Des schémas pour consolider le sens de la numération et des opérations

Michèle MARTIN, Colette MERCIER,
Paulette MOULI
IREM de TOULOUSE

Objectifs

En sixième, *on consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.* [1]

Pour pouvoir proposer des activités réellement destinées à enrichir les acquis, nous devons prendre en compte à la fois les contenus des programmes de l'école primaire et les connaissances de nos élèves à l'entrée en sixième.

A l'issue du cycle des approfondissements, les élèves doivent, par exemple :

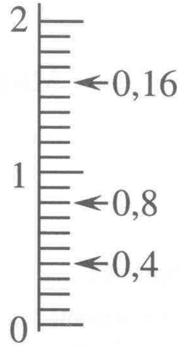
• *connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix ;*
• *connaître la signification de chacun des chiffres de l'écriture à virgule d'un nombre décimal ;*
• *comparer, ranger des nombres décimaux ;*
• *multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, par 100, par 1000, multiplier un entier par 0,1, par 0,01.*

Cependant, un certain nombre d'entre eux n'ont pas mené à bien ces apprentissages et arrivent en sixième avec des représentations erronées de l'écriture des nombres. Elles font obstacle à la compréhension des écritures décimales et à une bonne maîtrise des opérations comme le montrent les réponses ci-dessous, données par des élèves dans les cahiers de l'évaluation

[1] Les parties de cet article écrites en italiques sont des extraits du programme de Sixième ou de primaire.

CM2-Sixième. La signification des chiffres n'étant pas acquise, certains réinvestissent même des techniques opératoires inadaptées car laborieuses.

38,45 + 10 =	281,25 × 100 =
38,45 – 110 =	
2,3 × 10 =	
27,1 × 100 =	
27,1 : 100 =	936,7 : 100 =
825 : 100 =	
18,7 : 1000 =	
18,7 : 1000 =	



L'objectif d'un travail de consolidation ne peut donc être limité à l'amélioration de techniques opératoires basées sur de simples descriptions de placement de virgule et adjonction éventuelle des zéros adéquats. Il faut aussi concevoir des activités permettant aux élèves de reconstruire, ou d'approfondir, le sens de la numération et des opérations.

Méthodologie

Les activités proposées doivent donc amener l'élève **à remettre en cause ses représentations initiales à partir de ses erreurs.** Pour cela, il ne suffit pas qu'il plaque des réponses justes sur des réponses inexactes. Il faut aussi lui donner les moyens d'analyser ses erreurs et de prendre conscience de leur origine.

L'un de ces moyens est le lui demander d'exprimer un même résultat sous des formes différentes, puis de comparer les réponses ainsi obtenues. Par exemple - nous le montrerons par la suite - la confrontation de résultats donnés à la fois, en écriture en chiffres avec différentes unités, en écritures fractionnaires, et à l'aide de représentations schématiques de nombres, lui permet de repérer et réduire les décalages entre les savoirs attendus et les savoirs construits. Ce travail d'auto-évaluation est particulièrement fécond s'il est organisé en petits groupes.

Les activités présentées ont été choisies à la fois :

• pour montrer comment la schématisation a été utilisée pour construire, ou consolider, le sens de la numération et des opérations ;

• pour signaler quelques écueils à éviter et quelques précautions à prendre pour gérer les écarts entre les effets attendus et les effets produits.

Schématisation d'un entier : un outil de remédiation

A leur arrivée en sixième, les élèves ne sont pas tous *"capables de faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines, de décomposer ce nombre suivant les puissances de 10, de savoir multiplier ou diviser un entier par 10, 100, 1000"*. Il nous paraît nécessaire et possible - l'expérience nous l'a montré - d'améliorer leurs compétence dans ce domaine.

L'objectif de l'exemple 1 ci-dessous est donc de réactiver ou de reconstruire le sens de la numération des entiers en s'appuyant sur un double codage du nombre : d'une part son écriture en chiffres, d'autre part des schémas représentant unités, dizaines, centaines et unités de mille. Plusieurs schémas permettent de représenter un nombre suivant les regroupements adoptés (voir dans cet exemple, le schéma correspondant au nombre 1 342).

