Des divisions en sixième

Anne-Marie MONFRONT - IREM Paris VII

« *La division est une opération en cours d'acquisition en début de Collège* ». Il reste en effet un long chemin à parcourir pour construire les significations de la division, pour relier ou classer toutes les situations que l'on traite avec l'algorithme de la division. En 6ème, à travers l'étude de situations variées, les conceptions des élèves sur la division vont évoluer, intégrant ou modifiant des conceptions anciennes.(*)

Les connaissances et les compétences qu'il nous paraît souhaitable de développer en sixième

Elles ont pour source et pour but la compréhension et la résolution des problèmes.

A) La division euclidienne

C'est une opération qui concerne les entiers naturels (nous dirons ici entiers). A deux nombres entiers a et b, elle fait correspondre **deux nombres entiers :** le quotient euclidien et le reste euclidien ; le reste peut être égal à 0 ; le quotient aussi, cependant peu de situations « naturelles » correspondent à ce cas. Cette division se traduit par l'égalité :

$$a = (b \,.\, q) + r \text{ avec } r < b.$$

La recherche du quotient et du reste peut se faire par diverses techniques. Certaines sont très proches de pratiques courantes : additions répétées de b pour approcher a, soustractions répétées de b à partir de a pour approcher 0. Elles donnent du sens à l'égalité ci-dessus, à l'encadrement de a par des multiples de b puis à l'algorithme classique de la division.

B) La division

C'est une opération qui, à deux nombres a et b fait correspondre **un seul nombre,** le quotient. Elle se traduit par l'égalité $b \,.\, x = a$; le quotient x est le nombre qui multiplié par b donne a. En ce sens, elle est à rapprocher, du point de vue structurel, de la soustraction, opération inverse de l'addition.

(*) M.J. Perrin-Glorian. « Sens, algorithme et représentations symboliques. » Mathématiques et langage. Les Actes du Congrès des Conseillers Pédagogiques. Versailles 1994. Hachette éducation.

Cette division est adaptée à des situations où interviennent des grandeurs continues et elle nécessite **l'extension du domaine numérique.** On peut avoir à diviser deux entiers : le quotient est un entier, un décimal non entier, ou un nombre non décimal d'où la construction et l'écriture fractionnaire de nouveaux nombres. On peut aussi avoir à diviser un décimal par un entier ou par un décimal non entier ; en 6ème, il s'agit d'une première approche qui sera reprise en 5ème. Il restera à diviser deux rationnels non décimaux, ce qui sera abordé en 4ème.

Pour calculer le quotient, les stratégies pertinentes avec les entiers, comme les additions ou soustractions successives, ne sont en général plus performantes. L'encadrement entre deux multiples du diviseur ne correspond qu'au cas où le diviseur est entier et ne donne que les valeurs approchées entières du quotient. C'est l'algorithme classique mis en place avec la division euclidienne qui permet de calculer dans tous les cas soit la valeur exacte du quotient soit des valeurs approchées. Il vaut mieux réserver le mot quotient à la valeur x définie comme terme manquant d'une multiplication et utiliser les expressions valeur exacte du quotient et valeur approchée du quotient au lieu de quotient exact et quotient approché.

C) La réponse à donner à un problème

Elle doit tenir compte du sens de la situation et pas seulement du résultat de la division posée. On peut avoir par exemple à prendre :

- la valeur entière par excès du quotient ;
- la partie entière du quotient de deux décimaux non entiers ;
- la valeur approchée du quotient avec une précision donnée.

Une série de problème mettant en jeux divers aspects de la division : des partages en parts égales

A) Des énoncés

Ces problèmes peuvent être donnés en début d'apprentissage ou au contraire après d'autres activités plus riches et plus variées où le traitement nécessite choix et succession d'opérations.

Ils ont pour but de bien cerner les questions concernant la division en jouant sur des situations semblables avec des nombres différents et des situations différentes, collections discrètes ou grandeurs continues, avec les mêmes nombres.

Les enfants ont à terminer l'énoncé et à résoudre. Dans le bilan collectif, ils discutent des précisions à apporter , des questions que l'on peut poser et ils proposent des solutions.

1- On partage 32 bonbons entre 5 enfants....

2- Avec 32 mètres de ficelle, on fait 5 guirlandes de même longueur....

3- On fait des groupes de 5 élèves dans une classe de 32 élèves....

4- On fait des guirlandes de 5 mètres dans une ficelle de 32 mètres....

5- 6- 7- 8- mêmes énoncés que 1- 2- 3- 4- en remplaçant en remplaçant 32 par 30.

9- On partage 8 mètres en 3 parties égales....

10- On partage 10,2 mètres en 3 parties égales....

11- On partage 10,2 mètres en 7 parties égales....

12- Combien de morceaux de ficelle mesurant 4 mètres de long peuvent être coupés dans une ficelle de 39,2 mètres de long ? Quelle longueur de ficelle restera-t-il ?

(Evaluation à l'entrée en 6ème - 1994)

B) Choix des énoncés.

Il donne l'occasion de distinguer les types de partages équitables selon la nature de la grandeur à partager.

1- Partages de collections discrètes. (élèves, bonbons)

Sous certaines conditions à préciser, ils se traduisent par une division euclidienne, le reste peut être nul ou non. Les partages de bonbons et les groupements d'élèves (problèmes 1-3-5-7) relèvent de ce modèle. Mais, ils sont perçus comme différents par les élèves.

