

Autour du triangle

Danielle BERGUE - IREM de ROUEN

Cette séquence¹ propose la découverte de quelques propriétés des triangles et de leurs médiatrices.

Le programme de 6^{ème} propose une initiation progressive au raisonnement déductif. En géométrie, le raisonnement est souvent considéré comme synonyme de démonstration et devrait être pris en compte selon trois phases :

- 1) une appropriation du problème qui se fait par l'intermédiaire de la construction et l'explicitation des données sous forme d'hypothèses,
- 2) une recherche de la solution qui demande un choix parmi des propriétés connues pour déterminer celles pouvant être utiles, un va-et-vient constant du regard et de l'esprit entre le cas particulier de la figure et l'expression générale des propriétés ("cas particulier de la figure" qui ne doit pas l'être au sens habituel du terme),
- 3) une mise en forme écrite de la solution qui fait apparaître les étapes d'un raisonnement déductif.

Chaque phase doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Entre la première et la seconde phase, l'objet construit change de statut : de *dessin concret* sur une feuille de papier, il devient *figure générale*, objet idéal.

La prise en compte des contraintes liées à la figure permet de donner du sens à l'étape de la recherche de la solution. Or, souvent, les élèves confondent contraintes spécifiques à l'exercice avec construction de cas particuliers et élimination de ceux-ci (triangles isocèles et équilatéraux, rectangles, carrés, etc.). Devant cette difficulté des élèves, la construction de plusieurs dessins peut aider à faire émerger les contraintes spécifiques du problème.

C'est à ce niveau qu'un logiciel de construction géométrique peut être un outil précieux. En effet, la figure étant construite, on peut, en continu, la faire évoluer sur l'écran. Les élèves ont donc une vision concrète des différentes constructions possibles et non une juxtaposition de plusieurs dessins. Le changement de "point de vue" sur la figure peut se faire plus aisément.

La construction de plusieurs dessins est une des méthodes proposées pour que d'une part les élèves se construisent le concept de figure, et que d'autre part, les caractères invariants de ces figures apparaissent.

¹ D'après "Des activités pour raisonner au collège"

Repris dans "Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur", DISTNB B2 et dans "Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie"

Or, dans la suite d'images créées à l'écran, il est possible de comprendre que, par exemple, les différents triangles n'ont été définis qu'une fois et donc sont représentants d'une même figure.

Les élèves peuvent ensuite proposer des contraintes, "*2 côtés de même longueur dont les supports sont perpendiculaires*", et voir, grâce à l'évolution continue permise par le logiciel, que la réalisation simultanée des deux séries de contraintes n'est possible que dans un cas particulier.

De plus, il ne s'agit pas de produire à l'aide du logiciel un imagiciel¹ qui permettrait d'illustrer, de manière nouvelle, une partie du cours et de poursuivre ensuite un apprentissage avec l'environnement habituel, mais de l'utiliser pour aller plus loin : c'est une aide pour faire évoluer la recherche du problème par les élèves.

OBJECTIFS :

Objectif cognitif (propre à la séquence) :

- étudier les triangles particuliers, à partir des propriétés des angles,
- étudier les triangles particuliers à partir de leurs médiatrices.

Objectifs cognitifs généraux :

- sensibiliser à la nécessité d'une preuve,
- mettre en oeuvre différents niveaux de validation.

Objectifs méthodologiques :

- rédiger, formuler des résultats,
- poursuivre l'apprentissage de certaines règles de logique (différence entre "un" et "tous", "les" et "des" ; utilisation d'expression du type "si... alors..."),
- apprendre à passer de l'expérience sensible à l'objet idéal (notion de figure).

CONNAISSANCES PRÉALABLES EN MATHÉMATIQUES :

- définition de la médiatrice d'un segment,
- triangles particuliers.

LOGICIEL UTILISÉ

Cabri-Géomètre

DESCRIPTION DE LA SÉQUENCE

L'ordinateur unique (avec souris) est relié à une tablette de rétroprojection. Les figures obtenues sont projetées sur un tableau blanc (sur lequel il

¹ Voir en annexe

est possible d'écrire).

On peut donc aussi utiliser la figure projetée comme on le fait ordinairement d'un dessin au tableau.