Activité préalable

Il convient cependant de s'assurer que cette schématisation du nombre est comprise des élèves, par exemple en la faisant fonctionner dans une situation de communication.

Les élèves, par groupes de deux, disposent de planches d'unités, dizaines, centaines qu'ils peuvent découper pour communiquer le nombre de leur choix - sous forme de schémas uniquement - à un autre groupe. Celui-ci doit retrouver l'écriture chiffrée du nombre transmis. Cette activité, dont l'aspect ludique motive les élèves, permet de les familiariser rapidement avec ce codage (utilisé d'ailleurs sous des formes voisines en primaire).

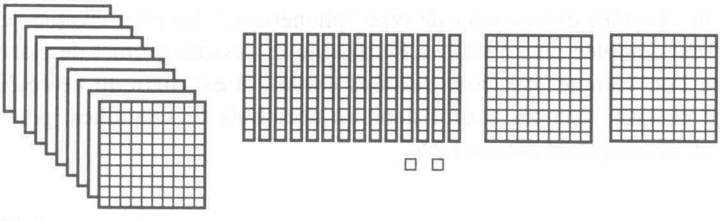
Exemple d'exercice proposé

<u>Première phase</u> - Réponses individuelles aux questions ci-dessous.

Exemple 1

Consigne : le schéma ci-dessous représente un nombre ; chaque □ correspond à une unité.

Schéma



1 - Ecrire en chiffres le nombre d'unités du schéma.

2 - Quel est le nombre de centaines représentées sur le schéma ?

Colorie en bleu la partie correspondante du schéma.

3 - Quel est le chiffre des dizaines ? Entoure en rouge la partie correspondante du schéma.

Deuxième phase - Echange en groupe classe ou en petits groupes.

Les questions posées **facilitent le dialogue enseignant-élève** à propos des erreurs rencontrées puisqu'il doit **y avoir correspondance entre la réponse numérique et sa traduction sur le schéma.**

Exploitation des réponses données

Question 1 - Confrontation des stratégies mises en œuvre pour déterminer le nombre d'unités :

- certains calculent à partir des regroupements dessinés, dans ce cas
$$2 + (14 \times 10) + 100 + 100 + 1000,$$
- d'autres regroupent 10 dizaines et déterminent visuellement les chiffres utiles sans calcul ou décomposent :
$$(1 \times 1000) + (3 \times 100) + (4 \times 10) + 2 = 1\,342.$$

C'est l'occasion :

- pour les élèves, de prendre conscience qu'il existe un schéma “canonique” plus pratique pour reconnaître rapidement le nombre,
- pour le professeur, de faire sentir l'utilité d'associer à un nombre entier l'image mentale du schéma canonique : on peut s'y référer pour vérification ou explications d'erreurs.

Quelques activités de correspondance nombre / schéma “canonique”, à l'aide d'un rétroprojecteur, facilitent par la suite l'évocation de l'image mentale.

Question 2 - On rencontre essentiellement deux types d'erreurs liées au sens de la numération :

- le nombre des centaines est 3 (ou 2) avec coloriage correspondant : il y a confusion entre chiffre des centaines et nombre de centaines (l'unité des mille n'est d'ailleurs pas prise en compte dans le coloriage),
- le nombre des centaines est 300 (ou 200) : même erreur d'oubli des unités de mille, doublée d'une erreur de type “phonétique”. En effet chaque “centaine” est comptée pour “100”. L'illustration ci-dessous permet de clarifier ce que l'on compte, car pour certains élèves, il est difficile de réaliser qu'une centaine compte pour 1 dans un décompte de centaines, pour 10 dans un décompte de dizaines, etc.

• Le nombre de centaines est 1300 (ou 1200) avec coloriage correspondant : même erreur “phonétique”, les unités de mille comptant pour 1000. Cependant les élèves donnant cette réponse ont compris qu'il fallait prendre en compte les unités de rang supérieur.

