Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes

Denis BUTLEN, Anne-Marie MONFRONT, Monique PEZARD
IREM Paris VII - COPIRELEM

Dans cet article, nous appelons calcul mental aussi bien le calcul mental tel qu'on l'entend traditionnellement, que le calcul que l'on peut qualifier de “rapide” ou de “réfléchi”. Si besoin, les élèves peuvent écrire des calculs ou des résultats intermédiaires. Par contre, le recours aux algorithmes écrits standards n'est pas licite dans ce type d'activités.

1 - Pourquoi faire du calcul mental en sixième ?

Le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour tester les conceptions numériques des élèves et leur disponibilité :

C'est un moment où l'on peut mettre à distance les algorithmes écrits et de ce fait, avoir accès plus aisément aux conceptions numériques : le temps étant limité, la nécessité de calculer rapidement amène les élèves à abandonner, dans bien des cas, les algorithmes opératoires standards, sûrs mais trop lents, et à mettre en oeuvre des procédures révélatrices des conceptions qu'ils se font des nombres ; ces conceptions sont évidemment liées à la numération (décimale), aux propriétés des opérations (fonctionnant souvent de façon implicite).

Prenons un exemple : calcul du produit 32×25 :

Si le calcul est fait mentalement et vite, l'élève peut être amené à abandonner l'algorithme standard au profit de procédures plus économiques mais nécessitant des décompositions additives ou multiplicatives des facteurs et ceci en liaison avec les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité par rapport à l'addition...). Voici plusieurs types de calculs possibles :

$$32 \times 25 = 30 \times 25 + 2 \times 25 = 10 \times 75 + 50 = 750 + 50 = 800$$

$32 \times 25 = 32 \times 20 + 32 \times 5 = 32 \times 2 \times 10 + 32 \times 5 = 64 \times 10 + 160$
$= 640 + 160 = 800$
$32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$
$32 \times 25 = 32 \times 100 / 4 = 3200 / 4 = 800$
$32 \times 25 = 32 \times 50 / 2 = 1600 / 2 = 800$
etc...

L'élève choisit telle ou telle procédure dans un souci d'économie mais aussi de sa pratique et de sa familiarisation avec certains algorithmes. Ce choix est un compromis personnel entre le recours à la mémoire, la disponibilité des décompositions des nombres, la maîtrise des propriétés des opérations, la fatigue due aux calculs intermédiaires,...

Le calcul mental nous semble être un moment privilégié de l'apprentissage pour :

- enrichir les conceptions numériques et leur domaine de disponibilité,
- accroître la familiarisation de l'élève avec les nombres et les opérations,
- faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations,
- enrichir, diversifier, étendre les procédures de calcul.

Les séances de calcul mental sont des espaces de travail intensif :

- du point de vue individuel : les élèves travaillent vite, changent plus ou moins rapidement de techniques, de démarches, sont amenés à en explorer de nouvelles ;
- du point de vue collectif : on peut constater une réelle émulation, une dynamique dans la classe. De plus, s'il y a explicitation, les élèves sont amenés à comparer les différentes procédures, à effectuer un choix entre celles-ci, choix dépendant de la nature des données et des calculs à effectuer et de ce fait à enrichir leurs capacités calculatoires.

Ce sont en général des activités motivantes.

On constate un gain de temps provenant de l'économie réalisée par le non recours à l'écrit et par le rythme, la succession rapide des activités.

Le calcul mental peut être une aide à la résolution de problèmes :

Le calcul mental libère de l'espace mental pour résoudre des problèmes numériques : Nous avons constaté au cours de nos recherches qu'un entraînement régulier au calcul mental améliore les performances pour une certaine catégorie de problèmes numériques : ces problèmes doivent être assez familiers aux élèves mais pas trop. L'exemple type semble être celui des problèmes additifs des compositions de transformations, exemple : *Au premier arrêt d'un autobus 8 personnes montent, au second arrêt 12 personnes descendent, au troisième arrêt 9 personnes descendent. Y a-t-il plus ou moins de* *personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt, combien en plus ou en moins ?*

Quand le modèle sous-jacent au problème n'est pas très familier à l'élève, il semble qu'un entraînement régulier au calcul mental libère de l'espace mental, mobilisé auparavant par le traitement des opérations, au profit de la représentation du problème (*). Ainsi, les élèves des classes entraînées au calcul mental non seulement calculent mieux mais aussi reconnaissent davantage les opérations à effectuer ; les erreurs de "modèle" sont alors moins nombreuses.

