De l'utilisation de la proportionnalité à la propriété de Thalès

Jacqueline BORREANI, Danielle BERGUE - IREM de Rouen

PRÉSENTATION

Nous avons souhaité mettre en place un travail qui permette aux élèves de Troisième de constater expérimentalement la proportionnalité des mesures d'un segment et de son projeté puis de le traduire géométriquement.

Après avoir précisé quelques éléments du contexte historique et didactique, nous allons donné une description et une analyse d'une ativité menée en classe. (Ce document présentant l' atelier est un "résumé" d'une publication ultérieure).

Quelques éléments sur la propriété de Thalès dans l'histoire et dans l'enseignement.

Le problème des mesures de grandeurs intervient très tôt dans l'histoire, il repose sur les notions de nombre et de rapport de nombres.Dès le début de la géométrie, il y a référence à la théorie des proportions, travaux à la base du livre V des Eléments d'Euclide.

Une première conception du théorème de Thalès est reliée de façon fondamentale à la théorie des figures semblables. La proposition 2 du livre VI est une première démonstration de la propriété de Thalès dans un triangle. Le principe de la démonstration repose sur des comparaisons d'aires, dans son déroulement il subsiste une confusion entre nombre et grandeur et la difficulté d'irrationalité possible des mesures est gommée.

Une deuxième conception est issue des critiques des Eléments au XVII^e.En 1667, Arnauld publie de "Nouveaux éléments de géometrie..." dans lesquels une proposition fondamentale étudie les lignes proportionnelles et le rapport des longueurs. La propriété de référence n'envisage plus uniquement la figure triangle mais est étendue aux bandes parallèles.

Ces deux conceptions du théorème de Thalès vont évoluer et cohabiter au cours des siècles.

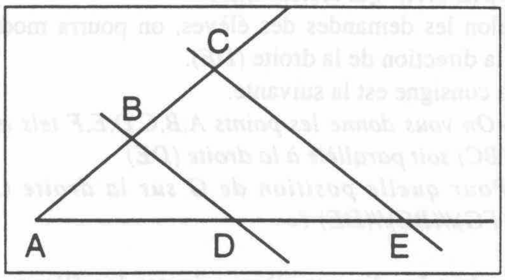
Au XIX^e un changement profond s'effectue avec la remise en cause de l'axiome des parallèles. Il n'y a plus une mais des géométries. La géométrie euclidienne est celle des similitudes: le théorème de Thalès joue donc un rôle fondamental dans l'étude de l'homothétie en liaison avec les figures semblables et l'axiome des parallèles. Au cours de l'histoire, proportionnalité et similitude sont étroitement liées, mais le flou entre grandeurs, nombres et mesures ne sera résolu qu'avec une construction axiomatisée des nombres réels. Ce flou est au centre des problèmes que posent l'enseignement de la propriété de Thalès.

Dans les manuels scolaires, à partir de 1898, on lit deux types d'énoncés du théorème de Thalès:

- toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.
- des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.

En passant par les rapports de longueurs puis par les rapports de mesures algébriques de vecteurs de même sens, diverses présentations se sont succédées. Dans la version des années 1970, rapport de projection mais aussi conservation de l'abscisse sont des représentations qui cohabitent sans être nécessairement dans une configuration de triangle. Les programmes de Troisième de 1986 préconisent une présentation "triangle-dilatation" pour aboutir en Seconde à une présentation vectorielle, non limitée à un triangle et préparant à l'homothétie.

Que ce soit dans l'histoire ou pour des raisons didactiques, diverses conceptions de la "propriété de Thalès" cohabitent ou entrent en conflit. Les conceptions sont équivalentes mais les images mentales associées ne le sont pas. Il en résulte des procédures élèves différentes suivant leurs perceptions visuelles de la correspondance des segments.(cf Vergnaud 1981) de la figure :



Une première procédure permet de passer d'une ligne à une autre dans une même catégorie de mesures. Les élèves utilisent un opérateur scalaire: la projection conserve l'égalité, l'addition, et l'opérateur scalaire. C'est une vision d'agrandissement-réduction de figure qui peut prendre une forme vectorielle.