<u>Question 3</u> -

L'erreur la plus fréquente consiste à dire “le chiffre des dizaines est 14” et permet de réfléchir à la signification du mot chiffre.

Autre type d'erreur (liée au type d'apprentissage) A la question 2, certains élèves répondent : “le nombre de centaines de 1342 est 42” et ne colorient rien sur le schéma. Leur réponse semble correspondre à un automatisme de découpage du nombre après le chiffre des centaines, avec confusion de la partie droite et de la partie gauche. Le schéma facilite, dans ce cas aussi, la construction de sens : 42 unités ne permettent pas de reconstituer une centaine.

Prolongements

Le sens de la division par les puissances de 10 se trouve renforcé :

• par la visualisation des groupes de 10, 100, 1000 et des restes correspondants,

• par le lien qu'ils rendent tangible entre, par exemple, la décomposition associée au nombre de centaines et la détermination du quotient et du reste dans cette division :

$$\begin{cases} 1342 = (13 \times 100) + 42 \\ 42 < 100 \end{cases} \quad ① \qquad \begin{array}{r|l} 1342 & 100 \\ \cline{2-2} 42 & 13 \end{array} \quad ② \qquad \begin{array}{r|l} \text{dividende} & \text{diviseur} \\ \cline{2-2} \text{reste} & \text{quotient} \end{array} \quad ③$$

Il est important que les élèves constatent l'inutilité de “poser” les divisions par 100 (ou 10, ou 1000) puisque quotient et reste sont à repérer dans l'écriture chiffrée. Cependant, l'écriture 2 a une fonction schématique de “boussole” facilitant l'identification des rôles des quatre entiers de la division (écriture 3).

• Ces activités facilitent la compréhension des écritures décimales et des notions de dixièmes et centièmes…

• Elles permettent d'organiser des activités de soutien ayant pour objectif la maîtrise des techniques d'addition et soustraction avec retenues.

- Elles favorisent la compréhension des changements d'unités : on exprime un nombre en unités, dizaines, centaines...comme on exprime une contenance en litres, décalitres, hectolitres...
- Elles participent aussi à la construction du sens de la division euclidienne.

Les quelques heures qui leur sont consacrées en début de sixième sont largement récupérées ensuite.

Demi-droite graduée

"Lire l'abscisse d'un point, situer un point d'abscisse donnée" (abscisse en écritures décimales ou fractionnaires) sont des compétences exigibles en sixième.

A l'école primaire elles ont été l'objet d'une simple initiation, et les élèves abordent les activités proposées en sixième essentiellement à travers l'image familière de leur règle graduée. Or cette image paraît brouiller deux notions essentielles : la notion d'unité, la notion de dixième.

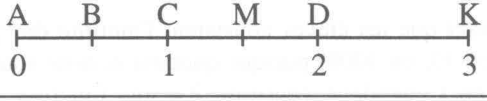
La notion d'unité

L'unité peut être le centimètre qui est effectivement la distance entre deux entiers consécutifs de leur règle graduée ; mais elle peut être aussi le décimètre qui est, sur leur règle, la distance entre deux multiples de 10 ; ou bien le mètre qui, sur la règle graduée utilisée au tableau, sépare deux multiples de 100 ! L'unité n'est donc pas la longueur dont les reports successifs à partir de zéro déterminent la position des entiers consécutifs de la graduation. Elle est considérée uniquement comme une précision accompagnant un nombre à fin d'exprimer une mesure. Certains élèves peuvent donc compléter une graduation par des entiers manquants, sans être capable de repérer l'unité.

D'où leur embarras lorsqu'on leur demande :

Exemple 2

Colorier un segment unité sur la règle graduée ci-dessous.

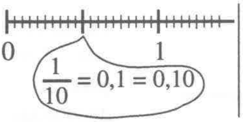


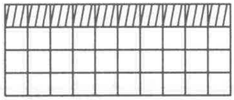
Exemples de réponses :

- il n'y a pas d'unité car pas de cm,
- l'unité est la règle AK,
- l'unité est le segment [AB].

