La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.[1]

Joël BRIAND - COPIRELEM

Les nouveaux programmes (1995) de l'école élémentaire, s'ils conservent la multiplication d'un décimal par un entier, excluent la multiplication de deux décimaux. La mise en application des nouveaux programmes a commencé à la rentrée 95 en CE2 pour atteindre le CM2 à la rentrée 97. Ainsi, la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.

I- Etat des connaissances des élèves sortant de l'école élémentaire (en référence aux évaluations nationales de 1995)

Nous avons choisi les items qui se rapportent à la multiplication des décimaux.

N°	exercice	% réussite	Principales erreurs	%
Ex. 18b et 18c.	1,54×1000 7,14×100	59,3%	Application à tort de la règle des entiers : 1,54000 Déplacement inexact de la virgule : 15,4 Multiplication de la partie entière : 1000,54 et/ou de la partie décimale : 1000,54000	10,4% 9,8% 4,2%
Ex. 25	4,28 × 3,5	39%	1 498 ou 14 980 Autres réponses : on y retrouve des résultats où seule la virgule est fautive. On peut se demander si l'alignement des virgules des deux nombres donnés [...] n'induit pas un alignement de la virgule pour le résultat.	14,9% 42,1%

[1] I.O. 6ème, 1995

Dans l'évaluation 1995 les décimaux apparaissent dans des exercices de calcul, mais jamais dans des problèmes. Suite aux changements de programmes on ne devrait plus trouver d'exercices semblables à l'exercice 25 à partir de la rentrée 98.

II- Les nouveaux programmes de sixième

Dans la partie 2 " travaux numériques ", des nouveaux programmes de la 6ème, voici les contenus, compétences et commentaires des parties 2-1 2-2 et 2-3 concernant les travaux numériques des nouveaux programmes de 6ème:

Partie 2-1 : Nombres entiers et décimaux : écritures et opérations (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
techniques opératoires	addition, soustraction et multiplication	...La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.

Partie 2-2 : Quotient de deux entiers : (extraits)

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Ecritures fractionnaires	Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples. Savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division.	A l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en 6ème s'appuient sur deux idées : le quotient a/b est un nombre. Le produit de a/b par b est égal à a.

Partie 2-3 : Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires : (extraits)

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires	Pour des nombres courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.	Il s'agit de pouvoir utiliser les différentes écritures fractionnaires d'un même nombre décimal.

Ces nouveaux programmes inspirent quelques commentaires :

1- L'ordre des parties pourrait faire croire qu'à l'école élémentaire, la construction des décimaux s'est effectuée avant celle des rationnels [2]. Or, si nous regardons les manuels diffusés pour les deux dernières années du cycle 3 (ex CM1 et CM2) on s'aperçoit que bon nombre d'entre eux introduisent les fractions simples, puis les fractions décimales (donc les décimaux), puis les écritures à virgules des fractions décimales. Il y a là une tendance à proposer une introduction plus proche de leur construction historique [3]. Même si la plupart du temps, cette construction est montrée aux élèves et non pas mise en place par eux, l'école élémentaire prend peu à peu ses distances avec les constructions telles que le marquage de l'unité par une virgule dans un nombre associé à une mesure (que ce soit des unités du système métrique ou la monnaie). Il semble que les premières évaluations nationales aient en partie permis d'ouvrir un débat sur les obstacles didactiques que créait ce type d'introduction. Les élèves concevaient alors le nombre décimal, dans son écriture à virgule, comme un couple d'entiers. De ce fait ils pouvaient envisager comme licite, la notion de décimaux consécutifs, et l'impossibilité d'intercalation dans certains cas.[4]

2- Le mot "quotient" induit souvent l'idée de division. Beaucoup d'étudiants de première année d'IUFM (titulaires de licence) ont ce modèle des rationnels : un quotient est une division à effectuer. En revanche le mot "fraction" telle que 2/3 est plus souvent envisagée comme un nombre-repère (2 fois 1/3) sur une droite graduée , ou nombre-mesure.

---

[2]Remarque : à l'école élémentaire, le terme de fraction désigne indifféremment le nombre rationnel et une de ses écritures fractionnaires.

[3]Pour plus d'informations, voir l'article sur "La Disme" dans la brochure Angers 1996 de la COPIRELEM.