Le calcul mental permet de jouer sur la "taille" des nombres intervenant dans un problème et par là peut favoriser une meilleure représentation de celui-ci.

Le problème suivant est très mal réussi par des élèves de sixième :" *combien de menus différents peut-on constituer avec 6 entrées, 12 plats et 7 desserts différents ?* ".

Ils ne reconnaissent pas une structure multiplicative. En général, ils cherchent à établir la liste exhaustive de toutes les solutions en essayant d'organiser leur recherche. Une telle procédure conduit à un échec dans le cas du produit cartésien de trois ensembles dont le nombre d'éléments est supérieur à 5.

L'élève peut engager des stratégies de résolution en recourant à des données plus faibles (produit de deux ensembles, nombres d'éléments plus petits que 5) mais ces procédures ne sont pas performantes dans le cas initial.

C'est pour cela qu'il est indispensable d'initialiser une recherche dans un domaine numérique plus complexe avant de recourir à d'éventuelles simplifications des données.

Le calcul mental accroît les capacités d'initiative des élèves : Comme nous allons le montrer dans l'exemple qui suit cette introduction, une pratique régulière de calcul mental autorise l'élève :
- à jouer sur la taille des nombres (simplifier les données numériques) ;
- à rechercher des procédures de résolution non "standards", à faire des essais, à recommencer, à accepter de faire des erreurs... ;
- à explorer rapidement différentes voies de résolution du problème ;

(*) voir D.BUTLEN et M. PEZARD : « Rapport entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution des problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire et du début du collège », actes du 22ème colloque de la COPIRELEM, Douai 1995.

- à ne pas recourir immédiatement à certains algorithmes fiables mais parfois coûteux...

Cette phase de tâtonnement utilisant le calcul mental peut être déterminante pour trouver la ou les procédures conduisant à la réussite.

2 - Un exemple de recherche : le problème des briques

Le problème posé

"On empile des briques de 0,1 mètre de hauteur pour construire un mur de 2 mètres de haut. Combien de briques empile-t-on les unes sur les autres ? "

Cet exercice est en général très mal réussi quand il est posé dans un devoir écrit. La reconnaissance de l'opération à effectuer ainsi que l'obtention du résultat de l'opération sont deux obstacles importants. Beaucoup d'élèves ne proposent rien ou écrivent une opération en "tentant leur chance", sans chercher vraiment à comprendre.

Voyons comment la pratique du calcul mental et de la résolution mentale des problèmes peut en partie lever ces difficultés.

Recherche individuelle

Les élèves sont entraînés à mettre en oeuvre diverses procédures qui leur permettent d'aborder le problème même s'ils n'en voient pas encore la solution.

Des procédures d'essais

On trouve par exemple : (des exemples de ce qu'ont écrit des élèves figurent entre les guillemets)
- compter combien de fois on doit ajouter 0,1 pour obtenir 2.
  " 0,1+ 0,1 +0,1 + 0,1......= 2"
- calculer en plusieurs étapes, soit le nombre de briques dans une hauteur de 1 mètre, puis de 2 mètres : "0,1 × 10 = 1 donc 20 briques", soit la hauteur de 2 briques et donc le nombre de briques "0,1 × 2 = 0,2 donc 20 briques" .
- des multiplications de 0,1 par divers nombres pour trouver lequel donnera 2.

"J'ai essayé de multiplier par plusieurs nombres et de me rapprocher de 2 le plus possible ".

Avec ces tentatives, fructueuses ou non, les élèves donnent du sens à la question posée, étape évidemment nécessaire mais qu'ils sautent parfois !

Les procédures d'exploration et d'essais ont un statut reconnu, encouragé par le professeur ; cela permet à tous les élèves de participer. Dans cette recherche plus souple, des élèves proposent des idées qui font avancer dans la compréhension et la résolution du problème alors que ces élèves seraient peut-être bloqués, dans un travail écrit habituel, par la nécessité de produire une rédaction et une présentation rigoureuses. Cette façon de travailler donne aussi l'occasion d'être actifs et de s'investir à des enfants qui partent battus dans une demande classique où, pour remplir quand même le "contrat scolaire", ils se contentent d'écrire et d'effectuer une opération sans ou presque sans référence au sens du problème.