Si $\overline{AC} = k\,\overline{AB}$ alors $\overline{AE} = k\,\overline{AD}$

et $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{BC}$

La deuxième procédure permet de passer d'une catégorie de mesure à une autre. Les élèves utilisent un opérateur fonctionnel où l'application associe les longueurs sur une droite aux longueurs des segments projetés.

Si $AD = k\,AB$ alors $AE = k\,AC$

Une troisième procédure est de type "relation quaternaire". C'est l'utilisation des proportions vues en tant que quadruplet avec la technique du "produit en croix" ou de la "quatrième proportionnelle".

$$AB/AD = AC/AE$$

Le cadre de notre travail

La séquence se déroule sur deux heures:

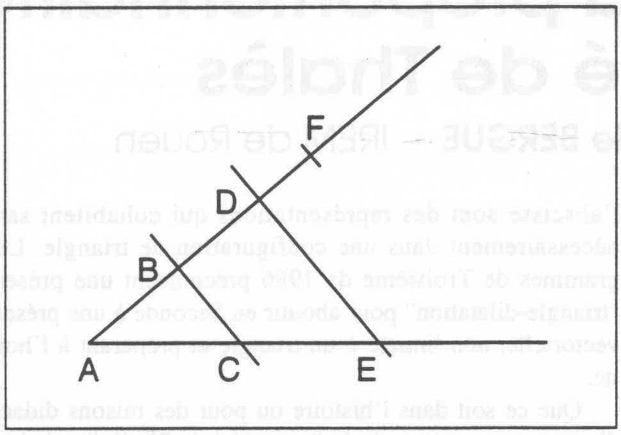
Manipulation, relevés des données, essai d'interprétation de ces données en travail individuel puis de groupes.

A partir des travaux de groupes, mise en place d'un débat permettant de faire émerger la propriété de Thalès et sa réciproque.

Six classes ont été observées .

Description de la situation:

On projette avec une tablette rétroprojectable couplée à un ordinateur la figure suivante construite à l'aide du logiciel CABRI (LSD2 Grenoble)



Les points *A,D,E,F* sont fixes

La droite *(BC)* est mobile en restant toujours parallèle à *(DE)*.

Pour chaque position de *(BC)* l'ordinateur permet de faire afficher les mesures des longueurs de *AB* et *AC* ainsi que celles de *AD,AE* et *AF* qui restent fixes.

Selon les demandes des élèves, on pourra modifier l'angle Â ou la direction de la droite *(DE)*.

La consigne est la suivante:

«On vous donne les points A,B,C,D,E,F tels que la droite (BC) soit parallèle à la droite (DE)
Pour quelle position de G sur la droite (AC) a-t-on (FG)//(BC)//(DE) ?»

Pendant les dix premières minutes les élèves observent le dessin et écrivent leurs conjectures sur leur feuille, individuellement . C'est ce que nous avons appelé leurs conceptions premières de la propriété que nous analysons ultérieurement.

On fait ensuite varier la position de (BC) en s'arrêtant au début sur des valeurs numériques assez simples. Les élèves notent alors individuellement les résultats, les organisent et essayent de proposer seuls ou en groupe une réponse à la question de la consigne.

Dans la deuxième heure, ces réponses seront ou non validées lors du débat.

Les élèves vont travailler dans plusieurs cadres et effectuer des changements de cadre: cadre géométrique, des grandeurs, numérique.

Les données vont être organisées sous forme de tableaux, de graphiques, de dessins. La forme choisie favorise ou non le passage d'un cadre à l'autre et l'émergence des égalités de rapports.

La continuité des déplacements des points sur les droites avec CABRI est une aide à la prise en compte des problèmes d'alignement dans la configuration croisée de la propriété de Thalès.

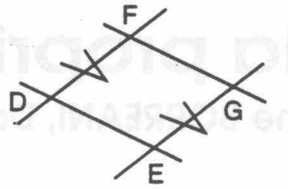
II - RÉSULTATS

Les conceptions premières

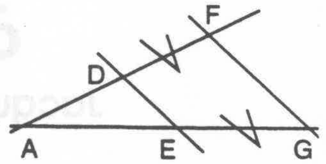
Pour l'ensemble des 145 élèves observés les réponses spontanées concernant la position du point G vont à quelques exceptions près être justifiées par des preuves, des constructions de nature géométrique.