[4] Bien souvent le lien entre l'ordre de la partie décimale des décimaux et l'ordre lexicographique est une découverte pour des étudiants se préparant au concours de Professeur des Ecoles ; voici un exercice " inhabituel " :
1°)Range du plus petit au plus grand les nombres suivants :
22 19 2010 10 1000 103 13 1412 2004 20
Dresse la liste de ces nombres dans l'ordre où ils apparaîtraient s'ils étaient rangés de la même façon que l'on range les mots d'un dictionnaire. L'ordre alphabétique correspondant à l'ordre normal des chiffres, c'est-à-dire 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Compare les deux listes. Sont-elles différentes ?
2°) Maintenant, on fait précéder chaque nombre de 0, on obtient :
0,22 0,19 0,2010 0,10 0,1000 0,103 0,13 0,1412 0,2004 0,20
Range ces nombres du plus petit au plus grand. Compare la liste obtenue aux listes précédentes.

L'idée d'associer quotient et division est très certainement un effet de l'enseignement ; le quotient a une signification polysémique à l'école élémentaire : quotient euclidien (ou quotient entier), quotient décimal, quotient exact (entier décimal ou rationnel), quotient approché (avec un reste décimal). En revanche, dans les instructions de $6^{ème}$, la notion de quotient est nettement associée à celle de rationnel. Lorsque les élèves arrivent au collège, le professeur devrait prendre en compte ces différents points de vue.

3- La multiplication des décimaux entre eux relève explicitement maintenant de la classe de $6^{ème}$. Notons au passage que le texte déclare : "aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux ". Cela signifie-t-il "savoir interpréter le résultat de la division de deux décimaux à l'aide de la calculatrice" ?

III- Quelques pratiques scolaires relatives à l'enseignement du produit de deux décimaux

Voici quelques exemples de pratiques effectives repérées à l'école élémentaire ces dernières années.

Produit de deux décimaux à partir du produit d'un décimal par un entier :

Dans un premier temps, la multiplication d'un décimal par un entier est définie par réitération de l'addition :
par exemple : $1,6 + 1,6 + 1,6 + 1,6$ s'écrit aussi $1,6 \times 4$.

Cette définition ne peut être reprise pour le produit de deux décimaux. Quel sens donner au produit $0,148 \times 1,6$ par exemple ?

On sait que $148 \times 16 = 2\,368$ (dans $\mathbb{N}$) et que $14,8 \times 16 = 236,8$ (nouvelle opération définie de $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}$). La multiplication dans $\mathbb{N}$ possède une propriété connue : " si l'on divise l'un des termes de la multiplication par 10 (100, 1000...), le résultat est divisé par 10 (100, 1000...). On fait donc remarquer à l'élève que $148 : 10 = 14,8$ et $2368 : 10 = 236,8$ permettent de retrouver le résultat de $14,8 \times 16$ nouvellement construit de $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Cette propriété montrée va être alors étendue. L'hypothèse est que " si l'élève a compris ", il pourra alors trouver le résultat de chacun des produits suivants : $0,148 \times 1,6$; $14,8 \times 1,6$; $1,48 \times 1,6$, construisant ainsi une nouvelle opération (de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$) qui garde les propriétés connues de la multiplication de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Ce passage peut être plus ou moins explicité en utilisant les outils des fonctions :

par exemple :

$$148 \times 16 = 1{,}48 \times 100 \times 1{,}6 \times 10 = 1{,}48 \times 1{,}6 \times 1000$$

1,48	multiplié par 100	148
× 1,6	multiplié par 10	× 16
?	divisé par 1000	2368

Produit de deux décimaux à partir de calculs d'aires :

Le problème posé aux élèves est le suivant : déterminer un moyen de calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 3,6 et 4,3, l'unité d'aire étant le carré de côté 1.

Plusieurs directions sont possibles :

Produit de deux décimaux qui s'appuie sur un calcul d'aire et sur des jeux d'écriture (à virgule et fractionnaires) :

$13{,}427 \times 9{,}64 = \dfrac{13\,427}{1\,000} \times \dfrac{964}{100}$ qui se pratiquent par analogie avec ceux pratiqués dans $\mathbb{N}$ (voir l'étude précédente). Cette approche suppose une connaissance approfondie des rationnels et de la multiplication dans cet ensemble.

