Quelques repères pour enseigner la géométrie au début du collège

Jean-Claude RAUSCHER
IREM de STRASBOURG

I) La question des enjeux de l'enseignement de la géométrie

En géométrie, on entend souvent dire que de nombreux élèves ne lisent pas correctement un énoncé décrivant une figure, la tentation est alors grande de chercher les causes des difficultés et des solutions en dehors de l'enseignement de la discipline elle-même en se tournant par exemple vers l'enseignement du français : "Qu'ils apprennent d'abord à lire et à rédiger ! ".

Mais on peut se demander si les apprentissages qu'il est virtuellement possible de développer dans le cadre du domaine disciplinaire lui-même sont assez précisés, connus et exploités. C'est à cette question que nous allons tenter de répondre ici en considérant le domaine des travaux géométriques au collège. Pour aborder cette question, on peut se demander ce que font les élèves lorsqu'ils font de la géométrie au collège.

II) Les compétences que permet de développer une géométrie de description et de tracé

Lorsqu'on parle de la géométrie au collège, on pense d'emblée au support qu'elle offre pour l'initiation au raisonnement déductif. Néanmoins, pour voir ce que l'on peut proposer aux élèves au début du collège, nous allons dans un premier temps laisser de côté les exercices de géométrie déductive qui demandent soit une conjecture, soit une justification, ou une démonstration. Il reste alors principalement tous les travaux que les programmes évoquent en parlant de description et de tracé de figures. L'analyse des tâches à effectuer par les élèves dans les premières années de collège, indépendamment de tout travail de démonstration, montre rapidement la richesse du support géométrique à ce niveau pour développer des compétences générales utiles dans de nombreux domaines autres que la géométrie et les mathématiques elles-mêmes.

A) Analyse des traitements des informations en jeu dans les activités de tracé d'une figure à partir d'un texte.

L'énoncé donne un certain nombre d'informations que la figure à réaliser

doit vérifier. Selon les énoncés, les informations données peuvent être structurées de façons très différentes et donner lieu à des tâches différentes pour être respectées.

Tout d'abord les étapes de la construction peuvent être données ou, au contraire, devoir être déterminées.

Voici un exemple d'énoncé où la figure décrite est déjà découpée en une suite ordonnée d'informations qui correspondent à un algorithme de construction :

Exemple 1 :

1) Tracer un segment [AB] ayant une longueur égale à 4 cm.
2) Tracer la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B.
3) Sur la perpendiculaire tracée, placer un point C tel que BC = 5cm.
4) Placer le point D aligné avec A et B tel que les segments [BD] et [AC] aient même longueur et que B soit situé entre A et D.
5) Tracer le cercle de diamètre CD.

Dans l'exemple suivant, le texte décrit la figure à réaliser globalement. La détermination d'une suite de tracés qui permettent de respecter les informations données est alors à la charge de l'élève.

Exemple 2 :

Construire un rectangle ABCD tel que AB = 4cm et BD = 6cm.

Ensuite, que l'élève ait à déterminer les étapes de la construction ou que celles-ci soient données, les informations données par l'énoncé peuvent nécessiter des traitements plus ou moins complexes pour être respectées. Analysons les deux exemples qui suivent où les étapes de la construction sont à déterminer.

Exemple 3 :

Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6cm et AC = 8cm.

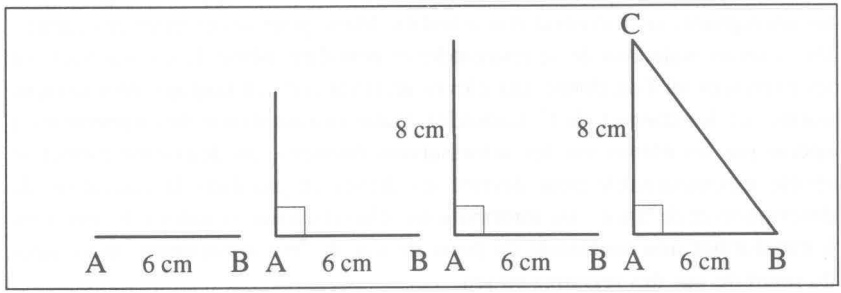
Exemple 4 :

Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6cm et BC = 8cm.

