite (AB) en B coupe L en E et F .

Par rapport à la droite (AB) , E et I sont du même côté.

2 - Poser trois questions sur la figure réalisée.

Les questions posées par les élèves sont écrites au tableau. Il est demandé
aux élèves, si elles sont compréhensibles, grammaticalement correctes d'une
part et pertinentes du point de vue mathématique d'autre part. Puis après
avoir fait constater que certaines se ressemblent, elles sont classées.

Cumuler des savoirs ou des savoir-faire ou développer des compétences
IREM de Toulouse

G - Ecrire un nouvel énoncé à partir d'un énoncé donné : "Le problème de relais"

Xavier, Jérôme et Eric forment une équipe de relais pour participer à une
course.

L'épreuve consiste à faire 50 tours de piste de 400 m de long.

Pendant la course, Xavier a fait deux tours de moins qu'Eric et Jérôme
trois tours de plus que Xavier.

Quelle distance (en km) chacun a-t-il parcouru ?

Après une première recherche individuelle, des élèves ont demandé des
explications, par exemple sur : "piste de 400 m de long" ; une solution pro-
posant d'utiliser π pour un calcul de périmètre est évacuée...

Après leurs recherches, des solutions par moyenne puis essai-erreur, par
phrases, par schémas, vérifiées ou non, sont exposées par les élèves et discu-
tées. Ensuite, il est demandé à chacun de fabriquer un texte de problème

semblable en conservant ou non les nombres.

Un exemple de texte d'élève :

Philippe, Justin et Manu ont ensemble 576 billes.

Philippe a 34 billes de plus que Justin et Manu a 25 billes de plus que Philippe.

Combien de billes a Justin ?

Combien de billes a Manu ?

...

Ces dernières productions individuelles peuvent permettre à chacun, de réutiliser des méthodes de résolution de problèmes ou de travailler des notions mathématiques (par exemple, des élèves ont recherché un multiple de trois puis ont ajusté). En classe entière, il est nécessaire de revenir, sur certaines méthodes plus ou moins efficaces, selon les nombres donnés (taille par exemple).

Dans cette activité, l'imagination, l'écriture, l'argumentation, la distinction données / consignes...sont travaillées. Les élèves écrivent aussi pour apprendre à lire des problèmes.

Stage apprentissage à la démonstration - IREM de Nantes

H - Ecrire un énoncé de problème à partir d'un calcul

Les objectifs sont ici de faire travailler en même temps le sens des opérations et la compréhension de la structure d'un texte.

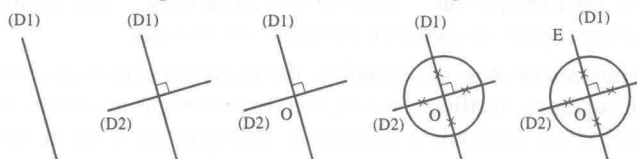
Ecris l'énoncé d'un problème où tu devras effectuer le calcul suivant pour trouver la solution : $(12 \times 7) + (34 \times 15)$
(cf Aide à l'évaluation)

Cette activité permet d'apprécier les compétences des élèves dans une situation qui comporte des contraintes fortes (utilisation des 4 données numériques, correspondance du texte avec l'expression proposée) mais qui leur laisse le choix de la situation.

Activités pour lire et écrire en math - IREM de Rouen

I - Ecrire un programme de construction à partir d'une bande dessinée

On a construit les étapes de la figure obtenue à la fin de la ligne.
Pour chacune des étapes, tu vas donner les consignes de construction.



Les élèves cherchent individuellement, puis en groupe ils produisent un texte commun. Cette activité permet de travailler le codage d'une figure et d'aider à mieux voir des relations entre des éléments géométriques (droite perpendiculaire à ..., cercle de centre ... , situé sur...). Elle permet de faire débattre la classe sur les manques, les erreurs....en comparant les productions mises sur affiche.

Il est alors possible de faire évoluer les textes affichés par une réécriture collective ou individuelle.

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

J- Ecrire un texte permettant de réaliser une figure à partir de mots donnés ou choisis

- Imaginez une figure simple comportant tous les mots contenus dans la liste (vous pouvez utiliser au maximum deux fois les éléments de la liste mais vous pouvez en ajouter d'autres).
- Rédigez ensuite le programme de construction.

Liste 1 : Milieu, centre.

Liste 2 : Parallèle, perpendiculaire, droite, segment, demi-droite.

Liste 2 : Cercle, carré, rectangle, losange, parallélogramme.

Liste 3 : Cercle, triangle isocèle, triangle rectangle, triangle équilatéral.

Liste 4 : Médiatrice, bissectrice.

...

Le côté ludique de départ, qui laisse libre cours à l'imagination a un effet stimulant, surtout s'il est demandé de réaliser une belle figure.

Cette activité est donnée à faire en groupe, les productions ensuite sont échangées ou affichées. Une ou plusieurs d'entre elles peuvent être choisies par le professeur ou par les élèves pour être améliorées. Cette activité favorise un travail sur le langage mathématique et la figure. Elle peut être l'occasion de faire un état des lieux et/ou de réinvestir des connaissances.

Stage apprentissage à la démonstration - IREM de Nantes

K - Comparer un texte-élève et un texte-professeur d'un même programme de construction :

Les élèves doivent réaliser les figures correspondants aux deux textes suivants :

Texte 1 :

Je trace un segment $[AB]$ de 4,5 cm de long. Avec le compas, je prends un écartement de 6,5 cm. Je pointe sur le point A. Je reprends le compas en écartant de 3 cm. Je pointe sur le point B.

J'obtiens le point C et je relie A à C et B à C. Je prends l'équerre et je place l'angle droit sur la droite (AC), je la fais glisser jusqu'au point B et je trace la droite passant par B.

Texte 2 :

Trace un segment $[AB]$ de 4,5 cm. Trace le cercle de centre A et de rayon 6,5 cm, puis le cercle de centre B et de rayon 3 cm. On appelle C l'un des points d'intersection des deux cercles. Trace le segment $[AC]$ et $[BC]$. Trace la droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par B.

Les élèves ont pour consigne d'établir des différences entre les deux textes : dans le cas du texte "élève" on utilise "je"..., dans le cas du texte "professeur" les instruments de dessin ne sont pas mentionnés....

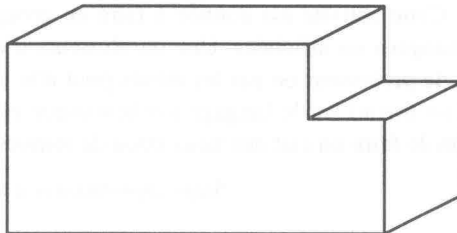
Ce travail permet de dégager certains critères d'écriture d'un programme de construction, il doit aider l'élève à mieux comprendre les textes des manuels. Il peut être une situation de référence dans des travaux ultérieurs.

Lire et écrire en mathématique - IREM de Rennes

L - Ecrire un texte de description d'un objet : "Le camion" (une partie de l'activité)

Il est distribué à chaque élève, un objet en bois qui est appelé "camion" obtenu à partir d'un pavé duquel on a retiré un cube. Le travail est d'abord individuel.

"Décris l'objet que tu as devant toi."



Tous les élèves entrent facilement dans l'activité, puis par groupe de quatre, ils se mettent d'accord sur une description commune. Lors d'un débat sur les premières propositions, certaines sont conservées, d'autres sont rejetées afin de permettre à chacun de comprendre la consigne.

Le professeur n'intervient pratiquement pas, si ce n'est pour stimuler ou glisser un objet contre-exemple en fonction de propriétés non trouvées ou discutées dans le groupe (par exemple, une pyramide...). Il est demandé d'écrire cette description sur transparent. Après une lecture des transparents, classés par le professeur, sur lequel chacun a noté ce qui va ou non, une relecture critique est faite avec débat, elle permet d'élaborer une description du "camion" puis celle des parallélépipèdes rectangles ("camion" complété). La description est écrite par chaque élève.

Ce travail donne la possibilité à chacun de manipuler. Le travail de groupe permet d'échanger sur l'observation des objets, sur les relations entre des arêtes, des faces. Il apparaît nécessaire aux élèves d'employer un vocabulaire précis et un vocabulaire commun pour se comprendre. Certains groupes vont jusqu'à conjecturer des règles propres à l'espace ou non.

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

M - Lire des représentations d'élèves d'un cube ou d'un pavé : "Le camion" (une autre partie)

A un autre moment, on donne à chaque élève le cube manquant du "camion" (ou le "camion" complété) et il doit sur papier non quadrillé, dessiner "l'objet tel qu'il le voit". A partir d'un montage sur transparent "de dessins intéressants", il est demandé, par écrit et en travail individuel :

A la suite de relectures critiques collectives, des représentations vont être

" Pour chacun des cas, vois-tu un cube ? Sinon dis pourquoi ? "

rejetées, vont être conservées ou vont évoluer. C'est une occasion de travailler sur le soin, la précision et ses conséquences. Par exemple, un dessin non précis ne donne pas toujours l'impression de "voir" l'objet (les arêtes parallèles ne sont pas représentées parallèles par exemple). A partir des représentations retenues, **la perspective cavalière** va être dégagée, définie et des règles vont être établies ou retrouvées.

A la fin de cette longue activité, une feuille est donnée sur le minimum à retenir sur les notions étudiées. Feuille plus officielle, plus détachée de l'activité que les écrits intermédiaires élaborés dans le feu de l'action, récapitulant les résultats notés au moment où ils sont trouvés. Cela peut permettre de vérifier un résultat mal noté, de limiter l'apprentissage de formules fausses,...

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

N - Fabriquer différentes formes d'expression (tableau, graphique, formule) et passer de l'une à l'autre.

A la maison, il est demandé aux élèves de dessiner neuf cercles de diamètres donnés par l'enseignant et d'en découper un. En classe, le découpage du disque est vérifié. Les autres seront découpés pour le cours suivant où, par deux, les élèves mesurent les longueurs des cercles avec du fil non extensible. Se pose alors le problème de relever de façon rapide et claire la centaine de résultats. Les élèves proposent de fabriquer un tableau. Pendant que le professeur relève les valeurs sur transparent, chaque élève les recopie. Après discussion, les valeurs trop éloignées de celles obtenues par la majorité sont éliminées.

Pour avoir une idée des résultats de la classe, la moyenne de chaque série est calculée à l'aide de la calculatrice. Chaque valeur est arrondie au millimètre près (sensibilité de l'œil) et il est fait une représentation graphique de la longueur d'un cercle en fonction de son diamètre.

La classe retrouve la formule donnant la longueur ou le périmètre d'un cercle à partir du tableau et/ou du graphique.

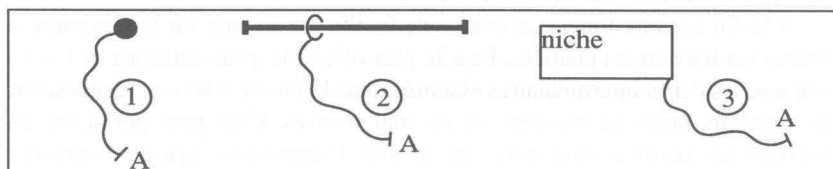
En mettant en relation les lectures effectuées à travers différents modes d'expression (tableau, graphique, formule), l'élève peut appréhender un cas de proportionnalité entre des longueurs.

A cette occasion, le vocabulaire associé à arrondi, aux graphiques et à la proportionnalité entre des grandeurs est précisé ou reprécisé.

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

O - Ecrire une description d'une figure obtenue (ou dire par oral selon la classe) : "Le chien"

A partir du problème "classique" du chien attaché, dont la laisse est fixée en un point comme dans les cas 1 et 3 ou coulissant grâce à un anneau comme dans le cas 2 ; il est demandé aux élèves de dessiner la zone d'action, de la décrire. Cette description aide à découvrir et à calculer son périmètre.



La recherche de cette zone est un problème difficile à résoudre, savoir exprimer ses résultats aussi. Là encore, les élèves peuvent prendre conscience de la nécessité d'introduire des lettres et d'un vocabulaire précis.

Enseigner les mathématiques autrement en sixième - IREM de Nantes

P - Lire un texte complexe : “Le voyage”

Cette activité de lecture donnée plutôt, en fin d’année permet de réinvestir ce qui a été vu, aussi bien au niveau de la lecture - écriture qu’au niveau des notions mathématiques associées. (d’après une idée de R. Charnay dans “Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème”).

Le voyage : L’année dernière nous avons fait les comptes de notre coopérative. Nous avons décidé de consacrer 2400 F au voyage.

Le jour de la sortie, trois cars identiques sont partis de l’école (située à MAROMME) à 7h45. Tous les enfants étaient assis et dans un car il restait 12 places libres. Aucun strapontin n’était occupé. Les accompagnateurs étaient debout au départ.

Au cour du trajet, je me suis installé à coté du chauffeur et j’ai bavardé un peu avec lui. Il m’a dit qu’un car comme celui-ci consommait environ 19 litres de gas-oil aux 100 km.

A 8h10, nous étions déjà arrivés à CLERES. En descendant du car, j’ai remarqué une pancarte :



MAROMME 25 km

Le chauffeur a profité de ce premier arrêt pour faire le plein.

consigne : Trouver une question à laquelle les données de ce texte permettent de répondre, puis écrire cette question sur une affiche et la réponse sur une autre.

Lorsque ce travail est terminé, extraire du texte de départ, le texte minimal qui permet de répondre à la question posée.

Activités pour lire et écrire en math - IREM DE Rouen

Les propositions que nous venons de faire peuvent être exploitées de façon variées selon la classe, le moment de l’année où elles sont utilisées et compte tenu des compétences déjà développées.

Certaines peuvent être utilisées comme point de départ, par exemple “*Le terrain de badminton*” (C) ou comme une occasion de faire un état des lieux, de réinvestir des connaissances.

D’autres peuvent être prolongées, comme par exemple en faisant écrire des textes et construire des figures manquantes dans “*Marions-les*” (D).

Sans que ce soit toujours redit, les activités font travailler le vocabulaire ou les notations et le codage, de façons diverses, permettant au fur et à mesure de l’année d’améliorer les compétences dans ces domaines.

Ces activités sont aussi adaptables selon la notion mathématique que l’on veut travailler. Les figures de “*Marions - les*” (D) peuvent être différentes et par exemple porter uniquement sur des quadrilatères. L’expression numé-

rique de départ de (H) peut changer en fonction des opérations que l'on veut travailler.

Il est toutefois indispensable de bien déterminer les objectifs que l'on se propose d'atteindre. Par exemple les activités dites de « communication » peuvent ne pas atteindre un objectif d'amélioration du vocabulaire utilisé, lorsque les élèves se comprennent entre eux (« *le bout d'une droite* », « *les coins du carré* »....). D'où la nécessité de faire évoluer « le langage élève » vers le langage attendu, à l'écrit comme à l'oral en proposant des situations où le langage élève fonctionne mal « *Le camion* »(L).

Les objectifs cités dans les activités précédentes sont travaillés en liaison avec les objectifs d'acquisition des contenus mathématiques du programme de sixième. Leur évaluation se fait en même temps.

Conclusion

Il peut bien sûr être proposé de nombreuses autres activités, celles qui viennent d'être citées ne sont que des exemples. Elles ont pour caractéristiques communes de s'appuyer sur des stratégies de production, de confrontation de productions (par exemple au moyen d'affiches ou de transparents), et d'explicitation de modes de fonctionnement dans le cadre d'un apprentissage donné.

Elles sont aussi très diverses afin d'éviter d'introduire un nouveau type d'exercices qui serait une fin en soi. Si l'élève apprend à construire un texte, c'est pour mieux en comprendre la structure et mieux savoir en lire d'autres par la suite. Si on fait évoluer ses écrits, c'est pour qu'il comprenne ce qu'on attend de lui quand il devra rédiger une réponse. Tout travail systématique de lecture et d'écriture sans le support d'une activité mathématique ne résout pas les problèmes rencontrés par les élèves en situation « réelle ».

Ces activités sont aussi des occasions de travailler des problèmes de français. Elles peuvent permettre aux élèves de comprendre l'aspect fonctionnel de l'écriture et de la lecture et donc, peut-être, de les motiver pour mieux communiquer à l'écrit.

L'apprentissage de l'écriture est un travail de longue haleine dont les effets ne sont pas immédiats. Même si c'est difficile, il doit être commencé dès la sixième et être poursuivi dans les niveaux supérieurs. Cependant ces compétences que l'on désire développer chez les élèves ne sont pas pour autant des *compétences exigibles* dès la sixième.

Ce travail ouvre des perspectives très vastes dans le cadre de la compréhension du mode de fonctionnement de l'élève en mathématique et il est fondamental pour favoriser la réussite ultérieure des élèves.

Des schémas pour consolider le sens de la numération et des opérations

Michèle MARTIN, Colette MERCIER,
Paulette MOULI
IREM de TOULOUSE

Objectifs

*En sixième, on consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.*¹

Pour pouvoir proposer des activités réellement destinées à enrichir les acquis, nous devons prendre en compte à la fois les contenus des programmes de l'école primaire et les connaissances de nos élèves à l'entrée en sixième.

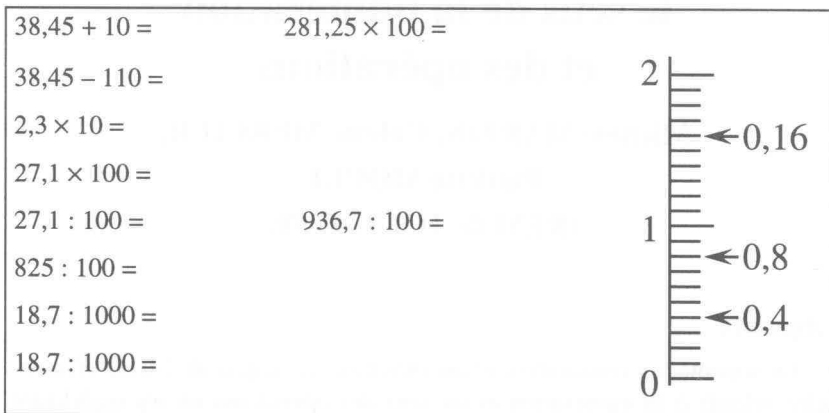
A l'issue du cycle des approfondissements, les élèves doivent, par exemple :

- *connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix ;*
- *connaître la signification de chacun des chiffres de l'écriture à virgule d'un nombre décimal ;*
- *comparer, ranger des nombres décimaux ;*
- *multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, par 100, par 1000, multiplier un entier par 0,1, par 0,01.*

Cependant, un certain nombre d'entre eux n'ont pas mené à bien ces apprentissages et arrivent en sixième avec des représentations erronées de l'écriture des nombres. Elles font obstacle à la compréhension des écritures décimales et à une bonne maîtrise des opérations comme le montrent les réponses ci-dessous, données par des élèves dans les cahiers de l'évaluation

¹ Les parties de cet article écrites en italiques sont des extraits du programme de Sixième ou de primaire.

CM2-Sixième. La signification des chiffres n'étant pas acquise, certains réinvestissent même des techniques opératoires inadaptées car laborieuses.



L'objectif d'un travail de consolidation ne peut donc être limité à l'amélioration de techniques opératoires basées sur de simples descriptions de placement de virgule et adjonction éventuelle des zéros adéquats. Il faut aussi concevoir des activités permettant aux élèves de reconstruire, ou d'approfondir, le sens de la numération et des opérations.

Méthodologie

Les activités proposées doivent donc amener l'élève à **remettre en cause ses représentations initiales à partir de ses erreurs**. Pour cela, il ne suffit pas qu'il plaque des réponses justes sur des réponses inexactes. Il faut aussi lui donner les moyens d'analyser ses erreurs et de prendre conscience de leur origine.

L'un de ces moyens est le lui demander d'exprimer un même résultat sous des formes différentes, puis de comparer les réponses ainsi obtenues. Par exemple - nous le montrerons par la suite - la confrontation de résultats donnés à la fois, en écriture en chiffres avec différentes unités, en écritures fractionnaires, et à l'aide de représentations schématisques de nombres, lui permet de repérer et réduire les décalages entre les savoirs attendus et les savoirs construits. Ce travail d'auto-évaluation est particulièrement fécond s'il est organisé en petits groupes.

Les activités présentées ont été choisies à la fois :

- pour montrer comment la schématisation a été utilisée pour construire, ou consolider, le sens de la numération et des opérations ;
- pour signaler quelques écueils à éviter et quelques précautions à prendre pour gérer les écarts entre les effets attendus et les effets produits.

Schématisation d'un entier : un outil de remédiation

A leur arrivée en sixième, les élèves ne sont pas tous “capables de faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines, de décomposer ce nombre suivant les puissances de 10, de savoir multiplier ou diviser un entier par 10, 100, 1000”. Il nous paraît nécessaire et possible - l'expérience nous l'a montré - d'améliorer leurs compétence dans ce domaine.

L'objectif de l'exemple 1 ci-dessous est donc de réactiver ou de reconstruire le sens de la numération des entiers en s'appuyant sur un double codage du nombre : d'une part son écriture en chiffres, d'autre part des schémas représentant unités, dizaines, centaines et unités de mille. Plusieurs schémas permettent de représenter un nombre suivant les regroupements adoptés (voir dans cet exemple, le schéma correspondant au nombre 1 342).

Activité préalable

Il convient cependant de s'assurer que cette schématisation du nombre est comprise des élèves, par exemple en la faisant fonctionner dans une situation de communication.

Les élèves, par groupes de deux, disposent de planches d'unités, dizaines, centaines qu'ils peuvent découper pour communiquer le nombre de leur choix - sous forme de schémas uniquement - à un autre groupe. Celui-ci doit retrouver l'écriture chiffrée du nombre transmis. Cette activité, dont l'aspect ludique motive les élèves, permet de les familiariser rapidement avec ce codage (utilisé d'ailleurs sous des formes voisines en primaire).

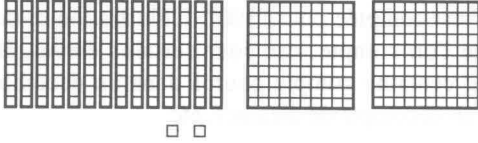
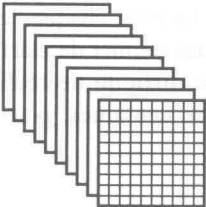
Exemple d'exercice proposé

Première phase - Réponses individuelles aux questions ci-dessous.

Exemple 1

Consigne : le schéma ci-dessous représente un nombre ; chaque $\square$ correspond à une unité.

Schéma



1 - Ecrire en chiffres le nombre d'unités du schéma.

2 - Quel est le nombre de centaines représentées sur le schéma ?

Colorie en bleu la partie correspondante du schéma.

3 - Quel est le chiffre des dizaines ?

Entoure en rouge la partie correspondante du schéma.

Deuxième phase - Echange en groupe classe ou en petits groupes.

Les questions posées **facilitent le dialogue enseignant-élève** à propos des erreurs rencontrées puisqu'il doit y **avoir correspondance entre la réponse numérique et sa traduction sur le schéma**.

Exploitation des réponses données

Question 1 - Confrontation des stratégies mises en œuvre pour déterminer le nombre d'unités :

- certains calculent à partir des regroupements dessinés, dans ce cas
$$2 + (14 \times 10) + 100 + 100 + 1000,$$
- d'autres regroupent 10 dizaines et déterminent visuellement les chiffres utiles sans calcul ou décomposent :

$$(1 \times 1000) + (3 \times 100) + (4 \times 10) + 2 = 1\,342.$$

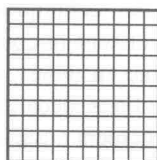
C'est l'occasion :

- pour les élèves, de prendre conscience qu'il existe un schéma "canonique" plus pratique pour reconnaître rapidement le nombre,
- pour le professeur, de faire sentir l'utilité d'associer à un nombre entier l'image mentale du schéma canonique : on peut s'y référer pour vérification ou explications d'erreurs.

Quelques activités de correspondance nombre / schéma "canonique", à l'aide d'un rétroprojecteur, facilitent par la suite l'évocation de l'image mentale.

Question 2 - On rencontre essentiellement deux types d'erreurs liées au sens de la numération :

- le nombre des centaines est 3 (ou 2) avec coloriage correspondant : il y a confusion entre chiffre des centaines et nombre de centaines (l'unité des mille n'est d'ailleurs pas prise en compte dans le coloriage),
- le nombre des centaines est 300 (ou 200) : même erreur d'oubli des unités de mille, doublée d'une erreur de type "phonétique". En effet chaque "centaine" est comptée pour "100". L'illustration ci-dessous permet de clarifier ce que l'on compte, car pour certains élèves, il est difficile de réaliser qu'une centaine compte pour 1 dans un décompte de centaines, pour 10 dans un décompte de dizaines, etc.



- Le nombre de centaines est 1300 (ou 1200) avec coloriage correspondant : même erreur “phonétique”, les unités de mille comptant pour 1000. Cependant les élèves donnant cette réponse ont compris qu'il fallait prendre en compte les unités de rang supérieur.

Question 3 -

L'erreur la plus fréquente consiste à dire “le chiffre des dizaines est 14” et permet de réfléchir à la signification du mot chiffre.

Autre type d'erreur (liée au type d'apprentissage) A la question 2, certains élèves répondent : “le nombre de centaines de 1342 est 42” et ne colorent rien sur le schéma. Leur réponse semble correspondre à un automatisme de découpage du nombre après le chiffre des centaines, avec confusion de la partie droite et de la partie gauche. Le schéma facilite, dans ce cas aussi, la construction de sens : 42 unités ne permettent pas de reconstituer une centaine.

Prolongements

Le sens de la division par les puissances de 10 se trouve renforcé :

- par la visualisation des groupes de 10, 100, 1000 et des restes correspondants,
- par le lien qu'ils rendent tangible entre, par exemple, la décomposition associée au nombre de centaines et la détermination du quotient et du reste dans cette division :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1342 = (13 \times 100) + 42 \\ 42 < 100 \end{array} \right. \quad (1) \quad \begin{array}{r} 1342 \quad | \quad 100 \\ 42 \quad | \quad 13 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{r} \text{dividende} \quad | \quad \text{diviseur} \\ \text{reste} \quad | \quad \text{quotient} \end{array} \quad (3)$$

Il est important que les élèves constatent l'inutilité de “poser” les divisions par 100 (ou 10, ou 1000) puisque quotient et reste sont à repérer dans l'écriture chiffrée. Cependant, l'écriture 2 a une fonction schématique de “boussole” facilitant l'identification des rôles des quatre entiers de la division (écriture 3).

- Ces activités facilitent la compréhension des écritures décimales et des notions de dixièmes et centièmes...
- Elles permettent d'organiser des activités de soutien ayant pour objectif la

maîtrise des techniques d'addition et soustraction avec retenues.

- Elles favorisent la compréhension des changements d'unités : on exprime un nombre en unités, dizaines, centaines...comme on exprime une contenance en litres, décalitres, hectolitres...
- Elles participent aussi à la construction du sens de la division euclidienne.

Les quelques heures qui leur sont consacrées en début de sixième sont largement récupérées ensuite.

Demi-droite graduée

“Lire l'abscisse d'un point, situer un point d'abscisse donnée” (abscisse en écritures décimales ou fractionnaires) sont des compétences exigibles en sixième.

A l'école primaire elles ont été l'objet d'une simple initiation, et les élèves abordent les activités proposées en sixième essentiellement à travers l'image familière de leur règle graduée. Or cette image paraît brouiller deux notions essentielles : la notion d'unité, la notion de dixième.

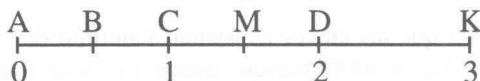
La notion d'unité

L'unité peut être le centimètre qui est effectivement la distance entre deux entiers consécutifs de leur règle graduée ; mais elle peut être aussi le décimètre qui est, sur leur règle, la distance entre deux multiples de 10 ; ou bien le mètre qui, sur la règle graduée utilisée au tableau, sépare deux multiples de 100 ! L'unité n'est donc pas la longueur dont les reports successifs à partir de zéro déterminent la position des entiers consécutifs de la graduation. Elle est considérée uniquement comme une précision accompagnant un nombre à fin d'exprimer une mesure. Certains élèves peuvent donc compléter une graduation par des entiers manquants, sans être capable de repérer l'unité.

D'où leur embarras lorsqu'on leur demande :

Exemple 2

Colorier un segment unité sur la règle graduée ci-dessous.

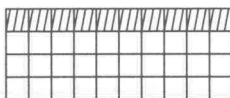
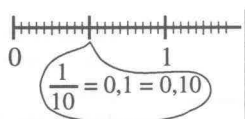


Exemples de réponses :

- il n'y a pas d'unité car pas de cm,
- l'unité est la règle AK,
- l'unité est le segment [AB].

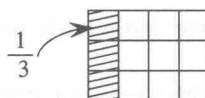
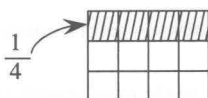
La notion de dixième

Il faudrait préciser **dixième d'unité**. Mais d'une part le mot unité est bien souvent implicite et d'autre part il est l'objet de représentations erronées comme nous venons de le voir. Le dixième n'est donc pas perçu comme le résultat du découpage de l'unité en dix parties égales. Sur 80 élèves de sixième interrogés, 25 ont fourni les réponses suivantes :

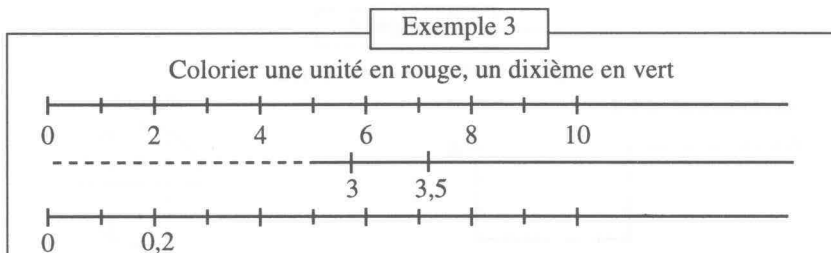


le dixième de la tablette de chocolat est la partie hachurée.

