

Le tour de l'aire

Georges COMBIER - René MULET-MARQUIS

Martine PHILIPPON

IREM de LYON

Cet article reprend la partie relative à la classe de sixième de la brochure de l'IREM de Lyon : Le tour de l'aire en collège.

Présentation

Cet article a une double source : la recherche et les stages de formation. La recherche ¹ porte à l'origine sur les problèmes posés par l'enseignement des décimaux et sur les rapports entre le numérique et le géométrique à l'école élémentaire. Les stages qui faisaient suite aux évaluations à l'entrée en sixième ont permis une analyse par les enseignants des erreurs de leurs élèves qui a confirmé que le concept d'aire, en cours d'élaboration à ce stade de la scolarité, ne se construit pas indépendamment de celui de longueur et de périmètre.

Les connaissances et les compétences qu'il nous paraît souhaitable de développer en sixième

Notre but est de permettre à l'élève de construire, en les différenciant l'un de l'autre, les concepts d'aire et de périmètre. Pour cela, il faut qu'il sache associer au périmètre la mesure du contour de la figure. De plus, il doit avoir conscience que la connaissance du périmètre d'un polygone se résume à la connaissance de la longueur de ses côtés alors que pour déterminer son aire, il est nécessaire de mesurer d'autres dimensions que les côtés (après avoir effectivement ou mentalement soit transformé le polygone en une figure de base : rectangle, triangle..., soit l'avoir décomposé en figures élémentaires). Une étape importante de la construction de ces concepts est la dissociation de l'aire d'une figure de sa forme. Ceci vaut en particulier pour l'unité d'aire qu'il est possible de construire sous une grande variété de formes.

L'élève doit également dépasser, la conception spontanée de la variation conjointe des périmètres et des aires et savoir que, dans le cas d'une figure faite de deux figures accolées, il y a additivité des aires, mais pas des périmètres.

¹ Douady R., Perrin-Glorian M.J. 1989

Il faut aussi, bien sûr, que l'élève sache que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant la longueur par la largeur et ne généralise pas abusivement ce calcul. Cette formule doit être associée à la multiplication qui permet de dénombrer les carrés unités nécessaires pour paver ce rectangle. On peut alors installer la correspondance entre les unités d'aire (image du pavage du carré unité par des carrés unités, de rang immédiatement inférieur) et permettre à l'élève de gérer les changements d'unités en prenant appui sur cette image.

Enfin il nous paraît nécessaire de prendre en compte la notion d'encombrement qui ne fait pas usuellement l'objet d'un apprentissage (ce n'est pas une notion mathématique) mais dont nous faisons l'hypothèse qu'elle vient parasiter chez certains élèves les notions d'aire et de périmètre. Nous donnons à ce mot son (ses ?) sens usuel : par exemple un rectangle de $36\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ est plus encombrant qu'un rectangle de $10\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ bien qu'il ait une aire plus faible car il ne rentre pas dans une feuille standard.

Du côté des programmes et des mathématiques

Voici quelques-unes des compétences exigibles citées dans les nouveaux programmes en vigueur à la rentrée 96 : *Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple, comparer des périmètres, comparer des aires, calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle, effectuer pour les longueurs et les aires des changements d'unités de mesure*. Les commentaires invitent à déterminer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, de quadrillages et d'encadrements. L'ensemble des activités proposées dans ce texte se place tout à fait dans le cadre proposé par les programmes.

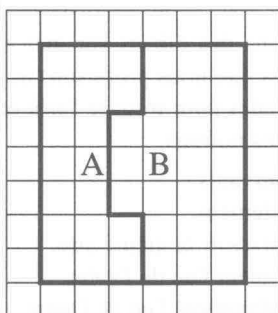
On peut dire que derrière la détermination de l'aire par report, découpages et recollements se trouve l'invariance par isométrie, que lorsque l'on décompose une figure en figures élémentaires pour calculer ensuite son aire on met en jeu l'additivité et qu'enfin, le fait qu'elle soit définie à une constante multiplicative près correspond aux problèmes de changements d'unités.