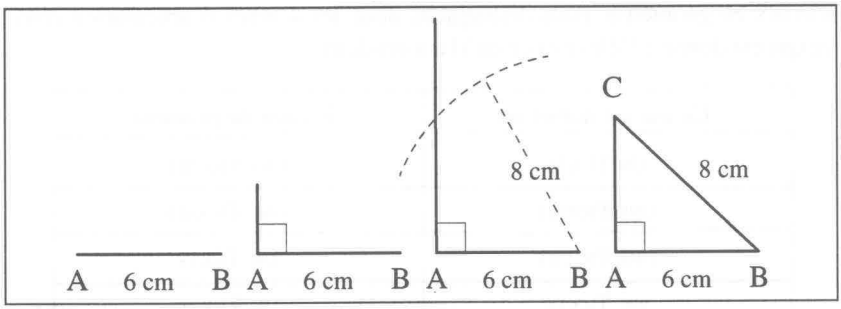
Ces deux exercices se ressemblent du point de vue de la structure et de la nature des contenus en jeu. Un oeil non averti ou trop peu attentif ne verra pas de différence quant à la complexité de deux exercices. Pourtant ces deux

exercices diffèrent quant à la complexité du traitement à opérer sur les informations données. Si, pour l'exemple 3, les informations se transforment successivement et directement en tracés, l'exemple 4 demande la conception et la réalisation de tracés intermédiaires pour concilier l'angle droit avec une hypoténuse qui fait 8 cm. Pour illustrer ces tracés, voici les deux films de construction correspondant aux deux exemples.

Pour l'exemple 3 :



Pour l'exemple 4 :



Dans l'exemple 3, un enchaînement des informations prises successivement de façon isolée permet d'obtenir la figure. En revanche, dans l'exemple 4, l'expérience montre que les élèves se trompent souvent en traçant un triangle où seules deux des trois contraintes sont respectées : pour obtenir la figure correcte, il faut tenir compte en même temps de deux contraintes (par exemple concilier l'angle droit en A avec le fait que BC = 8 cm).

Revenons aussi, à l'exemple 1 où les étapes de la construction étaient données. On peut là aussi observer des différences quant aux traitements à opérer sur les informations données pour réaliser la figure. L'observation des productions des élèves montrent en effet qu'ils achoppent bien souvent aux étapes 4 et 5 du programme de construction car c'est là qu'il s'agit de conci-

lier plusieurs contraintes (étape 4) ou de déterminer les éléments (centre, rayon) qui permettent de réaliser le tracé (étape 5).

B) La considération des registres en jeu

Les exercices qui demandent aux élèves de réaliser une figure à partir des contraintes données par un texte demandent donc aux élèves de traiter un ensemble d'informations avec divers degrés de complexité. La capacité de réaliser cet éventail de traitements est donc un enjeu d'apprentissage auquel les enseignants se doivent d'être attentifs. Mais pour développer ces capacités, il serait maladroit de se restreindre et peut-être même de commencer par les exercices où l'on donne aux élèves un texte écrit en langage géométrique normé (cf. les travaux de C. Laborde). Outre la complexité des traitements à opérer par les élèves sur les informations données, un deuxième aspect se révèle incontournable pour décrire les tâches en jeu dans la géométrie de description et de tracé : les informations relatives à une situation donnée sont à transformer non seulement du point de vue de leur agencement mais aussi du point de vue des registres en jeu.

Pour analyser les registres à prendre en compte par les élèves dans les travaux en géométrie, nous distinguons donc les 4 types d'articulation entre ce qui est donné à l'élève et ce qu'il a à produire :

Ce qui est donné est :	Il s'agit de produire :
UN TEXTE	UNE FIGURE
UNE FIGURE	UNE FIGURE
UNE FIGURE	UN TEXTE
UN TEXTE	UN TEXTE

Dans les deux premières lignes du tableau, nous sommes dans le domaine de la prise d'informations pour réaliser une figure : "je sais prendre en compte et agencer les informations pour faire la figure".

La troisième ligne correspond à l'écriture d'un texte décrivant une figure donnée ou donnant son programme de construction. Enfin donner le programme de construction d'une figure décrite globalement (ou inversement) correspond à des exercices rentrant dans le cadre de la dernière ligne du tableau. Avec les deux dernières lignes nous sommes alors dans le domaine de la communication d'informations : "je sais communiquer à autrui les informations pour qu'il puisse réaliser une figure".