Le dixième est donc interprété - par analogie avec la dizaine découpée en dix unités - comme une part rassemblant dix parts égales ou comme le dixième trait d'une graduation : d'autant plus que $0,1 = 0,10$ et que des élèves sont ainsi confortés dans leur représentation des décimaux comme une juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule. Cette mauvaise représentation du dixième est souvent étendue à $1/3$ et au $1/4$ comme l'illustrent les erreurs ci-après :



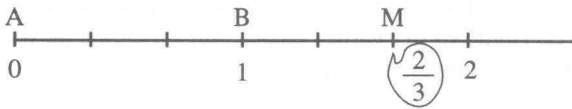
Il nous paraît donc important d'utiliser divers types de graduations et d'inciter les élèves à se repérer par exemple à l'aide des couleurs.



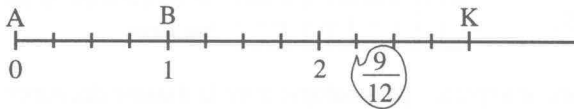
Il est bon aussi qu'ils fixent cette connaissance et sachent expliquer leur choix en disant :

- “l'unité est la distance entre deux entiers consécutifs”,
- “on obtient un dixième en divisant l'unité en dix parts égales” ou “une unité est égale à 10 dixièmes”.

D'autres types d'erreurs dans la recherche de l'abscisse fractionnaire d'un point paraissent aussi imputables à un manque d'explicitation des règles de représentation.



L'abscisse de M est AM et non BM !



Le dénominateur 12 correspond au découpage de [AK] au lieu du découpage de l'unité.

Il faut donc que les élèves disposent d'une règle à laquelle se référer en cas d'erreur, par exemple, pour écrire l'abscisse fractionnaire d'un point M :

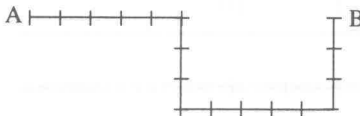
- au dénominateur indiquer le nombre de parts égales contenues dans l'unité ;
- au numérateur indiquer le nombre des mêmes parts entre l'origine et le point M.

Provoquer des va-et-vient entre schéma et règle nous paraît indispensable à leur appropriation qui se fait souvent par essais/rectifications. C'est par exemple le cas des élèves qui n'ont pas intégré "parts égales" et produisent les réponses ci-dessous :

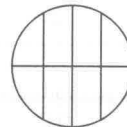
Exemple 4

QUESTION : Hachurer le quart :

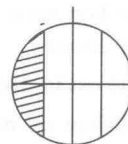
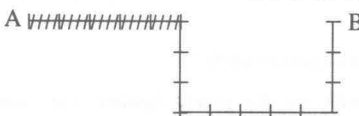
du chemin de A à B



du disque



RÉPONSES



Sens des opérations et comparaison de longueurs

En sixième, les résolutions de problèmes *“doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations figurant au programme”*. Il faut aussi *“entraîner l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui à chaque usage seront remplacées par des valeurs numériques.”*

Pour atteindre ces objectifs, il nous a paru intéressant, et efficace à l'usage, de prendre comme point de départ les expressions “fois plus”, “fois moins”, “de plus”, “de moins”. Ces expressions sont associées à des situations concrètes, car elles sont fréquemment utilisées dans la vie courante. Elles paraissent familières aux élèves ; cependant elles fonctionnent souvent comme des mots déclencheurs : “plus : j'ajoute”, “moins : je retranche”. Le travail d'analyse de ces expressions peut être conduit sous trois formes : géométrique par l'élaboration de schémas, numérique par l'écriture d'égalités, et sous forme de phrases à lire ou produire.

Ceci suppose que soient déjà acquises quelques compétences relatives à la construction de sommes de segments et de multiples de segments. Par

Exemple 5

Patricia a téléphoné à Joël l'énoncé de l'exercice de mathématiques, mais elle lui a donné les informations dans le désordre.

- 1 - Peux-tu aider Joël à les remettre dans l'ordre ?
- 2 - Construis les segments demandés.
- 3 - Calcule les longueurs de ces segments.

Informations dictées par Patricia :

- Le segment [IJ] est 3 fois plus long que le segment [AB].
- Le segment [CD] mesure 8 cm de plus que le segment [MN].
- Le segment [AB] mesure 3 cm.
- Le segment [MN] mesure 5 cm de moins que le segment [IJ].
- Le segment [PQ] est 4 fois moins long que le segment [CD].

exemple, celles requises par l'exercice suivant :

Des activités de transcodage comme celle de l'exemple 6 - c'est-à-dire de traduction d'un langage à un autre - permettent simultanément d'améliorer le **sens des opérations, de préparer à la mise en équations et à la résolution d'équations** du type :

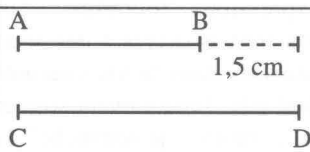
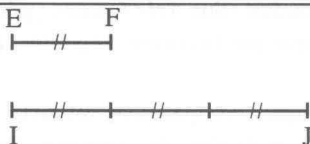
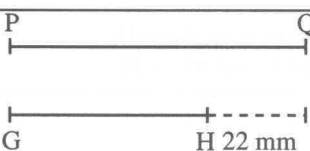
$$a + x = b \text{ et } ax = b.$$

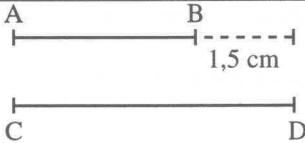
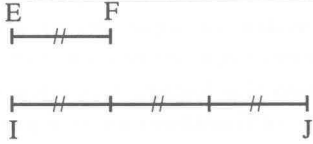
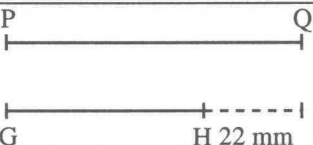
Exemple 6

CONSIGNE :

Observer la deuxième ligne du tableau. Elle indique **trois façons différentes de comparer** les longueurs AB et CD : un schéma codé, des phrases comparatives, des égalités.

Dans les autres lignes du tableau, deux longueurs sont comparées d'une seule façon. **Ecrire, dans les deux cases vides de chaque ligne, les comparaisons manquantes.**

Schémas	Phrases comparatives utilisant les expressions : fois plus, fois moins, de plus, de moins.	Egalités
	[CD] mesure 1,5 cm de plus que [AB] ou [AB] mesure 1,5 cm de moins que [CD]	en cm $CD = AB + 1,5$ ou $AB = CD - 1,5$
		
	[RS] est 5 fois plus long que [UV] ou [UV] est 5 fois moins long que [RS]	
		$MN = 4 \times KL$ ou $KL = MN : 4$ ou $KL = \dots MN$
		

Schémas	Phrases comparatives utilisant les expressions : fois plus, fois moins, de plus, de moins.	Egalités
	[CD] mesure 1,5 cm de plus que [AB] ou [AB] mesure 1,5 cm de moins que [CD]	en cm $CD = AB + 1,5$ ou $AB = CD - 1,5$
	[EF] est 2 fois plus petit que [IJ] ou [IJ] est 2 fois plus grand que [EF]	$IJ = EF + 2$ ou $EF = IJ - 2$
	[RS] est 5 fois plus long que [UV] ou [UV] est 5 fois moins long que [RS]	$UV = RS - 5$ ou $RS = UV + 5$
	[KL] est 4 fois moins long que [MN] ou [MN] est 4 fois plus long que [KL] ou [KL] est le quart de MN	$MN = 4 \times KL$ ou $KL = MN : 4$ ou $KL = 1/4 MN$
	[PQ] mesure 22 mm de moins que [GH] ou [GH] mesure 22 mm de plus que [PQ] ou [GH] est le 3/4 de PQ	$PQ = GH - 22$ ou $GH = PQ + 22$ ou $GH = 3/4 PQ$

Réponses d'un élève (donnant un exemple des erreurs les plus fréquentes)

Analyse des erreurs. Les réponses proposées par cet élève font apparaître :

- ligne 2 : Confusion entre différence et produit : “[IJ] est 2 fois plus grand que [EF]” indique que seule la différence entre [IJ] et [EF] est prise en compte ;
- ligne 3 : Mots déclencheurs : 5 fois plus traduit par + 5, 5 fois moins par - 5 ;
- ligne 4 : Pas d'erreur : cet élève semble capable d'interpréter : $MN = 4 \times KL$ et $KL = MN : 4$;

- **ligne 5** : Des difficultés pour traduire le schéma par des phrases et donc par des égalités : au segment le plus long [PQ] est attribué le rôle du plus court [GH] ;
- La phrase "[GH] est le 3 quart de [PQ]" correspond approximativement au rapport des deux segments. Elle peut être imputable à une consigne mal explicitée.
- $GH = 1/22 PQ$ peut avoir pour cause une confusion entre $GH = PQ + 22$ et $GH = PQ : 22$.

La présentation en tableau peut induire certaines erreurs par transposition injustifiée d'une case à l'autre (voir ligne 5). Cependant, la plupart des erreurs relevées sont représentatives d'erreurs fréquemment rencontrées, en début d'apprentissage, dans des exercices de présentation plus linéaire. Ces erreurs peuvent persister longtemps, si elles ne sont pas suffisamment mises à jour en sixième.

Par contre, la mise en parallèle de ces trois langages donne plus de cohérence à l'apprentissage et est source de progrès : on peut s'appuyer sur les réussites pour consolider ce qui est encore en cours d'acquisition.

Prolongements de cette activité

L'analyse grammaticale des deux phrases associées à chaque schéma, permet de souligner que les segments comparés sont, tour à tour, sujets du verbe. Ceci permet d'introduire la traduction de ces phrases par deux égalités isolant alternativement chaque longueur dans un membre. Ce type d'activité doit être associé à des activités de résolution de problèmes finalisant ces égalités : on exprime la quantité que l'on cherche en fonction de celle que l'on connaît.

Ce passage du numérique au géométrique prépare les élèves à la schématisation de problèmes et les aide à conceptualiser deux procédés de comparaison qu'ils rencontreront tout au long de leur scolarité : comparaison par différence, comparaison par quotient.

Conclusion

Les schématisations utilisées ont permis de traduire des propriétés caractéristiques par des codages visuels. Mais, comme tous les codages, ils sont utilisables par des initiés qui ont appris à repérer et identifier ce qu'on leur "donne à voir". Il est par conséquent essentiel de mettre à jour l'implicite.

Complémentaires du langage oral et du langage écrit, les schémas ont permis d'échanger des représentations, de confronter des connaissances, de structurer des savoirs, ou de modéliser. Schématiser est donc un moment

essentiel de l'apprentissage. Après le temps de la découverte et de la sensibilisation, la traduction en images des premières acquisitions, non seulement facilite leur mémorisation, mais permet le passage à l'abstraction nécessaire à toute conceptualisation.

Il est en outre important de montrer que ces schémas ne sont pas figés. Des savoirs nouveaux les compléteront ou les remettront en cause : la droite graduée en est un bon exemple.



Remarques, notes, expérimentation

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

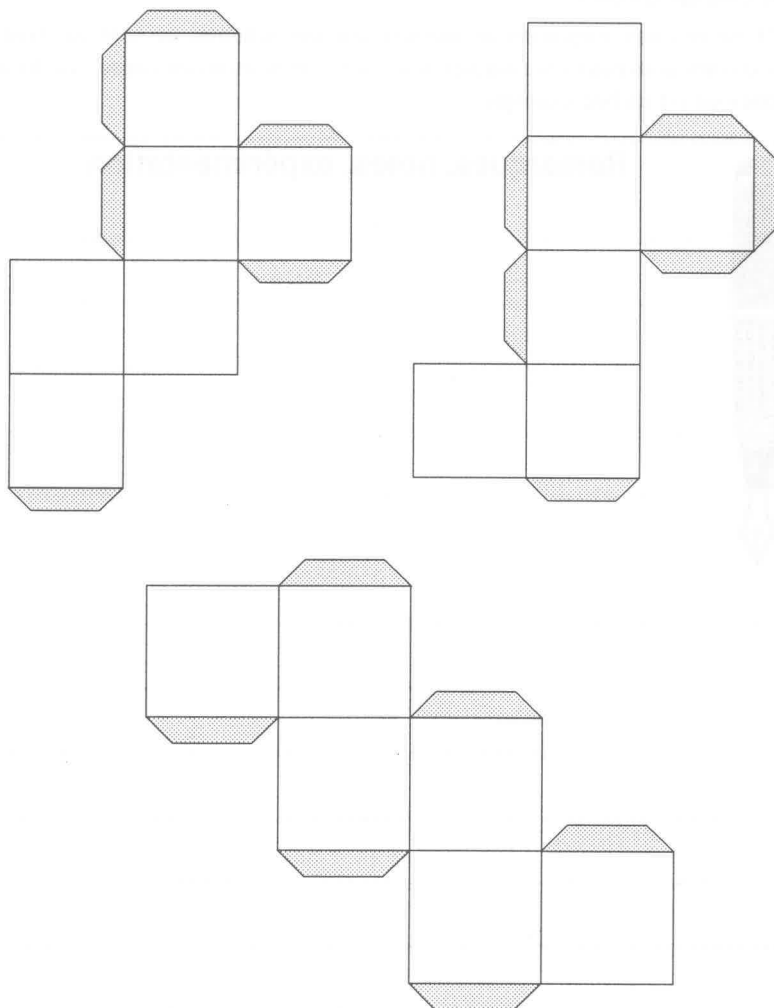
.....

.....

.....

.....

Les languettes



Ajoute la languette manquante qui permet de construire un cube de façon hermétique

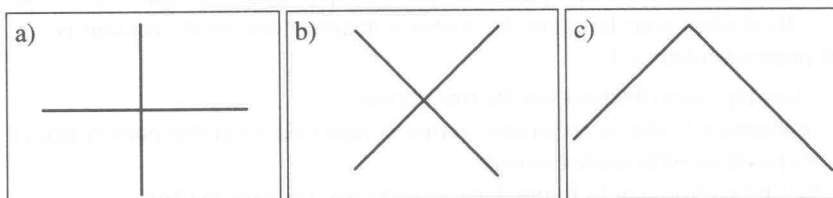
Reconnaître un angle droit

René MULET-MARQUIS

IREM de LYON

I - Importance de la notion dans les programmes

La capacité à reconnaître un angle droit intervient dans de très nombreuses activités géométriques : identification des hauteurs, des médiatrices d'un triangle, de certains quadrilatères, utilisation de la trigonométrie ou du théorème de Pythagore, vérification de la validité d'un tracé, etc. On peut affirmer qu'un élève ne maîtrisant que partiellement cette capacité aura des difficultés très importantes en géométrie au collège et au-delà. Les évaluations de début de sixième montrent qu'un nombre relativement important d'élèves est dans ce cas. Nous avons nous-mêmes testé cette aptitude auprès de 80 élèves de sixième. Voici un extrait des tests utilisés :



Les élèves ont tous reconnu un angle droit sur la figure a). 8 élèves n'ont pas reconnu d'angle droit sur la figure b) et 17 sur la figure c).

La capacité à reconnaître un angle droit est fondamentale en géométrie. A l'entrée en sixième, de nombreux élèves ne maîtrisent pas cette capacité.

Si l'on souhaite aller au-delà du constat des difficultés, une question essentielle se pose : "Comment reconnaît-on un angle droit ?"

II - Aspects historiques

Nous retiendrons deux définitions utilisées historiquement :

Euclide : Lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait deux angles de suite égaux, chacun des deux angles égaux est droit.

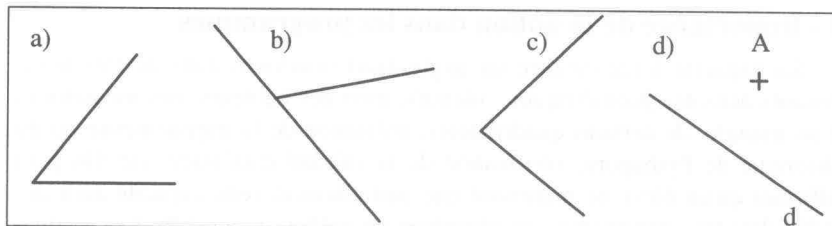
Clairaut : Il faut prendre la plus courte des lignes DA , DB , DC ,... c'est cette ligne à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire.

Ces deux définitions renvoient à des images différentes et, sans doute, à une mise en œuvre différente dans la reconnaissance d'un angle droit.

Plusieurs conceptions de l'angle droit ont été présentées chez les mathématiciens au fil des siècles.

III - Aspects actuels : la reconnaissance de l'angle droit chez les enseignants

Lors de plusieurs stages, j'ai proposé aux collègues d'analyser leurs propres modes de reconnaissance d'un angle droit.



Des figures étaient projetées à l'aide d'un rétroprojecteur, une par une, et les stagiaires devaient noter au fur et à mesure comment ils reconnaissaient que l'angle était ou n'était pas droit (par exemple, pour les figures a), b) ou c)). Ils étaient, pour la figure d), invités à imaginer une droite passant par A et perpendiculaire à d.

Les réponses obtenues ont été très variées :

- en tournant la tête ou en faisant tourner la figure dans ma tête pour la placer en position verticale/horizontale ;
- par "projection" sur la figure d'une équerre que j'ai dans ma tête ;
- par "essais-erreurs" (j'imagine diverses positions possibles) ;
- par comparaison de deux angles ;
- en imaginant le plus court chemin ;
- c'est instantané, je ne sais pas ;
- je me suis demandé si c'était un dessin dans l'espace...

Les situations géométriques étaient très simples. D'autres situations permettraient, sans doute, d'avoir une liste beaucoup plus longue.

Deux points semblent néanmoins pouvoir être tirés de cette brève expérience :

Pour une figure donnée, les modes de reconnaissance varient d'un individu à un autre.

Pour un individu donné, les modes de reconnaissance varient d'une figure à une autre suivant les caractéristiques de la figure.

Les réponses des enseignants sont variées. Toutefois, il nous apparaît que l'on peut les regrouper en deux grandes catégories :

1 - Reconnaissance par mise en correspondance avec une figure type, abstraite (par exemple, une droite verticale croisée par une horizontale) ou concrète (par exemple, une équerre) présente dans notre mémoire.

2 - Reconnaissance par vérification d'une propriété de l'orthogonalité (angles égaux, plus courte distance par exemple).

La mise en œuvre efficace de ces modes de reconnaissance nécessite d'une part, d'avoir la capacité de faire tourner, soit mentalement, soit physiquement (rotation de la feuille ou de la tête), la figure donnée ou la figure de référence disponible en mémoire. D'autre part, il faut être capable d'extraire certaines parties de la figure dans le cas de situations géométriques complexes. Bien entendu, si c'est une propriété de l'orthogonalité qui est en jeu, il faut que les savoirs et les savoir-faire liés à cette propriété soient disponibles.

IV - Les apprentissage à l'école primaire

On retrouve fréquemment le double pliage d'une feuille de papier pour introduire la notion d'angle droit. Le pliage pourrait être utilisé pour une présentation "à la Euclide" de l'angle droit. En pratique, l'activité de pliage n'est pas exploitée de cette manière : elle se termine le plus souvent par l'affirmation que l'on vient de fabriquer un angle droit, éventuellement en le vérifiant à l'aide d'une équerre. L'outil privilégié de vérification dans les exercices est l'équerre. Le pliage ne semble pas être le moyen de vérification auquel sont incités les élèves, même dans la phase d'apprentissage. Quelques discussions avec des maîtres nous ont montré qu'outre le pliage, une autre voie était souvent utilisée dans l'approche de l'angle droit : l'observation des angles droits présents dans l'environnement (coin du tableau, de la table, etc.).

Par rapport aux deux grandes catégories de réponses données par les experts (voir ci-dessus), on peut dire que ce qui est implicitement visé dans l'introduction des angles droits en primaire, c'est la fabrication d'une image mentale d'un angle droit en montrant un certain nombre, et c'est la capacité à utiliser une équerre. L'utilisation de propriétés de l'orthogonalité pour vérifier si un angle est droit n'est pas envisagée. La même remarque est sans doute valable pour le travail fait en début de collège.

V - La reconnaissance chez les élèves

En demandant à des élèves de sixième d'explicitier leur mode de reconnaissance d'un angle droit, nous avons recueilli les réponses suivantes :

- je tourne la tête ;
- je regarde si cela forme un "plus" ;
- je regarde si cela forme une vraie croix (sic) ;

- je regarde si cela fait comme un coin de la feuille, du tableau,...
- etc.

D'une manière générale, les modes des élèves à l'entrée en sixième sont plus du côté de la mise en correspondance avec une figure mémorisée que du côté de l'utilisation de propriétés de l'orthogonalité. Ceci est tout à fait cohérent avec la présentation de l'angle droit faite en primaire. Quand on observe les erreurs faites par les élèves de sixième, les "théorèmes-élèves" ci-dessous semblent être utilisés implicitement assez fréquemment :

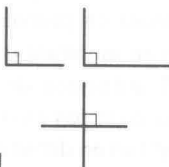
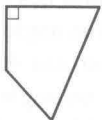
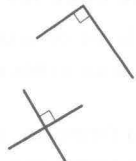
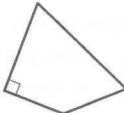
- un "coin" d'une figure est un angle droit ;
- deux lignes qui se croisent forment un angle droit ;
- deux lignes dont l'une des deux est soit verticale soit horizontale, forment un angle droit.

Ces "théorèmes-élèves" ne fonctionnent pas de manière systématique mais sont mobilisés en fonction de la situation géométrique proposée à l'élève. Il nous semble possible d'identifier au moins quatre éléments pouvant jouer un rôle dans la reconnaissance d'un angle droit par un élève :

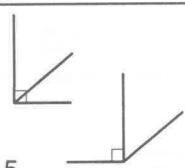
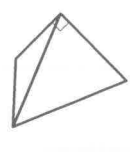
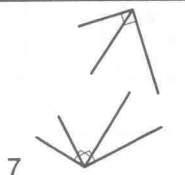
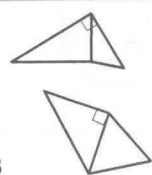
- 1 - l'orientation de l'angle ;
- 2 - la figure proposée est ouverte ou non ;
- 3 - l'angle est isolé ou doit être isolé ;
- 4 - le support est blanc ou quadrillé.

Si l'angle est en situation verticale/horizontale, il est en général reconnu. Une autre orientation crée une difficulté qui devient très importante si elle est conjuguée avec la nécessité d'isoler l'angle. Voici quelques exemples de figures obtenues en croisant les variables 1, 2 et 3 évoquées ci-dessus.

L'angle est isolé

	Figures ouvertes	Figures fermées
Orientation verticale horizontale	 1	 2
Autres orientations	 3	 4

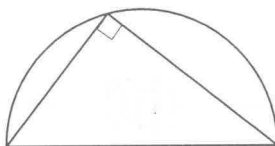
L'angle doit être isolé

	Figures ouvertes	Figures fermées
Orientation verticale horizontale	 5	 6
Autres orientations	 7	 8

VI - Conclusion

Nous souhaitons, dans cet article, pointer la complexité des tâches de reconnaissance, masquées par la simplicité apparente des figures, et la variété des réponses apportées par les individus, qu'ils soient experts ou sur la voie de l'expertise...

Nous ébauchons ici un travail qui n'a pas la prétention d'être exhaustif. Par exemple dans les modes experts, il faudrait explorer la reconnaissance de certaines configurations, comme :

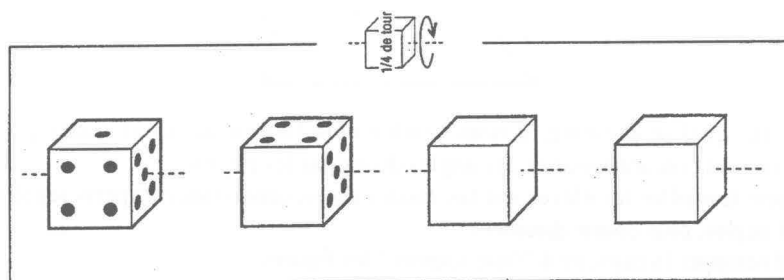
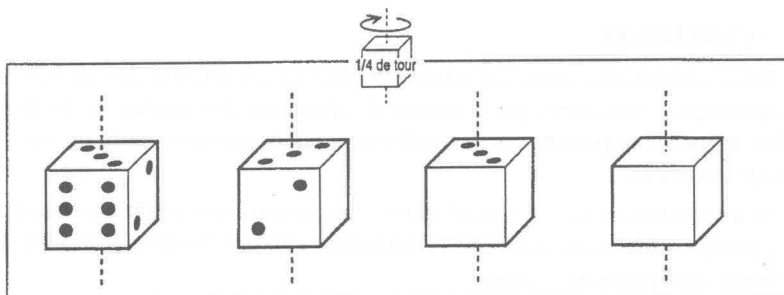
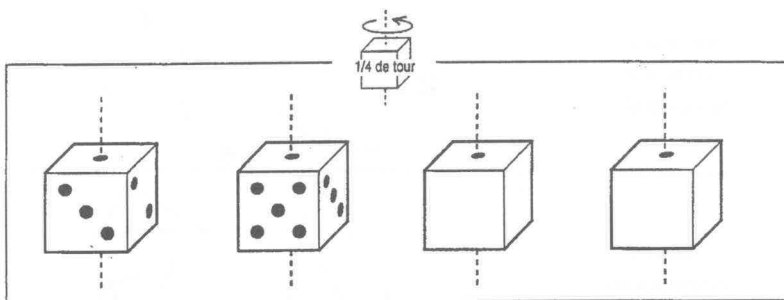


Tel qu'il se présente, il nous semble déjà fournir quelques pistes pour favoriser la reconnaissance des angles droits par les élèves :

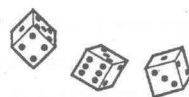
- faire travailler les élèves sur les modes de reconnaissance experts (égalité d'angles, plus courte distance) ;
- développer la capacité à "faire tourner" les figures ;
- développer la capacité à anticiper, par la pratique du tracé à main levée ;
- varier les situations géométriques proposées ;
- prendre en compte les conceptions de départ des élèves.

Des séquences menées dans nos classes de sixième nous ont montré que, contrairement à ce que nous pensions il y a quelques années, il n'est pas trop tard pour agir à ce niveau, ni trop coûteux en temps.

Un dé qui tourne...



Complète les dessins



Quelques repères pour enseigner la géométrie au début du collège

Jean-Claude RAUSCHER
IREM de STRASBOURG

I) La question des enjeux de l'enseignement de la géométrie

En géométrie, on entend souvent dire que de nombreux élèves ne lisent pas correctement un énoncé décrivant une figure, la tentation est alors grande de chercher les causes des difficultés et des solutions en dehors de l'enseignement de la discipline elle-même en se tournant par exemple vers l'enseignement du français : "Qu'ils apprennent d'abord à lire et à rédiger !".

Mais on peut se demander si les apprentissages qu'il est virtuellement possible de développer dans le cadre du domaine disciplinaire lui-même sont assez précisés, connus et exploités. C'est à cette question que nous allons tenter de répondre ici en considérant le domaine des travaux géométriques au collège. Pour aborder cette question, on peut se demander ce que font les élèves lorsqu'ils font de la géométrie au collège.

II) Les compétences que permet de développer une géométrie de description et de tracé

Lorsqu'on parle de la géométrie au collège, on pense d'emblée au support qu'elle offre pour l'initiation au raisonnement déductif. Néanmoins, pour voir ce que l'on peut proposer aux élèves au début du collège, nous allons dans un premier temps laisser de côté les exercices de géométrie déductive qui demandent soit une conjecture, soit une justification, ou une démonstration. Il reste alors principalement tous les travaux que les programmes évoquent en parlant de description et de tracé de figures. L'analyse des tâches à effectuer par les élèves dans les premières années de collège, indépendamment de tout travail de démonstration, montre rapidement la richesse du support géométrique à ce niveau pour développer des compétences générales utiles dans de nombreux domaines autres que la géométrie et les mathématiques elles-mêmes.

A) Analyse des traitements des informations en jeu dans les activités de tracé d'une figure à partir d'un texte.

L'énoncé donne un certain nombre d'informations que la figure à réaliser

doit vérifier. Selon les énoncés, les informations données peuvent être structurées de façons très différentes et donner lieu à des tâches différentes pour être respectées.

Tout d'abord les étapes de la construction peuvent être données ou, au contraire, devoir être déterminées.

Voici un exemple d'énoncé où la figure décrite est déjà découpée en une suite ordonnée d'informations qui correspondent à un algorithme de construction :

Exemple 1 :

- 1) Tracer un segment $[AB]$ ayant une longueur égale à 4 cm.
- 2) Tracer la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B.
- 3) Sur la perpendiculaire tracée, placer un point C tel que $BC = 5\text{cm}$.
- 4) Placer le point D aligné avec A et B tel que les segments $[BD]$ et $[AC]$ aient même longueur et que B soit situé entre A et D.
- 5) Tracer le cercle de diamètre CD.

Dans l'exemple suivant, le texte décrit la figure à réaliser globalement. La détermination d'une suite de tracés qui permettent de respecter les informations données est alors à la charge de l'élève.

Exemple 2 :

Construire un rectangle ABCD tel que $AB = 4\text{cm}$ et $BD = 6\text{cm}$.

Ensuite, que l'élève ait à déterminer les étapes de la construction ou que celles-ci soient données, les informations données par l'énoncé peuvent nécessiter des traitements plus ou moins complexes pour être respectées. Analysons les deux exemples qui suivent où les étapes de la construction sont à déterminer.

Exemple 3 :

Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6\text{cm}$ et $AC = 8\text{cm}$.

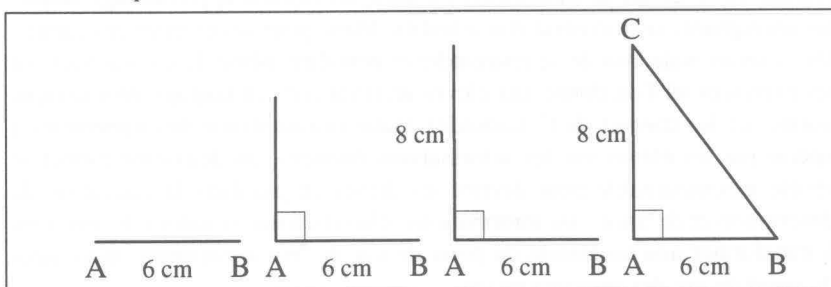
Exemple 4 :

Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6\text{cm}$ et $BC = 8\text{cm}$.

