Réticence fondée ! et tout autant fondée lorsque les programmes étaient écrits par un corps d'inspection. La seule question étant : quel recrutement, quelle formation vont assurer la légitimité d'écriture d'un groupe concepteur de programmes ?

c) Groupes d'écriture de programmes...
(appelé GTD, Groupes Techniques Disciplinaires)

La réflexion sur les lycées commencée par A.Savary, a débuté par un travail conduit par P. BOURDIEU et F.GROS et débouchant sur une charte de 7 grands principes. Puis vint la création du Conseil National des Programmes (CNP), organisme de réflexion et de propositions, indépendant de la structure administrative (les " Directions "). Enfin, la mise en place des groupes disciplinaires, placés auprès de la Direction des lycées, mais dont les productions sont soumises à l'avis du Conseil des Programmes.

Ces groupes sont restés très cloisonnés, et trop disciplinaires. Ceux qui "pensent" ne tiennent pas la plume des programmes, ceux qui tiennent la plume ne sortent pas assez du champ de leur discipline. Quand et comment vont s'incarner un tant soit peu les grands principes énoncés par la mission BOURDIEU-GROS ? La communication n'a pas vraiment eu lieu... L'institution ne s'est pas donné les moyens de mettre au vert pour quelques jours tous les membres des GTD, pour aborder les grandes questions : la démocratisation de l'école, le rôle et les limites d'un programme scolaire, le concept de liberté pédagogique, rien de tout cela n'a été débattu par ceux qui vont mettre la main à la pâte de l'écriture.

Un programme de mathématiques s'écrit encore avec un inventaire de matheux façon Jacques Prévert : un académicien, deux universitaires, trois inspecteurs, quelques professeurs de collèges, de lycées, de lycées professionnels. Rien déjà n'assure que nous ayons une conception commune de ce qu'est l'activité mathématique. Et comme de plus, écrire un programme n'est pas " faire des mathématiques " mais une activité spécifique interfèrant avec diverses sciences humaines, on conçoit que notre absence de culture commune soit un handicap certain.

Sans doute a-t-on pensé que notre diversité serait un gage de qualité ? Mais la diversité ne devient richesse que si on sait la faire converger sur un projet commun. ■

Existe-t-il une didactique des mathématiques ?

Philippe LOMBARD
IREM de Lorraine

La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas.
G. Vergnaud

Depuis que le monde est monde — disons depuis Thalès de Milet et Pythagore de Samos — c'est-à-dire depuis que la pensée spéculative a conquis droit de cité, les mathématiciens se sont toujours assignés un même but : *percer les secrets des nombres et des formes*. Ces deux notions ont certes évolué entre la géométrie d'Euclide, ou l'arithmétique de Diophante, et les découvertes qui valent aujourd'hui quelque médaille à leurs auteurs. L'univers des nombres englobe désormais une multitude d'êtres "idéaux" qui sont venus peu à peu enrichir la portée du calcul algébrique. Les outils du géomètre ont progressivement permis d'accéder à des figures de plus en plus complexes. Les liens subtils et mystérieux qui relient la combinatoire des signes à la grande variété des images n'ont cessé d'étendre leur toile et leur diversité. La problématique est cependant toujours la même, elle suffit, à elle seule, pour définir les mathématiques.

Est-ce un manque de confiance dans l'intérêt des sociétés modernes en direction de la culture ? Bien peu des enseignants sont prêts à reconnaître que leur discipline n'a, au fond, pas d'autre finalité. La plupart s'ingénient à faire valoir l'importance sociale de tous les problèmes liés au calcul ou au raisonnement logique. Quelques-uns insistent sur l'inestimable apport de l'algèbre et de la géométrie aux autres domaines de la science. D'autres, parfois, défendent l'idée que le "langage universel de la mathématique" constitueraient le fondement de toute pensée rationnelle ! Les Irem eux-mêmes n'ont-ils pas été jusqu'à sponsoriser, un temps, certains de leurs chercheurs dans le seul but de faire savoir *urbi et orbi* qu'une différence sensible éloignerait le "savoir savant" du "savoir enseigné" ?