37% ne justifient rien ou construisent directement la parallèle et mesurent sur le dessin. Le dessin est pour eux une preuve.

3% ont une conception de la projection liée à la première qu'ils ont vue celle de la projection sur des droites parallèles.



d'où



Ces élèves proposent donc ici *DF = EG* ou "*DF* mesure 3 donc on rajoute 3 à *AE*"

Certains mettent en oeuvre d'autres transformations du premier cycle: projection orthogonale ou symétrie centrale

6% utilisent la propriété de Thalès de façon implicite (ou explicite pour deux redoublants).

Donc, malgré la présence dès le début de mesures sur le dessin, la propriété de Thalès n'est pas perçue comme un problème nécessitant un passage du cadre géométrique au cadre numérique.

L'utilisation de CABRI qui permet de visualiser les deux cadres par déplacement des points et variation simultanée des mesures va permettre de tenter de déstabiliser ces conceptions.

Les stratégies élèves

La majorité des solutions qui vont permettre de proposer une réponse correcte vont utiliser l'aspect fonctionnel de la proportionnalité. Cela concerne 53% des réponses par groupe.

Parfois après avoir mis en évidence un coefficient de proportionnalité pour " "vérifier la proportionnalité ,ils calculent AG en utilisant la quatrième proportionnelle.

Les élèves puis les groupes qui vont vouloir utiliser les propriétés de linéarité mettent en oeuvre une "pseudo linéarité". En effet s'ils constatent bien dans des tableaux du type:

2	12	14
6	36	?

$2 + 12 = 14$ donc $6 + 36 = 42$ puis $2 \times 7 = 14$ donc $6 \times 7 = 42$ mais ils généralisent aux autres opérations qu'ils mobilisent facilement:

$$2 + 12 = 14 \text{ donc } 6 + 12 = 18$$

Cette erreur est à rapprocher de celle sur l'égalité d'un segment et de son projeté quel que soit la direction de projection.

Enfin certains trouvent le coefficient de proportionnalité mais en parlant de cosinus "on peut l'appliquer c'est presque rectangle "diront ceux qui tentent de justifier

Le débat

Deux étapes dans le débat: d'abord: "Expliquer ce qu'on a vu, ce qu'on a écrit et pourquoi ?", cela conduit à l'écriture de la propriété de Thalès; puis la recherche de la position du point G fera émerger la réciproque.

Pour expliquer la figure projetée les hypothèses vont être écrites par les élèves au tableau:

«A,B,D,F alignés
A,C,E alignés et (BC)//(DE)»

Les élèves soulignent l'importance de l'ordre des points en expliquant leur glissement visuel sur une même droite.

Le problème de l'écriture du coefficient de proportionnalité montrera que le choix entre un rapport "en dessous de 1" reste une gêne pour des élèves de troisième.

Finalement on complétera au tableau:

"A,B,D,F alignés
A,C,E alignés et (BC)//(DE) alors AC/AB = AE/AD
=1,25

Ensuite ils généralisent l'écriture pour calculer AG sous la forme:

"si AC/AB = AE/AD
alors je peux écrire AC/AB = AE/AD = AG/AF
et alors AG = AF × 1,25 et on a (FG)//(BC)"

CONCLUSION

Les conceptions premières des élèves les diverses recherches qu'ils ont effectuées pour trouver un lien entre les séries de mesures montrent que la mise en évidence de rapports égaux ne va pas de soit.

Proposer le calcul *a priori* les empêche de se faire leur propre opinion sur la validité éventuelle d'autres types de calculs et sur l'unicité de la solution

L'utilisation de CABRI permet de bien montrer l'alignement des points, la continuité de leurs déplacements. C'est cet outil qui, nous semble-t-il, permet aux élèves qui ont travaillé sur cette situation d'écrire très majoritairement des rapports exacts quelle que soit la forme de la figure.