***Produit de deux décimaux à partir de la mesure effective de l'aire du rectangle* :**

Les élèves travaillent sur feuille de papier millimétré sur laquelle est dessinée un rectangle de 2,45 dm sur 2,7 dm. Le professeur demande aux enfants de retrouver l'aire du rectangle en dm^2.

Les savoirs concernant les unités de mesure des surfaces sont connus[5]. Attardons nous un instant sur les stratégies généralement observées :

1- Les enfants effectuent des tracés sur le papier millimétré. Ils recherchent des carrés de 1 dm de côté. Ils retrouvent rapidement les 2×2 dm^2. Il reste à " rassembler les bordures " en paquets valant 1 dm^2. Pour cela les démarches sont variées.

2- Certains élèves effectuent directement la multiplication de 245 par 27 et cherchent à donner une signification du résultat.

3- D'autres convertissent tout en mm^2, calculent l'aire en mm^2 et reviennent à la mesure en dm^2.

[5] Toutefois, on sait que les élèves assimilent dm^2 et carré de un dm de côté, cm^2 et carré de un cm de côté.

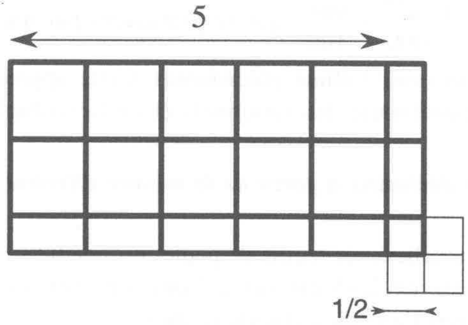
Le professeur a prévu un dessin sur lequel figure le rectangle des élèves ainsi que les rectangles 2 × 2 (en dm) et 3 × 3 (en dm) (ce schéma prouve que l'aire du rectangle recherchée est comprise entre 4 et 9 dm^2). Ceci permettra d'écarter certaines erreurs issues de diverses stratégies.

Produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur le calcul d'aires **:**

On se donne un nombre entier de centimètres (8cm). On cherche le plus possible de rectangles ayant ce nombre comme demi-périmètre et on calcule son aire.

Dans un premier temps, les élèves résolvent ce problème dans les entiers. Ils déterminent les couples solution (1;7), (2;6),(3;5),(4;4) et déterminent les aires associées. Ensuite, arrivés à ce stade, ils sont capables de construire des rectangles ayant les dimensions faisant intervenir des fractions simples.

Il s'agit maintenant de calculer l'aire d'un tel rectangle. L'existence de cette aire est évidente pour l'élève.



Les élèves calculent les différentes parties de ce rectangle en utilisant la multiplication dans $\mathbb{N}$ et la multiplication d'une fraction par un entier (connue) et en calculant $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ en se ramenant au carré d'aire 1.

Il s'agit ensuite d'expliciter le calcul effectué :

Ils ont donc : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Il faut calculer $\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)$.

$$\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) =$$

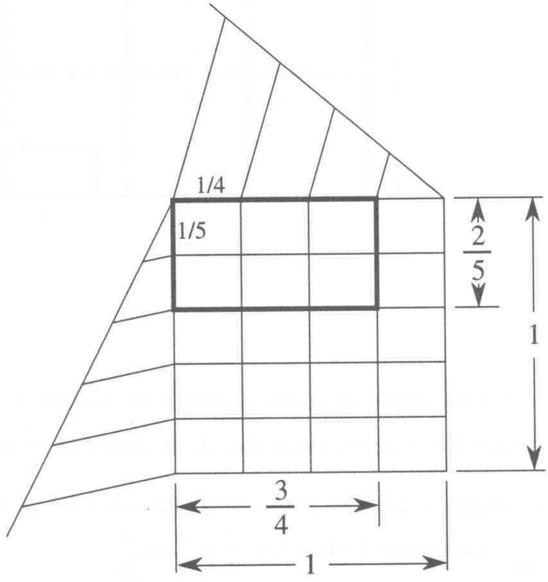
$$5 \times 2 + 5 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 10 + \frac{5}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{4} = 13 + \ldots + \frac{1}{4}$$

Produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur la juxtaposition d'aires :

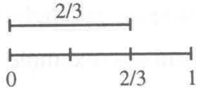
Le produit de deux décimaux peut être considéré, dès le départ, comme un cas particulier du produit de deux rationnels en suivant l'une des approches possibles : fractionnement [6] ou commensuration en fonction de l'introduction choisie pour les rationnels :

Première approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de " partages de l'unité") : soit à définir le produit de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$ en se référant aux mesures des surfaces :

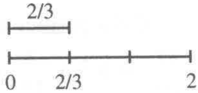
Dans le carré unité (voir figure) , il y a 20 rectangles élémentaires. Le rectangle d'aire $\frac{2}{5}$ multiplié par $\frac{3}{4}$ est formé de 6 rectangles élémentaires. Son aire est donc les $\frac{6}{20}$ de l'unité.