Des recherches de modèle du problème sans utiliser les valeurs données

On trouve par exemple :

- traduction par une expression littérale très contextualisée, les lettres évoquant les grandeurs :

$$\text{“}B \xrightarrow{\times\, ?} M\text{”} \quad \text{ou} \quad \text{“}B \times N\, ? = M\text{”}$$

- expression du modèle par une phrase sans nombre : "*la hauteur d'une brique multipliée par le nombre de briques est égale à la hauteur totale*"
- transformation des nombres donnés par des nombres plus "simples" : "*je remplace par exemple 0,1 par 5 et 2 par 50, alors je sais le faire*".
- conversions en centimètres.

La pratique du calcul mental est propice à ce détour éliminant, dans un premier temps, les nombres "difficiles". En effet, pour oser négliger en début de recherche les nombres qui sont jugés compliqués, il faut que la peur d'avoir à réaliser une opération avec ces nombres n'envahisse pas trop l'enfant, qu'il puisse être assez libéré pour ne pas en faire une priorité sachant qu'ensuite il pourra traiter la question avec de bonnes chances de réussite. Une pratique régulière des calculs, une amélioration de l'habileté opératoire donnent cette disponibilité nécessaire à l'appropriation du problème.

Les élèves l'expriment dans ces extraits de comptes-rendus rédigés quelques temps après : "*Quand un nombre nous fait peur, on le change en chiffre plus facile*" , "*ou par une lettre*". "*J'ai converti en cm car je trouve que c'est plus simple parce que les nombres sont entiers*".
(Dans ces comptes-rendus, nous avons accepté que les élèves utilisent le mot "chiffre" dans le sens qui lui est donné dans le langage médiatique et non dans le langage du professeur de mathématiques).

Des recherches avec des opérations à "trou"

On trouve soit directement la présentation $0{,}1 \times ? = 2$, soit après les procédures d'essais, soit après les recherches avec des lettres ou avec d'autres nombres : ($5 \times ? = 50$ donc $0{,}1 \times ? = 2$). La division (2 : 0,1) est très rarement directement écrite.

Mise en commun

Chacune des propositions d'élèves apporte un éclairage personnel sur la résolution du problème ; il est important de faire une mise en commun. L'élève enrichit alors sa compréhension du problème traité ; il peut découvrir des méthodes auxquelles il n'avait pas pensé qu'il pourra réinvestir dans la résolution d'autres problèmes.

Le professeur a intérêt à choisir l'ordre des procédures présentées à la classe pour que la méthode "standard" ne s'impose pas avant d'avoir été réellement construite par chacun grâce à cette mise en commun.

Après l'écoute de diverses stratégies, pour l'ensemble de la classe, c'est la multiplication à "trou" qui traduit le mieux la résolution du problème : "*Si on connaît le nombre de briques, en le multipliant par 0,1 on obtient 2. On écrit $0{,}1 \times ? = 2$* ".

Cette étape permet d'écrire la division qui avait rarement été écrite directement dans la recherche individuelle.

Voici ce qu'écrivent des élèves dans leur compte-rendu : "*Pour être sûr de réussir un problème, on peut quelquefois le résoudre à l'envers.....Alors on trouve l'opération parce qu'une multiplication à trou correspond à une division. De même, une addition à trou correspond à une soustraction*".

La technique de l'opération sous contrôle du sens

Il reste alors à savoir effectuer la division obtenue.

Dans le contexte, le résultat est trouvé par beaucoup d'élèves. On peut ainsi retrouver une propriété déjà rencontrée : "Si on divise par un nombre inférieur à 1, le quotient est plus grand que le dividende", règle qui va à l'encontre de tant de situations de divisions "courantes" qu'elle est difficile à accepter ; et s'en convaincre à nouveau dans une situation bien comprise n'est pas à négliger.

Un des buts du problème posé est de décontextualiser le procédé de division pour arriver à des règles utilisables dans d'autres situations, mais il faut que ces règles aient pris assez de sens avant de fonctionner de façon automatique.

Là encore, le retour sur la multiplication donne du sens à la recherche du résultat : on retrouve d'abord dans le contexte, sur des exemples comme 0,1 × 3 ou 0,1 × 20, la règle de multiplication par 0,1 et la justification du décalage de la virgule au résultat. La règle inverse se comprend ou se retrouve alors plus aisément.

$$
\begin{tikzcd}
20 \arrow[rr, bend left, "\times 0{,}1 \ (/10)"] & & 2 \arrow[ll, bend left, ": 0{,}1 \ (\times 10)"]
\end{tikzcd}
$$

"Pour diviser par 0,1, on multiplie par 10".

En $6^{\text{ème}}$, la règle est loin d'être acquise.