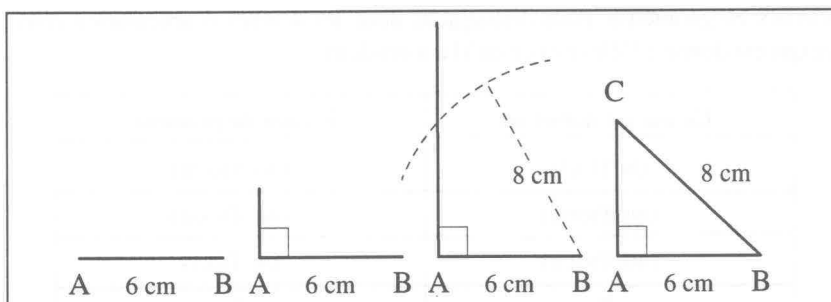
Ces deux exercices se ressemblent du point de vue de la structure et de la nature des contenus en jeu. Un oeil non averti ou trop peu attentif ne verra pas de différence quant à la complexité de deux exercices. Pourtant ces deux

exercices différent quant à la complexité du traitement à opérer sur les informations données. Si, pour l'exemple 3, les informations se transforment successivement et directement en tracés, l'exemple 4 demande la conception et la réalisation de tracés intermédiaires pour concilier l'angle droit avec une hypoténuse qui fait 8 cm. Pour illustrer ces tracés, voici les deux films de construction correspondant aux deux exemples.

Pour l'exemple 3 :



Pour l'exemple 4 :



Dans l'exemple 3, un enchaînement des informations prises successivement de façon isolée permet d'obtenir la figure. En revanche, dans l'exemple 4, l'expérience montre que les élèves se trompent souvent en traçant un triangle où seules deux des trois contraintes sont respectées : pour obtenir la figure correcte, il faut tenir compte en même temps de deux contraintes (par exemple concilier l'angle droit en A avec le fait que $BC = 8$ cm).

Revenons aussi, à l'exemple 1 où les étapes de la construction étaient données. On peut là aussi observer des différences quant aux traitements à opérer sur les informations données pour réaliser la figure. L'observation des productions des élèves montrent en effet qu'ils achoppent bien souvent aux étapes 4 et 5 du programme de construction car c'est là qu'il s'agit de concilier

lier plusieurs contraintes (étape 4) ou de déterminer les éléments (centre, rayon) qui permettent de réaliser le tracé (étape 5).

B) La considération des registres en jeu

Les exercices qui demandent aux élèves de réaliser une figure à partir des contraintes données par un texte demandent donc aux élèves de traiter un ensemble d'informations avec divers degrés de complexité. La capacité de réaliser cet éventail de traitements est donc un enjeu d'apprentissage auquel les enseignants se doivent d'être attentifs. Mais pour développer ces capacités, il serait maladroit de se restreindre et peut-être même de commencer par les exercices où l'on donne aux élèves un texte écrit en langage géométrique normé (cf. les travaux de C. Laborde). Outre la complexité des traitements à opérer par les élèves sur les informations données, un deuxième aspect se révèle incontournable pour décrire les tâches en jeu dans la géométrie de description et de tracé : les informations relatives à une situation donnée sont à transformer non seulement du point de vue de leur agencement mais aussi du point de vue des registres en jeu.

Pour analyser les registres à prendre en compte par les élèves dans les travaux en géométrie, nous distinguons donc les 4 types d'articulation entre ce qui est donné à l'élève et ce qu'il a à produire :

Ce qui est donné est :	Il s'agit de produire :
UN TEXTE	UNE FIGURE
UNE FIGURE	UNE FIGURE
UNE FIGURE	UN TEXTE
UN TEXTE	UN TEXTE

Dans les deux premières lignes du tableau, nous sommes dans le domaine de la prise d'informations pour réaliser une figure : "je sais prendre en compte et agencer les informations pour faire la figure".

La troisième ligne correspond à l'écriture d'un texte décrivant une figure donnée ou donnant son programme de construction. Enfin donner le programme de construction d'une figure décrite globalement (ou inversement) correspond à des exercices rentrant dans le cadre de la dernière ligne du tableau. Avec les deux dernières lignes nous sommes alors dans le domaine de la communication d'informations : "je sais communiquer à autrui les informations pour qu'il puisse réaliser une figure".

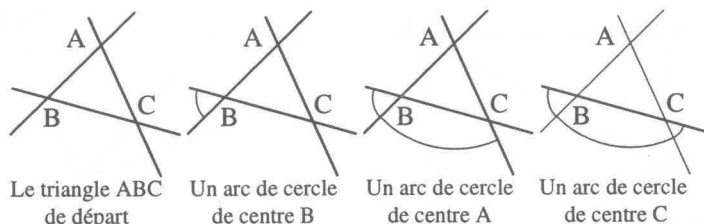
Nous avons déjà analysé la diversité des traitements d'informations à réaliser dans les exercices qui correspondent à la première ligne de ce tableau. Cette analyse s'applique aussi aux autres articulations de registres possibles et permet là aussi de décrire plus précisément l'éventail des apprentissages possibles dans le cadre de l'enseignement de la géométrie au début du collège.

Ainsi pour la reproduction de figures on peut indiquer aux élèves un film de construction comme dans l'exemple 5 qui suit (volontairement les consignes n'ont pas été données).

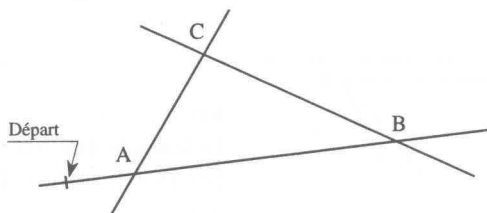
Plus classiquement, on donne la figure à reproduire avec les informations que l'on veut voir respectées (mesures ou codages) mais sans indiquer d'algorithme de construction. Ce dernier reste donc à déterminer par les élèves. Il en est ainsi pour les exemples 6, 7, 8 et 9.

Exemple 5 :

Voici le début d'un film de construction au compas



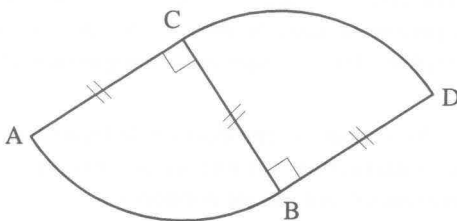
Pour le triangle ci-dessous, faire une construction du même genre, puis continuer la construction de la même manière grâce à trois nouveaux arcs de cercle de centre A, puis B et C.



Exemple 6 :

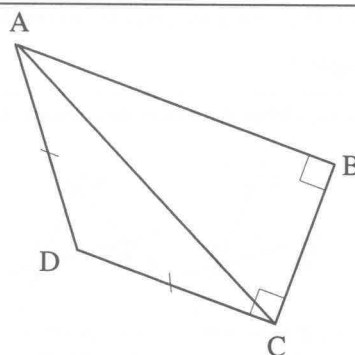
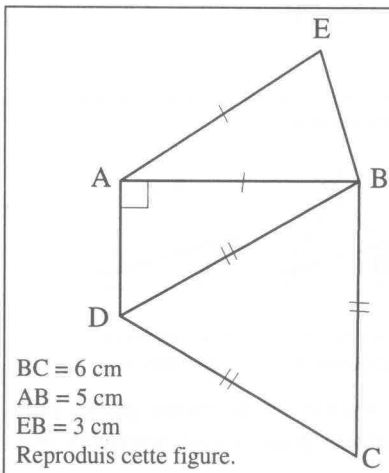
La figure codée ci-contre est construite avec trois segments de même longueur et deux quarts de cercle.

Reproduis cette figure sachant que $DB = 6\text{ cm}$

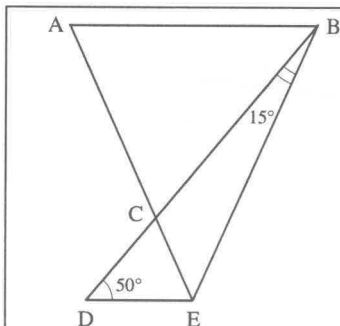


Exemple 7 :

Exemple 8 :



Exemple 9 :



$BD = 10\text{ cm}$

Le triangle ABE est isocèle en E.

Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Reproduis cette figure.

Dans ces exemples nous retrouvons différents degrés de complexité quant aux traitements à opérer sur les informations données pour déterminer un algorithme de construction.

Dans l'exemple 6, l'élève est libre de commencer sa reproduction par n'importe quel élément de la figure : tout choix débouche sur un algorithme possible de construction par enchaînement des informations données sur la figure. Dans les exemples suivant en revanche, l'élève n'est pas libre d'agencer les différentes étapes à sa guise : il doit tenir compte des différentes informations et découvrir comment les concilier. Pour commencer, il doit découvrir l'élément par lequel il peut amorcer la construction. Il s'agit alors d'un véritable "problème" de construction dont la figure de l'exemple 9 donne un bel exemple.

Pour les exemples 7, 8 et 9 on peut d'ailleurs distinguer des niveaux de difficultés différents, difficultés que nous avons observées chez les élèves dans nos classes en analysant leurs essais et erreurs pour reproduire ces figures.

La reproduction de la figure de l'exemple 7 est relativement facile : chaque triangle particulier peut être considéré et construit isolément. Il suffit de trouver le maillon qui le raccorde au triangle voisin. Les triangles à considérer ne se chevauchent pas. Néanmoins l'élève peut être tenté de considérer que (BC) et (BA) sont perpendiculaires, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on respecte les indications données.

En revanche pour l'exemple 8, le choix du triangle par lequel on commence la construction n'est pas libre. De plus pour respecter les contraintes données, il est nécessaire de prendre en considération plusieurs triangles à la fois : l'angle droit de sommet C concerne à la fois le côté [DC] du triangle DAC et le côté [CB] du triangle CAB.

La figure de l'exemple 9 présente lui aussi d'importantes difficultés : d'une part les triangles DEB et ABE se chevauchent et il faut en outre considérer simultanément les triangles AEB et DEB lorsqu'on veut prendre en compte le fait que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Décoder, formuler, communiquer des informations, effectuer des traitements de complexité variable dans des registres différents : si l'on y est attentif, au-delà des contenus en jeu, la géométrie permet au début du collège de développer des capacités générales très utiles dans d'autres domaines disciplinaires et professionnels où la prise en compte et le traitement d'informations sous diverses formes sont primordiaux.

De plus, comme nous allons le préciser, ces capacités préparent les élèves

à faire un saut important dans leur développement intellectuel : accéder au raisonnement hypothético-déductif.

III) Le passage d'une géométrie de l'observation à une géométrie déductive.

Tout exercice classique de démonstration, peut se décrire comme la donnée d'un certain nombre d'informations qu'il s'agit de traiter à l'aide de définitions et de théorèmes pour faire apparaître de nouvelles informations déduites des premières. Il ne s'agit pas comme dans un travail d'argumentation d'accumuler ou d'aligner les arguments (R. Duval, M.A. Egret, 1989).

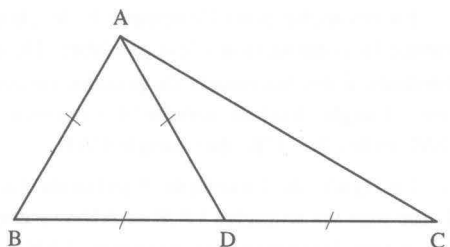
Relativement à une figure, pour pouvoir par la suite distinguer les assertions qui ont un statut d'hypothèse de celles qui ont un statut de conséquence, il s'agit de savoir repérer les contraintes qui ont présidé à sa construction. Voici, par exemple, la même figure obtenue par deux enchaînements différents de contraintes.

Dans l'exemple 10 on posera la question de savoir si le triangle ABC obtenu est rectangle en A ; alors que pour l'exemple 11 on pourra se demander si le triangle ABD est un triangle équilatéral. Mais pour que ces questions aient un sens pour un élève, il sera nécessaire qu'il arrive à discerner la différence dans les manières d'obtenir une même figure.

Exemple 10 :

Figure obtenue par :

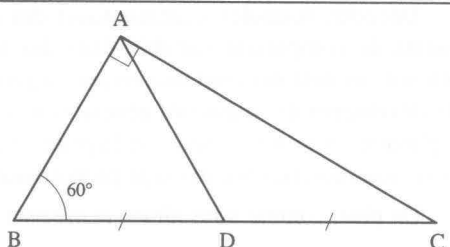
- la construction d'un triangle équilatéral ABD,
- le placement d'un point C tel que D soit le milieu du segment [BC].



Exemple 11 :

Figure obtenue par :

- la construction d'un triangle ABC rectangle en A et tel que l'angle en B ait 60° ,
- le placement du milieu D du segment [BC].



Nous voyons donc s'esquisser tout un travail préalable avec les élèves en 6^{ème} et 5^{ème} sur le repérage, la signification et la manipulation des informations dans le domaine géométrique. C'est ce travail que nous avons repéré plus haut en analysant les tâches que l'on peut proposer aux élèves dans le cadre d'une géométrie du tracé et de la description. Dans cette géométrie, les objets en jeu sont porteurs d'informations clairement annoncées. Il ne s'agit pas encore de faire jouer des théorèmes pour produire de nouvelles informations. Mais c'est déjà l'occasion pour les élèves de prendre en compte les informations qui président à la définition d'une situation et de les distinguer de celles qui en résultent.

De plus, ce travail préalable avec les élèves en 6^{ème} et 5^{ème} doit permettre aux élèves de développer des compétences utiles pour affronter par la suite les difficultés heuristiques des problèmes de géométrie : par exemple, l'analyse des différentes façons d'obtenir une même figure apprend aux élèves à analyser une figure donnée en sous-figures et de dépasser la première vision qu'ils ont de la figure.

Il nous est nécessaire de préciser d'avantage les traitements en jeu dans cette prise en considération des informations relatives aux situations géométriques rencontrées. Une hiérarchisation de la complexité des apprentissages à réaliser s'avère en effet utile. Par exemple, face aux figures présentées dans les exemples 10 et 11, on peut différencier les compétences des élèves : d'un côté ceux qui savent ordonner les propriétés qui président à la construction de ces figures, de l'autre côté ceux qui sont seulement capables de repérer et de désigner les informations dont est porteuse la figure en les amalgamant sans faire de lien entre elles. Pour employer l'expression utilisée par Van Hiele (1956), le niveau de pensée en géométrie de ces deux élèves n'est pas le même. Les apprentissages qui permettent à l'élève de repérer les informations prises isolément sont nécessairement antérieurs à ceux qui permettent à l'élève de dégager l'ordonnancement qui préside à la construction des figures.

Rappelons les niveaux de pensées décrits par Van Hiele

Niveau 0 (reconnaissance) : aucune analyse explicite des propriétés des figures ne préside à la reconnaissance des figures. Les figures sont reconnues par les enfants d'après leur apparence.

Niveau 1 (analyse) : à ce niveau de la géométrie, les figures deviennent porteuses de leurs propriétés. Les enfants analysent les propriétés de chacune des figures, mais ils ne sont pas amenés à les ordonner à l'intérieur d'une figure ou entre figures.

Niveau 2 (propriétés ordonnées) les enfants ordonnent et relient les proprié-

tés à l'intérieur d'une figure ou entre figures, mais ils n'organisent pas encore leurs assertions en démonstrations.

Niveau 3 (déduction) : certaines propriétés sont déduites à partir d'autres et les déductions sont explicitées sous forme de démonstrations.

Ces différents niveaux sont assez faciles à diagnostiquer. Chaque professeur reconnaîtra en effet les diverses réponses, maintes fois entendues pour certaines d'entre elles, d'élèves placés devant une figure dont ils ont à reconnaître et à justifier la nature de carré ou de rectangle.

Au **niveau 0**, nous sommes dans le domaine d'une identification perceptive. Un élève qui est à ce niveau et auquel on demande comment il peut être sûr qu'il a devant lui un carré répondra par exemple que la figure en question en a la "forme". A ce stade, on rencontre d'ailleurs des élèves pour qui, un carré placé de "travers", ne sera plus un carré mais un losange.

Au **niveau 1**, l'élève dépassera la justification globale pour dresser une liste d'arguments : *"la figure a 4 angles droits, ses côtés opposés sont parallèles et ils ont la même longueur, les diagonales ont même longueur etc."* Dans cette accumulation de preuves il ne se préoccupera, ni du statut de ses assertions, ni des éventuelles redondances ou au contraire d'insuffisances. De ce fait, à ce niveau là, un carré n'est pas nécessairement identifié comme un rectangle. Mais à ce niveau, les propriétés commencent à être explicitées par les élèves, indépendamment les unes des autres.

Au **niveau 2**, l'élève ne se contentera pas de donner une accumulation inutile ou insuffisante de faits pour prouver qu'il a devant lui un rectangle ; il signalera un fait suffisant pour caractériser la figure : *"il y a quatre angles droits"*. Le carré est alors reconnu comme un rectangle, car à ce niveau la définition des figures entre en jeu.

Au **niveau 3**, un élève qui en est à ce stade, admettra par exemple que pour avoir un rectangle, il suffit d'avoir un parallélogramme possédant un angle droit, chose qu'il n'aurait pas admise lorsqu'il en était à un stade précédent. De même à ce stade, l'élève est attentif au statut des assertions qu'il manipule : *"on sait, d'après ce qu'indique l'énoncé, que la figure est un parallélogramme..."*.

*ABCD est un parallélogramme et (AB) et (BC) sont perpendiculaires,
donc*

ABCD est un rectangle

Il apparaît alors qu'un travail mettant en jeu les différents traitements d'informations, tel que nous en avons repéré les possibilités dans le cadre de

la géométrie du tracé et de la description de 6ème et 5ème, favorise l'acquisition des compétences qui permettent aux élèves de différencier et de maîtriser les différents niveaux de pensée décrits par Van Hiele.

Résumons ces différents traitements que l'on peut ordonner ainsi :

- Au **degré 1**, l'élève doit identifier, représenter ou désigner une information prise isolément. Les figures deviennent porteuses de propriétés, mais celles-ci sont considérées de façons isolées ou amalgamées. L'élève sait par exemple repérer deux droites perpendiculaires sur un rectangle.

- Au **degré 2**, l'élève est amené à identifier les contraintes d'une situation géométrique. A ce niveau, les propriétés des figures ne sont plus amalgamées mais commencent à s'enchaîner et à s'ordonner. Par exemple, un élève à qui on donne la largeur et la longueur d'un rectangle connaît ou repère un enchaînement de contraintes qui débouche sur l'obtention du rectangle demandé.

- Au **degré 3**, l'élève est amené à appréhender les jeux mutuels des contraintes d'une situation géométrique. A ce niveau, il est nécessaire de tenir compte simultanément de plusieurs contraintes. C'est le cas, par exemple, lorsqu'au lieu de connaître la longueur et la largeur du rectangle, l'élève connaît un côté et la longueur des diagonales.

Un travail dans le cadre de la géométrie de tracé et de description impliquant ces différents niveaux de traitements des informations constitue les bases de la compréhension du travail qui est demandé au degré 4.

- Au **degré 4**, il s'agit pour les élèves de déduire certaines propriétés à partir de celles qui sont données et des théorèmes connus. Nous quittons alors le domaine de la géométrie de traitement pour atteindre celui de la géométrie hypothético-déductive.

Mais la prise en compte des différentes articulations de registres dans le cadre de la géométrie n'est pas moins importante pour favoriser cet accès à la pensée déductive.

Il est commun de constater qu'un élève est par exemple capable de reproduire une figure qui mettra en jeu un traitement de degré 2 ou 3, mais n'est pas capable de réaliser un traitement de même niveau dans un registre textuel (écriture de l'algorithme de construction de cette figure). Or, si l'élève ne dépasse pas cette difficulté à ce niveau, il lui sera alors difficile d'explicitier par la suite une pensée déductive au degré 4 en rédigeant par exemple une démonstration. C'est même en apprenant à articuler des registres différents, que les élèves pourront développer des compétences en jeu dans les raisonnements en géométrie. Ainsi, lorsqu'un élève passe du registre figural au registre textuel, pour écrire le programme de construction d'une figure, il est

souvent obligé d'analyser la figure en sous-figures. Cette capacité d'analyse des figures lui est fort utile par la suite pour affronter les difficultés heuristiques des démonstrations. Dans ce travail d'écriture du programme de construction d'une figure, il est aussi amené à se demander quels renseignements il est suffisant de donner, pour permettre au récepteur du programme de construire une figure correcte. Il est ainsi préparé à distinguer le statut (hypothèse ou conséquence) des propriétés de la figure à transmettre.

Nous voyons donc que pour préparer les élèves à entrer dans le monde de la pensée déductive les possibilités offertes par la géométrie d' "*apprendre à articuler plusieurs registres de présentation de l'information*" sont à exploiter (R. Duval ; 1988).

Entre une géométrie de l'observation et une géométrie déductive nous voyons donc s'esquisser un domaine de travail permettant de préparer les élèves à passer de l'une à l'autre. Ce domaine, se précise lorsqu'on prend en considération, d'une part les degrés de complexité des traitements d'informations, et d'autre part les articulations de registres en jeu. C'est l'ensemble des combinaisons relatives à ces points de vue que nous désignons par le domaine d'une "géométrie de traitement".

En conclusion :

La géométrie au début du collège est virtuellement très riche, mais encore faut-il développer ces virtualités, et tout d'abord les repérer...

L'observation des pratiques des enseignants réalisée dans le cadre de ma thèse (Rauscher, 1993) montre en effet, qu'au delà d'un accord sur les contenus à enseigner, il y a d'importantes différences entre les professeurs dans la façon de prendre en compte les possibilités d'apprentissage qu'offre une géométrie de traitement. Elle indique que les élèves dont les professeurs proposent des traitements variés tant du point de vue des registres en jeu que du point de vue de la complexité des traitements à opérer sur les informations données par les énoncés, progressent d'avantage que ceux dont les professeurs proposent des activités qui jouent peu sur ces variations possibles, mais qui demandent très (trop ?) précocement à leurs élèves de conjecturer et même de justifier ces conjectures aux hypothèses souvent mal définies.

Par cet article, nous avons donc voulu présenter quelques repères qui permettent à tout enseignant d'analyser les travaux qu'il présente aux élèves. Ils permettent alors d'élaborer et de justifier des activités développant à plein les apprentissages virtuellement possibles dans le cadre de la géométrie au début du collège : constructions points par points, transmissions de messages, etc...

Voici une **bibliographie indicative** pour les lecteurs qui voudraient avoir quelques compléments, soit du côté des recherches et des conclusions auxquelles je me suis référé, soit du côté des activités que l'on peut proposer aux élèves en début de collège.

- DUVAL R. (1988), *Écarts sémantiques et Cohérence Mathématique*, I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1.
- DUVAL R., M.A. EGRET (1989), *L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration*, I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.2.
- IREM de Strasbourg (1987), *Le développement de compétences pour la géométrie*, Suivi Scientifique 1986-87, classe de 5ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.
- IREM de Strasbourg (1988), *Vers l'apprentissage du raisonnement en géométrie*, Suivi Scientifique 1987-88, classe de 4ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.
- IREM de Strasbourg (1989), *La géométrie de la 6ème à la 3ème & Le théorème des tiers*, Suivi Scientifique 1988-89, classe de 3ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.
- JAIME A., GUTIERREZ A. (1989), *The Learning of plane isometries from the viewpoint of Van Hiel model*, *Psychologie of mathematics education*, Actes de la 13ème conférence internationale, Paris.
- LABORDE C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique : Deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat, U. S. M. Grenoble.
- LABORDE C. (1988), *Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège*, I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1.
- MESQUITA A. (1989), *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves : éléments pour une typologie*, Thèse de Doctorat, U.L.P. Strasbourg.
- PADILLA SANCHEZ V. (1992), *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de Doctorat, U.L.P. Strasbourg.
- PLUVINAGE F., RAUSCHER J-C. (1986), *La géométrie construite mise à l'essai*, I.R.E.M. de Grenoble, Petit x, n°11.
- VAN HIELE. P. V. (1959), *La pensée de l'enfant et la géométrie*, Paris, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), mars 1959, N°198 p. 199-205.

Texte et dessin d'un registre à l'autre en passant par l'ordinateur

Marie-Claire COMBES - I R E M de MONTPELLIER

Un élève, lors de nombreuses activités mathématiques, devra passer du registre des textes à celui des figures et vice versa. La capacité de pouvoir coordonner plusieurs registres est au coeur de l'activité mathématique et en particulier de la géométrie.

Comment donner du sens à ces activités de changement de registre ?

Elles sont pourtant essentielles, car comme le dit Raymond DUVAL¹ dans son ouvrage "*SEMIOSIS ET PENSEE HUMAINE*" :

"La coordination de différents registres de représentation est une condition nécessaire pour la compréhension".

Pour un enfant de sixième, comment faciliter l'apprentissage de ces différents passages ?

Ceux-ci sont loin d'être évidents. Lors des tests d'évaluation de sixième, les items consacrés à l'écriture d'un programme de construction d'une figure donnée sont parmi les moins réussis.

Tous les professeurs de mathématiques ont pu constater la difficulté d'un grand nombre de leurs élèves pour s'exprimer par écrit, d'autant plus que les mathématiques sont souvent pour eux une matière où ils pensent que les seules phrases à écrire sont les réponses accompagnant une opération quelconque. Quand avec mauvaise grâce ils s'exécutent, c'est souvent avec peu de précision dans le vocabulaire mathématique.

Pour aider les enfants à progresser dans la maîtrise de ce passage, nous voyons au moins trois pistes de travail :

* **la narration de recherche**, pratique pédagogique dans laquelle l'élève rédige à l'attention du professeur le compte-rendu des différentes étapes de sa recherche d'un problème de mathématiques. On pourra se reporter à

¹ Raymond DUVAL publie de nombreux articles depuis 1980 sur la compréhension des textes, sur l'apprentissage du raisonnement, sur l'interprétation des représentations graphiques et des figures géométriques ainsi que sur les problèmes de changements de registres de représentation.

l'article sur ce thème qui figure dans cette brochure.

***les situations "émetteur-récepteur".**

***le travail sur ordinateur** par l'intermédiaire du logiciel "CABRI-GEOMETRE" qui va servir de lien entre le registre textuel et le registre des figures.

Dans cet article nous développons les deux dernières pistes.

A) ORGANISATION. PROGRESSION.

Les différentes activités qui sont citées dans cet article ont été proposées en tout début d'année à des élèves d'une classe de sixième de la proche banlieue de la ville de Montpellier, classe que nous appellerons la 6^{ème} A.

Une autre classe de sixième du même collège n'a pas pu faire toutes les séances prévues sur l'ordinateur. Nous la désignerons par la 6^{ème} B.

Les deux classes ont cours de mathématiques :

- soit dans une classe traditionnelle assez exiguë ;
- soit dans la salle informatique du collège équipée de 14 ordinateurs, mise à la disposition de tous les professeurs.

La réalisation de ces différentes activités s'est organisée au cours de six séances avec la progression suivante :

*** séance 1 :** activité émetteur récepteur :

- écriture de messages décrivant une figure donnée,
- exécution du dessin correspondant au message reçu,
- amélioration du message après confrontation du résultat obtenu et de l'original.

*** séance 2 :** prise de contact avec le logiciel "CABRI-GEOMETRE".

*** séance 3 :** institutionnalisation des notions géométriques rencontrées au cours du travail sur l'ordinateur.

*** séance 4 :** constructions papier crayon ; échange autour des techniques de construction de parallèles et de perpendiculaires vues à l'école primaire et réalisation de ces tracés.

*** séance 5 :** amélioration de certains des messages obtenus lors de la première séance par un travail de groupe.

*** séance 6 :** travail de changements de registres avec l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre.

A la suite de ce travail les élèves ont été évalués sur un programme de construction.

B) SEANCES 1 ET 5 : LES SITUATIONS “EMETTEUR RECEPTEUR”.

* Pourquoi commencer par une situation de communication ?

Les élèves sont porteurs de tout un bagage mathématique appris à l'école primaire et il est fondamental de leur donner l'occasion de faire le point sur ces connaissances et de commencer à mettre en place des références mathématiques communes.

De plus, les enfants ne se connaissent pas tous et il est intéressant d'établir une première communication entre eux.

* Quels en sont les points déterminants ?

Si l'on veut que ces activités jouent pleinement leur rôle, il est indispensable que chaque enfant soit un vrai émetteur et un vrai récepteur.

Il faut donc mettre en place de **véritables situations de communication**, pour cela chaque élève doit produire un message décrivant la figure qui lui a été attribuée afin que l'un de ses camarades puisse la construire, puis il exécutera à son tour le programme qu'il aura reçu.

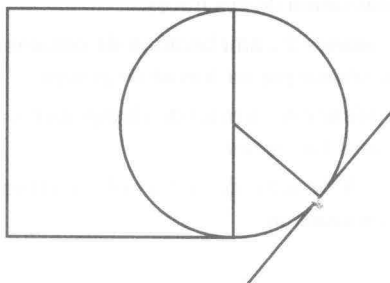
Le principal obstacle étant souvent l'agencement de la salle de classe, car peu d'entre elles sont conçues pour favoriser le travail de groupe, une solution simple est que les élèves des derniers rangs retournent leur chaise de façon à se retrouver face au mur opposé au tableau.

La figure donnée au départ doit être suffisamment riche pour deux raisons :

- pour avoir envie de rentrer dans l'activité un enfant a besoin de relever un défi par rapport à lui-même ;
- la figure ne doit pas être trop simple sinon les enfants arrivent à se comprendre avec un vocabulaire très approximatif.

On peut remarquer que la figure ne comporte aucun codage et est construite à partir d'éléments simples utilisés à l'école primaire : carré, cercle, segment, droites perpendiculaires ... On s'attache particulièrement au vocabulaire utilisé dans sa description.

Laissons la parole à Stéphanie, Nicolas et Camille, dont voici les messages au sujet de la figure ci-contre :



- 1) faire un carré de 6 cm de côté
- 2) un rond de 3 cm de rayon sur la moitié du carré.
- 3) un trait un peu penché de 3 cm dans le rond est sur le trait du carré
- 4) un autre trait sur le rond en haut 5 cm à gauche et 4 cm à droite.

Stéphanie

Avec ton compas, traces un cercle.

Ensuite trace un carré dont une face soit égale au diamètre du cercle. Il faut qu'une face du carré passe ~~sur~~ par le point du centre du cercle. Trace un rayon qui par du milieu de la face du carré et qui termine au rond.