La notion de dixième

Il faudrait préciser **dixième d'unité**. Mais d'une part le mot unité est bien souvent implicite et d'autre part il est l'objet de représentations erronées comme nous venons de le voir. Le dixième n'est donc pas perçu comme le résultat du découpage de l'unité en dix parties égales. Sur 80 élèves de sixième interrogés, 25 ont fourni les réponses suivantes :





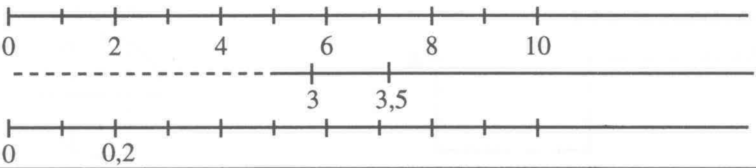
le dixième de la tablette de chocolat est la partie hachurée.

Le dixième est donc interprété - par analogie avec la dizaine découpée en dix unités - comme une part rassemblant dix parts égales ou comme le dixième trait d'une graduation : d'autant plus que 0,1 = 0,10 et que des élèves sont ainsi confortés dans leur représentation des décimaux comme une juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule. Cette mauvaise représentation du dixième est souvent étendue à 1/3 et au 1/4 comme l'illustrent les erreurs ci-après :

Il nous paraît donc important d'utiliser divers types de graduations et d'inciter les élèves à se repérer par exemple à l'aide des couleurs.

Exemple 3

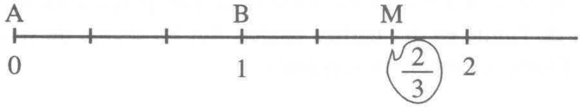
Colorier une unité en rouge, un dixième en vert



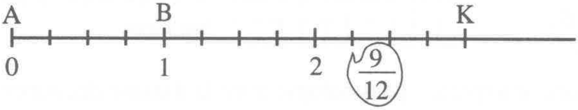
Il est bon aussi qu'ils fixent cette connaissance et sachent expliquer leur choix en disant :

- **"l'unité est la distance entre deux entiers consécutifs",**
- **"on obtient un dixième en divisant l'unité en dix parts égales"** ou **"une unité est égale à 10 dixièmes".**

D'autres types d'erreurs dans la recherche de l'abscisse fractionnaire d'un point paraissent aussi imputables à un manque d'explicitation des règles de représentation.



L'abscisse de M est AM et non BM !



Le dénominateur 12 correspond au découpage de [AK] au lieu du découpage de l'unité.

Il faut donc que les élèves disposent d'une règle à laquelle se référer en cas d'erreur, par exemple, pour écrire l'abscisse fractionnaire d'un point M :

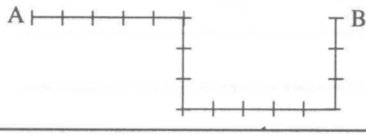
- **au dénominateur indiquer le nombre de parts égales contenues dans l'unité ;**
- **au numérateur indiquer le nombre des mêmes parts entre l'origine et le point M.**

Provoquer des va-et-vient entre schéma et règle nous paraît indispensable à leur appropriation qui se fait souvent par essais/rectifications. C'est par exemple le cas des élèves qui n'ont pas intégré "parts égales" et produisent les réponses ci-dessous :

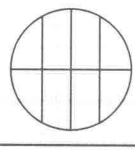
Exemple 4

QUESTION : Hachurer le quart :

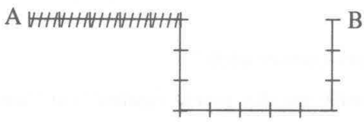
du chemin de A à B

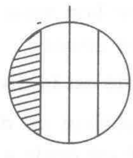


du disque



RÉPONSES





Sens des opérations et comparaison de longueurs

En sixième, les résolutions de problèmes *"doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations figurant au programme"*. Il faut aussi *"entraîner l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui à chaque usage seront remplacées par des valeurs numériques."*

Pour atteindre ces objectifs, il nous a paru intéressant, et efficace à l'usage, de prendre comme point de départ les expressions "fois plus", "fois moins", "de plus", "de moins". Ces expressions sont associées à des situations concrètes, car elles sont fréquemment utilisées dans la vie courante. Elles paraissent familières aux élèves ; cependant elles fonctionnent souvent comme des mots déclencheurs : "plus : j'ajoute", "moins : je retranche". Le travail d'analyse de ces expressions peut être conduit sous trois formes : géométrique par l'élaboration de schémas, numérique par l'écriture d'égalités, et sous forme de phrases à lire ou produire.