Des tests passés ultérieurement dans des classes ayant ou non travaillé avec la situation décrite semblent montrer qu'il y a des effets sur:

L'attention que les élèves portent à l'alignement des points.
La différentiation de la propriété et de sa réciproque
Les conditions d'écriture de la propriété.

Des questions restent soulevées:

Faut-il faire un travail préliminaire sur les proportions ?
Comment cerner les difficultés spécifiques des théorèmes instanciés du premier cycle (Thalès ,Pythagore) ?
Approfondir le travail sur l'exact et l'approché
ETC....

Atelier
Évaluation et aide à l'apprentissage

Raymond CHUZEVILLE - IREM de Grenoble

Mon intervention dans cet atelier a été axée sur les deux points suivants :

- présentation d'un schéma "points de repère" dont le but est de faire prendre conscience aux élèves de leurs démarches dans les divers apprentissages en mathématiques et en particulier lorsqu'ils résolvent des problèmes.
- présentation de ma pratique d'évaluation.

Pour le premier point, voir le fascicule "module en seconde. tome f". publié par l'IREM de GRENOBLE (Septembre 1992} ; pour le second point, voir l'article "correction des devoirs de mathématiques". bulletin APMEP de septembre 1990.

PRÉSENTATION DU SCHÉMA " POINTS DE REPÈRE"

Dès le premier cours, je pose aux élèves un exercice dont le but est de présenter les différents éléments du schéma "points de repère (schéma joint en annexe). De plus, ce schéma me permet d'introduire la fiche d'évaluation par compétences qui sera utilisée lors des devoirs surveillés (fiche jointe en annexe).

Exemple d'exercice posé en seconde

ABC désigne un triangle quelconque.
Démontre que les points *B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A*.

Cet exercice a été choisi pour son énonce court facile à analyser) et pour son niveau de difficulté (aucun élève n'est parvenu à le faire seul).

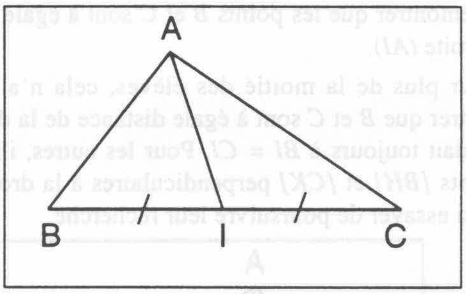
De plus, j'ai donné à mes élèves les consignes suivantes :

- travailler seul (sans l'aide de leurs voisins),
- me poser toutes les questions qu'ils désiraient, mais par écrit,
- m'appeler lorsqu'ils auront terminé leur démonstration.

Je leur demande de me poser des questions par écrit, pour les obliger à se centrer sur un problème. D'ailleurs, assez souvent., en écrivant leur question, ils trouvent seuls la réponse qu'ils cherchent.

Quatre élèves ont dessiné un triangle isocèle. Après que je leur aie souligné les mots "triangle quelconque" de l'énoncé, ils ont pris conscience qu'ils n'avaient pas tenu compte de cette partie des données.

Mes élèves ont commencé par faire une figure de la forme suivante et très vite ils m'ont appelé pour m'indiquer qu'ils avaient terminé.



Deux élèves seulement m'ont demandé ce qu'était une médiane. Mais une fois la question mise par écrit, l'un d'eux s'est rappelé ce qu'était une médiane (il a alors dessiné une figure semblable à celles de ses camarades) ; quant à l'autre élève, je lui ai dit d'essayer de me dessiner une médiane, ce qu'il est arrivé à faire, (peut-être en regardant la figure de son voisin !).

Réponse des élèves à l'exercice : *B* et *C* sont équidistants de la médiane issue de *A* car on a *BI = CI* puisque *[AI]* est la médiane issue de *A*.

J'ai demandé à chacun de comparer sa "démonstration" avec celle de son voisin. Dans la plupart des binômes qui avaient écrit la réponse ci-dessus, après une brève discussion, j'ai entendu : "ça ne doit pas être ça, car le prof nous demande