La figure de base est construite par l'enseignant. Au cours de la séquence, les élèves sont amenés à modifier progressivement la figure, pour émettre, confirmer ou infirmer des conjectures.

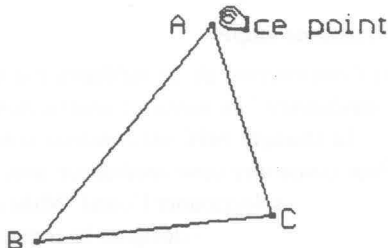
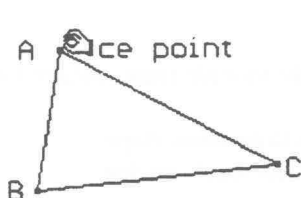
Les élèves effectuent les dessins sur leur cahier d'exercices et notent les résultats obtenus au fur et à mesure (phase d'institutionnalisation).

Première étape

a) Définition d'un triangle

Avec "Cabri Géomètre", on définit un triangle à partir de 3 points. Le logiciel permet de les nommer A, B, C (cela sera utile dans la partie b. de cette étape).

Avec la souris, on "saisit" l'un quelconque des sommets et on le déplace.



Cela permet de souligner le fait qu'un triangle n'est pas le dessin obtenu, mais un "objet" défini par trois points.

Par un déplacement, on cherche à obtenir des triangles isocèles, équilatéraux, rectangles. Les élèves en rappellent simultanément les caractéristiques. C'est sur l'image projetée que les élèves viennent mesurer les côtés (les erreurs de mesure permettent de souligner la différence entre l'objet idéal et le dessin obtenu). Les côtés sont ensuite mesurés en utilisant le logiciel.

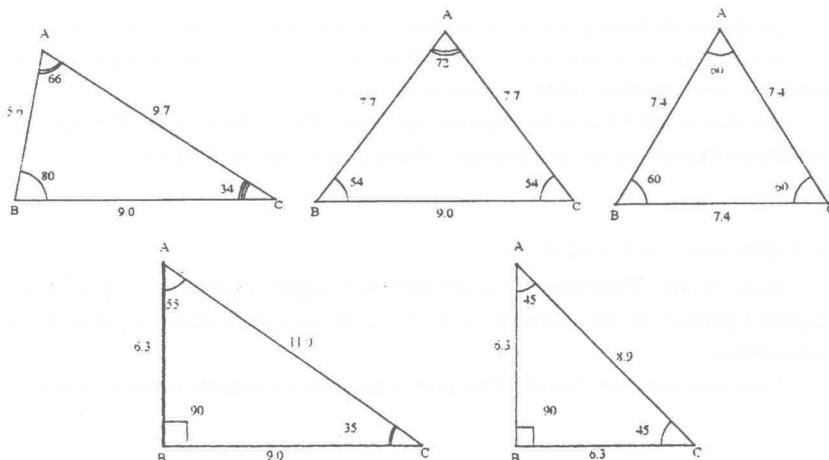
b) Mesure des angles.

A la suite de la manipulation précédente, les élèves demandent à mesurer les angles avec le logiciel. Avec "Cabri Géomètre" un angle est défini par trois points ordonnés, exactement comme on le fait en écrivant.

Le professeur montre sur un exemple le procédé de définition d'un angle, et des élèves viennent ensuite définir les deux autres angles (surveillés avec

attention par la classe !) et mesurer angles et côtés du triangle.

Les élèves viennent alors “faire” dessiner des triangles particuliers.



Deuxième étape

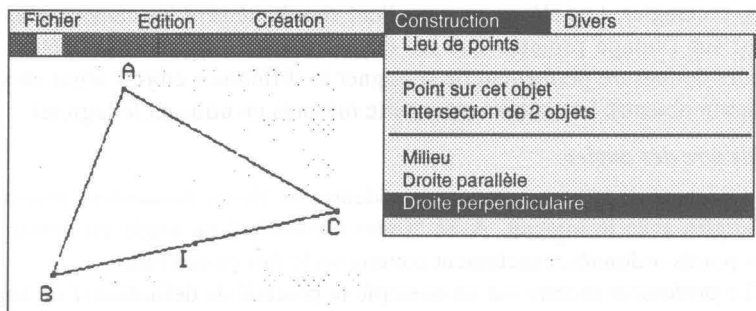
a) Construction de la médiatrice d'un côté du triangle (sans utiliser l'outil “médiatrice” du menu “Constructions”²)

Le triangle ABC est construit comme dans la première étape.