Nicolas

Fait un carré de 6 cm de côté, fait un rayon en faisant en sorte qu'une arête du carré passe le milieu du cercle. Trace un rayon du cercle, puis fait sa perpendiculaire. Il faut qu'elle touche le cercle.

Samelle

Parmi les textes produits par les élèves, ces trois messages ont été choisis car tous les éléments essentiels pour la construction souhaitée sont présents et on retrouve les confusions de vocabulaire habituelles d'élèves de cet âge-là.

La lecture de ces messages permet tout d'abord au professeur de faire un bilan sur les acquisitions et difficultés de chaque élève, en début d'année. L'activité n'est pas une fin en soi, mais le prétexte à un nouveau travail à partir des messages obtenus.

Lors de la séance 5, les élèves ont à leur disposition les trois messages mentionnés précédemment sur une feuille polycopiée et effectuent d'abord un travail de vocabulaire en cherchant s'ils peuvent remplacer certains noms par des noms plus précis. Ces mots sont proposés à la classe qui décide si elle les accepte. Enfin un travail de réécriture du message par groupe de trois a lieu avant une confrontation collective et l'écriture définitive du message de la classe.

Ce travail a pour but de dégager un consensus autour du vocabulaire.

*** A quel moment de l'apprentissage mener une telle activité ?**

Des activités de ce genre peuvent être conduites en début d'apprentissage, dès qu'il est important de s'assurer des connaissances des enfants autour du thème envisagé.

C) SEANCES 2 ET 6. LES APPORTS DE L'INFORMATIQUE ET DU LOGICIEL CABRI-GEOMETRE.

Parmi les nombreuses raisons d'utiliser l'informatique dans nos classes nous pouvons relever les points suivants :

* Les élèves de sixième sont curieux de toutes les nouveautés que peut leur apporter le collège et, le logiciel "CABRI-GEOMETRE" étant inconnu d'eux, ils sont tous d'autant plus motivés.

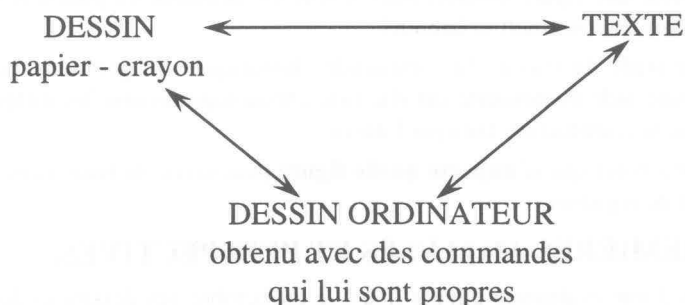
* Les enfants n'ont pas les mêmes aptitudes pour effectuer des constructions géométriques en arrivant au collège :

- la fréquence des activités géométriques est très variable d'une école à l'autre,
- l'habileté et le soin des élèves en dessin est hétérogène, et il faut avouer que certains doivent avoir une image peu valorisante de leurs productions.

En revanche avec l'ordinateur leurs productions sont traitées de façon identique. Peut-être reprennent-ils ainsi un peu confiance en eux-mêmes ?

- * Le rythme de chacun est respecté.
- * L'échec est dédramatisé au moins au niveau relationnel, l'élève peut toujours quelque part en rendre responsable la machine.
- * L'image fournie par l'ordinateur est sans doute plus prégnante car les élèves font preuve d'une grande concentration lors de leur travail en informatique.
- * Les exigences du logiciel vont entraîner une demande de rigueur que le professeur réinvestira avec profit dans son cours de géométrie.

A côté de toutes les possibilités que peut présenter un logiciel comme "CABRI-GEOMETRE" (accès à de très nombreux cas de figure en peu de temps, aide au travail de conjectures par la variation des figures, vérification, autocorrection, aide au travail personnalisé...) **la place de médiateur qu'occupe CABRI-GEOMETRE entre le registre des textes et celui des figures est essentielle puisque son fonctionnement nécessite un travail simultané dans ces deux registres.**



Nous faisons donc l'hypothèse suivante :

"les enfants devraient mieux réussir à écrire des programmes de construction après un travail à l'aide de CABRI-GEOMETRE".

Chaque élève s'imprégnera des diverses notions géométriques de deux façons différentes :

- * par les gestes nécessaires au maniement des outils utilisés dans l'environnement papier-crayon,
- * par les commandes spécifiques du logiciel qui mettent bien en évidence la précision nécessaire puisqu'il la rappelle pour chaque nouvelle construction. Par exemple, lorsque un élève veut tracer un cercle, il clique sur la commande *cercle défini par deux points*. Le logiciel ne s'exécute qu'après désignation du centre et d'un point du cercle. De plus, il inscrit sur l'écran la nature de l'objet ainsi désigné à chaque étape.

*** Du dessin papier-crayon au dessin ordinateur :**

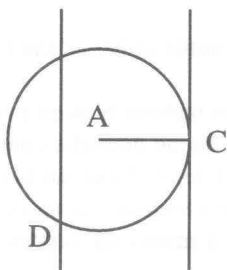
*** Du texte au dessin ordinateur :**

*** Du dessin papier-crayon au dessin ordinateur puis au texte :**

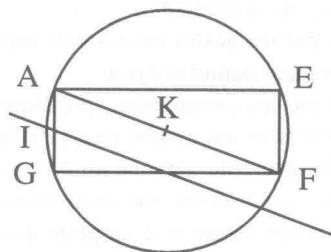
A ce stade du travail, la commande "historique" du géomètre peut se révéler une aide intéressante car elle liste chronologiquement les différentes étapes de la construction faite par l'élève.

D) PREMIERES ANALYSES ET PERSPECTIVES.

6ème A



6ème B



En étudiant les productions des deux classes on peut faire plusieurs remarques.

*** A propos des noms des points utilisés dans la construction :**

Après un travail plus approfondi avec le "GEOMETRE", les points paraissent avoir davantage d'importance pour les élèves, ils sont nommés et utilisés dans leurs programmes avec pertinence.

*** A propos de la précision dans le vocabulaire :**

Chez les élèves de la 6^{ème} A :

- Les mots : rond, trait, barre ont presque disparu.
- L'utilisation des mots perpendiculaire et parallèle est plus fréquente et correctement employée.

Le vocabulaire spécifique paraît plus ancré dans la 6^{ème} A.

*** A propos des messages en termes d'actions :**

Très peu d'élèves mentionnent les instruments dans leurs explications.

Le passage par l'intermédiaire de l'ordinateur permet-il un détachement plus rapide vis-à-vis des outils utilisés dans l'environnement papier-crayon ?

Malgré les points positifs, les programmes obtenus en 6^{ème} A interpellent sur quelques aspects qui ont encore besoin d'être travaillés :

- 6 élèves sur 21 désignent une droite par le nom d'un seul point.
- Le double renseignement nécessaire pour tracer une droite ou un cercle n'est pas encore intégré : seuls deux élèves mentionnent les deux contraintes pour une droite et neuf autres n'en donnent qu'une des deux seulement. Au sujet du cercle, la réussite est meilleure, car il y a 8 enfants sur 21 qui donnent déjà les deux renseignements, l'instrument utilisé lors de la construction doit y être sûrement pour quelque chose puisque la pointe et le crayon du compas matérialisent les deux points nécessaires à la construction du cercle.

Après seulement un mois et demi de classe et six séances de travail spécifique, les résultats sont tout de même encourageants et pour conclure nous laisserons de nouveau la parole à Stéphanie avec son programme de construction élaboré pendant l'évaluation.

1 - fait un cercle
2 - trace le rayon de ce cercle
3 - Don tu donne le centre
A.

4 - trace deux droites
une sur le bord du cercle
à droite. L'autre dans
le rond mais ni sur
cette du cercle.

5 - Donne la droite qui
est à droite C et l'autre
tu la donne D sur
le bord du cercle.

Autre proposition :

4 - trace deux droites
parallèles. Une qui touch
le rond l'autre qui est un
petit peu dans le cercle
5 - Donne le point dans la
sur le rond D

Il est à remarquer, que ce texte élève est acceptable, car il est correct sur le fond et la forme, en sixième l'objectif n'est pas d'arriver à un langage standard.

Comment construire une activité : l'oiseau

Jean-Claude FÉNICE - IREM de REIMS

Pourquoi remettre à une hypothétique prochaine fois la séduisante *activité*, lue dans un excellent article (de l'IREM de...), ou mieux, produit d'une secrète alchimie personnelle (intense réflexion et fertile imagination) ? C'est peut-être que cette même imagination, aidée d'une certaine expérience, laisse bien vite entrevoir l'image d'une classe bruyante, de groupes agités autant qu'actifs, et d'une probabilité "pessimiste" de synthèse du travail effectué...

Mais comment développer les capacités d'expression, d'argumentation, d'organisation, sinon dans une vraie situation de communication ? Comment faire prendre conscience de la nécessité de conventions, pour se comprendre ? Quel dispositif imaginer pour gérer les groupes ? Et surtout, quel thème mathématique pourrait, avec profit, être abordé dans une telle situation ?

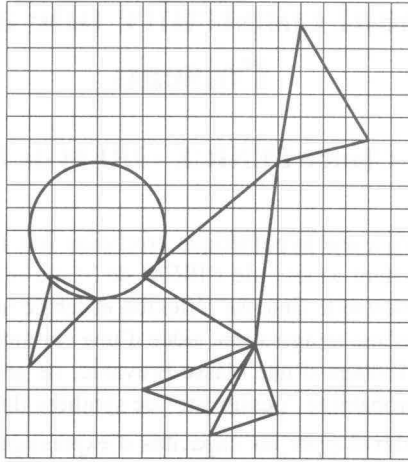
Cette année-là, responsable de deux classes de sixième et néanmoins résolument optimiste, mon choix s'est porté sur le repérage dans le plan, notion que ces élèves rencontreront durablement dans leur pratique des mathématiques. Quant aux risques évoqués ci-dessus, ils m'ont paru en partie contournables si on proposait aux élèves, au lieu d'une tâche commune, une *tâche partagée*, afin que chaque groupe se sente responsable de la réussite collective. Développons un peu :

Vous avez 28 élèves ? Vous faites 7 groupes de 4. Vous réalisez sur quadrillage un dessin que vous fractionnez ensuite en 7 morceaux. Vous retirez le quadrillage, vous distribuez un élément du dessin à chaque groupe...

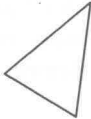
L'activité commence !

L'exemple suivant a été expérimenté avec 6 groupes de 4 élèves (composés par affinité), en 4 séquences (deux pour l'élaboration des textes et les constructions, une pour le bilan, et une pour les applications).

Un dessin de format 18 cm × 20 cm (réduit ci-dessous), *inconnu des élèves*, est constitué de 5 triangles et un cercle.



Chaque groupe reçoit une partie de ce dessin, construite à la même place que dans le dessin original, et dans le même cadre rectangulaire. Chacun des 4 élèves du groupe possède la même reproduction, et devra dessiner dessus les parties complémentaires, à partir des messages de construction que doivent envoyer les autres groupes (émetteur/récepteur). Par exemple :

le groupe 1 recevra la fiche suivante, en 4 exemplaires : 	le groupe 2 recevra la fiche suivante, en 4 exemplaires : 	le groupe 3 recevra la fiche suivante, en 4 exemplaires : 
--	--	---

Bien sûr, chaque groupe doit ignorer ce qu'ont reçu les autres.

Le motif de la tâche est exposé, puis le produit attendu par le professeur est explicité :

- Chaque groupe doit produire un texte "programme de construction" court, avec une instruction par phrase.
- Tous les instruments de dessin. sont autorisés, sauf le calque.

- Lors de la construction des figures, les tracés intermédiaires devront rester visibles.

Ensuite, l'activité proprement dite commence :

1. Réalisation des programmes de construction : dans chaque groupe il doit y avoir production *d'un seul texte* décrivant la construction de la partie du dessin reçue, puis recopié en 4 exemplaires, après commun accord (pour faciliter la circulation des messages). Chaque texte porte le numéro du groupe émetteur, le professeur diffuse les messages, et les élèves récepteurs notent ce numéro sur leur propre construction, de façon à savoir ce qui reste à faire.
2. Emission des textes vers les autres groupes qui réalisent les figures correspondantes, sur leur fiche, pour reconstituer le dessin initial. Lorsqu'un texte paraît incompréhensible, il est retourné à ses auteurs avec les remarques écrites, pour être amélioré.
3. Comparaison des productions, analyse des différences, recherche des causes d'erreur.
4. Bilan des méthodes employées, du vocabulaire utile.
5. Mise en évidence de l'intérêt de certains modes de repérage, et d'un vocabulaire spécifique.
6. Réinvestissement sur nanoréseau, puis exercices.

L'activité est accueillie avec enthousiasme, grâce au suspens qu'entretient l'ignorance du produit fini que chaque élève devra obtenir sur sa fiche.

Malgré la faculté des élèves à comprendre des écrits peu rigoureux de leurs pairs, les difficultés sont nombreuses (le plus souvent : origine des mesurages non précisée ; direction non explicitée). Certains textes donnent à la suite, sans ponctuation, une foule d'instructions. Ce sont souvent ceux-là qui emploient des méthodes compliquées.

Cependant la définition d'un triangle par ses trois sommets, et d'un cercle par son centre et son rayon a été sans problème implicitement pratiquée par tous ; par contre le groupe émetteur n'indique pas toujours comment relier les points obtenus.

Le débat s'instaure dans les groupes, aussi bien pour la rédaction (à partir d'où mesurer ? Comment le traduire ?) que pour l'interprétation des textes reçus. Les critiques sont parfois très dures, et les réactions des auteurs très vives ! Les élèves argumentent ; cependant il a fallu rappeler qu'il s'agit d'un apprentissage de la communication, et qu'il est normal que les rédactions soient imparfaites.

Les constructions révèlent un manque certain d'exigence de la part des

élèves, parallèles et perpendiculaires sont tracées “à vue de nez”.

A la fin de la deuxième séquence, les constructions sont terminées ; les élèves évaluent leur dessin :

- Ressemble-t-il ou non “à quelque chose” ?
- Est-il le même que celui des autres groupes ?

Il y a alors recherche des erreurs, et de leurs causes.

Pendant la troisième séquence, les élèves sont invités à faire un bilan :

- Quelles connaissances ont été réinvesties ?
- Qu’a-t-on découvert ?
- Que va-t-on résumer ?

Aucun élève n’a pensé à réaliser un quadrillage, bien que l’exploitation de graphiques ait été pratiquée avant cette activité. Le procédé le plus employé est le mesurage parallèlement aux bords du cadre (un seul élève a réalisé une construction au compas, par report de triangles). Les distances des points au cadre, conçues en nombre entiers de cm facilitaient cette approche.

Les difficultés rencontrées dans la réalisation, dues à la diversité des choix possibles pour l’origine des mesurages sont mises en avant pour instituer la nécessité d’une convention (choix de deux droites seulement) et d’un ordre de mesurage (abscisse, ordonnée). Enfin, la présence d’un quadrillage comme facilitateur de lecture est admis.

Pendant la quatrième séquence, les élèves reconstituent le dessin sur nanoréseau en entrant les coordonnées des points, relevées sur les réalisations les plus correctes (phase importante de familiarisation, en particulier avec l’ordre *abscisse ; ordonnée*. Le nanoréseau est depuis tombé en désuétude ; mais on peut avantageusement faire travailler les élèves sur des postes PC individuels, avec le logiciel GEOPLAN2, par exemple, ou Calques Géométriques...).

Cette activité est avant tout une situation de communication : la production de chaque groupe est nécessaire aux autres. Elle présente aussi l’avantage de s’auto-valider : les élèves sont autonomes jusqu’à l’évaluation finale.

Le professeur intervient pour l’institutionnalisation :

- du vocabulaire adapté, dont on a senti la nécessité devant les formulations vagues ou ambiguës ;
- du maniement correct des instruments de dessin ;
- d’un mode de repérage dans le plan.

Enfin, il ressort de l’observation des groupes que le *principe* est “senti” par les élèves, mais l’utilisation du repérage est loin d’être naturelle : il n’est donc pas spontanément employé s’il n’est pas explicitement donné.

TROISIÈME PARTIE

Vers une démarche scientifique

Si l'essentiel de l'activité mathématique est la résolution de problèmes, son apprentissage passe par l'acquisition d'une démarche scientifique. De manière plus générale, examinons les différentes phases pouvant intervenir lors d'une telle activité.

Il faut d'abord posséder les connaissances nécessaires à la résolution du problème, comprendre, trier et ordonner les informations proposées. Vient alors la phase la plus mathématique, celle de la résolution du problème : recherche de la meilleure stratégie et du modèle le plus pertinent ; argumentation et validation ; cohérence et vraisemblance du ou des résultats. La dernière phase est celle de la communication de la solution, par écrit ou par oral.

Toute cette suite d'actions mérite étude ; or elle est souvent "cachée", le contrat ordinaire étant que l'élève rédige une solution, sans laisser voir sa démarche. La narration de recherche s'attache justement à dévoiler et valoriser cette phase cachée de la recherche qui est faite d'erreurs, de tâtonnements, d'intuition ; elle permet de voir les hésitations de parcours, les idées nouvelles.

Cette prise d'information sur les méthodes employées par les élèves va permettre de mieux orienter l'apprentissage d'une démarche scientifique. Un des écueils est la différence qu'il y a entre une argumentation mathématique et une argumentation dans d'autres domaines ou dans la vie courante. Il est donc nécessaire, dès la classe de sixième, de mettre en place un certain nombre de "règles du jeu" spécifiques aux mathématiques. La notion de contre-exemple peut fournir un très bon support pour aider les élèves à distinguer le "vrai" mathématiques du "vrai" de la vie quotidienne.

Plus généralement, dès le début du collège, des activités aussi bien à caractère numérique que géométrique pourront montrer aux élèves les enjeux de la démonstration : apprendre à trier les informations de type subjectif (je vois, je mesure,...) des informations de type objectif (d'après l'énoncé,...) et de type déductif (d'après la propriété,...) ; ne pas se contenter du narratif, mais passer par l'explicatif ; justifier aussi bien par un enchaînement d'arguments que par un calcul détaillé.

Tout ce travail contribue dès la sixième à développer une attitude scientifique !

Jean-Claude DUPERRET

Narration de recherche une nouvelle pratique pédagogique

Mireille SAUTER
Groupe géométrie IREM de MONTPELLIER

1 - Présentation

L'idée de cette nouvelle pratique pédagogique, utilisée au collège et au lycée, est venue à la suite d'observations individuelles d'élèves, qui étaient en cours de recherche des solutions de problèmes.

Lors de cette phase de recherche qui est faite d'essais, de tâtonnements, d'intuition, les élèves peuvent faire preuve d'une grande ingéniosité et révéler des qualités souvent insoupçonnées. Ils sont très actifs, et mettent en oeuvre de nombreuses stratégies.

Cette première phase de recherche plaît en général aux élèves, mais lors de devoirs traditionnels ce moment de recherche est suivi de la phase rédactionnelle, la mise en forme de la solution et l'élève se heurte alors à la mise en ordre et à l'articulation de ses argumentations, à des difficultés de vocabulaire et de syntaxe. Il peut ne rien écrire malgré une recherche très importante s'il juge ses résultats non présentables, sa solution non conforme au modèle attendu, ainsi il s'autocensure et il ne reste alors aucune trace de sa véritable recherche. L'enseignant se trouve très démuni pour apprécier le véritable travail de l'élève.

Voici donc comment est née l'idée de proposer aux élèves un nouveau type de devoirs : **les narrations de recherche**¹.

Il s'agit de faire raconter par l'élève lui-même la suite des actions qu'il a réalisées au cours de la recherche des solutions du problème. Un nouveau contrat est passé avec l'enseignant : l'élève s'engage à raconter du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, à décrire ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles idées ; en échange, l'enseignant s'engage à faire porter son évaluation sur ces points précis sans privilégier la solution.

¹ CHEVALIER Arlette (1992) *Devoir : les narrations de recherche*, La feuille à problème n° 43, IREM de Lyon

Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire, Petit x n°33

Ce nouveau type de devoirs est présenté au collège dès la classe de sixième, car il s'inscrit totalement dans les objectifs généraux des nouveaux programmes de sixième qui conseillent que *"l'enseignement des mathématiques développe les capacités de travail personnel de l'élève et son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations"*.

Avant de continuer à parler de cette activité, il serait intéressant **de lire à la fin de cet article l'exemple de narration d'élèves**, qui traduit bien les particularités de ces devoirs. Cette production constitue la troisième narration donnée à faire depuis le début de l'année scolaire, et on y trouve les caractéristiques, que nous développerons au paragraphe 2.3.

2 - Les narrations de recherche en classe de sixième

Cette nouvelle pratique pédagogique, mise en place dès la sixième, a des objectifs qui évoluent lors du cursus scolaire de l'élève du collège au lycée ; mais en sixième il s'agit principalement de :

- **développer la curiosité et l'esprit critique** des élèves, les mettre dans des situations de recherche motivantes, qui leur donnent le goût de faire des mathématiques,
- **donner un outil de communication**, qui facilite le passage à l'écrit des élèves. En sixième, les seuls écrits mathématiques fréquemment obtenus sont des suites de nombres et d'opérations, des dessins de figures géométriques sans aucune explication. Dans une narration de recherche l'élève est obligé de rédiger des phrases correctes, il prend ainsi conscience de l'importance de la rédaction d'un texte pour communiquer ses pensées à l'enseignant. Il acquiert progressivement une certaine aisance et une rigueur dans ses écrits qui se retrouvent ensuite dans des exercices plus classiques,
- **mettre en place les règles du débat mathématique**² plus particulièrement les règles suivantes :

- * un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé,
- * des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai,
- * une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé est vrai.

Ces règles ne sont pas naturelles pour des élèves en sixième, car elles ne sont nécessaires que dans le cadre des mathématiques, elles diffèrent souvent des méthodes de raisonnement de la vie courante. Les élèves doivent donc se les approprier à travers des situations, où ils sentiront leur nécessité.

² *Initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM de Lyon

Ces règles peuvent être travaillées avec les narrations de recherche en utilisant les problèmes ouverts de Lyon dont on trouvera des énoncés dans le paragraphe 4,

- **permettre à l'enseignant une bien meilleure connaissance des procédures élèves** : les notions acquises et non acquises, les situations-obstacles, les sources d'erreurs, les outils de preuve sont accessibles et mis en évidence dans ces devoirs et un échange beaucoup plus personnel avec chaque élève est favorisé.

3 - Description de la méthode ³

La narration de recherche est une activité proposée régulièrement tout au long de l'année. Comme toute nouvelle activité, elle demande une phase d'apprentissage et ce n'est qu'après deux ou trois devoirs de ce type que leur rédaction est vraiment satisfaisante.

La narration de recherche permet d'accéder à un élément traditionnellement hors de portée de la connaissance de l'enseignant et pourtant déterminant pour la progression des élèves : l'activité de recherche elle-même. Mais l'accès à cette activité va dépendre essentiellement de la qualité du récit que l'élève en fait.

Dans un premier temps, l'accent est mis sur cet aspect narratif, car l'élève ne rédige pas un devoir de mathématiques traditionnel. Il raconte plutôt une histoire : l'histoire de sa recherche, il s'implique personnellement, montrant ses hésitations, ses doutes. Ce devoir est un **espace de liberté** pour l'élève qui ne doit pas se sentir jugé sur ses capacités mathématiques mais sur son ingéniosité, sa persévérance dans la recherche d'un problème. Dans un deuxième temps, lorsque les élèves ont compris quel nouveau type de devoir leur était demandé et surtout quelle nouvelle forme d'expression, les diverses méthodes de recherche et l'argumentation des résultats sont plus particulièrement travaillées, car la narration de recherche est assurément une activité essentielle pour l'approche de la démonstration ⁴.

La mise en place de cette méthode repose sur plusieurs éléments concernant essentiellement :

- * **le choix des énoncés**
- * **les consignes données aux élèves**
- * **la correction et l'évaluation des copies**
- * **le compte-rendu en classe**

³ CHEVALIER Arlette, SAUTER Mireille (1993), *Narration de recherche*, Brochure IREM de Montpellier.

⁴ BONAFÉ Freddy (1993), *Narration de recherche*, Repères n° 12.

Une étude successive de chaque point va être proposée, et on retrouvera dans chacun cet aspect évolutif de l'activité insistant d'abord sur le côté narratif lors des premiers devoirs, puis sur le côté recherche lorsque la qualité du récit est satisfaisante.

Afin de ne pas trop amputer l'horaire disponible en classe pour les cours de mathématiques et surtout pour ne pas limiter le temps et les moyens de la recherche, ce travail est donné à faire à la maison. Toutefois il est recommandé de commencer la première narration en classe, car des conseils oraux et personnels permettent d'arriver plus rapidement à des devoirs satisfaisants.

La réalisation d'un devoir hors de l'école pose évidemment le problème de l'intervention et de l'aide de personnes extérieures. En fait, ces interventions apportent rarement une contribution bénéfique à la narration car les solutions proposées par ces personnes utilisent quelquefois des résultats théoriques et des modes de raisonnement qui ne sont pas maîtrisés par les élèves ; aussi, loin d'être une aide, ces interventions gênent plutôt l'élève dans la description de sa recherche et très rapidement il les refuse, elles sont d'ailleurs très facilement décelables.

Il est à remarquer que les travaux sont personnels, les copiages pratiquement absents et loin de nuire à la fiabilité de ces devoirs le fait qu'ils soient donnés à faire à la maison permet à l'enseignant de découvrir les élèves dans de nouvelles situations.

L'élève sérieux, travailleur, consciencieux mais qui a des difficultés en mathématiques s'investit totalement dans ce devoir où il ne lui est pas seulement demandé la solution mais le récit de son activité de recherche. Les devoirs sont souvent conséquents et traduisent un important travail personnel.

3.1 Les énoncés

Le choix et la rédaction de l'énoncé jouent un rôle déterminant. L'énoncé doit piquer la curiosité de l'élève et motiver sa recherche.

Voici deux exemples d'énoncés donnés en sixième, nous en trouverons d'autres au paragraphe 4.

** Si on dessine deux cercles et un rectangle, combien de points d'intersection peut-on obtenir au maximum ?*

** Dans un collège de 420 élèves, on enseigne l'allemand et l'espagnol. Il y a 230 élèves qui étudient l'allemand et 220 élèves qui étudient l'espagnol. Mais on sait aussi que 110 élèves étudient à la fois l'allemand et l'espagnol. Combien d'élèves n'apprennent aucune de ces deux langues ?*

Voici les principales caractéristiques de ces énoncés :

- * L'énoncé est assez bref , exprimé simplement pour être très accessible aux élèves.
- * La solution n'est pas évidente et elle n'est surtout pas donnée par l'énoncé. Les problèmes du type "démontrer que " sont éliminés.
- * Tout élève peut démarrer sa recherche par tâtonnement, par des dessins, par des essais numériques et tester ou vérifier ses résultats.
- * L'énoncé n'induit pas la méthode de résolution., l'élève n'est pas guidé dans sa recherche, les problèmes qui amènent à la solution par une série de questions intermédiaires sont éliminés.
- * Le problème se situe dans un champ de connaissances où l'élève peut prouver la validité de ses conjectures.
- * Les problèmes où la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique,...) sont particulièrement intéressants.

3 . 2 Les consignes données aux élèves

En début d'année, lors de la mise en route du premier devoir, il est important d'avertir les élèves et d'insister sur le nouveau type d'activité qui leur est proposé. Il s'agit d'un changement radical dans leurs habitudes et surtout dans leur comportement lors de la rédaction du devoir. De la même manière, les élèves doivent sentir que le professeur appréciera leurs copies avec un état d'esprit très différent des autres corrections.

La première narration de recherche est présentée par des consignes orales qui prennent la forme suivante :

" Je vous propose un problème où vous aurez tous beaucoup de choses à m'écrire. Pourquoi ? Et bien tout simplement parce que je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous me décrierez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont abouti à rien. Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. Je ne tiendrai pas compte de l'orthographe ou de la syntaxe. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même."

Ces consignes orales sont étayées par une phrase écrite à la fin de l'énoncé, par exemple :

" Raconte sur ta feuille les différentes étapes de ta recherche, les remarques, les aides, les observations que tu as pu faire et qui t'ont fait changer de méthode ou qui t'ont permis de trouver. Ce serait bien si tu pouvais joindre tous tes brouillons numérotés, donner des précisions sur la durée et l'organisation de ton travail. "

3.3 La correction et l'évaluation des copies : quels critères pour juger une narration de recherche ?

De nouveaux critères sont à prendre en compte car il ne s'agit pas de mesurer une acquisition de connaissances ou un savoir-faire technique, comme c'est très souvent le cas dans des devoirs classiques. L'évaluation porte plutôt sur l'ingéniosité et la persévérance de l'activité de recherche et non, sur la validité de la solution proposée. Mais la connaissance de cette activité de recherche dépend essentiellement de la qualité de la narration que l'élève en fait, les qualités du récit sont donc essentielles.

Pour évaluer une narration de recherche, deux aspects sont à retenir : la recherche de la solution et la narration ; c'est-à-dire le récit qui est le moyen de comprendre la recherche.

Les paramètres de cette évaluation évoluent dans le temps et selon les objectifs de chaque narration mais il paraît intéressant d'en relever quelques-uns dans le but principalement d'améliorer progressivement la qualité des devoirs.

3.3.1. Quels critères pour une bonne narration ?

L'élève devient écrivain, le devoir doit présenter toutes les qualités d'un bon récit, sans toutefois que les difficultés de syntaxe ou d'orthographe ne constituent un obstacle à son expression, à sa spontanéité. L'action de narrer n'est pas une activité facile mais on peut retenir quelques éléments qui sont à souligner et à encourager par le correcteur sur les copies :

- **le style d'écriture** : les phrases s'enchaînent, sont faciles à lire, la rédaction n'est pas faite dans un style télégraphique. La présentation des copies est claire et soignée ;

- **la précision du récit** : toutes les idées, tous les essais sont décrits minutieusement ; chaque action, chaque changement de piste de recherche doivent être commentés ;

- **la chronologie du récit** : la narration apporte des informations sur le déroulement de la recherche à la maison. A-t-elle été faite en plusieurs jours ? Quelle en a été la durée ? Il faut que le devoir retrace ce déroulement avec la succession précise de chaque étape, l'ordre chronologique étant respecté ;

- **la sincérité du récit** : l'élève s'implique personnellement, fait part de ses doutes, de ses hésitations, décrit ses erreurs. Il emploie le "je", mentionne s'il a reçu des aides extérieures. C'est là que la relation enseignant-élève joue un rôle déterminant ; l'élève doit être mis en confiance pour raconter ses échecs, tout ce qui lui passe par la tête, il ne doit plus s'autocensurer.