[6] *fractionnement :* Une unité (de longueur, d'aire, de masse…) étant choisie, le rationnel 2/3 est considéré comme 2 fois 1/3.



commensuration : 2/3 est considéré comme le nombre qui, multiplié par 3 donne 2 par report de mesure. Cela correspond au quotient de 2 par 3.

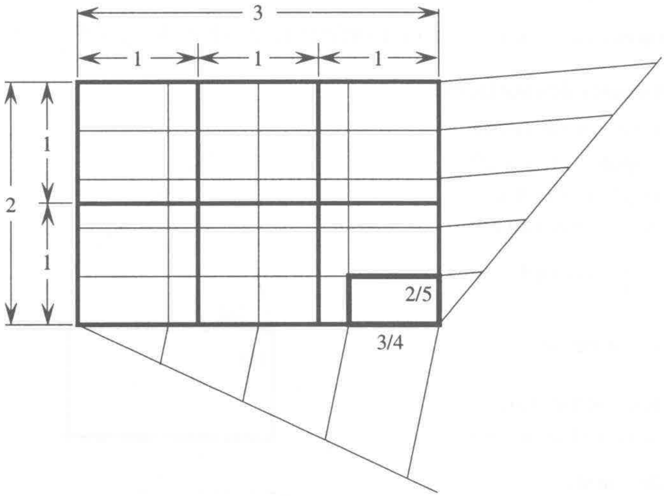


Pour une étude approfondie de ces deux modèles, voir : *"Deux méthodes de mesures rationnelles"*, RATSIMBARAJOHN in Revue de Didactique des Mathématiques. Ed. La pensée sauvage. Volume 3-1, p. 65-112.

Deuxième approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de la " commensuration ").

Soit à définir le produit de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$ en se référant aux mesures des aires :

il faut 5 longueurs de $\frac{2}{5}$ pour faire 2 et 4 longueurs de $\frac{3}{4}$ pour faire 3.



Ce qui donne un grand rectangle de dimensions 2 et 3 d'aire 2×3 soit 6. Il faut 5×4 petits rectangles de dimensions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$ pour obtenir le grand rectangle. L'aire des petits rectangles est donc 20 fois plus petite. Elle est de $\frac{6}{20}$. On décide d'identifier $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ et $\frac{6}{20}$.

Ce travail (première ou deuxième approche) fait sur quelques fractions simples est appliqué au cas des fractions décimales et institutionnalisé sur ce seul cas (exemple : $\frac{2}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{6}{1000}$).

Cela permet alors de donner du sens à 3,7 par 4,56 ; 3,7 étant identifié à $\frac{37}{10}$ ou à $3 + \frac{7}{10}$, 4,56 à $\frac{456}{100}$ ou à $4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$, le produit $3{,}7 \times 4{,}56$ est donc égal à : $\frac{37}{10} \times \frac{456}{100}$ ou $\left(3 + \frac{7}{10}\right) \times \left(4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}\right)$.

IV-Bibliographie recherche et formation :

BROUSSEAU G.(1980), "*Problèmes de didactique des décimaux*", dans *Recherche en Didactique des Mathématiques* 2/1, pages 37-128.

RATSIMBA-RAJOHN (1982) : " *Deux méthodes de mesures rationnelles* ". RDM :Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 3-1 pages 65-112.

COPIRELEM (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen.* Elem math VIII Publication APMEP n°61.

DOUADY R., PERRIN M.J. (1986) : " *les nombres décimaux à l'école et au collège* ". IREM Paris VII.

BROUSSEAU N.et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

BERTE A. " *Mathématique dynamique* " Nathan pédagogie 1993.

BRIAND J., HUET M.L.,.PEAULT H,.PELTIER M.L : COPIRELEM (1995) "*La Disme*" et "*Etude de la Disme*" , dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris 7, pages 43-78.