Du côté des élèves

À l'entrée en sixième, les notions d'aire et de périmètre sont en cours d'acquisition. Elles sont souvent associées pour l'élève à des formules plus qu'à leur signification géométrique : de nombreuses erreurs relèvent d'un usage inadéquat des formules que l'on peut estimer lié à l'absence de contrôle par le sens géométrique (par exemple, calculer le périmètre d'un triangle en ajoutant ses côtés et en multipliant par deux). Nous avons également constaté

que ces notions ne sont pas clairement distinguées, d'une part entre elles, et d'autre part des caractéristiques de la figure comme sa forme ou son encombrement. Par exemple, dans les évaluations d'entrée en sixième, de nombreux élèves, connaissant les périmètres de deux triangles les ajoutent pour calculer le périmètre de la figure formée par les deux triangles accolés. On peut supposer que cette erreur provient de l'utilisation d'un "théorème-élève" : "comme on assemble les formes, on additionne les périmètres des deux figures pour obtenir le périmètre total". Dans ces mêmes évaluations, on peut trouver l'exercice suivant :

Exercice 36 (1992)



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre. Entoure dans chaque cas la réponse qui convient

- a. L'aire de la parcelle A est la plus grande
Les deux parcelles ont la même aire
L'aire de la parcelle B est la plus grande

Explique ton choix :

- b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand
Les deux parcelles ont le même périmètre
Le périmètre de la parcelle B est le plus grand

Explique ton choix :

Réponse b. "Le périmètre B est plus grand que celui de A parce que B a plus de carreaux".

Cette erreur peut être interprétée comme l'utilisation d'un autre "théorème-élève" : "quand on compare deux figures, celle qui contient le plus de carreaux est celle qui a le plus grand périmètre".

Plus généralement, on peut faire l'hypothèse que les élèves placés dans une situation où ils doivent fournir une réponse utilisent la grandeur la plus facile à calculer ou à percevoir.

Indépendamment des évaluations, nous avons fait passer à nos élèves, avant, tout enseignement sur ce thème, un test où ils devaient calculer l'aire d'un rectangle, convertir des mesures d'aires et dessiner une surface de un demi-centimètre carré d'aire.

Ce test nous a permis de mettre en évidence trois points importants :

- 1 - Même quand l'élève calcule correctement l'aire du rectangle, l'unité utilisée est souvent le cm.
- 2 - Les changements d'unités d'aire (m^2 - cm^2 ...) se font massivement en utilisant les règles de changement d'unités de longueur.

- 3 - Si l'élève doit tracer une figure d'aire $1/2 \text{ cm}^2$, il dessine très souvent un carré dont le côté mesure $1/2 \text{ cm}$.

La dénomination “centimètre-carré” attache l'unité à une forme : le carré, et à une longueur : le centimètre, qui est la mesure de son côté.

Donc, de la même manière, pour l'élève, le $1/2 \text{ cm}^2$ est attaché à une forme : le carré, et à une longueur : le demi-centimètre qui est la mesure de son côté.

Une progression en classe de sixième

1 - Comparaison d'aires par découpage et recombinaison²

Les objectifs

Nous souhaitons faire expliciter les conceptions des élèves sur aire et périmètre lors de la première activité sur ces thèmes que nous proposons aux élèves. En évitant le recours systématique aux formules pour trouver l'aire ou le périmètre nous voulons travailler sur le sens de ces notions.

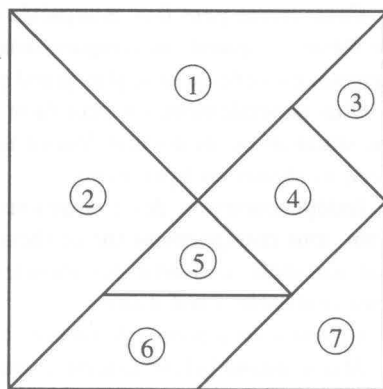
Cette première activité vise les apprentissages suivants :

- L'aire se conserve par découpage et recollement.
- Des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
- L'aire et le périmètre varient indépendamment l'un de l'autre.
- L'aire et l'encombrement varient indépendamment l'un de l'autre.