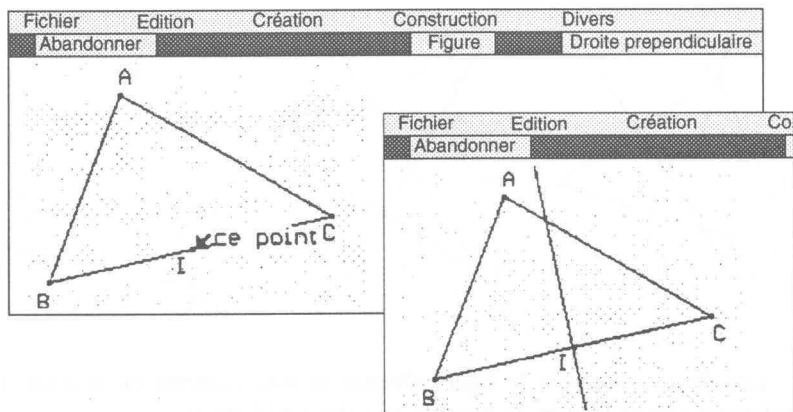
Pour construire cette médiatrice avec “Cabri Géomètre”, on doit :

- sélectionner l'outil “Milieu”
 - désigner le segment dont on veut le milieu.
- sélectionner l'outil “droite perpendiculaire”
 - désigner le milieu du segment précédemment construit,
 - désigner le support du segment.

ce qui amène à mettre en œuvre une définition de la médiatrice.

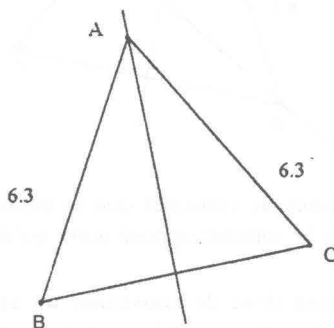


² En effet, Cabri-Géomètre permet de supprimer certaines rubriques des menus.



Certains élèves sont étonnés : sur la figure projetée, la médiatrice ne passe pas par le sommet opposé. Ils viennent donc modifier le triangle pour faire passer la médiatrice construite par ce sommet. La condition : *“ce n’est possible que si le triangle est isocèle”* est énoncée.

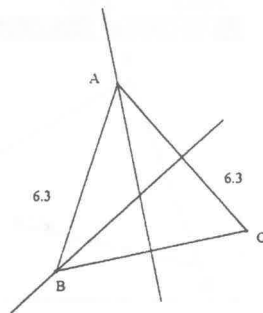
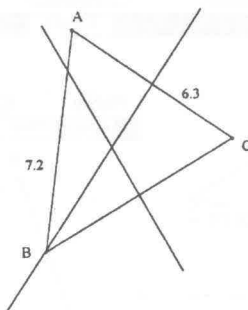
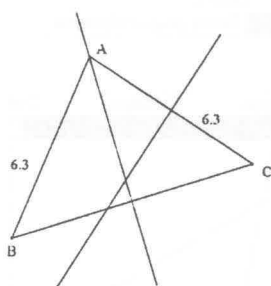
On en profite pour rappeler oralement la propriété de l’équidistance des points de la médiatrice aux extrémités du segment.



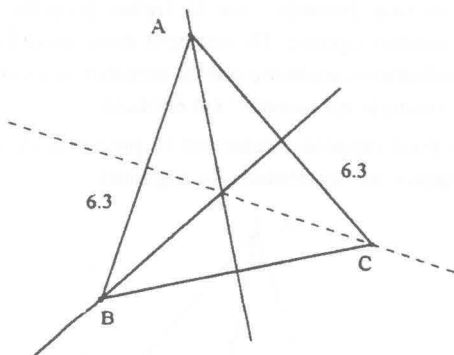
b) Prolongement :

A la demande des élèves, on essaie de construire des triangles dont deux médiatrices passent par les sommets opposés.

Un élève vient alors tracer une deuxième médiatrice, puis déforme le triangle en déplaçant un sommet. Les élèves constatent alors qu’il faut nécessairement déplacer les autres sommets. après plusieurs essais, on obtient une figure sur laquelle les deux médiatrices passent par les sommets opposés.