3.3.2 Quels critères pour une bonne recherche ?

Le choix des énoncés est très important pour que la recherche soit motivante. La solution n'est pas évidente, l'élève se trouve dans une véritable situation de recherche et les qualités d'une démarche scientifique doivent être repérables dans son devoir, il sera donc intéressant de relever dans les devoirs :

- **une interrogation sur l'énoncé** : la compréhension et l'interprétation d'un texte sont souvent des facteurs de blocage chez l'élève ;
- **des essais** de diverses pistes en apportant des informations sur les diverses méthodologies adoptées ;
- **des vérifications** qui provoquent des prises de conscience d'erreurs et donc des changements de stratégies ;
- **une certaine cohérence** dans le raisonnement et l'enchaînement des actions ;
- **des argumentations** : la narration de recherche contribue très certainement à l'apprentissage de la démonstration ;
- **un esprit critique** : l'élève doit se poser le plus de "pourquoi" possibles lorsqu'il émet des conjectures, s'interroger toujours sur la validité de ses résultats, effectuer des vérifications.

3.3.3 Autres critères

Tous les critères énoncés ci-dessus constituent un point de départ pour juger une narration de recherche. Ce sont des éléments assez objectifs, mais d'autres paramètres, peut-être plus subjectifs, interviennent aussi dans cette évaluation.

Il s'agit d'apprécier la **persévérance** de l'élève dans sa recherche, son **ingéniosité**, en prenant en considération ses possibilités personnelles et son évolution de comportement durant l'année scolaire. Chaque correction est très individuelle et doit être un encouragement à progresser car une des sources indéniable de la motivation des élèves pour ce type de devoir est **la qualité de l'attention manifestée par l'enseignant** pour les démarches de recherche de chacun d'eux. Le plus grand respect doit être réservé à l'originalité présentée par les pensées les plus personnelles de chacun.

3.4 Le compte rendu en classe

Les copies corrigées, évaluées par une note chiffrée ou une lettre, l'enseignant va rendre compte à la classe entière des différentes recherches de chacun, mais il ne s'agit en aucun cas d'élaborer une narration modèle, car ces devoirs doivent garder leur caractère personnel. Toutefois, grâce à ces comptes-rendus, les élèves pourront s'imprégner des qualités d'une bonne narration.

En début d'année, ces premières séances sont d'une importance capitale pour l'amélioration des narrations. Il est donc conseillé d'y consacrer une heure.

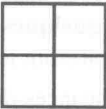
Pour mener ces séances, on retiendra les objectifs et pistes de travail suivants :

- **motiver les corrections** par le fait qu'elles permettent de se dire les uns aux autres quelles sont les différentes façons de chercher : c'est un enrichissement pour les futures narrations ;
- **valoriser les élèves en difficulté** en ne perdant aucune occasion de citer telle procédure intéressante, telle question pertinente trouvées dans leurs copies. En leur montrant qu'ils ont des capacités de recherche, ils prennent confiance en eux et leur attitude vis-à-vis des mathématiques se modifie. Il est à noter aussi que le comportement collectif de toute la classe s'en trouve aussi modifié car ce ne sont plus toujours les mêmes élèves (les "bons" en math) qui sont cités ;
- **valoriser la recherche personnelle**, une discussion en classe sur les aides d'amis, de parents est inévitable, mais les élèves se rendent vite compte que ces aides sont inefficaces, leurs copies deviennent pauvres puisqu'ils n'ont plus rien à raconter ;
- **citer toutes les stratégies** recensées, puis élaborer collectivement une solution qui émane ainsi du travail personnel de chacun ;
- **éviter de donner trop d'importance à la solution du problème cherché**. Cette solution est évidemment donnée aux élèves car elle est tout de même le moteur de la recherche, tout en insistant sur le fait que cette solution n'a pas été trouvée dans certaines "bonnes narrations de recherche" ;
- **personnaliser le compte rendu** en nommant précisément les élèves, dont on cite les démarches intéressantes ;
- **relire quelques "bons passages"** de différentes narrations, certains élèves s'en inspireront lors des futures narrations.

Les séances de compte-rendu sont des moments de grande écoute, où les élèves sont curieux de connaître les différentes stratégies trouvées par leurs camarades. Un débat peut s'instaurer, terrain propice à l'apprentissage de la démonstration.

De nouvelles consignes pour les prochaines narrations sont données, car les objectifs évoluent dans le temps, une fois le côté narratif satisfaisant, l'enseignant peut être plus exigeant sur les démarches de recherche, les procédures d'argumentation ou les démonstrations.

4 - Enoncés de narration de recherche donnés en sixième

- * Le produit d'un nombre pair avec lui-même est-il un nombre pair ?
- * Dans l'expression $n \times n - n + 11$ si l'on remplace n par n'importe quel nombre entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui n'a que deux diviseurs ?
- * Le rectangle d'Euclide
Trace un rectangle ABCD tel que $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm.
Place un point E sur [AC] tel que $AE = 3$ cm.
Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe (AB) en N et (DC) en L.
Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe (AD) en M et (BC) en K.
Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK quel est celui qui a la plus grande aire ?
- * Paul a une certaine somme d'argent dans son porte-monnaie en partant faire ses commissions. Dans le premier magasin, il dépense la moitié de ce qu'il possède plus deux francs. Dans le deuxième magasin, il dépense la moitié de ce qui reste dans son porte-monnaie, plus deux francs. Dans le troisième magasin, il fait de même, il a alors tout dépensé. Combien possédait-il en partant de sa maison ?
- * On dispose de feuilles de papier de forme carrée. On découpe de telle façon que tous les morceaux obtenus soient des carrés. Quel nombre de morceaux peut-on obtenir quand on découpe une de ces feuilles ? Peut-on avoir deux morceaux ? Trois morceaux ? Quatre morceaux ? Cinq morceaux ? Essaie de trouver le plus de nombres possibles.
- * Combien de carrés sur cette figure ?
Cinq ! Où sont-ils ?
Combien y a-t-il de carrés sur un tableau 3×3 ?
Sûrement plus de 12. Compte-les exactement.
Et maintenant, sur un tableau de 4×4 , sur un damier de jeu d'échecs, combien de carrés ?
- * Trace un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm ; $BC = 7,5$ cm et $AC = 9,5$ cm .
Où doit-on placer un point M sur le segment [AB] pour que les triangles CAM et CBM aient le même périmètre ?
- * Démasquer le coupable !
On sait que c'est un multiple de 9, c'est aussi un multiple de 5. Ce n'est pas un multiple de 2 et il est inférieur à 10 000. Quel est ce nombre mystérieux ?

9995	3779	9270	559	63728	10005	8928	10665
7245	975	555 555 555	95				

- * Un petit garçon raconte ses vacances. "Il y a eu 11 jours de pluie. Pendant ces 11 jours quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi, et s'il pleuvait l'après-midi, il faisait beau le matin." Au total ce petit garçon a eu 9 matinées et 12 après-midi sans pluie, combien a-t-il eu de jours de vacances ?

5 - Un exemple

- * Enoncé du problème :

Marjorie dispose de 28 pièces, les unes de 5 F, les autres de 10 F.

L'ensemble de ces 28 pièces représente une somme de 215 F. Peux-tu trouver le nombre de pièces de 5 F, le nombre de pièces de 10 F, que possède Marjorie ?

- * Consigne :

Raconte sur ta feuille de copie, avec le plus de précision possible, les différentes étapes de ta recherche.

Quelles sont les idées, les remarques que tu as faites. Décris les observations qui t'ont fait changer de méthode, ou qui t'ont permis d'avancer.

Tu peux joindre tes brouillons à ta copie.

Annexe : Narration de Sébastien

Narration de Sébastien.

I — Je cherche combien elle a de pièce de 10^F et de pièce de 5^F en respectant la somme de 215^F ce qui est l'ensemble de ces 28 pièces.

a) 215 $\Rightarrow$ $\begin{matrix} \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} \\ \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} & \textcircled{10} \\ \textcircled{10} & \textcircled{5} & & & & & & & & \end{matrix}$: $(10 \times 21) + (5 \times 1)$.

b) 215 $\Rightarrow$ $\begin{matrix} \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} \\ \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} \\ \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{5} \end{matrix}$: (5×43) .

$$c) 215 \Rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} : (10 \times 10) + (5 \times 23).$$

II — Toutes les solutions, a, b, c, sont fausses:
 * pour la a l'ensemble est de 22 pièces.
 * pour la b l'ensemble est de 43 pièces.
 + pour la c l'ensemble est de 33 pièces.
 soit l'ensemble des pièces est inférieure à 28
 ou supérieure à 28.

III — Je continue à répondre à la question I pour essayer de trouver la bonne solution.

$$d) 215 \Rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ (10 \times 18) + (5 \times 5) \end{array}$$

$$e) 215 \Rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} : (10 \times 17) + (5 \times 9).$$

IV — La solution d est fausse parce que l'ensemble des pièces à une somme de $18 + 5 = 23$ l'ensemble des pièces est de 24 tandis que la solution e est de $17 + 9 = 26$.

V — Je vais refaire la solution e parce que j'ai fait une erreur de calcul.

$$e) 215 \Rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} : (10 \times 15) + (5 \times 13).$$

VI — Je crois que la solution e est juste :
 $15 + 13 = 28$.

Oui elle est juste. sa somme est bien
de 28 pièces.

VII

Conclusion

Marjorie possède 15 pièces de 10F et
13 pièces de 5F



De l'utilisation du contre-exemple au collège

Rémi DUVERT - IREM de PICARDIE ¹

Au départ, un constat

Initier les élèves au raisonnement, et à la démonstration, sont des objectifs primordiaux de notre enseignement ; mais ce n'est pas une tâche facile, et les échecs restent nombreux au collège : je n'insisterai pas sur ce constat de départ, bien connu des professeurs de mathématiques, sinon pour rappeler quelques-uns des problèmes que nous rencontrons chez un certain nombre d'élèves :

- Ils ne voient pas l'intérêt de démontrer... surtout ce qu'ils estiment évident ou ce que d'autres ont démontré avant eux.
- Ils pensent que pour démontrer une assertion « générale », il suffit de la vérifier sur quelques exemples...
- Pour une démonstration dans le domaine géométrique, ils estiment qu'un dessin a valeur de preuve...
- Ils ont tendance à croire que lorsqu'un grand nombre de personnes pensent qu'une phrase est vraie, alors elle l'est...

Quelques idées qui guident mon action

On pourrait dire que ce sont des hypothèses au sens mathématique, mais je ne vais pas faire, dans cet article, une démonstration... ; tout au plus exprimer quelques opinions personnelles et apporter le témoignage d'un praticien.

a) Tout d'abord, il me semble que pour comprendre les mathématiques, et leurs spécificités, il est nécessaire d'en saisir la logique interne, mais aussi de les voir « de l'extérieur », autrement dit de pointer les ressemblances et les différences avec, disons pour simplifier, la « vie courante ». D'autant plus qu'une grande partie de l'apprentissage des mathématiques passe par l'utilisation de la « langue naturelle » (le français) et que celle-ci est codifiée différemment suivant les situations ; par exemple, lorsqu'on dit à un enfant : « si

¹ Cet article est aussi paru dans la revue REPERES N°22 (TOPIQUES EDITIONS) sous le titre “ *La notion de contre-exemple au collège*”.

tu es sage, tu auras un gâteau », il est sous-entendu que s'il n'est pas sage, il n'en aura pas... Alors qu'en classe de mathématiques, lorsqu'on lui dit « si un entier se termine par 6, il est pair », cela ne veut pas dire que s'il ne se termine pas par 6, il n'est pas pair.

b) D'autre part, une des composantes essentielles de l'apprentissage, à mon avis, est l'activité d'explicitation (de verbalisation, de formalisation, ...). D'où l'utilité d'énoncés clairs, comme par exemple : « *en mathématiques, pour prouver qu'une phrase est fausse, il suffit de donner un seul contre-exemple* ».

Cela ne veut pas dire que ces « principes de base » sont à donner d'emblée aux élèves : d'une part cela donnerait un caractère trop dogmatique aux mathématiques, et d'autre part il est plus efficace d'en faire découvrir l'utilité, le sens, aux élèves, au moyen d'activités adaptées, et de les faire formuler par les élèves eux-mêmes.

Remarque : énoncer une règle commençant par « *en mathématiques, ...* » ne signifie pas qu'elle ne s'applique pas hors des mathématiques ; on peut d'ailleurs, à ce sujet, profiter d'un travail dans notre discipline pour appréhender les ambiguïtés ou les erreurs des raisonnements courants.

c) Enfin, je pense qu'on peut améliorer la réussite de nos élèves dans le domaine de la démonstration en commençant l'initiation dès la classe de sixième (et même avant) et en graduant plus efficacement l'enseignement des compétences visées, sans oublier tout ce qui concerne les liens entre le langage et le raisonnement.

Dans cette optique, il me semble que les situations de justification et d'argumentation sont de bons supports pour cette préparation. A propos des mots "justification" et "argumentation", et sans entrer dans les détails, je fais la distinction suivante :

- il y a situation de justification lorsque l'élève, individuellement, oralement ou par écrit, doit expliquer ou prouver le caractère de vérité d'une phrase déclarative exprimée ; par exemple un énoncé peut contenir « justifie ta réponse » (cette consigne peut aussi être implicite) ;
- il y a situation d'argumentation lorsqu'au sein d'un groupe, il y a au moins deux thèses différentes à défendre et que chacun essaie d'apporter des arguments en faveur de l'une d'elles ; dans notre enseignement, ces situations sont essentiellement orales, dans le cadre de la classe.

A propos de la notion de contre-exemple

a) Tout d'abord il me semble qu'au collège, on peut affirmer qu'en mathématiques, une phrase de type déclaratif est soit vraie, soit fausse

(contrairement à beaucoup de phrases de la vie courante, pleines de nuances).

Bien sûr, ce n'est pas tout à fait exact en « hautes mathématiques », puisqu'un énoncé peut être « indécidable », dans le cadre d'un système formel donné (voir par exemple les travaux de Gödel). Cependant, à notre niveau d'enseignement, l'existence d'une position claire (« une phrase mathématique est soit vraie, soit fausse ») me paraît nécessaire pour aider les élèves à choisir, à argumenter, à bâtir leurs raisonnements, etc.

Mais comment amener les élèves à donner du sens à cette position ? Comment replacer *chaque* travail que l'on propose dans le cadre de *vrais problèmes* ? C'est une de mes difficultés d'enseignant...

J'ai choisi de parler ici d'une notion, parmi d'autres ; mais cela ne veut pas dire que je la présente, en classe, isolément. J'essaie, dans la mesure du possible, de profiter des occasions qui se présentent (la résolution d'un problème, une question posée par un élève, ...), et de la relier au maximum à d'autres notions.

b) Cela dit, il me paraît intéressant d'enseigner, au collège, la notion de contre-exemple, et cela pour plusieurs raisons :

- c'est une « entrée » possible pour donner plus de sens à la démonstration mathématique : on peut dire en effet qu'une conjecture sera validée lorsqu'on sera sûr qu'il n'y a pas de contre-exemple ; et c'est le caractère fastidieux de la recherche de toutes les possibilités de contre-exemples qui peut faire saisir l'utilité de la démonstration au sens classique du terme...
- c'est une bonne occasion de pointer les différences entre le raisonnement mathématique et la « logique commune » : en effet, dans la vie courante, le fait d'avoir un contre-exemple ne suffit pas, en général, à prouver qu'une affirmation est fausse : témoin l'expression bien connue « *c'est l'exception qui confirme la règle* » ! (pour ne pas alourdir cet article, je ne développerai pas ce dernier point) ;
- la notion de contre-exemple se prête bien à un travail interdisciplinaire ;
- c'est, je crois, une notion que les élèves assimilent relativement facilement, ou, du moins, relativement rapidement. Encore faut-il (comme tout le reste) y travailler spécifiquement et garder en tête que ce n'est quand même pas évident pour un certain nombre d'élèves...

c) Par ailleurs nous ne devons pas négliger les obstacles linguistiques à l'acquisition de la notion de contre-exemple :

Citons d'abord l'omission courante en mathématiques, dans les phrases qui ont un caractère général, des mots comme « forcément », « toujours », etc.

Cela est renforcé par l'emploi de l'article "un"... On comprend pourquoi un élève peut croire que la phrase : « si un quadrilatère a quatre angles droits, c'est un carré » est vraie, puisqu'elle s'applique à un cas (le dessin qu'il a fait...).

Il y a également le fait de croire que la négation de "tous" est "aucun" : par exemple, si on pense que la négation de « tous les quadrilatères qui ont quatre angles droits sont des carrés » est « aucun quadrilatère ayant quatre angles droits n'est un carré », il y aura conflit avec le fait qu'on sait bien que les carrés ont quatre angles droits ; on pourra alors en déduire, à tort, que la « phrase-négation » est fausse, et donc que la phrase de départ est vraie.

Un exemple de séquence de classe

Le dispositif décrit ci-dessous peut servir à introduire la notion de contre-exemple. Il peut être mis en place dès la classe de sixième, à condition, bien sûr, d'adapter les phrases-supports.

a) test individuel

Dans une première phase, on demande à chaque élève de donner (par écrit) la valeur de vérité de quelques phrases données (voir exemples ci-dessous, paragraphe e) ; il a le choix entre trois types de réponses : « vrai », « faux », ou « je ne sais pas » ; on peut inciter à utiliser du brouillon.

Si l'on s'en tenait là, on pourrait certes connaître le nombre de réponses erronées, mais cela apporterait peu de renseignements sur les raisonnements des élèves : l'examen des justifications (voir ci-après) montre, en particulier, qu'on peut difficilement conclure que tous les élèves qui ont répondu "faux", pour une phrase qui l'est, ont vraiment compris pourquoi.

b) expression écrite individuelle des justifications

On demande ensuite à chaque élève d'expliquer par écrit ses choix : « je pense que la phrase n° ... est vraie (fausse) parce que ... », ou « je ne sais pas si la phrase n° ... est vraie ou fausse, parce que ... » ; durant cette phase, l'élève peut changer d'opinion (auquel cas il l'écrit : « j'ai changé d'avis, je pense maintenant que la phrase n° ... est ... parce que ... »), mais il ne doit pas modifier ses réponses sur la feuille de test. Le brouillon est toujours autorisé.

L'analyse des productions d'élèves est très instructive, ne serait-ce que par leur diversité (on en trouvera un exemple plus loin).

Cette phase a l'avantage de faire réfléchir l'élève et de lui faire expliciter son raisonnement ; mais elle ne lui permet pas de le valider ; avant de faire intervenir l'opinion du professeur, il semble important qu'un débat puisse avoir lieu entre les élèves : on utilise alors le « conflit socio-cognitif » comme moteur de l'apprentissage.

c) reprise de la phase précédente en petits groupes

Le professeur peut, ici, expliciter les objectifs du travail engagé et expliquer pourquoi il ne donne pas tout de suite les réponses ; il peut aussi évoquer l'importance de l'évolution des opinions.

Les élèves se regroupent par trois ou quatre ; ils doivent, dans chaque groupe, se mettre d'accord sur une réponse ("vrai" ou "faux") pour chaque phrase, et écrire leurs choix (une feuille par groupe) ; ils peuvent rédiger leurs justifications ; ils savent qu'ils auront à les exposer, lors de la phase suivante, au reste de la classe.

Pour le professeur, cette phase est un moment privilégié pour observer les élèves, écouter leurs argumentations, et pour comprendre les sources de leurs erreurs ; lors des discussions entre élèves (souvent animées...), il peut, si besoin, les diriger un moment (notion de débat, d'argument, ...), mais sans induire les réponses, bien entendu.

d) discussion en classe entière et "institutionnalisation"

Les phrases sont reprises une par une, et, chaque fois, la parole est donnée à des partisans des deux opinions opposées (vrai / faux) ; un débat s'engage alors... ; il faut, ici, distinguer les phrases vraies des phrases fausses, celles-ci sont en général plus faciles à invalider, et même si les élèves ne connaissent pas le mot « contre-exemple », ils en saisissent assez vite le sens.

Après accord et validation, on peut alors formaliser, et les élèves peuvent écrire, par exemple :

- « cette phrase est fausse : pour le prouver, il suffit de donner un seul contre-exemple : ... ».
- « cette phrase est vraie : pour le prouver, un ou plusieurs exemples ne suffisent pas ; on peut alors faire appel à tel « outil » (une propriété, un théorème, une définition, ...) : ... ».

e) quelques petits textes pouvant servir de support à cette activité :

- ➔ ABCD a quatre angles droits ; on en déduit que ABCD est un carré.
- ➔ Un nombre entier qui est multiple de 3 est aussi multiple de 9.
- ➔ Lorsque deux droites se croisent en un seul point, elles sont perpendiculaires.
- ➔ Les diagonales de ce parallélogramme ont la même longueur ; donc c'est un rectangle.
- ➔ Les nombres entiers qui sont pairs se terminent par le chiffre 2.
- ➔ Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.

- Comme $a > 1$ et $b > 1$, $a \times b > 1$.
- Un triangle équilatéral est un triangle isocèle.
- Si on sait que la somme de deux nombres m et n est positive, alors on peut dire que m et n sont positifs.
- Etant donné que les longueurs PA et PB sont égales, le point P est le milieu de $[AB]$.

Un aperçu des types de justifications des élèves

Je prendrai comme exemple la phrase (fausse, lorsqu'on se place, implicitement ou non, dans l'ensemble des quadrilatères) :

« ABCD a quatre angles droits ; on en déduit que ABCD est un carré. »

Dans ce qui suit, les phrases entre guillemets sont des transcriptions de productions d'élèves, qu'ils ont écrites après « je pense que la phrase est... parce que » (seule l'orthographe a été éventuellement corrigée).

Cette petite étude porte sur quatre classes : une sixième (22 présents), une cinquième (23 présents), une quatrième (24 présents), et une troisième (20 présents).

♦ 1er cas : la phrase donnée est considérée comme vraie par l'élève.

C'est le cas le plus courant, et de loin, en 6^{ème} et 5^{ème}. On rencontre à ce propos plusieurs sortes de justifications :

a) la phrase qui est censée justifier est fausse, mais cohérente avec l'idée que la phrase donnée est vraie :

“seuls les carrés ont 4 angles droits”

“il n'y a que le carré qui a quatre angles droits”

“quatre angles droits forment un carré”

[5 élèves de sixième, 1 de cinquième, 1 de quatrième, 1 de troisième]

Ces élèves ont fait une erreur dans le domaine des connaissances mathématiques, mais leur “raisonnement” est correct.

b) la phrase qui est censée justifier est vraie, mais justifie, en fait, la réciproque de la phrase donnée :

“le carré a bien 4 angles droits”

“dans un carré il y a 4 angles droits”

“je vois sur ce carré ci-dessus 4 angles droits”

“les carrés ont 4 angles droits et ce ne serait pas des carrés s'il n'y avait pas 4 angles droits”

[7 élèves de sixième, 3 de cinquième, 2 de quatrième]

Ces élèves considèrent peut-être qu'une implication est toujours une équivalence, ou même qu'une phrase exprimant une implication veut dire la même chose que la phrase réciproque.

Cas particulier : le dessin montre que les angles droits en question sont ceux formés par les deux médianes du carré.

[2 élèves de sixième]

c) l'élève écrit une liste (même restreinte) de propriétés qu'il connaît à propos du carré : exemples :

"il a 4 côtés, 4 angles droits"

"il y a 4 angles, 4 coins, voir ci-dessous." (dessin d'un carré avec codage des angles droits)

" $[BC] \perp [DC]$; $[AD] \perp [DC]$; les diagonales se coupent en leur milieu par conséquent : si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, ses côtés opposés de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré, et on sait qu'un carré a quatre angles droits ; donc ABCD a 4 angles droits."

[2 élèves de sixième, 2 de cinquième, 2 de quatrième]

Ces élèves "étalent leurs connaissances" ; il va falloir travailler sur la notion de propriétés caractéristiques.

d) autres cas :

"si A,B,C,D, ont la même longueur et qu'ils sont parallèles, c'est un carré"

"ici je vois un carré" (dessin d'un carré, sans codage des angles droits)

"ce que dit la phrase est juste"

"un carré a quatre angles droits car il y a quatre côtés"

"le dessin ci-dessous représente les angles droits alors ABCD a quatre angles droits alors ABCD est un carré" (le dessin ne montre que deux segments, perpendiculaires et de même longueur)

"chaque angle mesure 90° ; normalement en calculant tous les angles on doit arriver à un résultat de 180° "

[2 élèves de sixième, 3 de cinquième, 1 de quatrième]

Et, pour faire la transition avec le paragraphe suivant :

"je pense que cette réponse est vraie mais aussi que ça peut être aussi un autre quadrilatère : un rectangle car il a aussi 4 angles droits"

[1 élève de quatrième]

♦ 2ème cas : la phrase donnée est considérée comme fausse par l'élève.

a) le rectangle est cité comme contre-exemple :

"il n'y a pas que le carré qui a quatre angles droits, il y a aussi le rectangle"

"ce n'est pas forcément un carré, c'est peut-être un rectangle" (suivent deux dessins : un rectangle non carré, et un carré)

"la description peut aussi concerner un rectangle"

"un carré a non seulement 4 angles droits et 4 côtés égaux ; cette phrase peut aussi s'appliquer pour un rectangle"

"cela peut être à la fois un carré ou un rectangle"

"ça peut être un rectangle, car il n'y a pas de longueur"

[1 élève de sixième, 8 de cinquième, 10 de quatrième, 17 de troisième]

Remarque : ces élèves oublient tous d'accoler "non carré" au mot "rectangle" (pour eux, un carré n'est pas un rectangle...).

b) raisonnement juste mais sans citation du mot "rectangle" :

"il ne suffit pas qu'il y ait 4 angles droits il faut aussi que les 4 côtés soient de la même longueur"

"il peut y avoir 4 angles droits mais il faut que les 4 côtés soient égaux." (suivent deux dessins : un rectangle non carré, barré en rouge, et un carré, entouré en rouge)

"il peut très bien ne pas avoir les 4 côtés de même longueur"

[2 élèves de cinquième, 4 de quatrième, 1 de troisième]

Cas particulier :

"je pense que je ne sais pas car il n'y a pas que le carré qui a quatre angles droits"

[1 élève de quatrième]

c) autres cas :

"je crois que c'est ça"

"il peut y avoir 4 angles droits mais il peut y avoir aussi d'autres angles" :(suit le dessin d'un octogone "bizarre", concave, ayant trois angles droits et un angle de 270°).

"un carré n'a qu'un angle droit"

"la phrase a mal été dite ; ABCD ont quatre angles droits ; ABCD a quatre angles droits donc c'est faux"

"ABCD n'a pas 4 angles droits il a 4 côtés de la même longueur"

[2 élèves de sixième, 1 de cinquième, 1 de quatrième, 1 de troisième]

◆ **3ème cas : changements d'opinions explicités.**

a) "dans le bon sens" :

"je change d'avis pour la phrase n°1 parce que je pense que si elle a des angles droits, elle n'a pas forcément les 4 côtés de même longueur car ça peut très bien être un rectangle ou autre chose"

"j'ai changé d'avis car je pensais que le carré était la seule figure géométrique ayant 4 angles droits or je viens de me rappeler que le rectangle a aussi 4 angles droit."

[3 élèves de cinquième, 1 de quatrième]

b) "dans le mauvais sens" :

"je pense que la phrase n°1 est fausse parce que : 4 angles droits font un carré, je me suis trompé j'ai dit qu'elle était fausse mais elle est vraie"

[1 élève de sixième]

En guise de conclusion

Même en essayant de cerner un sujet (ici : la notion de contre-exemple), il est difficile, dans ce domaine-clé (celui du raisonnement), de ne pas aborder d'autres sujets intimement liés : ainsi cet article a-t-il évoqué les fondements des mathématiques, les phénomènes d'apprentissage et de didactique, etc. Sans parler des thèmes plus proprement mathématiques, comme celui des quadrilatères, sur lequel il y aurait beaucoup à dire...

Tout est lié, bien sûr, mais l'enseignant est obligé de faire des choix, quant à la gestion du temps et du groupe-classe. Et il n'est peut-être pas inutile de dire que les choix que j'ai faits, autant dans ma pratique professionnelle que dans la rédaction de cet article, ne sont pas les seuls possibles, et que je souhaite simplement apporter une modeste contribution à un débat qui est loin d'être clos !

Une approche de la démonstration

Madeleine MAROT - IREM de POITIERS

1 - Introduction

Les élèves arrivant en quatrième éprouvent des difficultés, parfois non négligeables, lors de la mise en place de la démonstration. Ces difficultés sont, semble-t-il, de plusieurs ordres.

Tout d'abord, les élèves ne comprennent pas toujours les enjeux de la démonstration, pourquoi on démontre, pourquoi il faut dépasser le stade de la vue, de la mesure, pourquoi il est nécessaire d'argumenter, de prouver ce que l'on avance.

Ensuite, les élèves ont du mal à analyser une figure, à dégager ce que l'on sait par les données, ce que l'on cherche, à s'organiser dans la recherche d'un problème.

Par ailleurs, comprendre les règles du jeu mathématique par rapport à la démonstration, le sens d'une propriété, connaître les conditions de son utilisation et les établir, distinguer propriété directe et réciproque, cela exige un entraînement à l'explication en s'appuyant sur des propriétés établies.

Et enfin, la rédaction nécessite de respecter certaines règles : on ne se contente plus du narratif (action) mais on donne des explications, la rédaction est organisée en étapes ordonnées faisant passer des données du texte à la conclusion attendue en s'appuyant sur des propriétés reconnues.

Devant toutes ces difficultés rencontrées, nous sommes conduits à nous interroger sur ce qu'il faudrait faire en sixième, sur les activités à mettre en place pour essayer d'aplanir certaines d'entre elles, de préparer le terrain pour que le pas à franchir soit ensuite un peu moins grand et moins douloureux en quatrième.