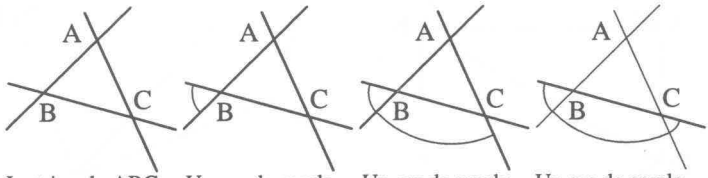
Nous avons déjà analysé la diversité des traitements d'informations à réaliser dans les exercices qui correspondent à la première ligne de ce tableau. Cette analyse s'applique aussi aux autres articulations de registres possibles et permet là aussi de décrire plus précisément l'éventail des apprentissages possibles dans le cadre de l'enseignement de la géométrie au début du collège.

Ainsi pour la reproduction de figures on peut indiquer aux élèves un film de construction comme dans l'exemple 5 qui suit (volontairement les consignes n'ont pas été données).

Plus classiquement, on donne la figure à reproduire avec les informations que l'on veut voir respectées (mesures ou codages) mais sans indiquer d'algorithme de construction. Ce dernier reste donc à déterminer par les élèves. Il en est ainsi pour les exemples 6, 7 , 8 et 9.

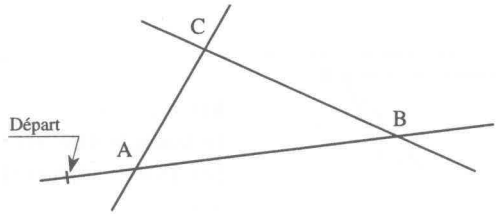
Exemple 5 :

Voici le début d'un film de construction au compas



Le triangle ABC de départ | Un arc de cercle de centre B | Un arc de cercle de centre A | Un arc de cercle de centre C

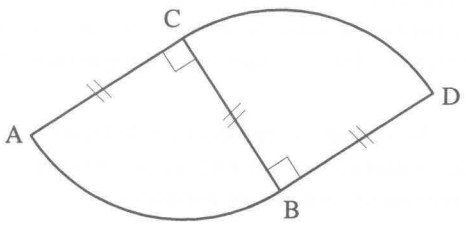
Pour le triangle ci-dessous, faire une construction du même genre, puis continuer la construction de la même manière grâce à trois nouveaux arcs de cercle de centre A, puis B et C.



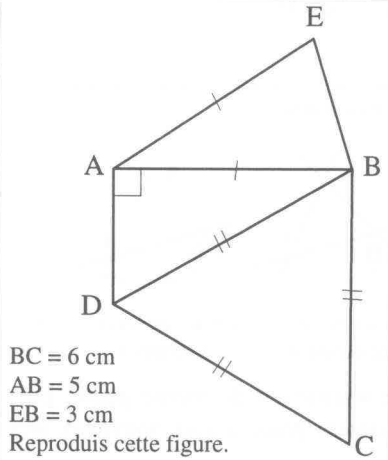
Exemple 6 :

La figure codée ci-contre est construite avec trois segments de même longueur et deux quarts de cercle.

Reproduis cette figure sachant que DB = 6 cm

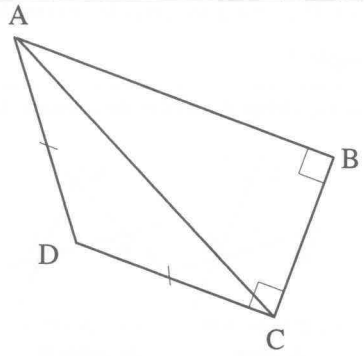


Exemple 7 :



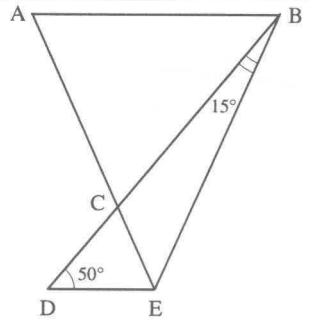
BC = 6 cm
AB = 5 cm
EB = 3 cm
Reproduis cette figure.