Les élèves observent la figure obtenue et sont contents du résultat. Le professeur demande alors de tracer la troisième médiane.

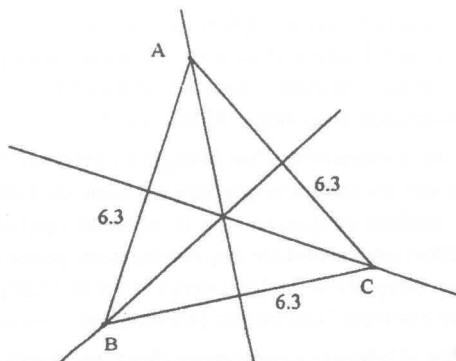


Les élèves sont étonnés de constater que la troisième médiane passe d'emblée, elle aussi, par le sommet opposé alors qu'ils n'ont déplacé aucun point.

Le professeur propose donc de construire un autre dessin sur lequel seules deux médianes passeraient par les sommets opposés. après plusieurs essais infructueux, la nécessité d'une preuve mathématique fait alors son chemin : c'est un réel pas en avant pour tous les élèves de la classe.

Il faut l'aide des propriétés suivantes :

- équidistance d'un point de la médiane d'un segment des extrémités du segment,
- si deux nombres sont égaux à un troisième, ils sont égaux entre eux, pour que la preuve soit exprimée clairement.



Finalement on écrit sur le cahier :

“Si dans un triangle, la médiane d’un côté passe par le sommet opposé, ce triangle est isocèle.

Si deux des médianes passent par les sommets opposés, alors la troisième médiane passe également par le sommet opposé et le triangle est équilatéral”.

CONCLUSION

L’utilisation de la dynamique de l’image grâce au logiciel a permis une confrontation entre les conjectures des élèves et la “réalité” : par exemple le fait que la médiane d’un des côtés du triangle ne passe pas toujours par le sommet opposé et le fait que si deux des médianes passent par le sommet opposé, il en est de même pour la troisième.

Le débat instauré dans la classe a montré comment l’essai de construction de figures répondant aux hypothèses émises permet de se faire une opinion. Faire de nombreux dessins pour résoudre un problème, ne pas émettre une hypothèse seulement à la vision d’une figure, est une méthodologie que les élèves ont réinvestie dans d’autres recherches.

Par ailleurs, la construction des divers objets nécessite la connaissance de définitions (ou de propriétés) précises et rigoureuses. D’autant plus que l’ordinateur ne se contente pas d’un énoncé plus ou moins incantatoire : il exige que l’on décortique chacun des éléments de l’énoncé (exemple : médiane, droite passant par un milieu perpendiculaire au support du segment donné).

Le logiciel permet de dégager l’élève des difficultés de constructions plus ou moins maladroites. Ce type d’activité n’est certes pas à rejeter, mais ici, c’est l’activité de raisonnement qui est l’objet de l’apprentissage.

Enfin cette séquence permet “plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par les exigences de la situation dans laquelle se trouve l’élève.” (Balacheff, Preuves et démonstration au collège, RDM vol. 3.3).

La demande de construction d’un triangle ayant deux médiatrices exactement qui passent par les sommets opposés est issue de l’observation d’un triangle ayant une médiatrice passant par le sommet opposé. La mobilité des points et la construction immédiate des médiatrices permettent aux élèves de chercher à valider l’hypothèse de l’existence d’un tel triangle par la construction d’une “figure exemple” qui puisse être exhibée comme une preuve.

L'impossibilité d'obtenir exactement deux médiatrices passant par le sommet opposé se constitue en obstacle tellement gênant que c'est à partir de là que la nécessité d'un raisonnement déductif s'impose. La figure, parce qu'elle ne se plie pas aux hypothèses, devient tout à coup inutile, négligeable. Les élèves souhaitent travailler à un autre niveau de validation.

Il faut rechercher la multiplication de telles structures conjecturelles pour donner une autre représentation des problèmes de raisonnement à nos élèves.

Ce travail sur les triangles et les médiatrices montre comment dépasser le cadre de l’expérimentation pour arriver à celui de la démonstration.