2 - Objectifs

Pour répondre à cet enjeu important, on peut se fixer plusieurs objectifs pour la classe de sixième et habituer l'élève à :

- aller au delà de la simple constatation,
- douter de ce qu'il voit,
- donner les raisons de ce qu'il avance,

- expliquer ses réponses,
- prouver en s'appuyant sur des propriétés simples, connues et validées en classe,
- justifier par des calculs détaillés.

Tout ceci correspond, bien sûr, aux exigences des programmes de la classe de sixième, aux objectifs généraux et aux capacités exigibles et contribue à :

- *développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ;*
- *stimuler l'imagination, l'intuition ;*
- *habituer l'élève à s'exprimer clairement, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral ;*
- *affermir les qualités d'ordre et de soin.*

D'autre part, en géométrie, il est précisé que : *Les travaux de construction d'une figure, à l'aide d'instruments ou dans un environnement informatique, s'appuieront sur sa définition ou certaines de ses propriétés.*

En demandant à l'élève de les expliciter, nous lui faisons analyser sa construction et justifier sa démarche et ainsi nous répondons à cet autre objectif : *Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle, les conditions d'orthogonalité et de parallélisme.*

Cette approche de la démonstration peut également se travailler dans la partie numérique du programme de sixième avec des exercices de calcul simples mais formulés différemment de manière à amener l'élève à justifier ; nous citerons quelques exemples dans les paragraphes suivants.

3 - Quels changements dans nos pratiques ?

Si nous voulons prendre en compte cet apprentissage vers la démonstration, cela exige quelques modifications dans la présentation et les types de travaux demandés aux élèves :

- **sur la manière de poser les exercices** : faire suivre la consigne d'une question conduisant l'élève à dépasser la simple constatation.

“ Que constates-tu ?

Pourquoi ?

Prouve-le.

Explique pourquoi.

Donne les raisons.

Qu'en penses-tu ? Est-ce toujours vrai ? Justifie ta réponse.

A-t-il raison ou tort ? Explique pourquoi.

En es-tu sûr ? Justifie”.

Ce qui pousse l'élève à argumenter en recherchant des raisons acceptables.

- **sur le traitement des réponses.** Les comparaisons des différentes réponses apportées par les élèves sont très riches, les débats pour sélectionner les meilleures justifications permettent de faire comparer les types d'arguments, de les faire évoluer. Ainsi, petit à petit, on amène l'élève à comprendre qu'un contre-exemple suffit pour conclure, que plusieurs exemples vrais ne suffisent pas pour généraliser une propriété. La suprématie des données du texte, l'analyse d'une construction pour repérer les choses dont on est sûr, la sélection des propriétés à utiliser pour justifier sont plus importantes que la vue, la mesure, qui constituent le stade premier, nécessaire mais somme toute insuffisant.

- **sur les rédactions.** Sans avoir "*des exigences de formulation prématurées*" comme le recommandent les programmes, il est possible de faire sentir aux élèves, lors des comparaisons de leurs propositions, que telles ou telles formulations sont plus performantes que d'autres.

Les questions posées demandant la plupart du temps des justifications, les explications seront souvent donc formulées avec la structure de la langue orale naturelle, on donnera la réponse et ensuite la justification, les introductions telles que "car", "parce que" seront fréquentes et devront être acceptées. Il en sera de même des explications maladroites mais correspondant à la question posée, il restera ensuite à les faire évoluer pour qu'elles soient rédigées correctement, en français, même si elles n'ont pas encore la structure d'une démonstration mathématique déductive. Cela sera l'objectif des classes ultérieures.

4 - Quels types d'exercices ?

Lors de la préparation du travail à proposer à l'élève et afin de satisfaire les objectifs de la mise en place de la démonstration, le professeur sera conduit à effectuer des choix importants concernant les exercices. Les exercices sélectionnés seront choisis d'une part :

- parce qu'ils sèment le doute : il y aura recherche d'arguments nécessaires pour se convaincre soi-même ;
- parce qu'ils sont mystérieux : il faudra comprendre et rechercher les raisons, justifier et fournir des preuves pour ne plus être intrigué par ces situations non évidentes .

D'autre part :

- parce qu'ils poussent à justifier des constructions ;
- qu'ils conduisent à analyser une figure, à en faire une lecture raisonnée, pour l'expliquer, la réaliser en vraie grandeur, ou pour en déduire des informations ou un calcul sans avoir à mesurer.

Ou encore :

- parce qu'ils nécessitent des explications pour calculer, pour confirmer (généraliser), ou infirmer (contre-exemple) une réponse, pour établir une preuve, se convaincre soi-même et convaincre les autres ;
- qu'ils permettent d'établir des propriétés générales, des égalités de nombres : il y aura écriture d'étapes intermédiaires nécessaires.

5 - De quels supports dispose-t-on en sixième ?

Le nombre de propriétés établies et à faire fonctionner est restreint en classe de sixième. On ne demande pas non plus d'enchaîner des étapes mais d'utiliser un ou deux énoncés pour valider une réponse. En fait, ce n'est pas le nombre d'étapes qui compte, mais la capacité de l'élève à les repérer (domaine de connaissance de l'élève).

On peut dégager quelques supports principaux :

- Calculs : différentes écritures d'un nombre.
- Figures : constructions justifiées ou raisonnées de triangles, de quadrilatères.
- Droites : justifier des droites parallèles ou perpendiculaires.
- Symétrie axiale : utilisation des propriétés.
- Aires, périmètres : en liaison avec la symétrie, les calculs, les équations à trous.
- Angles : analyser une figure pour la reproduire en respectant certaines contraintes.

Ceci nous montre qu'il est possible de sensibiliser à la démonstration de manière simple à l'intérieur d'un grand nombre de thèmes de ce niveau et ainsi faire percevoir les mathématiques comme une discipline de formation générale *"A travers ... l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique..."*.

6 - Quelques analyses d'exercices pour la classe.

6.1 - Voici quelques exemples dans la partie *Calculs*

Les exercices présentés ci-dessous ne sont pas donnés sous forme d'une fiche, mais sont répartis tout au long de l'année, selon la progression des apprentissages, dans les différents thèmes étudiés.

a - Toutes ces égalités sont-elles correctes ? Justifie tes réponses.

$$\Rightarrow 2 \times 5,3 + 0,4 - 1 = 10 \quad \Rightarrow 1 + 2 \times 3 \times 4 + 5 = 30$$

$$\Rightarrow 53 + 3 \times 10 = 560 \quad \Rightarrow 0 \times 0,1 - 0,1 = 0$$

$$4 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{10}$$

$\Rightarrow$ La somme de 9 et du produit de 7 et de 5 est égale aux deux tiers de 66.

b - Jean qui a travaillé $\frac{3}{5}$ d'heure affirme qu'il a travaillé plus que Alain qui, lui, a effectué $\frac{7}{12}$ d'heure. A-t-il raison ou tort ? Pourquoi ?

c - Existe-t-il un nombre décimal égal à $\frac{15}{32}$? à $\frac{11}{7}$? Justifie tes réponses.

Existe-t-il un nombre, qui multiplié par 3 donne 7 ? Explique ta réponse.

d - Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, on obtient toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs. Vrai ou faux ? (Problème ouvert - Lyon)

e - Quand on divise 7 par n'importe quel nombre non nul, on obtient un nombre plus petit que 7.

Cette phrase est-elle toujours vraie ou fausse ?

f - Tous les multiples de 6 sont aussi des multiples de 3. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

g - Prouve que $6 + \frac{2}{5} = 7 \times \frac{4}{5} + \frac{8}{10}$

Analyse de ces exercices :

L'exercice a permet de faire travailler les priorités des opérations, de faire du calcul autrement que de manière systématique, il y a un enjeu : établir la véracité de ces égalités. Les calculs intermédiaires sont nécessaires

pour justifier, cela permet de dépasser les réponses rapides du style vrai-faux.

Il est également possible de travailler sur la manière de *prouver une égalité*, ici deux situations se présentent pour établir que $A = B$.

On transforme A pour arriver à B $A = \dots = \dots = B$

ou On transforme A et B pour arriver à un même nombre C.

$$A = \dots = \dots = C$$

$$B = \dots = \dots = C.$$

Pour répondre à la **question b**, l'élève doit justifier, les arguments ici sont de type calculatoire. Il peut soit calculer le nombre de minutes correspondant à chaque cas soit comparer les deux fractions. Les comparaisons des *différentes démarches* utilisées amèneront des interrogations et des réflexions au sein de la classe pour en établir la justesse.

Il est intéressant au travers de l'**exercice c**, de voir comment les élèves cherchent les réponses. Dans le dernier cas, il apparaît un *doute* sur l'existence d'un tel nombre. Cela amène des *débats* entre les élèves, les conduits à trouver des *arguments* pour justifier leur réponse (juste ou erronée) et leur permet d'élargir leurs connaissances sur les nombres à virgule et décimaux, sur les valeurs exactes et les valeurs approchées.

La recherche de l'**exercice d** requiert un peu d'*organisation*, conduit à un certain nombre de calculs avec une valeur de n différente à chaque fois. La découverte d'un *contre-exemple* suffit pour conclure.

En général pour la **question e**, les élèves font *plusieurs essais* en se limitant aux nombres entiers. Il est nécessaire d'élargir le champ des nombres. La réponse est apportée par un *exemple faux*.

La recherche de l'**exercice f** permet d'installer l'idée que des exemples, même nombreux, ne permettent pas de dire que c'est toujours vrai. Il est nécessaire de passer à la *généralisation* et à l'instauration d'une propriété, ceci peut se faire à l'aide des écritures avec lettres ou étiquettes.

$$6 \times \square = (2 \times 3) \times \square = (3 \times 2) \times \square = 3 \times (2 \times \square)$$

Dans l'**exercice g**, comme dans l'exercice a, le travail sur la façon de *prouver une égalité* et d'organiser les calculs se poursuit. La formulation de la question cependant très différente est en liaison étroite avec la démonstration, les arguments apportés sont là encore de nature calculatoire, les élèves peuvent calculer de différentes façons (fractions, décimaux).

6- 2 . Dans le domaine *des configurations*, les situations sont plus nombreuses. Nous nous intéresserons aux quadrilatères et aux triangles avec les

quelques exemples suivants *qui ne constituent pas une fiche mais qui sont donnés à divers moments durant l'année.*

- a - Tracer un segment $[AB]$ de 7 cm, (d) la médiatrice du segment $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 4,8 cm.

On appelle C et D les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (d).

Marie affirme que, sans effectuer de mesures, on peut être sûr que les quatre côtés du quadrilatère ACBD sont égaux. Es-tu d'accord ? Justifie.

- b - Combien y a-t-il de triangles ABC différents tels que :

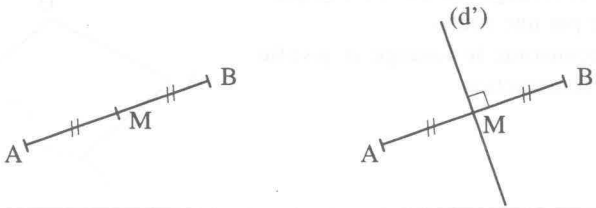
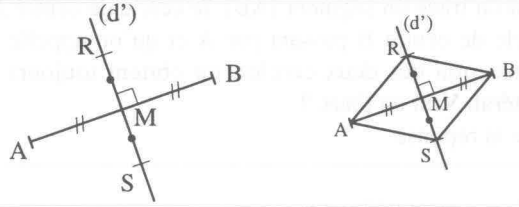
$\hat{A} = 25^\circ$, $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm ? Justifie ta réponse.

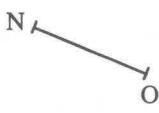
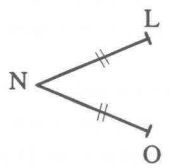
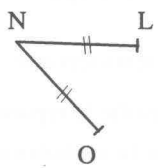
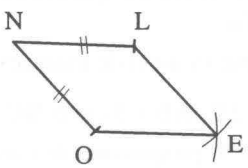
- c - Donne le programme de construction de la médiatrice d'un segment au compas. Dis pourquoi ta construction est juste, explique pourquoi la droite obtenue est perpendiculaire au segment.

- d - Construire un triangle ABC isocèle tel que $AB = 5$ cm et $\hat{A} = 35^\circ$.

Compare ta construction avec tes camarades. Que remarques-tu ? Explique les constructions réalisées.

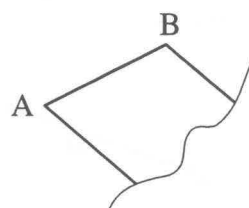
- e - Ecris au fur et à mesure ce que l'on fait :

1°	
	
	
	

2°	 
	
	  
	

Dans chaque cas, indique la figure obtenue et la propriété que tu as utilisée pour construire.

f - La feuille sur laquelle était dessiné le losange ABCD a été grignotée par une souris.
Reconstitue le losange et justifie ta construction.



g - Quand on trace un segment $[AB]$, le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A et qu'on appelle C l'un des points d'intersection des deux cercles, on obtient toujours un triangle ABC équilatéral. Vrai ou Faux ?
Prouve ta réponse.

Analyse de ces propositions :

Dans l'exercice a, il est nécessaire de réaliser une figure, de l'analyser. Après les recherches des arguments permettant de répondre, il s'avère utile

de les confronter. Les preuves fournies sont de natures très différentes, certaines sont basées sur les mesures des côtés, d'autres sur la vérification des diagonales (perpendiculaires et de même milieu) avec l'équerre et la règle graduée et enfin d'autres s'appuient sur les propriétés établies en classe sur le cercle et la médiatrice d'un segment ou la symétrie axiale.

Les *débats* entre les élèves permettent de comparer ces différentes *preuves*, de montrer que les *explications internes* à la figure (propriétés) sont meilleures que les autres. Elles permettent de généraliser la forme de la figure finale quand on réalise une figure analogue en choisissant n'importe quelles dimensions.

La formulation du texte de l'**exercice b** trouble les élèves et on peut le comprendre. Il s'installe un *doute* sur le nombre de triangles possibles.

Pour l'**exercice c**, les élèves utilisent *plusieurs constructions* : cercles de même rayon ou non, ce qui conduit à deux figures légèrement différentes. Les explications fournies le sont également, soit on peut parler du losange, de ses diagonales et de ses propriétés, soit on fait fonctionner les propriétés des triangles isocèles et leur axe de symétrie. Dans tous les cas, les explications sont basées sur des *propriétés établies* en classe.

La *comparaison* avec les camarades permet à l'élève de prendre conscience que la construction qu'il a réalisée n'est pas la seule possible par rapport à la consigne de l'**exercice d**. Pour justifier les constructions, on est amené à utiliser les connaissances sur les triangles isocèles (côtés ou angles).

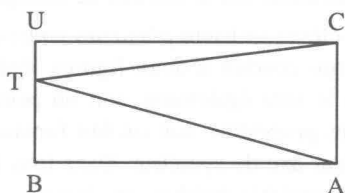
L'**exercice e**, permet de travailler la *formulation des rédactions* des étapes de la construction, de faire évoluer le langage de l'élève lorsqu'il écrit un programme de construction, mais surtout de dépasser le stade de la construction pour faire retrouver les propriétés qui ont été la base de cette construction et de les comparer dans les deux cas.

Dans l'**exercice f**, les *propriétés* du losange servent à *construire* le losange, bien sûr, mais également à justifier la construction ; là encore, il est intéressant de comparer les démarches au sein de la classe car la manière de construire le losange varie selon la propriété utilisée.

Ce qui est intéressant dans l'**exercice g**, c'est l'aspect *généralisation* d'une observation, tous les élèves, avec des constructions différentes, observent la même chose. Il semble donc que l'affirmation soit vraie ! Pour lui donner un statut plus fort et lever les derniers doutes qui pourraient subsister, il y a recherche d'arguments internes faisant fonctionner la définition du cercle et celle du triangle équilatéral.

6. 3 - Des supports tels que *les aires et les périmètres* sont également très riches pour l'initiation à la démonstration en sixième. En voici quelques exemples *qui sont donnés à plusieurs moments de l'année* :

- a - Combien peut-on construire de triangles isocèles dont le périmètre est 25 cm et dont l'un des côtés mesure 7 cm ? Donne, en justifiant, les mesures des autres côtés.
- b - Deux rectangles qui ont le même périmètre possèdent la même aire. Vrai ou faux ? Justifie ta réponse.
- c - L'aire du triangle TAC est égale à la moitié de celle du rectangle UBAC. Que penses-tu de cette affirmation ? Explique.



- d - Construis : un triangle ABC équilatéral qui a pour côté 6,3 cm et un triangle RUE isocèle dont un côté mesure 8,1 cm et la base 2,7 cm. Lequel des deux a le plus grand périmètre ? Justifie tes calculs par des propriétés.

Analyse des exercices

La question posée à l'**exercice a** incite l'élève à chercher combien de triangles on peut obtenir. Les différentes constructions sont validées par les propriétés du triangle isocèle et permettent de montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Dans cet exercice, on peut également raisonner en utilisant des écritures avec des étiquettes et régler les calculs par un raisonnement algébrique :

$$o + o + 7 = 25 \text{ ou } s + 7 + 7 = 25$$

Pendant l'**exercice b**, on travaille la *distinction aire-périmètre*, ce qui n'est pas toujours perçu des élèves, la validation de la réponse se fait à l'aide d'un *contre-exemple*.

En ce qui concerne les connaissances à mettre en place en sixième sur les aires des triangles, il n'y a que l'aire du triangle rectangle à partir de celle du rectangle. Dans l'**exercice c**, il est possible en utilisant cette seule connaissance, d'appréhender la manière de calculer l'aire de n'importe quel triangle. Il est nécessaire de comparer les *stratégies* des élèves, il y a ceux qui mesu-

rent et ceux qui découpent la figure en deux rectangles puis qui comparent les aires des différents morceaux obtenus pour conclure. La comparaison de ces démarches et des *types de preuves* apportées font avancer les élèves dans le chemin de la démonstration.

Il est possible de poser à la classe la question suivante apportant un prolongement dans la réflexion.

“ Si l’on prend un point M sur le côté [BU], le triangle MAC et le triangle TAC ont-ils la même aire ? Pourquoi ? ”

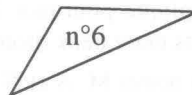
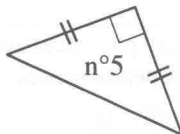
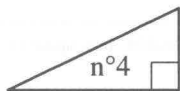
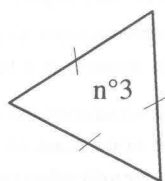
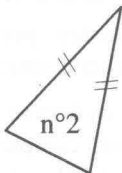
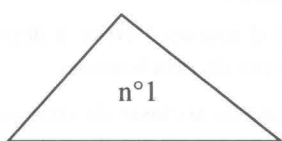
ou bien encore :

“Si l’on place un point K sur le côté [AB], les triangles TAC et KUC ont-ils la même aire ? Justifie”

Dans l'**exercice d**, il y a *doute* pour l'élève qui a construit plus ou moins bien les deux triangles et qui se sert des dessins pour répondre à la question. Les calculs et les justifications simples permettent de répondre de manière plus précise et plus convaincante à la question posée. Le triangle isocèle est très “allongé”, ce qui procurera un nouveau moyen de repérer les élèves qui confondent encore aire et périmètre.

6.4 - Les transformations sont également un domaine où il est possible en sixième de faire une approche de la démonstration avec la symétrie axiale et l'utilisation de ses propriétés de conservation de longueurs, d'aires et d'angles.

a - Reproduis les triangles suivants. Quels sont ceux qui possèdent un ou plusieurs axes de symétrie ? Explique ta réponse.



b - Trace un triangle TUC rectangle en U, tel que $TU = 4$ cm et $UC = 6$ cm. On désigne par M le milieu de [TU]. Trace le symétrique de TUC par rapport à la droite (CM). Calcule, en justifiant, l'aire de ce nouveau triangle.

c - Trace un triangle ABC.

Marque, à l'intérieur de ce triangle un point M.

Trace les symétriques T, R et S de M par rapport aux droites (AB), (BC) et (AC).

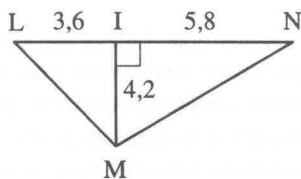
Trace le cercle de centre A et de rayon AM.

Que remarques-tu ? Justifie cette réponse.

Peut-on prévoir ce qui se passera si l'on trace le cercle de centre B et de rayon BM ? Explique.

Même question avec le cercle de centre C et de rayon CM ?

d - Reproduis la figure en vraie grandeur :



Trace J le symétrique de I par rapport à la droite (LM)

Trace K le symétrique de I par rapport à la droite (MN)

Calcule l'aire et le périmètre de LJMKN. Justifie tes réponses.

Analyse des exercices

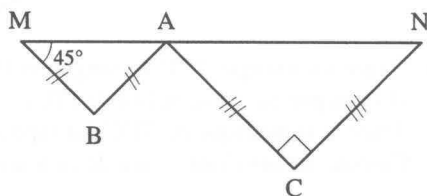
Par ces **exercices**, il est possible d'utiliser les *propriétés de la symétrie axiale* pour réaliser une construction, de les faire fonctionner pour justifier des mesures, des angles ou des aires et les calculs.

La *confrontation des méthodes* permet d'amener l'élève à dépasser le stade de la mesure et à rechercher d'autres types de justifications.

6.5 - Nous examinerons enfin un dernier thème de la classe de sixième même si, comme nous nous en rendons compte, il en existe bien d'autres, celui des **droites perpendiculaires et parallèles et des angles**.

a - Explique pourquoi il n'est pas nécessaire de noter les quatre angles droits entre deux droites perpendiculaires[^].

b - Les points M, A et N sont alignés. A-t-on $(AB) \perp (AC)$? Explique pourquoi.



c - ABC est un triangle rectangle en A.

Trace la médiatrice (d) du segment [AB] au compas. Elle coupe [AB] en I et [BC] en J.

Les phrases suivantes sont vraies. Justifie-les.

* I est le milieu de [AB]

* $(d) \perp (AB)$

* $AJ = JB$

* $(d) \parallel (AC)$

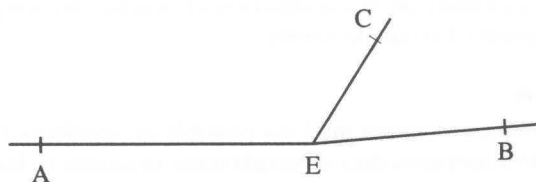
d - Fais le dessin ci-dessous avec les angles $\widehat{AEC} = 122^\circ$ et $\widehat{CEB} = 58^\circ$.

Trace la bissectrice [Ex) de l'angle $\widehat{AEC}$ puis la bissectrice [EY) de l'angle $\widehat{CEB}$.

Calcule, en justifiant la valeur de l'angle $\widehat{xEv}$.

Recommence avec $\widehat{AEC} = 26^\circ$ et $\widehat{CEB} = 154^\circ$

puis avec $\widehat{AEC} = 95^\circ$ et $\widehat{CEB} = 85^\circ$.

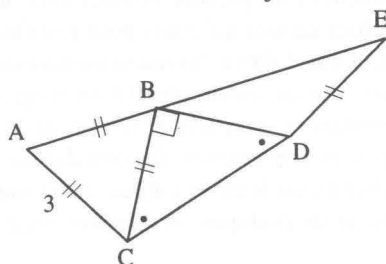


Que remarques-tu ? Comment choisir les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CEB}$ pour obtenir une figure du même genre ? Justifie ta réponse.

e - A, B et E sont alignés.

Reproduis la figure suivante à l'échelle 2.

Ecris les étapes de la construction en les justifiant.



Analyse des exercices

L'**exercice a** correspond à un codage souvent employé par les élèves. Il est bon de les faire réfléchir sur le côté redondant de ce codage. Les arguments attendus sont simples et n'utilisent que les valeurs des angles plats et droits.

Dans l'**exercice b**, on fait fonctionner les propriétés des angles et des côtés des triangles isocèles et la connaissance de l'angle plat. Là encore, on peut faire *évoluer les arguments* de ceux qui auront utilisé leur équerre ou leur rapporteur pour justifier leur réponse. Il y a certes plusieurs étapes, mais elles sont du domaine connu de l'élève ; le travail d'enchaînement de ces étapes peut s'effectuer ensemble en classe, d'abord oralement, puis à l'écrit.

Dans l'**exercice c**, les affirmations sont présentées aux élèves, le travail consiste à rechercher dans les *propriétés* établies en classe, celles qui vont permettre de les justifier.

Après avoir réalisé *plusieurs figures* dans l'**exercice d**, l'élève qui a fait une constatation sur la disposition des bissectrices est amené à réfléchir sur le choix des données et à justifier ces choix par la connaissance qu'il a de la bissectrice d'un angle.

Pour reproduire la figure de l'**exercice e**, il est nécessaire de l'analyser afin de trouver les étapes de la construction et justifier les longueurs des côtés par les propriétés du triangle isocèle.

7 - Conclusion

Tous ces exemples montrent qu'il est possible de sensibiliser les élèves de sixième à la démonstration dans de nombreuses situations et dans de nombreux thèmes, que les débats permettent de faire évoluer les arguments avancés. Au départ, il est nécessaire d'accepter tous les types d'arguments, de les faire comparer et critiquer dans la classe afin de voir que tous sont de nature différente et ne se situent pas au même niveau.

Plus que la forme des explications fournies, c'est leur contenu qui est essentiel.

Ces exercices permettent de prendre contact avec les définitions et les propriétés et de les utiliser en tant qu'outils pour justifier des affirmations et les rendre irréfutables. Ainsi, l'élève "*prendra contact avec des théorèmes et apprendra à les utiliser*", ce qui est un objectif du programme de la classe de sixième. Il s'agit cependant de préparer le terrain de la démonstration sans avoir toutefois d'exigences prématurées de formulation. L'évolution de certains élèves dans ce chemin est lente et longue. Il est important de commencer le plus tôt possible et de pratiquer de manière régulière tout au long de l'année.

QUATRIÈME PARTIE

Faire de la géométrie quelques apports de l'outil informatique

Dossier réalisé par la Commission Inter IREM
Mathématiques et Informatique

et

la Direction de l'Information Scientifique, des Technologies
Nouvelles et des Bibliothèques : Bureau des Technologies
Nouvelles pour l'Enseignement (DISTNB B2)

Le lecteur trouvera dans cet article une réflexion sur les apports des outils informatiques à l'enseignement de la géométrie en classe de sixième.

Le programme de mathématiques de cette classe précise :

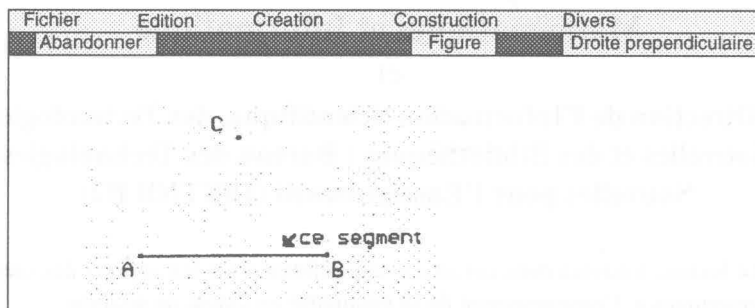
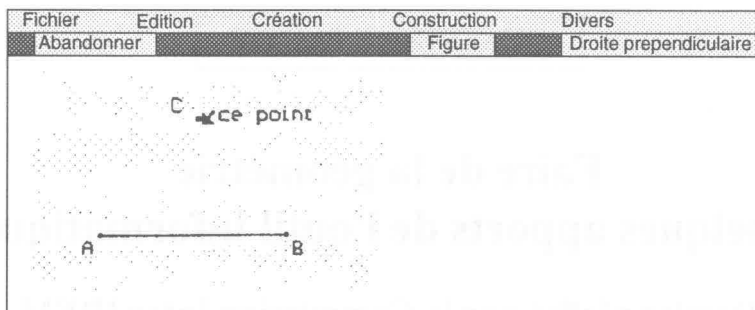
“Les mathématiques contribuent à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique ...”.

Les utilisations de l'ordinateur pour l'enseignement de la géométrie sont multiples et l'on peut citer en particulier les **apports** suivants :

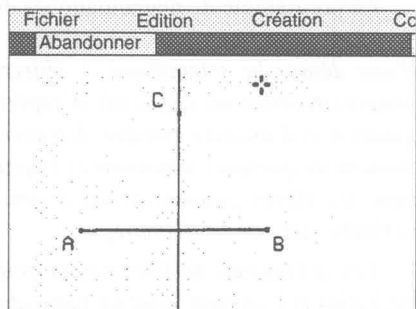
Aide à la formulation, à la précision du langage :

Pour réaliser une figure, pour en donner un programme de construction, il faut être précis, l'ordinateur oblige à décrire toutes les étapes, réfléchir sur le statut des objets géométriques considérés. Exemples :

- De nombreux élèves disent ou écrivent : “Je trace la perpendiculaire à la droite (AB)”, l'ordinateur les obligera à préciser “qui passe par le point C”.



- Quand on demande à un élève “Reproduis la figure”, un travail sur papier est relativement tolérant, l’élève pouvant se contenter de faire un dessin ressemblant sans remarquer les propriétés de la figure ; au contraire, l’ordinateur demande une meilleure observation, une meilleure analyse de celle-ci afin d’en comprendre la logique.



Aide à la conceptualisation, à la formalisation :

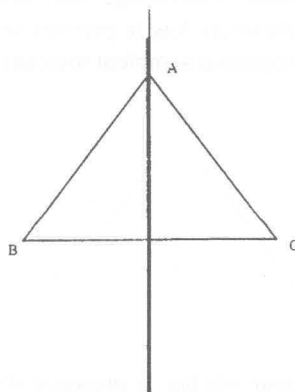
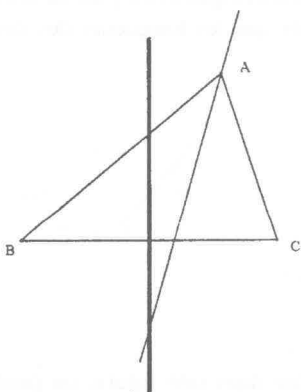
Que représentent dans la tête d’un élève les phrases ou expressions suivantes :

- “un triangle quelconque”,
- “dans un triangle isocèle, une des médiatrices est aussi bissectrice”.