Au point de vue du sens, les uns concernent la recherche de la valeur d'une part la plus grande possible (partage de 32 ou 30 bonbons, problèmes 1 et 5), les autres la recherche du nombre de parts (nombre de groupes d'élèves avec 32 ou 30 élèves, problèmes 3 et 7). La réponse à donner n'est pas toujours le quotient euclidien, il faut tenir compte du sens de la situation et de la question que l'on peut poser. Par exemple, on peut dire qu'il est impossible de ne faire que des groupes de 5 élèves dans la classe de 32 élèves, on peut proposer 7 groupes dont 6 de 5 élèves et 1 de 2 élèves ou d'autres solutions.

Au point de vue numérique aussi, les partages sont différents ; les uns fournissent un reste non nul (les 32 bonbons et les 32 élèves, problèmes 1 et 3), les autres (les 30 bonbons et les 30 élèves, problèmes 5 et 7) « tombent juste » ou « n'ont pas de reste » comme on entend souvent pour exprimer que la collection complète a pu être partagée.

2- Partages de grandeurs continues.

a) La manipulation ou l'évocation du partage en un nombre donné de parts fournit la conviction de l'existence du quotient avant le moyen de le calculer et la nécessité d'étendre le domaine numérique pour le définir. Elles permettent de comprendre que, dans le cas de grandeurs continues, le partage de la quantité totale en parts égales (ici, 32 mètres puis 30 mètres en 5 parties égales) est toujours possible alors que le partage de la totalité d'une grandeur discrète en parts égales ne se réalise que si le nombre à partager est multiple du diviseur. L'ordre des problèmes (travailler sur le nombre 32 avant 30 pour les bonbons et pour la ficelle) peut aider à mieux distinguer les situations de grandeurs discrètes ou continues. Le cas particulier, 30 partagé en 5 donne 6 n'a pas le même sens dans les deux problèmes : pour les bonbons, cas particulier où la collection complète peut être partagée (le reste vaut 0) ; pour la ficelle , cas où le quotient est un entier.

Parmi les problèmes de partages d'une longueur en un nombre donné de parts, trois concernent la division d'un entier par un entier (partage de 32 ou 30 ou 8). Selon le cas, le quotient est un entier, un décimal non entier ou un nombre non décimal. L'algorithme de la division en donne soit la valeur exacte soit des valeurs approchées à diverses approximations. On remarquera que l'on peut toujours diviser un entier par un entier mais que l'expression « a est divisible par n » signifie que le quotient de a par n est un entier.

Le problème d'une grandeur continue partagée en parts égales se traduit par la recherche du « nombre » x tel que $a : n = x$ c'est-à-dire tel que $n \,.\, x = a$ avec n entier. Le nombre a étant la mesure d'une grandeur continue, il peut être un nombre décimal non entier comme dans les problèmes avec 10,2 mètres à partager en 3 ou 7 (en 6ème, on n'étend pas davantage le domaine des nombres à diviser).

b) D'autres problèmes de partages sur les grandeurs continues consistent à chercher un nombre de parts donc un nombre entier, les deux nombres donnés étant des décimaux entiers ou non (les guirlandes de 5 mètres dans 32 ou 30 mètres et le dernier problème).

La recherche du nombre de parts et du reste semble assez bien acquise sur les grandeurs discrètes (groupes de 5 élèves, problèmes 3 et 7) et par « imitation » sur les grandeurs continues mesurées avec des nombres entiers (guirlandes de 5 mètres, problèmes 4 et 8). Mais la très faible réussite au problème 12 dans l'évaluation en début de 6ème de 1994 montre qu'il y a là une véritable difficulté pour les élèves. Ils ont besoin de manipuler, de faire des schémas, de tenter des procédures d'essais, de chercher des éléments de validation pour s'approprier le problème. Et que dire de la recherche du reste si l'on remplaçait les données 39,2 mètres en coupons de 4 mètres par 7,3 mètres en coupons de 1,2 mètre ; après le traitement de la division par l'algorithme, les élèves ont du mal à savoir quel est le reste : 1 mètre ou 0,1 mètre.

Cette situation est aussi l'occasion d'aborder une autre difficulté ; on la trouve par exemple dans le problème suivant : « Combien de coupons de 0,3 mètre peut-on faire sur une longueur de 6 mètres ? ». Le quotient supérieur au dividende met en défaut le « théorème en acte » fortement ancré chez les élèves et qui a jusque-là bien fonctionné : « quand on divise, on obtient un nombre plus petit que le nombre à diviser » (voir l'article de cette brochure sur calcul mental et résolution de problèmes).

Pour aller plus loin

D'autres situations correspondent au cas plus général où ni le diviseur ni le quotient ne sont des entiers (proportionnalité, longueurs, aires et volumes). La résolution de ces problèmes nécessite l'extension du sens de la division : le quotient x des deux décimaux a et b existe toujours, c'est le nombre qui multiplié par b donne a, il peut être décimal ou non décimal ; il vérifie l'égalité $b \,.\, x = a$ (c'est le terme manquant d'un produit).

Les exemples de division concernant les partages de grandeurs continues en un nombre de parts donné sont un bon point de départ pour cette extension puisqu'on y cherche aussi le terme manquant d'un produit.

Mais avant cette dernière étape, il faut mettre en place « *la multiplication des nombres décimaux* » qui « *est une nouveauté de la classe de sixième tant du point de vue du sens que de la technique* ».