Exemple 8 :



DA = 5 cm
CA = 9 cm
Reproduis cette figu-

Exemple 9 :



BD = 10 cm
Le triangle ABE est isocèle en E.
Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Reproduis cette figure.

Dans ces exemples nous retrouvons différents degrés de complexité quant aux traitements à opérer sur les informations données pour déterminer un algorithme de construction.

Dans l'exemple 6, l'élève est libre de commencer sa reproduction par n'importe quel élément de la figure : tout choix débouche sur un algorithme possible de construction par enchaînement des informations données sur la figure. Dans les exemples suivant en revanche, l'élève n'est pas libre d'agencer les différentes étapes à sa guise : il doit tenir compte des différentes informations et découvrir comment les concilier. Pour commencer, il doit découvrir l'élément par lequel il peut amorcer la construction. Il s'agit alors d'un véritable "problème" de construction dont la figure de l'exemple 9 donne un bel exemple.

Pour les exemples 7, 8 et 9 on peut d'ailleurs distinguer des niveaux de difficultés différents, difficultés que nous avons observées chez les élèves dans nos classes en analysant leurs essais et erreurs pour reproduire ces figures.

La reproduction de la figure de l'exemple 7 est relativement facile : chaque triangle particulier peut être considéré et construit isolément. Il suffit de trouver le maillon qui le raccorde au triangle voisin. Les triangles à considérer ne se chevauchent pas. Néanmoins l'élève peut être tenté de considérer que (BC) et (BA) sont perpendiculaires, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on respecte les indications données.

En revanche pour l'exemple 8, le choix du triangle par lequel on commence la construction n'est pas libre. De plus pour respecter les contraintes données, il est nécessaire de prendre en considération plusieurs triangles à la fois : l'angle droit de sommet C concerne à la fois le côté [DC] du triangle DAC et le côté [CB] du triangle CAB.

La figure de l'exemple 9 présente lui aussi d'importantes difficultés : d'une part les triangles DEB et ABE se chevauchent et il faut en outre considérer simultanément les triangles AEB et DEB lorsqu'on veut prendre en compte le fait que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Décoder, formuler, communiquer des informations, effectuer des traitements de complexité variable dans des registres différents : si l'on y est attentif, au-delà des contenus en jeu, la géométrie permet au début du collège de développer des capacités générales très utiles dans d'autres domaines disciplinaires et professionnels où la prise en compte et le traitement d'informations sous diverses formes sont primordiaux.

De plus, comme nous allons le préciser, ces capacités préparent les élèves

à faire un saut important dans leur développement intellectuel : accéder au raisonnement hypothético-déductif.

III) Le passage d'une géométrie de l'observation à une géométrie déductive.

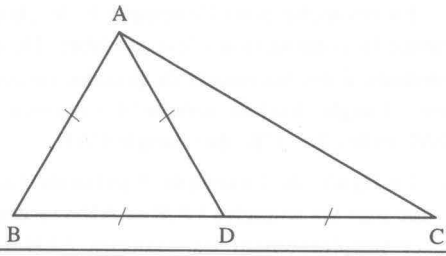
Tout exercice classique de démonstration, peut se décrire comme la donnée d'un certain nombre d'informations qu'il s'agit de traiter à l'aide de définitions et de théorèmes pour faire apparaître de nouvelles informations déduites des premières. Il ne s'agit pas comme dans un travail d'argumentation d'accumuler ou d'aligner les arguments (R. Duval, M.A. Egret, 1989).

Relativement à une figure, pour pouvoir par la suite distinguer les assertions qui ont un statut d'hypothèse de celles qui ont un statut de conséquence, il s'agit de savoir repérer les contraintes qui ont présidé à sa construction. Voici, par exemple, la même figure obtenue par deux enchaînements différents de contraintes.

Dans l'exemple 10 on posera la question de savoir si le triangle ABC obtenu est rectangle en A ; alors que pour l'exemple 11 on pourra se demander si le triangle ABD est un triangle équilatéral. Mais pour que ces questions aient un sens pour un élève, il sera nécessaire qu'il arrive à discerner la différence dans les manières d'obtenir une même figure.