L’ordinateur peut jouer un grand rôle dans l’élaboration des concepts sous-jacents, des images mentales ; on peut ainsi, dans les deux exemples

précédents,

- dessiner un triangle, le déformer et générer ainsi un triangle pouvant avoir n'importe quelle "forme" (quelconque),
- dessiner un triangle, la médiatrice de l'un des côtés, la bissectrice de l'angle opposé à ce côté, puis déformer le triangle jusqu'à le rendre isocèle et voir en même temps les deux droites se confondre (il s'agit ici de "voir", aucune démonstration n'est fournie par l'ordinateur, celle-ci doit être faite ensuite si l'enseignant le juge utile).



Le rapport entre dessin et objet géométrique et l'aide qu'apporte l'outil informatique dans l'apprentissage de la notion de figure sont décrits, par exemple, dans l'article de C. Laborde et B. Capponi, "*Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*" (RDM n°14 1.2 pages 165 à 210).

On peut y lire : "*Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales. Il importe cependant de souligner la complexité des rapports entre dessin et objet géométrique :*

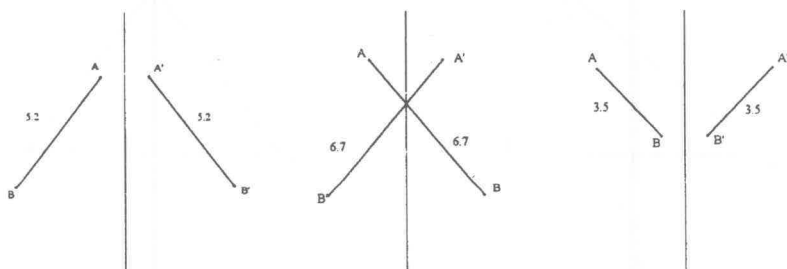
- *d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique,*
- *d'autre part, les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons : la première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances, la deuxième tient à la nature même du dessin ; à lui seul il ne peut caractériser un objet géométrique."*

Simulation, exploration d'une situation :

L'ordinateur permet de faire des mathématiques "expérimentales" : par exemple, en étudiant des cas de figures différents, on découvre des propriétés, on met à l'épreuve des conjectures, on remarque des configurations qui donneront des idées pour la justification des affirmations.

Par exemple :

- pour conduire les élèves à conjecturer la conservation des distances lors d'une symétrie axiale, on peut construire, à l'aide d'un logiciel, un segment et son image, faire afficher leurs longueurs respectives, puis modifier plusieurs fois le premier segment et constater que les longueurs des deux segments semblent toujours égales,



- pour vérifier la présence d'un axe de symétrie dans une figure, on peut à l'aide de l'ordinateur construire cet axe et la figure image dans cette symétrie, ce qui permet de confirmer ou infirmer la conjecture.

Mais il convient, bien entendu, que l'enseignant mette en évidence la différence entre expérimenter et justifier.

Les situations étudiées paraissent souvent plus riches quand on utilise l'ordinateur car la manipulation de la figure amène les élèves à étudier des cas particuliers ou à généraliser des résultats, à proposer un prolongement à un exercice...

En géométrie dans l'espace, l'ordinateur peut aider les élèves à mieux comprendre, à mieux voir la figure, à étudier de façon dynamique les différentes projections utilisées, à mettre en évidence les problèmes posés par la représentation en deux dimensions d'une situation en trois dimensions (mesures ou comparaisons d'angles, de longueurs,...).

Travail sur d'autres classes de problèmes :

Il devient plus facile, grâce à l'ordinateur, de résoudre des problèmes plus complexes et qui n'ont plus le caractère "évident" de certains exercices proposés aux élèves. A ce propos, on lit dans les commentaires du program-

me : *“Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises,...”*. Sur de tels problèmes, l'élève aura plus de plaisir et de motivation à chercher, puis sans doute à justifier.

Ces propos sont illustrés dans les **trois séquences pédagogiques** suivantes :

- deux séquences de géométrie plane :

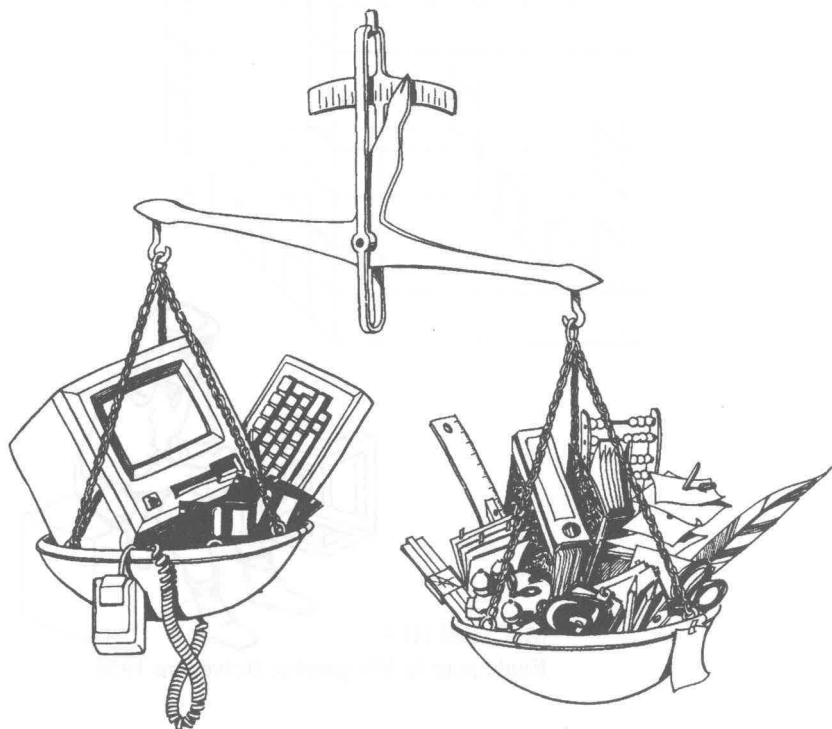
- “Autour du triangle”,

- “Pour une meilleure appropriation du concept d'axe de symétrie”

dans lesquelles un ordinateur est utilisé comme outil de visualisation et d'expérimentation collectives,

- une séquence de géométrie dans l'espace : “pavé droit” dans laquelle les élèves travaillent individuellement (ou par groupe de deux) sur ordinateur.

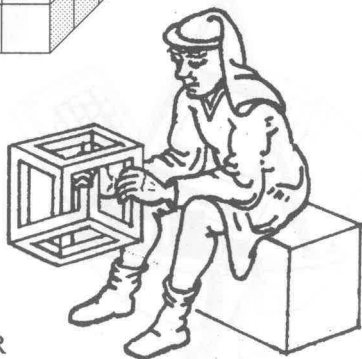
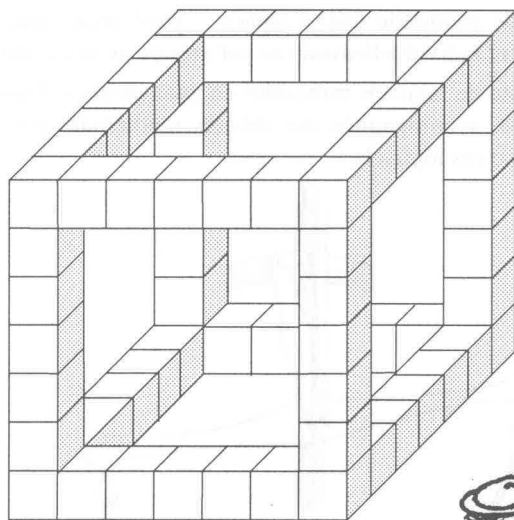
Enfin, une liste de logiciels utilisables en géométrie en classe de sixième figure en annexe, accompagnée des thèmes mathématiques susceptibles d'être étudiés avec ces logiciels.



Récréation



Combien y a-t-il de petits cubes
dans cette structure ?



M. C. ESCHER
Etude pour la lithographie Belvédère 1958

Autour du triangle

Danielle BERGUE - IREM de ROUEN

Cette séquence¹ propose la découverte de quelques propriétés des triangles et de leurs médiatrices.

Le programme de 6^{ème} propose une initiation progressive au raisonnement déductif. En géométrie, le raisonnement est souvent considéré comme synonyme de démonstration et devrait être pris en compte selon trois phases :

- 1) une appropriation du problème qui se fait par l'intermédiaire de la construction et l'explicitation des données sous forme d'hypothèses,
- 2) une recherche de la solution qui demande un choix parmi des propriétés connues pour déterminer celles pouvant être utiles, un va-et-vient constant du regard et de l'esprit entre le cas particulier de la figure et l'expression générale des propriétés ("cas particulier de la figure" qui ne doit pas l'être au sens habituel du terme),
- 3) une mise en forme écrite de la solution qui fait apparaître les étapes d'un raisonnement déductif.

Chaque phase doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Entre la première et la seconde phase, l'objet construit change de statut : de *dessin concret* sur une feuille de papier, il devient *figure générale*, objet idéal.

La prise en compte des contraintes liées à la figure permet de donner du sens à l'étape de la recherche de la solution. Or, souvent, les élèves confondent contraintes spécifiques à l'exercice avec construction de cas particuliers et élimination de ceux-ci (triangles isocèles et équilatéraux, rectangles, carrés, etc.). Devant cette difficulté des élèves, la construction de plusieurs dessins peut aider à faire émerger les contraintes spécifiques du problème.

C'est à ce niveau qu'un logiciel de construction géométrique peut être un outil précieux. En effet, la figure étant construite, on peut, en continu, la faire évoluer sur l'écran. Les élèves ont donc une vision concrète des différentes constructions possibles et non une juxtaposition de plusieurs dessins. Le changement de "point de vue" sur la figure peut se faire plus aisément.

La construction de plusieurs dessins est une des méthodes proposées pour que d'une part les élèves se construisent le concept de figure, et que d'autre part, les caractères invariants de ces figures apparaissent.

¹ D'après "Des activités pour raisonner au collège"

Repris dans "Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur", DISTNB B2 et dans "Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie"

Or, dans la suite d'images créées à l'écran, il est possible de comprendre que, par exemple, les différents triangles n'ont été définis qu'une fois et donc sont représentants d'une même figure.

Les élèves peuvent ensuite proposer des contraintes, "*2 côtés de même longueur dont les supports sont perpendiculaires*", et voir, grâce à l'évolution continue permise par le logiciel, que la réalisation simultanée des deux séries de contraintes n'est possible que dans un cas particulier.

De plus, il ne s'agit pas de produire à l'aide du logiciel un imagiciel¹ qui permettrait d'illustrer, de manière nouvelle, une partie du cours et de poursuivre ensuite un apprentissage avec l'environnement habituel, mais de l'utiliser pour aller plus loin : c'est une aide pour faire évoluer la recherche du problème par les élèves.

OBJECTIFS :

Objectif cognitif (propre à la séquence) :

- étudier les triangles particuliers, à partir des propriétés des angles,
- étudier les triangles particuliers à partir de leurs médiatrices.

Objectifs cognitifs généraux :

- sensibiliser à la nécessité d'une preuve,
- mettre en oeuvre différents niveaux de validation.

Objectifs méthodologiques :

- rédiger, formuler des résultats,
- poursuivre l'apprentissage de certaines règles de logique (différence entre "un" et "tous", "les" et "des" ; utilisation d'expression du type "si... alors..."),
- apprendre à passer de l'expérience sensible à l'objet idéal (notion de figure).

CONNAISSANCES PRÉALABLES EN MATHÉMATIQUES :

- définition de la médiatrice d'un segment,
- triangles particuliers.

LOGICIEL UTILISÉ

Cabri-Géomètre

DESCRIPTION DE LA SÉQUENCE

L'ordinateur unique (avec souris) est relié à une tablette de rétroprojection. Les figures obtenues sont projetées sur un tableau blanc (sur lequel il

¹ Voir en annexe

est possible d'écrire).

On peut donc aussi utiliser la figure projetée comme on le fait ordinairement d'un dessin au tableau.

La figure de base est construite par l'enseignant. Au cours de la séquence, les élèves sont amenés à modifier progressivement la figure, pour émettre, confirmer ou infirmer des conjectures.

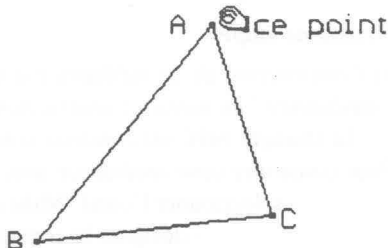
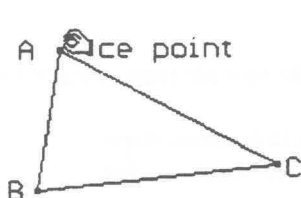
Les élèves effectuent les dessins sur leur cahier d'exercices et notent les résultats obtenus au fur et à mesure (phase d'institutionnalisation).

Première étape

a) Définition d'un triangle

Avec "Cabri Géomètre", on définit un triangle à partir de 3 points. Le logiciel permet de les nommer A, B, C (cela sera utile dans la partie b. de cette étape).

Avec la souris, on "saisit" l'un quelconque des sommets et on le déplace.



Cela permet de souligner le fait qu'un triangle n'est pas le dessin obtenu, mais un "objet" défini par trois points.

Par un déplacement, on cherche à obtenir des triangles isocèles, équilatéraux, rectangles. Les élèves en rappellent simultanément les caractéristiques. C'est sur l'image projetée que les élèves viennent mesurer les côtés (les erreurs de mesure permettent de souligner la différence entre l'objet idéal et le dessin obtenu). Les côtés sont ensuite mesurés en utilisant le logiciel.

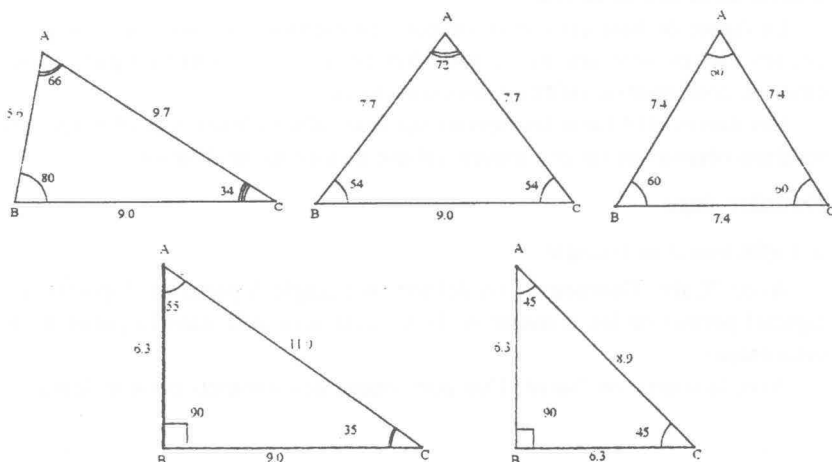
b) Mesure des angles.

A la suite de la manipulation précédente, les élèves demandent à mesurer les angles avec le logiciel. Avec "Cabri Géomètre" un angle est défini par trois points ordonnés, exactement comme on le fait en écrivant.

Le professeur montre sur un exemple le procédé de définition d'un angle, et des élèves viennent ensuite définir les deux autres angles (surveillés avec

attention par la classe !) et mesurer angles et côtés du triangle.

Les élèves viennent alors “faire” dessiner des triangles particuliers.



Deuxième étape

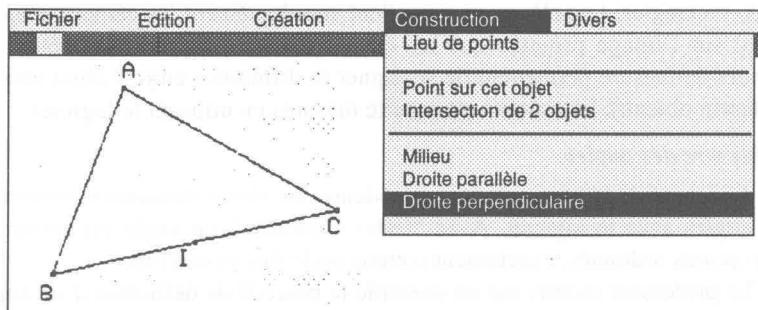
a) Construction de la médiatrice d'un côté du triangle (sans utiliser l'outil “médiatrice” du menu “Constructions”²)

Le triangle ABC est construit comme dans la première étape.

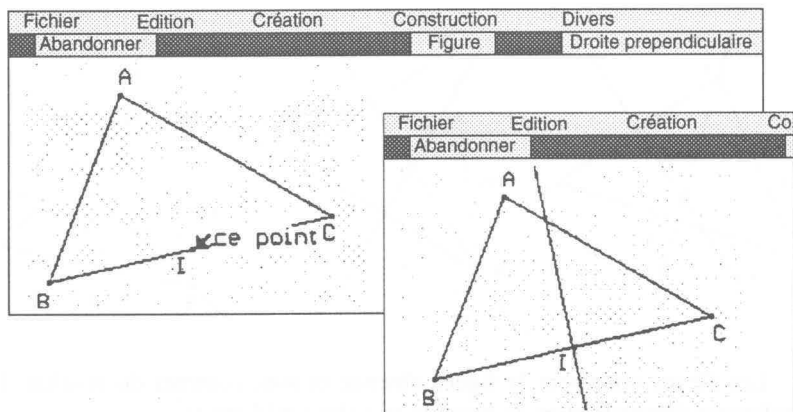
Pour construire cette médiatrice avec “Cabri Géomètre”, on doit :

- sélectionner l'outil “Milieu”
 - désigner le segment dont on veut le milieu.
- sélectionner l'outil “droite perpendiculaire”
 - désigner le milieu du segment précédemment construit,
 - désigner le support du segment.

ce qui amène à mettre en œuvre une définition de la médiatrice.

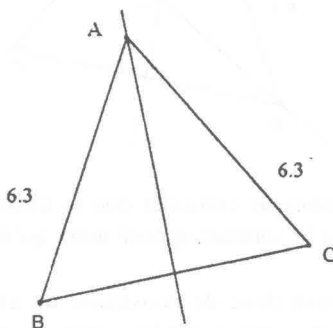


² En effet, Cabri-Géomètre permet de supprimer certaines rubriques des menus.



Certains élèves sont étonnés : sur la figure projetée, la médiatrice ne passe pas par le sommet opposé. Ils viennent donc modifier le triangle pour faire passer la médiatrice construite par ce sommet. La condition : *“ce n’est possible que si le triangle est isocèle”* est énoncée.

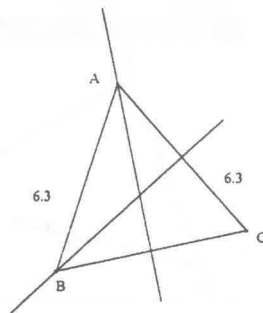
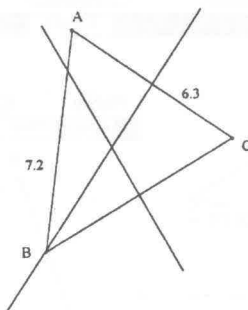
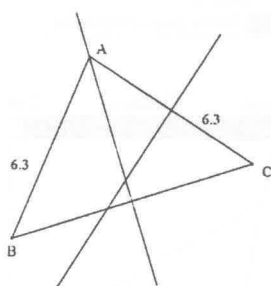
On en profite pour rappeler oralement la propriété de l’équidistance des points de la médiatrice aux extrémités du segment.



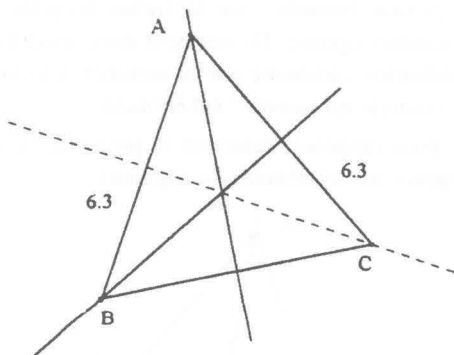
b) Prolongement :

A la demande des élèves, on essaie de construire des triangles dont deux médiatrices passent par les sommets opposés.

Un élève vient alors tracer une deuxième médiatrice, puis déforme le triangle en déplaçant un sommet. Les élèves constatent alors qu’il faut nécessairement déplacer les autres sommets. après plusieurs essais, on obtient une figure sur laquelle les deux médiatrices passent par les sommets opposés.



Les élèves observent la figure obtenue et sont contents du résultat. Le professeur demande alors de tracer la troisième médiane.

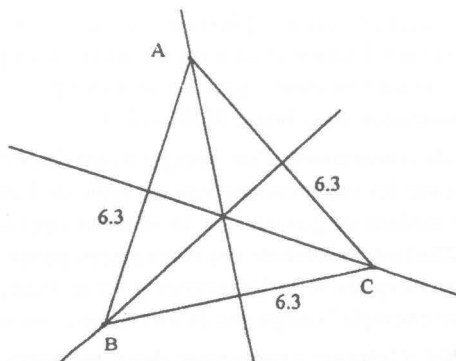


Les élèves sont étonnés de constater que la troisième médiane passe d'emblée, elle aussi, par le sommet opposé alors qu'ils n'ont déplacé aucun point.

Le professeur propose donc de construire un autre dessin sur lequel seules deux médianes passeraient par les sommets opposés. après plusieurs essais infructueux, la nécessité d'une preuve mathématique fait alors son chemin : c'est un réel pas en avant pour tous les élèves de la classe.

Il faut l'aide des propriétés suivantes :

- équidistance d'un point de la médiane d'un segment des extrémités du segment,
- si deux nombres sont égaux à un troisième, ils sont égaux entre eux, pour que la preuve soit exprimée clairement.



Finalement on écrit sur le cahier :

“Si dans un triangle, la médiane d’un côté passe par le sommet opposé, ce triangle est isocèle.

Si deux des médianes passent par les sommets opposés, alors la troisième médiane passe également par le sommet opposé et le triangle est équilatéral”.

CONCLUSION

L’utilisation de la dynamique de l’image grâce au logiciel a permis une confrontation entre les conjectures des élèves et la “réalité” : par exemple le fait que la médiane d’un des côtés du triangle ne passe pas toujours par le sommet opposé et le fait que si deux des médianes passent par le sommet opposé, il en est de même pour la troisième.

Le débat instauré dans la classe a montré comment l’essai de construction de figures répondant aux hypothèses émises permet de se faire une opinion. Faire de nombreux dessins pour résoudre un problème, ne pas émettre une hypothèse seulement à la vision d’une figure, est une méthodologie que les élèves ont réinvestie dans d’autres recherches.

Par ailleurs, la construction des divers objets nécessite la connaissance de définitions (ou de propriétés) précises et rigoureuses. D’autant plus que l’ordinateur ne se contente pas d’un énoncé plus ou moins incantatoire : il exige que l’on décortique chacun des éléments de l’énoncé (exemple : médiane, droite passant par un milieu perpendiculaire au support du segment donné).

Le logiciel permet de dégager l’élève des difficultés de constructions plus ou moins maladroites. Ce type d’activité n’est certes pas à rejeter, mais ici, c’est l’activité de raisonnement qui est l’objet de l’apprentissage.

Enfin cette séquence permet “plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par les exigences de la situation dans laquelle se trouve l’élève.” (Balacheff, Preuves et démonstration au collège, RDM vol. 3.3).

La demande de construction d’un triangle ayant deux médiatrices exactement qui passent par les sommets opposés est issue de l’observation d’un triangle ayant une médiatrice passant par le sommet opposé. La mobilité des points et la construction immédiate des médiatrices permettent aux élèves de chercher à valider l’hypothèse de l’existence d’un tel triangle par la construction d’une “figure exemple” qui puisse être exhibée comme une preuve.

L'impossibilité d'obtenir exactement deux médiatrices passant par le sommet opposé se constitue en obstacle tellement gênant que c'est à partir de là que la nécessité d'un raisonnement déductif s'impose. La figure, parce qu'elle ne se plie pas aux hypothèses, devient tout à coup inutile, négligeable. Les élèves souhaitent travailler à un autre niveau de validation.

Il faut rechercher la multiplication de telles structures conjecturelles pour donner une autre représentation des problèmes de raisonnement à nos élèves.

Ce travail sur les triangles et les médiatrices montre comment dépasser le cadre de l’expérimentation pour arriver à celui de la démonstration.

Pour une meilleure appropriation du concept d'axe de symétrie

B. TAILLARD - IREM de BESANÇON

OBJECTIFS :

Reconnaître et construire les axes de symétrie de quelques figures.

CONNAISSANCES PRÉALABLES EN MATHÉMATIQUES :

Savoir :

- reconnaître que deux figures sont symétriques ou non,
- dessiner à main levée le symétrique d'une figure (simple) donnée,
- construire le symétrique d'un point,
- construire le symétrique d'une figure simple en utilisant des supports quadrillés ou non,
- construire le symétrique d'une figure plus complexe en pensant à utiliser les principales propriétés : image des objets géométriques simples (segment, droite, angle, cercle), conservation des longueurs et des angles.

Les élèves ont travaillé durant 3 ou 4 heures, avec les outils usuels (papier, crayon, règle, compas...) dans différentes activités ayant pour objectif l'acquisition et la maîtrise des prérequis mathématiques mentionnés précédemment.

Le dernier volet de l'apprentissage consiste donc à reconnaître et construire les axes de symétrie de quelques figures. A cet égard, on peut rappeler les compétences exigibles en sixième : *tracer le ou les axes de symétrie de quelques figures (triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré).*

Pour de nombreux élèves, ce travail a déjà été fait à l'école élémentaire et relève parfois de l'évidence. Aussi, pour s'assurer que la notion d'axe de symétrie est acquise, il apparaît nécessaire de proposer des figures plus élaborées mais dont le graphisme est connu des élèves (les manuels présentent fréquemment des logos d'entreprises, des panneaux de signalisation routière, etc.). Le but de l'exercice est de savoir si la figure admet un (ou plusieurs) axe(s) de symétrie ou pas d'axe, en essayant d'**argumenter** la réponse.

D'après "Utilisations pédagogiques de l'ordinateur en mathématiques"

Repris dans "Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur"

Tome 1 DISTNB B2

Les élèves ont travaillé à la maison sur une fiche d'exercices qui mêle figures géométriques, logos et panneaux routiers. La correction en classe a fait apparaître un certain nombre de difficultés, parmi lesquelles :

- quand on a trouvé un axe de symétrie, on n'en cherche pas toujours d'autres,
- l'argumentation est souvent insuffisante, voire inexistante,
- certains élèves proposent un axe pour des figures qui n'en admettent pas,
- l'argumentation développée en classe n'est pas convaincante pour tous.

Fichiers utilisés ¹:

Les fichiers comportant les figures doivent être préparés par le professeur avec le logiciel "Cabri-Géomètre" et chargés successivement au moment de la séquence (voir les copies des écrans pages suivantes).

Stratégie utilisée avec "Cabri-Géomètre":

Bien entendu, la définition "D est un axe de symétrie de la figure F si F est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D" ne fait pas partie des outils d'un élève de sixième.

On prendra donc un chemin détourné : tracer une figure F, une droite (xy) puis transformer F en F' par la symétrie d'axe (xy).

Ensuite, on déplace l'axe (xy) en ayant pour objectif que F' recouvre exactement F. Si tel est le cas, (xy) est un axe de symétrie de la figure F.

Déroulement de la séance :

Le professeur prépare les constructions à l'avance et les enregistre dans des fichiers différents. Durant la séance, l'enseignant manipule l'ordinateur et les élèves observent l'image projetée sur écran ou tableau blanc.

Cette phase reste toujours interactive : l'enseignant questionne les élèves ; ceux-ci proposent des essais qui sont immédiatement exécutés et présentés à la classe.

Voici trois exemples qui permettent une bonne visualisation. La construction avec les outils usuels (règle, équerre, compas) serait encore possible dans le premier cas, mais tout à fait à exclure pour les deux autres figures. La construction du rectangle et de son symétrique (avec "Cabri-Géomètre") est suffisamment simple pour qu'on n'y apporte aucune explication. Quand à la construction des logos Mercedes et Renault, elle constitue un bon exercice d'apprentissage du logiciel pour le professeur et un grand sujet de curiosité et d'intérêt pour les élèves ! Ces trois figures ont été proposées à deux

¹ Ces fichiers peuvent être téléchargés sur : <http://www.edutel.fr>

classes de sixième ; la présentation tient compte des réactions des élèves.

a) *Le rectangle*

On commence par déplacer la droite (xy) en observant le rectangle ABCD et son symétrique A'B'C'D' (figure 1). Les élèves constatent que la superposition des deux figures ne pourra s'obtenir que si (xy) coupe les côtés du rectangle (figure 2) ; ils proposent assez rapidement de mettre (xy) sur l'une puis sur l'autre des deux médiatrices (figures 3 et 4). Quelques élèves pensent que les diagonales sont aussi des axes de symétrie : il est alors facile de les convaincre du contraire (figure 5).

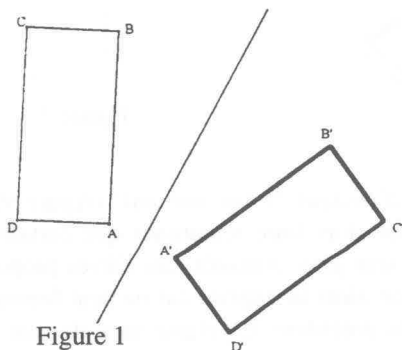


Figure 1

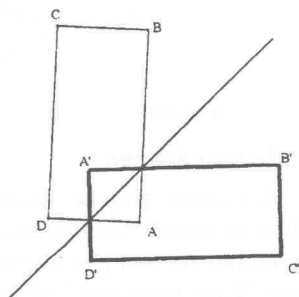


Figure 2

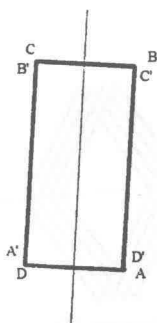


Figure 3

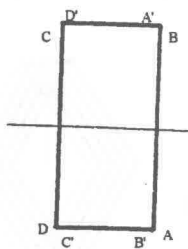


Figure 4

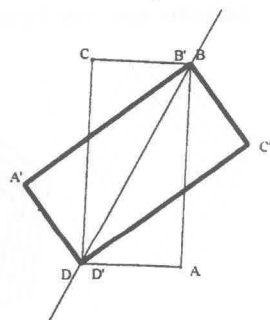


Figure 5

b) *Le logo Mercedes*

Dans un premier temps, la solution n'est pas évidente pour les élèves (on fait des essais infructueux et certains affirment que la figure n'admet pas d'axe de symétrie). Puis la classe propose un axe (figure 7) ; quelques élèves imaginent assez rapidement les deux autres. Cependant, on constate que la classe n'est pas entièrement convaincue : il faudra donc passer par le stade manipulateur, c'est-à-dire déplacer à nouveau l'axe de symétrie.