Le matériel

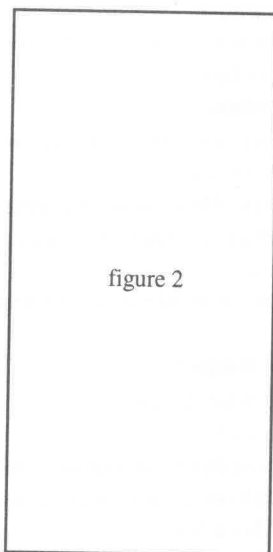
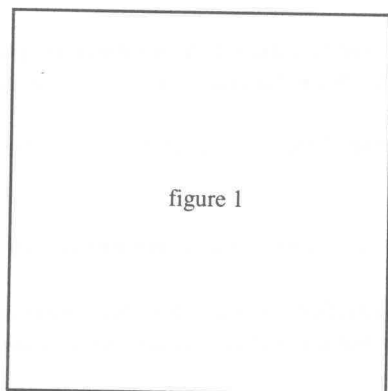
- 1 tangram et 1 feuille avec les trois figures par élève
- 1 feuille “réponse” par groupe de 3 ou 4 élèves (identique à la fiche-élève)
- 3 feuilles blanches
(format 15×11) par groupe.

LE TANGRAM

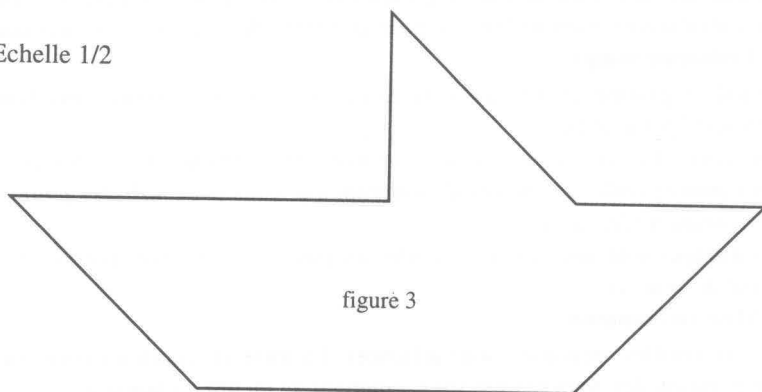


² Cette activité a été développée à partir d'une idée d'une équipe d'enseignants de CHAMBON-FEUGEROLLES.

- 1 - Découpe soigneusement les pièces numérotées du Tangram.
- 2 - En utilisant ces pièces reconstitue la figure 1
- 3 - En utilisant ces pièces, compare les aires des figures 1, 2 et 3.



Echelle 1/2



Les figures 1 et 2 ont la même aire ; la figure 3, plus "encombrante" que les deux autres, a une plus petite aire.

La figure 1 a le plus petit périmètre, la figure 3 le plus grand.

La figure 3 peut être obtenue par recollement de différentes manières : la pièce du tangram inutilisée peut être différente suivant les cas.

Déroulement de l'activité

A - Première phase

Durée : 55 minutes. Chaque élève dispose d'un tangram et d'une feuille avec les trois figures.

→ Premier temps :

Consigne : Découpe les pièces du tangram et utilise ces pièces pour reconstituer le carré (figure 1).

Les élèves travaillent individuellement sur la figure 1. Si un élève ne parvient pas à refaire la figure 1, il peut consulter le tangram "entier" dont dispose le professeur.

Il s'agit, dans cette partie, de familiariser l'élève avec un travail de type "puzzle".

→ Deuxième temps :

Consigne : Utilise les pièces que tu as découpées pour comparer les aires des figures 1, 2 et 3.