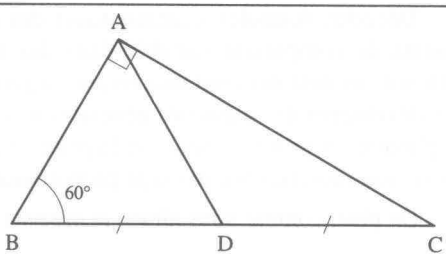
Exemple 10 :

Figure obtenue par :
-la construction d'un triangle équilatéral ABD,
-le placement d'un point C tel que D soit le milieu du segment [BC].



Exemple 11 :

Figure obtenue par :
- la construction d'un triangle ABC rectangle en A et tel que l'angle en B ait 60°,
- le placement du milieu D du segment [BC].



Nous voyons donc s'esquisser tout un travail préalable avec les élèves en 6ème et 5ème sur le repérage, la signification et la manipulation des informations dans le domaine géométrique. C'est ce travail que nous avons repéré plus haut en analysant les tâches que l'on peut proposer aux élèves dans le cadre d'une géométrie du tracé et de la description. Dans cette géométrie, les objets en jeu sont porteurs d'informations clairement annoncées. Il ne s'agit pas encore de faire jouer des théorèmes pour produire de nouvelles informations. Mais c'est déjà l'occasion pour les élèves de prendre en compte les informations qui président à la définition d'une situation et de les distinguer de celles qui en résultent.

De plus, ce travail préalable avec les élèves en 6ème et 5ème doit permettre aux élèves de développer des compétences utiles pour affronter par la suite les difficultés heuristiques des problèmes de géométrie : par exemple, l'analyse des différentes façons d'obtenir une même figure apprend aux élèves à analyser une figure donnée en sous-figures et de dépasser la première vision qu'ils ont de la figure.

Il nous est nécessaire de préciser d'avantage les traitements en jeu dans cette prise en considération des informations relatives aux situations géométriques rencontrées. Une hiérarchisation de la complexité des apprentissages à réaliser s'avère en effet utile. Par exemple, face aux figures présentées dans les exemples 10 et 11, on peut différencier les compétences des élèves : d'un côté ceux qui savent ordonner les propriétés qui président à la construction de ces figures, de l'autre côté ceux qui sont seulement capables de repérer et de désigner les informations dont est porteuse la figure en les amalgamant sans faire de lien entre elles. Pour employer l'expression utilisée par Van Hiele (1956), le niveau de pensée en géométrie de ces deux élèves n'est pas le même. Les apprentissages qui permettent à l'élève de repérer les informations prises isolément sont nécessairement antérieurs à ceux qui permettent à l'élève de dégager l'ordonnancement qui préside à la construction des figures.

Rappelons les niveaux de pensées décrits par Van Hiele

Niveau 0 (reconnaissance) : aucune analyse explicite des propriétés des figures ne préside à la reconnaissance des figures. Les figures sont reconnues par les enfants d'après leur apparence.

Niveau 1 (analyse) : à ce niveau de la géométrie, les figures deviennent porteuses de leurs propriétés. Les enfants analysent les propriétés de chacune des figures, mais ils ne sont pas amenés à les ordonner à l'intérieur d'une figure ou entre figures.

Niveau 2 (propriétés ordonnées) les enfants ordonnent et relient les propriété-

tés à l'intérieur d'une figure ou entre figures, mais ils n'organisent pas encore leurs assertions en démonstrations.
Niveau 3 (déduction) : certaines propriétés sont déduites à partir d'autres et les déductions sont explicitées sous forme de démonstrations.

Ces différents niveaux sont assez faciles à diagnostiquer. Chaque professeur reconnaîtra en effet les diverses réponses, maintes fois entendues pour certaines d'entre elles, d'élèves placés devant une figure dont ils ont à reconnaître et à justifier la nature de carré ou de rectangle.

Au ***niveau 0***, nous sommes dans le domaine d'une identification perceptive. Un élève qui est à ce niveau et auquel on demande comment il peut être sûr qu'il a devant lui un carré répondra par exemple que la figure en question en a la "forme". A ce stade, on rencontre d'ailleurs des élèves pour qui, un carré placé de "travers", ne sera plus un carré mais un losange.