Rappelons que l'on peut lire dans les programmes de $1^{\text{ère}}$ ES (B.O. du 24/09/92) : "Le sens d'un produit par un nombre positif inférieur à 1 étant un obstacle réel, on utilisera les pourcentages pour faire progresser cette notion". Alors cinq ans avant, pour des élèves moins sélectionnés, quand il s'agit de division, il est absolument nécessaire qu'ils soient confrontés à diverses situations où la règle prend sens avant qu'ils arrivent à la décontextualiser et à pouvoir l'utiliser avec maîtrise. L'algorithme général de la division n'est pas ici le meilleur outil à utiliser. Pourtant des élèves réussissent par cette technique et divisent consciencieusement 20 par 1 sans négliger une étape ! Tandis que d'autres s'arrêtent perplexes devant cette "curieuse" division.

$$2 : 0{,}1$$

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 1 \\ \cline{2-2}
-2 & 20 \\ \cline{1-1}
00 & \\
-0 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

C'est l'occasion de remettre en place la propriété utilisée pour diviser par un décimal : "on obtient le même quotient si l'on multiplie dividende et diviseur par le même nombre". Ici, en maîtrisant cette règle sans en faire une partie de l'algorithme que l'on déroule sans contrôle, on obtient très aisément le résultat.

$$n = 2 : 0{,}1$$

$$\times 10 \quad \quad \times 10$$

$$n = 20 : 1$$

$$n = 20$$

C'est la règle que les élèves réinvestissent le plus, quand elle convient, dans les exercices suivants.

Après

De nombreux exercices sont ensuite donnés.

Les uns portent sur les techniques que l'on vient de revoir : $12 \times 0{,}1$; $12 \times 0{,}3$; $15 : 0{,}1$; $15 : 0{,}3$

Les autres sont des problèmes de soustraction ou de division où le modèle d'addition ou de multiplication "à trou" aide à résoudre.

III) Un exemple de mise en œuvre

Les observations que nous avons décrites dans le travail précédent s'inscrivent dans une progression générale intégrant une pratique régulière de calcul mental et d'explicitation de procédures de résolution.

Le professeur de la classe consacre environ une heure par période de trois semaines à des activités de calcul mental et de résolution mentale de problèmes.

Cette heure se décompose ainsi : trois petites séances de 10 minutes de calcul mental, une séance plus importante de 30 minutes où plus de temps est consacré à l'explicitation de procédures de calcul.

En effet, pour que cette pratique soit rentable, il est indispensable de prendre le temps de faire expliciter, par les élèves, les procédures mises en oeuvre (qu'elles conduisent ou non à un résultat juste). La comparaison des différentes procédures permet à chacun de déterminer son choix en fonction de ses conceptions numériques, de sa familiarité avec les opérations et la numération.

Nous avons même régulièrement amené les élèves à rédiger de courts textes collectifs résumant ce qu'il est important de retenir de l'ensemble des activités de calcul mental pratiquées.

Voici des exemples d'activités que l'on peut conduire à propos des fractions. Nous pensons qu'il est indispensable de proposer des activités de calcul mental très diverses :

- calcul rapide sur des nombres : $2 + \frac{1}{2}$; $1 - \frac{2}{7}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; ...

- ordre de grandeur : des deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{5}$, laquelle est plus petite que 1 ?
- transformations mentales d'écritures : donne quatre écritures différentes de 35/8 en utilisant les signes +, -, ×
- des résolutions mentales de problèmes :

2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe. Le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au 2/3 de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?

Dans un wagon il y a un groupe de 80 personnes. Au premier arrêt, les 3/8 du groupe descendent mais 1/8 du groupe remonte. Combien y a-t-il de personnes dans le wagon après l'arrêt ?

On sait que 2 élèves sur 3 ont eu plus de 12 au contrôle. Donner 3 exemples de classes en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

Remarque : le professeur peut lire deux fois chaque problème, il n'écrit rien au tableau. Les élèves doivent donner la réponse finale, ils n'ont pas à rédiger mais peuvent toutefois écrire les données ou des calculs intermédiaires. Aucune opération ne doit être posée.

Les expériences que nous avons pu mener tant à l'école primaire qu'au début du collège (sixième et cinquième) montrent qu'une pratique régulière de calcul mental incluant la résolution mentale de problèmes numériques accroît les compétences calculatoires des élèves et favorise la "prise de sens" lors de résolutions écrites de problèmes. La diversité des approches avant l'exposé d'une résolution standard aide à l'appropriation du modèle sous-jacent et favorise une meilleure compréhension.