Les élèves travaillent tout d'abord individuellement. La contrainte consistant à imposer l'utilisation des pièces a pour but d'éviter le recours aux formules pour calculer les aires.

Ensuite les élèves travaillent en groupes de 3 ou 4 pour comparer et valider leurs résultats et, éventuellement, pour une entraide, si celle-ci est nécessaire.

→ Troisième temps :

Quand le groupe estime avoir terminé, le professeur remet une feuille "réponse" par groupe.

Consigne : Ecrivez vos conclusions et montrez comment vous y êtes arrivés. Vous pouvez coller les pièces du tangram que vous avez utilisées pour pouvoir comparer les aires.

Les groupes sont aussi invités à coller les pièces non utilisées pour le bateau à côté de celui-ci.

→ Mise en commun

Les feuilles "réponse" sont affichées. La mise en commun porte sur la comparaison des aires par pavage permettant de mettre en lumière :

- L'égalité des aires de deux figures de formes différentes (cas du carré et du rectangle).
- L'aire d'une figure est inférieure à l'aire de la figure de référence si toutes les pièces ne sont pas réutilisées (cas du bateau et du tangram).
- Le recollement de pièces différentes peut permettre de reconstituer une même figure (cas du bateau).

On peut travailler avec les élèves sur le fait que l'aire du tangram est égale à l'aire du bateau plus un carré, un parallélogramme ou un triangle (ce

sont les pièces qui peuvent rester) donc que ces pièces de formes différentes ont la même aire. S'il n'y a pas accord dans la classe, sur le fait que ces pièces ont la même aire, il est possible de proposer un travail en groupe pour comparer par découpage les aires des pièces non utilisées pour paver le bateau.

B - Deuxième phase

Durée : 10 minutes. Les élèves sont en groupe (les mêmes que précédemment) ; ils disposent toujours de la feuille sur laquelle se trouvent les trois figures (des feuilles supplémentaires sont disponibles si les élèves en font la demande).

On distribue une feuille 15×11 par élève.

Consigne : *Est-il possible de reproduire exactement chacune de ces figures sur cette feuille ?*

Il n'est pas demandé de la reproduire ; on autorisera le travail par superposition.

Les élèves constatent qu'il est impossible de reproduire la figure 3 sur une feuille de cette dimension.

La mise en commun porte sur la distinction entre l'encombrement et l'aire, la figure la plus encombrante étant, ici, celle qui a la plus petite aire.

C - Troisième phase

Durée : 20 minutes. Le matériel est le même mais les élèves disposent d'un double-décimètre.

Consigne : *Compare les périmètres des figures 1, 2 et 3.*

Dans un premier temps, le travail est individuel ; les groupes sont reformés ensuite.

Chaque groupe rédige sa réponse sur une feuille avec les trois figures et fait figurer ses mesures et ses calculs.

Mise en commun :

Les réponses des différents groupes sont répertoriées au tableau :

La discussion porte d'abord sur les écarts constatés sur le périmètre d'une même figure et renvoie à la précision du mesurage (notion de tolérance).

Les mesures sont refaites si l'écart est trop important.

L'essentiel portera sur le rangement des périmètres.

Finalement, une mise en commun se fait sur la comparaison des deux classements : suivant l'aire et suivant le périmètre.

Les deux figures 1 et 2 ont la même aire, mais pas le même périmètre ; la figure 3, qui a la plus petite aire, a le plus grand périmètre.

Des prolongements possibles

Si cette activité peut faire évoluer les conceptions des élèves, elle ne permet pas à elle seule, de construire les notions d'aire et de périmètre. A d'autres moments de l'année, on pourra proposer :