Ceci suppose que soient déjà acquises quelques compétences relatives à la construction de sommes de segments et de multiples de segments. Par exemple, celles requises par l'exercice suivant :

Exemple 5

Patricia a téléphoné à Joël l'énoncé de l'exercice de mathématiques, mais elle lui a donné les informations dans le désordre.

1 - Peux-tu aider Joël à les remettre dans l'ordre ?
2 - Construis les segments demandés.
3 - Calcule les longueurs de ces segments.

Informations dictées par Patricia :

- Le segment [IJ] est 3 fois plus long que le segment [AB].
- Le segment [CD] mesure 8 cm de plus que le segment [MN].
- Le segment [AB] mesure 3 cm.
- Le segment [MN] mesure 5 cm de moins que le segment [IJ].
- Le segment [PQ] est 4 fois moins long que le segment [CD].

Des activités de transcodage comme celle de l'exemple 6 - c'est-à-dire de traduction d'un langage à un autre - permettent simultanément d'améliorer **le sens des opérations, de préparer à la mise en équations et à la résolution d'équations** du type :

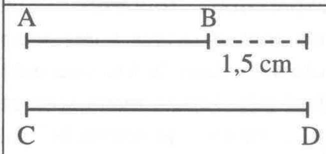
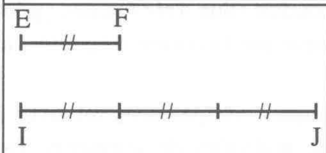
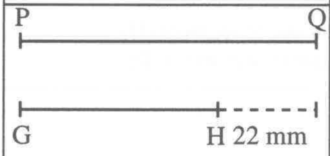
$$a + x = b \text{ et } ax = b.$$

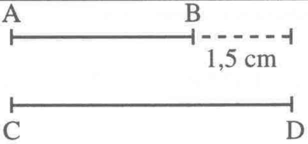
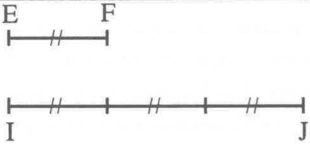
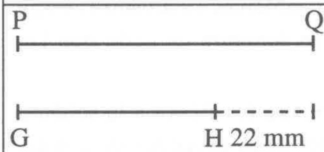
Exemple 6

CONSIGNE :

Observer la deuxième ligne du tableau. Elle indique **trois façons différentes de comparer** les longueurs AB et CD : un schéma codé, des phrases comparatives, des égalités.

Dans les autres lignes du tableau, deux longueurs sont comparées d'une seule façon. **Ecrire, dans les deux cases vides de chaque ligne, les comparaisons manquantes.**

Schémas	Phrases comparatives utilisant les expressions : fois plus, fois moins, de plus, de moins.	Egalités
	[CD] mesure 1,5 cm de plus que [AB] ou [AB] mesure 1,5 cm de moins que [CD]	en cm CD = AB + 1,5 ou AB = CD – 1,5
		
	[RS] est 5 fois plus long que [UV] ou [UV] est 5 fois moins long que [RS]	
		MN = 4 × KL ou KL = MN : 4 ou KL = … MN
		