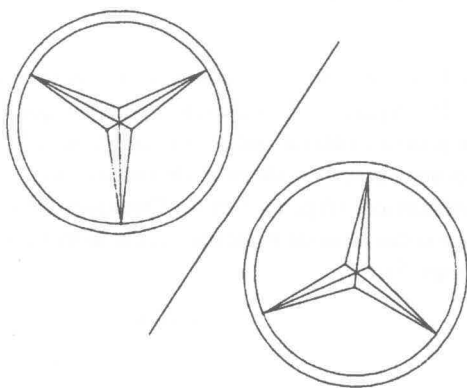


Figure 6

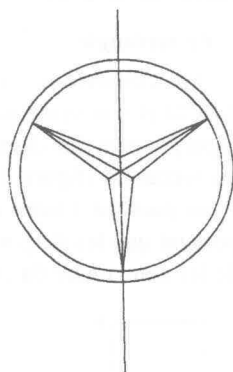


Figure 7

c) *Le logo Renault*

La classe propose spontanément d'essayer "l'axe vertical" (figure 9). Tout le monde semble satisfait. Il faut alors faire remarquer que certains traits fins ne sont pas recouverts d'un trait gras. Aussitôt, des élèves proposent "l'axe horizontal" (figure 10). C'est alors la surprise car on peut formuler la même remarque que dans le cas précédent. La classe aura du mal à admettre que cette figure n'admet pas d'axe de symétrie.

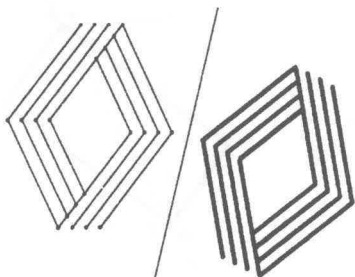


Figure 8

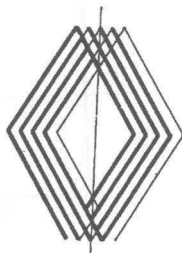


Figure 9

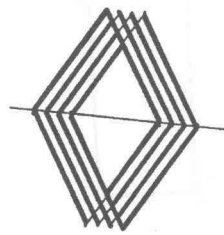
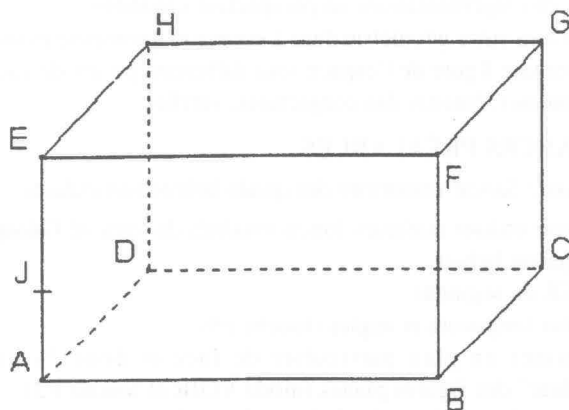


Figure 10

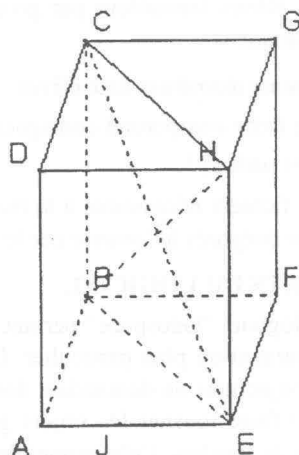
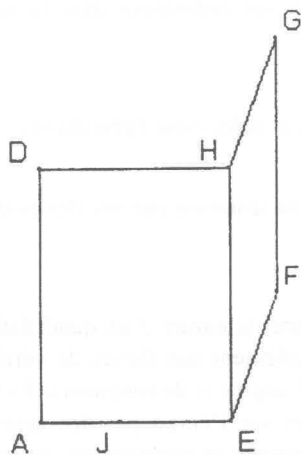
Pavé droit

Marie-Thérèse LABAT

Cette séquence¹ est consacrée à l'étude d'un pavé droit.



Les élèves doivent (voir fiche élève) compléter une représentation en perspective cavalière de ce pavé, tracer des segments, comparer leurs longueurs et dessiner "en grandeur réelle" sur le cahier un quadrilatère.



¹ D'après "pavé droit et prisme", M.T. LABAT

"Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur" DISTNB B2

CRDP de Reims

Le calcul du volume du pavé droit termine la séquence. Les élèves utilisent l'ordinateur pour observer le pavé sous différents points de vue, obtenir des mesures d'angles et de segments et examiner des plans particuliers.

OBJECTIFS

- Apprendre à “voir” dans l'espace.
- Utiliser des représentations en perspective cavalière.
- Faire le lien entre géométrie dans l'espace et géométrie plane.
- Observer une figure de l'espace sous différents points de vue.
- Expérimenter, émettre des conjectures, vérifier.

CONNAISSANCES PRÉALABLES

Mathématiques : Savoir construire des quadrilatères particuliers.

Logiciel : Savoir utiliser quelques fonctionnalités du logiciel **Géospace**² :

- Charger un fichier.
- CREER un segment.
- Calculer longueurs et angles (touche F9).
- Examiner un plan particulier de face et donc “voir en vraie grandeur” des figures planes (mode VOIR et touche F2).
- Revenir à la position initiale lorsqu'on a fait tourner un solide (mode VOIR et touche I).

ORGANISATION ET DÉROULEMENT DE LA SÉANCE

Les élèves travaillent par groupe de deux sur ordinateur dans la salle informatique.

Documents distribués aux élèves :

Une fiche comportant consignes, questions et aides (voir fiche élève).

Fichiers utilisés³ :

Les fichiers nécessaires à la réalisation de la séquence par les élèves doivent être préparés à l'avance par le professeur.

APPORTS DU LOGICIEL

Le logiciel “Géospace” permet de conjecturer la nature d'un quadrilatère en examinant un plan particulier. Il permet également aux élèves de vérifier leurs conjectures en demandant des mesures d'angles et de longueurs. Enfin, on peut faire tourner les objets géométriques sur l'écran par des actions simples de touches. Cela permet de choisir certaines orientations qui permettent de mieux voir les propriétés géométriques de la figure.

² Voir en annexe

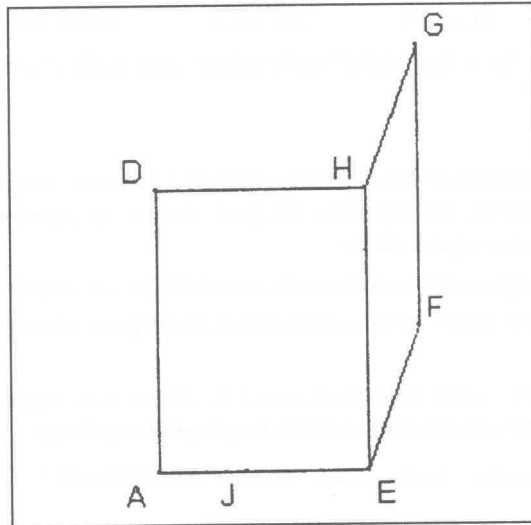
³ Ces fichiers peuvent être téléchargés sur : <http://www.edutel.fr>

Pavé droit

Fiche élève

ABCDEFGH est un pavé droit.

1) Compléter, avec règle et compas, la figure ci-dessous pour obtenir une représentation en perspective cavalière de ce pavé.



Aide :

Choisir le mode VOIR.

Modifier la position du pavé sur l'écran à l'aide des flèches pour obtenir AEHD de face.

2) Tracer sur l'écran avec le logiciel les segments [BE] et [CH] (mode CREER : ligne).

Conjecturer la nature du quadrilatère BEHC.

Vérifier votre conjecture à l'aide de l'ordinateur :

- examiner le plan BEH (mode VOIR : touche F2),

- demander la mesure de l'angle $\widehat{BEH}$ et les mesures des segments [EB] et [HC] (mode VOIR : touche F9 avec AJ pour unité de longueur).

Compléter la figure de la question 1 en traçant également les segments [BE] et [CH].

3) Construire à l'écran avec le logiciel les segments [CE] et [BH] (mode CREER : ligne).

Que peut-on dire des longueurs de ces deux segments ?

Vérifier votre conjecture avec l'ordinateur (mode VOIR : touche F9 en prenant AJ pour unité de longueur).

Quelle est la propriété qui permet de prouver ce résultat ?

4) L'unité de distance est le centimètre, on donne :

$$AE = 2,5$$

$$AB = 4,5$$

$$AD = 3,5$$

Dessiner en "grandeur réelle" sur le cahier, avec règle et compas, le quadrilatère BEHC.

Aide :

Il faut pouvoir tracer les segments [BE] et [CH] mais on ignore les longueurs exactes de ces segments. On peut obtenir ces segments en traçant un triangle ou un quadrilatère.

Utiliser le logiciel pour examiner le plan ABE (mode VOIR : touche F2).

Quelle figure faut-il donc construire d'abord pour obtenir le segment [BE] ?

Réaliser alors votre construction sur le cahier avec règle et compas. Justifier votre construction en citant les propriétés utilisées.

5) Quel est le volume (valeur exacte) du pavé ABCDEFGH ?

ANNEXE

Quelques logiciels en géométrie

Les établissements scolaires disposent de matériel informatique et de logiciels pédagogiques utilisables pour l'enseignement des mathématiques¹.

On peut distinguer différents types de logiciels : les logiciels-outils, les didacticiels et les imagiciels qui seront présentés successivement, et mis en relation avec différents thèmes du programme de géométrie à propos desquels ils peuvent être utilisés².

Les exemples présentés précédemment illustrent l'utilisation de logiciels outils pour l'enseignement de la géométrie en sixième.

Ces outils généraux permettent au professeur de construire ses propres imagiciels qu'il utilise selon les modalités décrites plus bas.

Il est également possible de mettre en œuvre ces outils dans le cadre de séances d'activités (découverte de notions nouvelles, activités d'entraînement, mise en œuvre de propriétés...) où les élèves travaillent seuls ou en binôme devant un ordinateur. Il est alors indispensable de distribuer aux élèves une feuille de route qui a plusieurs rôles : elle permet de donner des consignes d'utilisation de l'outil, d'expliquer le travail à faire, de décomposer les différentes étapes de la séquence pédagogique et de conserver une trace écrite de la séance sur machine.

Il est, de plus, très souvent souhaitable de réaliser un certain nombre de fichiers sur lesquels les élèves peuvent alors travailler et se consacrer aux traitements, conjectures et interprétation des résultats.

L'enseignant, libéré ainsi, pendant son cours, d'un certain nombre de tâches, peut alors consacrer tout son temps à suivre les démarches de chaque groupe et à vérifier la bonne compréhension des notions étudiées.

¹ Parmi ceux-ci figurent en particulier les logiciels en licence mixte : ces logiciels ont été examinés par une commission d'experts dépendant du Ministère de l'Éducation Nationale, pilotée par la DISTNB B2 et présidée par l'Inspection Générale et ont fait l'objet d'une recommandation particulière pour leurs qualités pédagogiques.

² Dans cet article sont décrites uniquement les utilisations de logiciels en géométrie. En travaux numériques et gestion de données, l'outil informatique peut également être utilisé. Des exemples pour le collège en sont donnés dans les brochures "*Faire des mathématiques avec l'ordinateur au collège*" (tomes 1 et 2) (DISTNB B2) ainsi que des descriptions des logiciels correspondants.

La création des fichiers et séquences sur papier demande bien entendu un certain investissement de la part de l'enseignant. Il est à présent possible de trouver, dans de nombreuses académies, des brochures regroupant séquences et fichiers. On trouve également des exemples de séquences pédagogiques intégrant l'outil informatique dans les publications de l'EPI, de l'APMEP, des IREM, des CRDP...

Voici une liste de **logiciels outils** pour la géométrie :

Atelier de géométrie (Windows)

Editeur : Edusoft

Logiciel en licence mixte

Logiciel de construction géométrique.

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupes de soutien, en recherche individuelle.

Calques 2 (Windows)

Editeur : Topiques éditions

Logiciel en licence mixte

Logiciel de constructions géométriques permettant également de travailler sur des "feuilles" écran que l'on peut faire apparaître successivement ou juxtaposer à côté les unes des autres sur un même écran. Il permet donc de travailler les étapes d'une construction ou l'analyse d'une figure.

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupe de soutien, en recherche individuelle.

Cabri Géomètre (Dos)

Editeur : Edusoft

Logiciel ayant obtenu une licence mixte et dont la date de fin de marché est arrivée à échéance

Logiciel de constructions géométriques.

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupe de soutien, en recherche individuelle. Une nouvelle version de ce logiciel (**Cabri II**) est distribuée par les sociétés suivantes : Calibration, CAMIF, Edusoft, Keysoft.

Geoplan 2 (Dos)

Logiciel réalisé par le CREEM/CNAM-DLC, diffusé par le CRDP de POITIERS

Logiciel de constructions géométriques.

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupe de soutien, en recherche individuelle.

Geospace (Dos)

Logiciel réalisé par le CREEM/CNAM-DLC, diffusé par le CRDP de POITIERS

Logiciel de constructions géométriques dans l'espace.

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupe de soutien, en recherche individuelle.

GeoplanW (Windows)

Logiciel réalisé par le CREEM/CNAM-DISTNB B2, diffusé par le CRDP de REIMS

Logiciel de constructions géométriques, adaptation à l'environnement Windows du logiciel Geoplan 2 avec quelques fonctionnalités supplémentaires (arcs de cercle, création d'animations...)

Utilisation : En imagiciel classe entière, en groupe de soutien, en recherche individuelle.

Thèmes du programme de géométrie de la classe de Sixième susceptibles d'être étudiés avec un des logiciels outils en géométrie :

Avec les logiciels de construction géométrique dans le plan

l'Atelier de géométrie, Calques 2, Cabri géomètre, Géoplan 2, GéoplanW

- Points et lignes.
- Droites parallèles et perpendiculaires.
- Symétrie orthogonale.
- Médiatrice d'un segment.
- Angles et triangles.
- Quadrilatères.

Avec les logiciels de construction géométrique dans l'espace

Geospace

- Parallélépipède rectangle.

D'autres types de logiciels peuvent également être utilisés en sixième :

- des **didacticiels** :

Ce type de logiciels propose des exercices ou des activités avec en général des aides appropriées et des rappels de cours. Les élèves travaillent alors d'une manière autonome et individualisée. L'ordinateur vérifie les résultats et évalue le travail de l'élève.

-des **imagiciels** :

Ce sont des illustrations par ordinateur, à base de graphique et facilement paramétrables par le professeur ou les élèves : on peut, en effet, agir sur la construction des images en choisissant les paramètres qui les définissent. Leur visualisation instantanée suscite alors la curiosité des élèves, leur donne

la possibilité d'émettre des conjectures, de découvrir des propriétés ou de les vérifier.

L'ordinateur permettant de faire de nombreuses manipulations, l'enseignant peut donc examiner avec sa classe diverses situations, présenter une nouvelle notion, renforcer l'assimilation du cours, vérifier la compréhension des élèves ou illustrer une propriété.

Ces logiciels sont donc plutôt destinés à une utilisation collective. Un micro-ordinateur est installé dans la salle de classe et le professeur peut alors illustrer une séquence d'enseignement de façon dynamique et interactive.

Voici une liste thématique de **didacticiels** et d'**imagiciels** (nom du module considéré suivi du nom du logiciel et de l'éditeur) susceptibles d'être utilisés dans le cadre des activités géométriques de la classe de sixième :

Reproduction de figures planes simples

Nommer les figures planes (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Les triangles particuliers (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Reconnaître les quadrilatères (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Propriétés d'une figure (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Graduation angulaire (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Surfaces planes : mesure, comparaison et calculs d'aires et de périmètres

Calcul d'aires (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Calcul d'aires (*Evalumath 5ème : Nombres en géométrie - Magnard*)

Parallélogramme rectangle : description, représentation en perspective, patrons ...

Patrons de polyèdres : Pavés (*Activités mathématiques avec imagiciels - CREEM / CNAM DLC diffusé par le CRDP de Poitiers*)

Cube (*Images logicielles mathématiques en seconde - CREEM / CNAM - DLC diffusé par le CRDP de Poitiers ; mathématiques avec images logicielles - Hachette*)

Calcul de volumes (*Evalumath 5ème : Nombres en géométrie - Magnard*)

Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale)

Placer un axe de symétrie (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Symétrique d'une figure (*S.M.A.O. 6ème - Chrysis*)

Symétrie axiale (*Imagil - Topiques Editions*)

Une machine à symétrie axiale (*Imagil - Topiques Editions*)

Polygones et transformations (*Imagil - Topiques Editions*)

Mobipuz (*Math vol 6 Didacticiel et jeux mathématiques - Micro savoirs - CNDP*)

Des éléments bibliographiques

BROCHURES IREM

Les documents précédés d'un * sont cités dans des articles contenus dans cette brochure.

IREM de Besançon

- Géométrie dans l'espace - Activités pour la classe en collège - (1993)

IREM de Basse Normandie (Caen)

- Deux disciplines, de multiples lectures - Une expérience transdisciplinaire en Français et Mathématiques en classe de 6^{ème} - (1995)

IREM de Limoges

- Symétrie orthogonale - (1993)

IREM de Lorraine (Nancy)

- Les fractions en sixième - (1990)
- Gestion de données - (1994)
- Problèmes concrets 6^{ème}-5^{ème} - (1990)

IREM de Lyon

- Des problèmes pour apprendre en CM₂ et en 6^{ème} - (1987)
- * Aire et périmètre - Le tour de l'aire au collège - (1994)

IREM de Montpellier

- Liaison cycle 3 - 6^{ème} - Un outil d'aide à l'analyse des compétences en Mathématiques - (1995)
- Enseigner la géométrie de l'espace - Activités de la sixième à la Seconde - (1992)
- Enseigner la géométrie plane en intégrant l'outil informatique (niveau collège) - (1992)
- * Narration de recherche (1992)

IREM des Pays de la Loire (Nantes)

- * Les outils mathématiques dans les autres disciplines au collège - (1994)
- Enseignement par situations-problèmes - La proportionnalité du CM₂ à la Seconde - (1991)
- Le pavé droit (images pour la géométrie n°2) + disquettes - Séquence d'apprentissage 6^{ème} - (1991)
- *Enseigner les mathématiques autrement en sixième* - (1997)

IREM de Paris Nord

- Les transformations
 - Fascicule 1 : Pour commencer - (1991)
 - Fascicule 2 : Symétrie orthogonale - (1992)
- Activités mathématiques au collège
 - Carnets de stages fascicule 1 - (1995)
 - Carnets de stages fascicule 2 - (1996)

IREM de Picardie (Amiens)

- Liaison CM_2 - 6^{ème} : La multiplication, quelles représentations ? - (1994)
- Mathématiques en sixième : des activités pour apprendre - (1994)
- Diagnostiquer pour adapter son enseignement - (1996)

IREM de Poitiers

- Les fractions en sixième (deux fascicules)
- Reproduction de figures planes
- Symétrie orthogonale
- Des affiches pour la classe :** Triangles / Droites remarquables du triangle / Sphère-cercle / Déplacements / Perpendiculaires-Parallèles / Bissectrice / Angles / Perspective.

IREM de Reims

- Mathématiques en activité Sixième -fascicule 1 et 2 - (1986)

IREM de Rennes

- Pédagogie différenciée au secours des élèves en difficulté - (1992)
- * Lire et écrire des textes mathématiques au collège - (1992)
- Résoudre des problèmes CM_2 - 6^{ème} pour apprendre - (1995)
- Banque de problèmes mathématiques CM_2 - 6^{ème} - (1993)
 - Division euclidienne - Numération
- Informatique et hétérogénéité - tome 4 - (1994)

IREM de Rouen

- Géométrie en 6^{ème} : un nouveau départ - (1994)
- Des activités pour raisonner au collège - (1991)
- * Activités pour lire et écrire au collège - (1996)

IREM de Strasbourg

- La proportionnalité au collège - (1996)

IREM de Toulouse

- Des activités géométriques au collège - Cumuler des savoirs ou des savoir-faire ou développer des capacités

PUBLICATIONS APMEP

- Elem Math VIII - Aides pédagogiques pour le cycle moyen - Nombres décimaux - n°61
- Elem Math IX - Aides pédagogiques pour le cycle moyen - Situations- Problèmes - n°64

AUTRES DOCUMENTS

- Petit x -IREM de Grenoble - 3 numéros par an
- Repères IREM -revue des IREM - 4 numéros par an
(voir plus particulièrement les numéros 1-2-3-5-7-10-12-13-17)
- Des chiffres et des lettres au collège - Bulletin Inter IREM premier cycle - (1992)
- Histoire des mathématiques pour les collèges - IREM de Paris VII - Editions cedric
- Problème ouvert et situation-problème - IREM de Lyon
- Vidéo produite par l'IREM de Lyon : Un moment d'évaluation formatrice (construction de figures géométriques en classe de 6^{ème})

Remarques, notes, expérimentation



ADRESSES DES IREM

- BESANÇON** Faculté des Sciences La Bouloie- 25030 Besançon Cedex
tel. 03 81 66 61 92 *Télécopie : 03 81 66 61 99*
- BORDEAUX** Institut Lamartine- I.F.E. - 40 rue Lamartine-33400 Talence
tel. 05 56 84 89 74 *Télécopie 05 56 84 89 72*
- BREST** U.F.R.Sciences - 6, av. Victor Le Gorgeu -29285 Brest Cedex
tél. 02 98 01 65 44 *Télécopie : 02 98 01 64 41*
- CAEN** IUT, Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen
tél. 02 31 44 27 91 *Télécopie : 02 31 94 32 59*
- CLERMONT Fd** Université Clermont-Ferrand II
Complexe scientifique des Cézeaux - 63177 Aubière cedex
tél. 04 73 40 70 98 *Télécopie : 04 73 40 70 78*
- DIJON** Université de Bourgogne- U.F.R. Sciences et Techniques
9, avenue Alain Savary - BP 400 - 21011Dijon cedex
tél. 03 80 39 52 30 *Télécopie : 03 80 39 52 39*
- GRENOBLE** BP 41 - 38401 St Martin d'Hères cedex
tél. 04 76 51 46 62 *Télécopie : 04 76 51 42 37*
- LILLE** Université des Sciences et Techniques 59655 Villeneuve d'Asq cedex
tél. 03 20 43 41 81 - 03 20 43 41 82 *Télécopie : 03 20 33 71 61*
- LIMOGES** 123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex
tél. 05 55 45 72 31 - 05 55 45 72 49 *Télécopie : 05 55 45 73 20*
- LORRAINE** Université Nancy I - Faculté des Sciences, BP 239
54506 Vandœuvre lès Nancy cedex
tél. 03 83 91 21 99 *Télécopie : 03 83 91 25 73*
- LYON** Université Lyon I- 43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex
tél. 04 72 44 81 24 - 04 72 43 13 82 *Télécopie : 04 72 44 80 67*
- MARSEILLE** Faculté des Sciences de Luminy - 70, rue Léon Lachamp
13288 Marseille cedex
tél. 04 91 26 90 00 - 91 41 39 40 *Télécopie : 04 91 82 93 43*
- MONTPELLIER** Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon - C.C.040 - 34095 Montpellier cedex 5
tél. 04 67 14 33 83 - 04 67 14 33 84 *Télécopie : 04 67 62 39 09*
- NANTES** : Pays de la Loire 2, rue de La Houssinière - BP 92208
44382 Nantes cedex 3
tél.02 51 12 59 40 *Télécopie : 02 51 12 59 41*
- Antenne LE MANS** - Université du Maine - Av. Olivier Messiaen
72017 Le Mans cedex
tél.02 43 83 32 15 *Télécopie : 02 43 83 35 56*

- NICE** Université Nice - Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice cedex 2
 tél. 04 92 07 65 11 - 04 92 07 65 15 *Télécopie : 04 92 07 65 10*
- ORLÉANS** Université d'Orléans, BP 6759 - 45067 Orléans cedex 2
 tél. 02 38 41 71 90 *Télécopie : 02 38 41 71 93*
- PARIS-NORD** Université de Paris Nord Avenue Jean Baptiste Clément
 93430 Villetaneuse
 tél. 01 49 40 36 40 *Télécopie : 01 49 40 36 36*
- PARIS VII** Université Paris VII - C.P.7018,
 2, Place Jussieu - 75251 Paris cedex 05
 tél. 01 44 27 53 83 - 01 44 27 53 84 *Télécopie : 01 44 27 56 08*
- AMIENS - PICARDIE** 48, rue Raspail, BC 619 - 02322 Saint-Quentin
 tél. 03 23 62 76 45 - 03 23 62 62 98 *Télécopie : 03 23 64 82 62*
- POITIERS** 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers cedex
 tél. 05 49 45 38 77 *Télécopie : 05 49 45 40 50*
- REIMS** Moulin de la Housse, BP 1039 - 51687 Reims cedex 2
 tél. 03 26 05 32 08 *Télécopie : 03 26 85 35 04*
- RENNES** Campus Beaulieu - 35042 Rennes cedex
 tél. 02 99 28 63 42 *Télécopie : 02 99 28 16 38*
- ROUEN** Université de Rouen - 1 rue Thomas Becket BP 153
 76135 Mont Saint-Aignan
 tél. 02 35 14 61 41 *Télécopie : 02 35 14 61 41*
- STRASBOURG** 10, rue Général Zimmer - 67084 Strasbourg cedex
 tél. 03 88 41 63 07 *Télécopie : 03 88 41 64 49*
- TOULOUSE** Université Paul Sabatier - 118, route de Narbonne
 31062 Toulouse cedex
 tél. 05 61 55 68 83 *Télécopie : 05 61 55 82 58*
- ANTILLES-GUYANE** Université des Antilles et de la Guyane
 Faculté des Sciences de Pointe à Pitre - 97159 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
 tél. 0 590 93 86 97 *Télécopie : 0 590 93 87 28*
0 590 93 86 43
- **Section Guadeloupe** : Cité scolaire de Baimbridge - Bt P - 3ème étage
 B.P.17 - 979110 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
- **Section Martinique** : IUFM - Pointe des Nègres
 97.2 Schoelcher (Martinique)
- **Section Guyane** : 12, rue Louis Armstrong
 97310 Kourou (Guyane)

MISE EN PAGES FOURNIE

Commission Inter-IREM Premier Cycle

Titre : Des Mathématiques en Sixième

Date : Juin 1998

**Auteurs : Membres de la Commission Inter-IREM premier Cycle
Membres de la Commission Inter-IREM Informatique
Membres de la COPIRELEM**

Cette brochure propose aux enseignants une réflexion sur l'enseignement des nouveaux programmes en sixième et leur mise en œuvre dans les classes.

Les quatre parties de l'ouvrage illustrent successivement :

L'analyse des connaissances de ces nouveaux programmes par rapport à l'école élémentaire : continuité, ruptures ou nouveautés.

La richesse des modes de représentation et de communication utilisés en mathématiques.

La mise en place d'une démarche scientifique.

L'apport des technologies nouvelles dans les activités mathématiques.

Coordination : Christiant MASSOT et Brigitte POULAIN

Mise en page et maquette : Jean BARBIER (IREM de Lyon)

Edition : IREM de Nantes

ISBN : 2-86300-025-X

Diffusion : réseau des IREM

Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

- NICE** Université Nice - Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice cedex 2
 tél. 04 92 07 65 11 - 04 92 07 65 15 *Télécopie : 04 92 07 65 10*
- ORLÉANS** Université d'Orléans, BP 6759 - 45067 Orléans cedex 2
 tél. 02 38 41 71 90 *Télécopie : 02 38 41 71 93*
- PARIS-NORD** Université de Paris Nord Avenue Jean Baptiste Clément
 93430 Villetaneuse
 tél. 01 49 40 36 40 *Télécopie : 01 49 40 36 36*
- PARIS VII** Université Paris VII - C.P.7018,
 2, Place Jussieu - 75251 Paris cedex 05
 tél. 01 44 27 53 83 - 01 44 27 53 84 *Télécopie : 01 44 27 56 08*
- AMIENS - PICARDIE** 48, rue Raspail, BC 619 - 02322 Saint-Quentin
 tél. 03 23 62 76 45 - 03 23 62 62 98 *Télécopie : 03 23 64 82 62*
- POITIERS** 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers cedex
 tél. 05 49 45 38 77 *Télécopie : 05 49 45 40 50*
- REIMS** Moulin de la Housse, BP 1039 - 51687 Reims cedex 2
 tél. 03 26 05 32 08 *Télécopie : 03 26 85 35 04*
- RENNES** Campus Beaulieu - 35042 Rennes cedex
 tél. 02 99 28 63 42 *Télécopie : 02 99 28 16 38*
- ROUEN** Université de Rouen - 1 rue Thomas Becket BP 153
 76135 Mont Saint-Aignan
 tél. 02 35 14 61 41 *Télécopie : 02 35 14 61 41*
- STRASBOURG** 10, rue Général Zimmer - 67084 Strasbourg cedex
 tél. 03 88 41 63 07 *Télécopie : 03 88 41 64 49*
- TOULOUSE** Université Paul Sabatier - 118, route de Narbonne
 31062 Toulouse cedex
 tél. 05 61 55 68 83 *Télécopie : 05 61 55 82 58*
- ANTILLES-GUYANE** Université des Antilles et de la Guyane
 Faculté des Sciences de Pointe à Pitre - 97159 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
 tél. 0 590 93 86 97 *Télécopie : 0 590 93 87 28*
0 590 93 86 43
- **Section Guadeloupe :** Cité scolaire de Baimbridge - Bt P - 3ème étage
 B.P.17 - 979110 Pointe à Pitre (Guadeloupe)
- **Section Martinique :** IUFM - Pointe des Nègres
 97.2 Schoelcher (Martinique)
- **Section Guyane :** 12, rue Louis Armstrong
 97310 Kourou (Guyane)

MISE EN PAGES FOURNIE