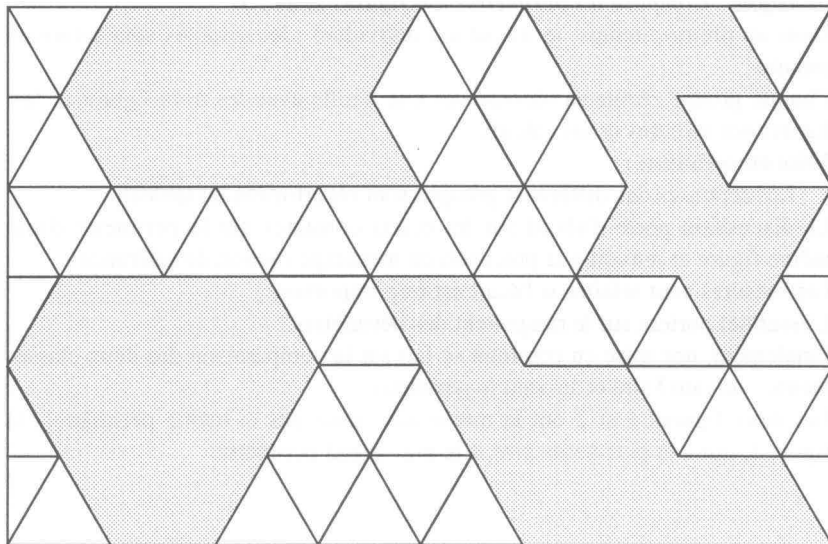
- Après avoir donné une figure aux élèves, le professeur leur demande s'il est possible de la transformer de façon à obtenir une figure d'aire plus petite et de périmètre plus grand, d'aire plus petite et de périmètre plus petit, d'aire plus grande et de périmètre plus grand que ceux de la figure donnée.
- Après avoir donné une figure, le professeur demande de construire des figures ayant la même aire et de comparer leurs périmètres (peut être donné sur papier blanc ou sur réseau).
- De la même manière, il peut demander de construire des figures ayant le même périmètre et de comparer leurs aires.

Remarquons que ces activités peuvent tout à fait constituer un point de départ.

Dans les activités qui suivent, nous nous proposons d'installer la notion d'aire, sans perdre de vue la distinction existant entre aire et périmètre.

2 - Comparaison d'aires sur réseau à mailles polygonales régulières.

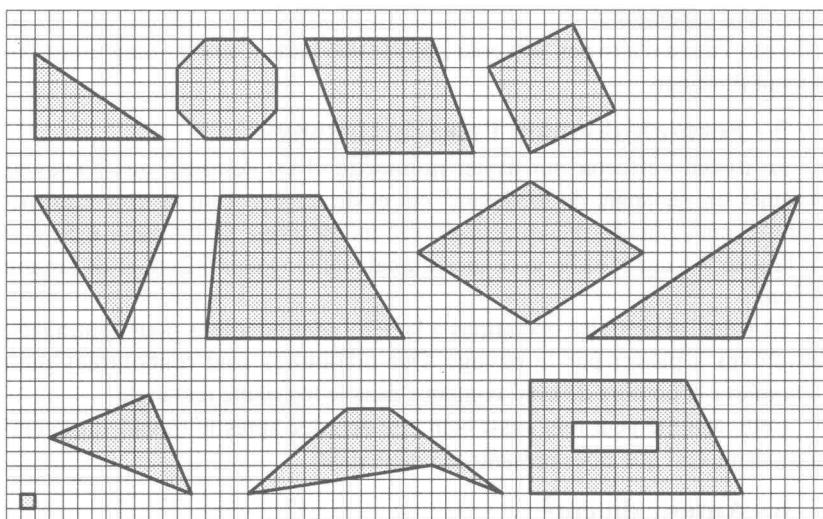
Il est demandé aux élèves de comparer les aires de ces polygones puis leurs périmètres.



Spontanément, les élèves choisissent de compter les mailles contenues à l'intérieur de chaque polygone. Ils attribuent ainsi une mesure à l'aire de chaque figure après avoir choisi implicitement la maille du réseau pour unité d'aire, ce qui permet le classement des aires. La comparaison des périmètres peut s'effectuer de manière similaire en choisissant pour unité de longueur le côté d'une maille. Le fait que la comparaison des aires et des périmètres conduise à deux classements différents des figures étonne encore de nombreux élèves. Toutefois, cet étonnement ne suffit pas toujours pour mettre en œuvre les différences entre les grandeurs aire et périmètre dans les problèmes. Par exemple, il arrive encore que, pour déformer un rectangle en un triangle de même aire, certains élèves dessinent un triangle de même périmètre que le rectangle donné.