Schémas	Phrases comparatives utilisant les expressions : fois plus, fois moins, de plus, de moins.	Egalités
	[CD] mesure 1,5 cm de plus que [AB] ou [AB] mesure 1,5 cm de moins que [CD]	en cm CD = AB + 1,5 ou AB = CD – 1,5
	[EF] et 2 fois plus petit que [IJ] ouo [IJ] et 2 fois plus grand que [EF]	IJ = EF + 2 ou EF = IJ − 2
	[RS] est 5 fois plus long que [UV] ou [UV] est 5 fois moins long que [RS]	UV = RS − 5 ou RS = UV + 5
	[KL] est 4 fois moins long que [MN] ouo [MN] est 4 fois plus long que [KL] ou [KL] est le quart de mn	MN = 4 × KL ou KL = MN : 4 ou KL = 1/4 MN
	[PQ] mesure 22 mm de moins que [GH] ou [GH] mesure 22 mm de plus que [PQ] oou [GH] est le 3 quart de PQ	PQ = GH − 22 ouo GH=PQ+22 ouo GH = 1/22 PQ

Réponses d'un élève (donnant un exemple des erreurs les plus fréquentes)

Analyse des erreurs. Les réponses proposées par cet élève font apparaître :

- ligne 2 : Confusion entre différence et produit : "[IJ] est 2 fois plus grand que [EF]" indique que seule la différence entre [IJ] et [EF] est prise en compte ;
- ligne 3 : Mots déclencheurs : 5 fois plus traduit par + 5, 5 fois moins par – 5 ;
- ligne 4 : Pas d'erreur : cet élève semble capable d'interpréter : MN = 4 × KL et KL = MN : 4 ;

• ligne 5 : Des difficultés pour traduire le schéma par des phrases et donc par des égalités : au segment le plus long [PQ] est attribué le rôle du plus court [GH] ;
• La phrase "[GH] est le 3 quart de [PQ]" correspond approximativement au rapport des deux segments. Elle peut être imputable à une consigne mal explicitée.
• GH = 1/22 PQ peut avoir pour cause une confusion entre GH = PQ + 22 et GH = PQ : 22.

La présentation en tableau peut induire certaines erreurs par transposition injustifiée d'une case à l'autre (voir ligne 5). Cependant, la plupart des erreurs relevées sont représentatives d'erreurs fréquemment rencontrées, en début d'apprentissage, dans des exercices de présentation plus linéaire. Ces erreurs peuvent persister longtemps, si elles ne sont pas suffisamment mises à jour en sixième.

Par contre, la mise en parallèle de ces trois langages donne plus de cohérence à l'apprentissage et est source de progrès : on peut s'appuyer sur les réussites pour consolider ce qui est encore en cours d'acquisition.

Prolongements de cette activité

L'analyse grammaticale des deux phrases associées à chaque schéma, permet de souligner que les segments comparés sont, tour à tour, sujets du verbe. Ceci permet d'introduire la traduction de ces phrases par deux égalités isolant alternativement chaque longueur dans un membre. Ce type d'activité doit être associé à des activités de résolution de problèmes finalisant ces égalités : on exprime la quantité que l'on cherche en fonction de celle que l'on connaît.

Ce passage du numérique au géométrique prépare les élèves à la schématisation de problèmes et les aide à conceptualiser deux procédés de comparaison qu'ils rencontreront tout au long de leur scolarité : comparaison par différence, comparaison par quotient.

Conclusion

Les schématisations utilisées ont permis de traduire des propriétés caractéristiques par des codages visuels. Mais, comme tous les codages, ils sont utilisables par des initiés qui ont appris à repérer et identifier ce qu'on leur "donne à voir". Il est par conséquent essentiel de mettre à jour l'implicite.

Complémentaires du langage oral et du langage écrit, les schémas ont permis d'échanger des représentations, de confronter des connaissances, de structurer des savoirs, ou de modéliser. Schématiser est donc un moment essentiel de l'apprentissage. Après le temps de la découverte et de la sensibilisation, la traduction en images des premières acquisitions, non seulement facilite leur mémorisation, mais permet le passage à l'abstraction nécessaire à toute conceptualisation.

Il est en outre important de montrer que ces schémas ne sont pas figés. Des savoirs nouveaux les compléteront ou les remettront en cause : la droite graduée en est un bon exemple.

Remarques, notes, expérimentation