Au ***niveau 1***, l'élève dépassera la justification globale pour dresser une liste d'arguments : *"la figure a 4 angles droits, ses côtés opposés sont parallèles et ils ont la même longueur, les diagonales ont même longueur etc."* Dans cette accumulation de preuves il ne se préoccupera, ni du statut de ses assertions, ni des éventuelles redondances ou au contraire d'insuffisances. De ce fait, à ce niveau là, un carré n'est pas nécessairement identifié comme un rectangle. Mais à ce niveau, les propriétés commencent à être explicitées par les élèves, indépendamment les unes des autres.

Au ***niveau 2***, l'élève ne se contentera pas de donner une accumulation inutile ou insuffisante de faits pour prouver qu'il a devant lui un rectangle ; il signalera un fait suffisant pour caractériser la figure : *"il y a quatre angles droits"*. Le carré est alors reconnu comme un rectangle, car à ce niveau la définition des figures entre en jeu.

Au ***niveau 3***, un élève qui en est à ce stade, admettra par exemple que pour avoir un rectangle, il suffit d'avoir un parallélogramme possédant un angle droit, chose qu'il n'aurait pas admise lorsqu'il en était à un stade précédent. De même à ce stade, l'élève est attentif au statut des assertions qu'il manipule : *"on sait, d'après ce qu'indique l'énoncé, que la figure est un parallélogramme..."*.

ABCD est un parallélogramme et (AB) et (BC) sont perpendiculaires,
donc
ABCD est un rectangle

Il apparaît alors qu'un travail mettant en jeu les différents traitements d'informations, tel que nous en avons repéré les possibilités dans le cadre de

la géométrie du tracé et de la description de 6ème et 5ème, favorise l'acquisition des compétences qui permettent aux élèves de différencier et de maîtriser les différents niveaux de pensée décrits par Van Hiele.

Résumons ces différents traitements que l'on peut ordonner ainsi :

- Au ***degré 1,*** l'élève doit identifier, représenter ou désigner une information prise isolément. Les figures deviennent porteuses de propriétés, mais celles-ci sont considérées de façons isolées ou amalgamées. L'élève sait par exemple repérer deux droites perpendiculaires sur un rectangle.

- Au ***degré 2,*** l'élève est amené à identifier les contraintes d'une situation géométrique. A ce niveau, les propriétés des figures ne sont plus amalgamées mais commencent à s'enchaîner et à s'ordonner. Par exemple, un élève à qui on donne la largeur et la longueur d'un rectangle connaît ou repère un enchaînement de contraintes qui débouche sur l'obtention du rectangle demandé.

- Au ***degré 3***, l'élève est amené à appréhender les jeux mutuels des contraintes d'une situation géométrique. A ce niveau, il est nécessaire de tenir compte simultanément de plusieurs contraintes. C'est le cas, par exemple, lorsqu'au lieu de connaître la longueur et la largeur du rectangle, l'élève connaît un côté et la longueur des diagonales.

Un travail dans le cadre de la géométrie de tracé et de description impliquant ces différents niveaux de traitements des informations constitue les bases de la compréhension du travail qui est demandé au degré 4.

- Au ***degré 4***, il s'agit pour les élèves de déduire certaines propriétés à partir de celles qui sont données et des théorèmes connus. Nous quittons alors le domaine de la géométrie de traitement pour atteindre celui de la géométrie hypothético-déductive.

Mais la prise en compte des différentes articulations de registres dans le cadre de la géométrie n'est pas moins importante pour favoriser cet accès à la pensée déductive.

Il est commun de constater qu'un élève est par exemple capable de reproduire une figure qui mettra en jeu un traitement de degré 2 ou 3, mais n'est pas capable de réaliser un traitement de même niveau dans un registre textuel (écriture de l'algorithme de construction de cette figure). Or, si l'élève ne dépasse pas cette difficulté à ce niveau, il lui sera alors difficile d'expliciter par la suite une pensée déductive au degré 4 en rédigeant par exemple une démonstration. C'est même en apprenant à articuler des registres différents, que les élèves pourront développer des compétences en jeu dans les raisonnements en géométrie. Ainsi, lorsqu'un élève passe du registre figural au registre textuel, pour écrire le programme de construction d'une figure, il est

souvent obligé d'analyser la figure en sous-figures. Cette capacité d'analyse des figures lui est fort utile par la suite pour affronter les difficultés heuristiques des démonstrations. Dans ce travail d'écriture du programme de construction d'une figure, il est aussi amené à se demander quels renseignements il est suffisant de donner, pour permettre au récepteur du programme de construire une figure correcte. Il est ainsi préparé à distinguer le statut (hypothèse ou conséquence) des propriétés de la figure à transmettre.