3 - Mesures d'aires sur quadrillage à maille carrée

L'unité étant le carreau, il est demandé aux élèves de donner la mesure de l'aire de chacune des figures ci-dessous.



L'activité a pour but :

- de faire percevoir que le comptage des carreaux contenus à l'intérieur de la figure ne suffit pas, que le découpage des carreaux dans le but de paver la figure est souvent source d'erreur ;
- d'installer l'idée qu'il est préférable de recourir à des figures simples dont on peut facilement connaître l'aire (rectangle, triangle rectangle). La figure dont on cherche à évaluer l'aire peut être :

- soit décomposée en figures simples et son aire obtenue par addition des aires des figures qui la composent ;
- soit encadrée dans une figure simple et son aire est alors obtenue par différence des aires.

Cette activité doit déboucher sur l'installation de l'image du triangle rectangle comme "moitié" d'un rectangle.

4 - Les unités légales d'aire

Nous faisons le choix de commencer par le centimètre-carré, facilement appréhendable par les élèves à la suite des activités précédentes. Sur papier millimétré, le millimètre-carré est identifié et sa relation avec le centimètre-carré mise en évidence. Il est fait de même pour le décimètre-carré et sa relation avec le centimètre-carré. Les carrés d'aire 1 dm^2 réalisés par les élèves sont découpés et assemblés pour obtenir le mètre-carré. L'objectif est, à travers des images fortes, de fixer l'idée qu'il faut :

- multiplier l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement supérieur ;
- diviser l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement inférieur.

5 - Formule donnant l'aire du rectangle

Le travail s'effectue sur papier millimétré. Il est demandé aux élèves de dessiner un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 4 cm et d'en exprimer l'aire en cm^2 , puis de recommencer avec un rectangle de longueur 6,5 cm et de largeur 3,5 cm et enfin avec un rectangle de longueur 6,2 cm et de largeur 3,7 cm.

La calculatrice et les opérations à la main sont interdites pour contraindre les élèves à passer par le pavage. Des difficultés sont rencontrées pour dénombrer le nombre de mm^2 contenus dans le troisième rectangle.

Cette activité peut tout aussi bien être abordée après le travail sur le cm^2 et de demi- cm^2 que nous présentons maintenant.

6 - Autour du cm^2

Objectifs de cette activité

L'activité proposée vise aux apprentissages suivants :

- Savoir que l'unité d'aire n'est pas attachée à la forme "carré", bien que sa dénomination renvoie à la forme "carré" (la forme carré étant cependant souvent la forme privilégiée pour paver).
- Savoir que de demi- cm^2 est la moitié de l'unité d'aire et non un carré de côté $1/2 \text{ cm}$.

- Donner du sens au cm^2 à travers le $1/2 \text{ cm}^2$ en dissociant l'aire de la forme.
- Avoir un premier contact avec la propriété : si la longueur est multipliée par k , l'aire est multipliée par k^2 .

Matériel

Une feuille quadrillée de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ par élève.

Nous n'avons pas choisi le quadrillage $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ qui induit certains découpages, en particulier le $1/4 \text{ cm}^2$.

Déroulement

A - Première phase

→ Premier temps :

Consigne : Tracer sur la feuille plusieurs figures de formes différentes qui ont toutes pour aire 1 cm^2 .

Les élèves travaillent individuellement en utilisant, s'ils le souhaitent, leur matériel de géométrie. Si un élève s'arrête après avoir construit un carré, le professeur l'invite à produire d'autres figures de formes différentes, comme l'indique la consigne.

→ Deuxième temps :

En utilisant le rétroprojecteur et un transparent quadrillé $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, on procède au recensement des différentes formes obtenues : les élèves se succèdent pour dessiner leurs propres productions. Chaque figure est discutée quand elle est proposée par son auteur. La validation est obtenue en pavant le carré unité par découpage et recollement de la figure proposée.

→ Troisième temps :

Les élèves sont invités à compléter leur production afin d'obtenir un large éventail de figures d'aire 1 cm^2 (au moins 10). Cette phase peut aussi être réalisée à la maison.

B - Deuxième phase

→ Premier temps :

Consigne : Trace sur ta feuille une figure dont l'aire est $1/2 \text{ cm}^2$.

→ Deuxième temps :

Les élèves se regroupent par 4. Ils se mettent d'accord sur une figure qu'ils proposeront à la classe.

→ Troisième temps :

Un porte parole de chaque groupe vient dessiner sur le rétroprojecteur la production du groupe. Il est invité à réaliser son dessin même si celui-ci a déjà

été réalisé par un autre groupe, ceci, pour avoir une représentation des productions de la classe. A ce stade, l'enseignant peut rencontrer deux situations :

Premier cas : Parmi les figures proposées se trouve une réponse correcte. Le professeur demande alors à la classe de faire un choix en argumentant (ils feront référence au pavage du carré unité à l'aide de la figure produite : il faut deux figures identiques pour paver le cm^2).

Deuxième cas : Toutes les figures sont fausses.

Le professeur dessine alors sur le transparent la figure suivante :



Il demande à chaque groupe de trouver son aire. Les réponses des groupes sont recensées : parmi celles-ci devrait figure le $1/2 \text{ cm}^2$. Le professeur invite alors les élèves à comparer cette figure à leurs productions : le débat qui s'instaure doit permettre la distinction entre $1/4 \text{ cm}$ et le $1/2 \text{ cm}^2$: le $1/2 \text{ cm}^2$ est une surface dont l'aire est la moitié de celle d'un cm^2 et non un carré de $1/2 \text{ cm}$ de côté. Il est alors temps de revenir aux figures trouvées précédemment.

→ Quatrième temps :

Consigne : Trace sur ta feuille plusieurs figures ayant une aire de $1/2 \text{ cm}^2$.

Il s'agit à ce moment de permettre aux élèves de réaliser une petite collection de figures afin de bien intégrer la notion : la forme n'est pas obligatoirement le carré et les longueurs ne sont pas obligatoirement divisées par 2.

Et enfin...

L'utilisation des formules d'aire et périmètre figurant au programme de la classe de sixième sera l'occasion de retravailler ces notions en visant à la fois le sens et la nécessaire automatiser de certains calculs et en continuant à mettre l'accent sur leurs différences, notamment l'additivité des aires mais pas des périmètres.

Conclusion

L'ensemble des activités proposées est l'occasion pour les élèves de développer deux conceptions de la figure. La première consiste à envisager la figure comme un ensemble de segments (conception "contour") dont on privilégie ceux formant le tour. La deuxième amène à se représenter la figure comme un ensemble de pièces (conception "puzzle"). Ces deux visions de la figure n'épuisent pas les différents points de vue qu'il faut être capable d'adopter en géométrie suivant les problèmes abordés. Une troisième conception doit être construite : percevoir la figure comme constituée d'un ensemble de sous-figures pouvant se superposer, contrairement à la conception puzzle. Extraire une sous-figure, même élémentaire comme un angle droit peut

BIBLIOGRAPHIE

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN MJ, 1989, "*Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surfaces planes*", Educational studies in Mathematics, Vol 20 N°4 p.387-424.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN MJ, 1984-1985 "*Aires de surfaces planes*",
Petit x N°6 p. 5-33 et Petit x N°8 p. 5-30, IREM de Grenoble.

1. COMBIER G., PHILIPPON M., 1994, "*Aire et périmètre. Le tour de l'aire en collège*", Brochure IREM de Lyon.



Remarques, notes, expérimentation

(This area contains horizontal dotted lines for writing.)