Nous voyons donc que pour préparer les élèves à entrer dans le monde de la pensée déductive les possibilités offertes par la géométrie d'*"apprendre à articuler plusieurs registres de présentation de l'information"* sont à exploiter (R. Duval ; 1988).

Entre une géométrie de l'observation et une géométrie déductive nous voyons donc s'esquisser un domaine de travail permettant de préparer les élèves à passer de l'une à l'autre. Ce domaine, se précise lorsqu'on prend en considération, d'une part les degrés de complexité des traitements d'informations, et d'autre part les articulations de registres en jeu. C'est l'ensemble des combinaisons relatives à ces points de vue que nous désignons par le domaine d'une "géométrie de traitement".

En conclusion :

La géométrie au début du collège est virtuellement très riche, mais encore faut-il développer ces virtualités, et tout d'abord les repérer...

L'observation des pratiques des enseignants réalisée dans le cadre de ma thèse (Rauscher, 1993) montre en effet, qu'au delà d'un accord sur les contenus à enseigner, il y a d'importantes différences entre les professeurs dans la façon de prendre en compte les possibilités d'apprentissage qu'offre une géométrie de traitement. Elle indique que les élèves dont les professeurs proposent des traitements variés tant du point de vue des registres en jeu que du point de vue de la complexité des traitements à opérer sur les informations données par les énoncés, progressent d'avantage que ceux dont les professeurs proposent des activités qui jouent peu sur ces variations possibles, mais qui demandent très (trop ?) précocement à leurs élèves de conjecturer et même de justifier ces conjectures aux hypothèses souvent mal définies.

Par cet article, nous avons donc voulu présenter quelques repères qui permettent à tout enseignant d'analyser les travaux qu'il présente aux élèves. Ils permettent alors d'élaborer et de justifier des activités développant à plein les apprentissages virtuellement possibles dans le cadre de la géométrie au début du collège : constructions points par points, transmissions de messages, etc...

Voici une **bibliographie indicative** pour les lecteurs qui voudraient avoir quelques compléments, soit du côté des recherches et des conclusions auxquelles je me suis référé, soit du côté des activités que l'on peut proposer aux élèves en début de collège.

DUVAL R. (1988), *Écarts sémantiques et Cohérence Mathématique*, I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1.

DUVAL R., M.A. EGRET (1989), *L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration,* I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.2.

IREM de Strasbourg (1987), *Le développement de compétences pour la géométrie,* Suivi Scientifique 1986-87, classe de 5ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.

IREM de Strasbourg (1988), *Vers l'apprentissage du raisonnement en géométrie,* Suivi Scientifique 1987-88, classe de 4ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.

IREM de Strasbourg (1989), *La géométrie de la 6ème à la 3ème & Le théorème des tiers* , Suivi Scientifique 1988-89, classe de 3ème, Lyon, bulletin Inter-IREM 1er Cycle.

JAIME A., GUTIERREZ A. (1989), *The Learning of plane isometries from the viewpoint of Van Hiel model, Psychologie of mathematics education*, Actes de la 13ème conférence internationale, Paris.

LABORDE C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique : Deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat, U. S. M. Grenoble.

LABORDE C. (1988), *Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège*, I.R.E.M. de Strasbourg, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1.

MESQUITA A. (1989), *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves : éléments pour une typologie*, Thèse de Doctorat, U.L.P. Strasbourg.

PADILLA SANCHEZ V. (1992), *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de Doctorat, U.L.P. Strasbourg.

PLUVINAGE F., RAUSCHER J-C. (1986), *La géométrie construite mise à l'essai*, I.R.E.M. de Grenoble, Petit x, n°11.

VAN HIELE. P. V. (1959), *La pensée de l'enfant et la géométrie*, Paris, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), mars 1959, N°198 p. 199-205.