Mais nous pouvons le reconnaître puisque nous sommes ici entre professeurs : les enseignants de mathématiques s'intéressent rarement aux applications de leurs savoirs et bien peu s'inquiètent d'une quelconque coordination avec leurs collègues de physique ! En réalité, ce sont les *finalités des mathématiques* qui, par un phénomène de pompe aspirante, orientent directement les *finalités de l'enseignement des mathématiques*. L'idée qui structure les programmes est simple et, une fois passé l'enthousiasme du débutant qui les porterait à brûler les étapes, les professeurs s'y rallient assez vite : les élèves du collège doivent avoir vu tel ou tel chapitre parce que cela leur sera indispensable pour suivre en seconde, les élèves de seconde ne comprendront rien en terminale scientifique s'ils ne sont pas rompus à telle ou telle technique... et il est indispensable de traiter ceci ou cela en terminale, à cause de ceux qui poursuivront à la faculté ou dans les classes préparatoires.

Faut-il préciser que le cours de mathématiques, dès la première année de l'université est lui-même induit — car il ne faut pas "baisser le niveau"... — par celui des diplômes de troisième cycle ? On aura compris que l'apprentissage n'est rien d'autre qu'un immense *flux de savoirs* dont la spirale aboutit au "savoir savant", après avoir formé au passage des maîtres qui n'auront d'autre souci que de préparer les enfants, tout au long de leur cursus scolaire, à des études supérieures... qu'ils n'aborderont en réalité que s'ils consentent à se spécialiser à leur tour dans les mathématiques !

Dans ces conditions, si nous devons parler d'une "didactique des mathématiques", il ne s'agira de rien d'autre que d'une sorte de "mécanique des fluides" chargée d'étudier ce *flux de savoirs* afin d'en dégager rationnellement les lois de fonctionnement. Devenu substantif pour désigner désormais

une science en gestation, l'adjectif "didactique" n'impose à celle-ci que deux limites naturelles : d'une part, de ne pas perdre de vue l'aspect pédagogique de l'apprentissage et, d'autre part, de ne pas se fondre uniquement dans la pédagogie en oubliant sa spécificité mathématique. D'un côté la didactique ne serait plus qu'une mécanique des fluides qui se garderait bien de prendre en compte les phénomènes de "viscosité" ; elle ne consisterait plus qu'en une hypothétique quête d'optimisation des contenus disciplinaires, privée de références aux difficultés des élèves. De l'autre elle ne serait que prétexte à une pure et simple psychopédagogie dont les lois trop générales perdraient toute pertinence face aux obstacles inhérents à la géométrie, à l'analyse ou à l'algèbre.

Existe-t-il une telle didactique des mathématiques ? La question est sans doute iconoclaste, dès lors que certains se sont d'eux-mêmes décerné le titre de "didacticiens"... Elle n'en mérite pas moins d'être posée par ceux qui sont confrontés aux difficultés de l'enseignement : ceux-là se heurtent chaque jour à de vraies questions, et ce sont précisément les réponses apportées par les "didacticiens" qui doivent être mises en examen. Je me propose d'amorcer ici ce débat en réfléchissant d'assez près à un exemple pratique, mais je devrai auparavant dresser une sorte d'inventaire de la situation actuelle, d'abord au niveau de l'enseignement et ensuite au niveau des grandes lignes de la "didactique" d'aujourd'hui.

Première Partie : la fin de l'âge d'or

Sans remonter jusqu'à la nuit des temps, l'histoire de ces trente dernières années illustre parfaitement les tensions internes propres à l'apprentissage des mathématiques. On a coutume en effet de proclamer, depuis la fin des années 70, que l'enseignement des mathématiques est en crise. Certains préféreront dire : «depuis la réforme des maths modernes», d'autres : «depuis l'avènement du collège unique», d'autres encore : «depuis l'abandon, en rase campagne, de la réforme des maths modernes»... La vérité est qu'il convient tout simplement de dire : «*on sait*, depuis les années 70, que l'enseignement des mathématiques est en crise» ! Car c'est aussi bien la genèse des programmes de 1970 que le retour en arrière opéré depuis une quinzaine d'années qui ont mis en évidence le poids et l'interdépendance des deux principales contraintes de cet enseignement : la *nécessité de convaincre* et l'*exigence de rigueur*.

Le goût de la rigueur

Il suffit de remarquer les précautions oratoires des maîtres ou des manuels dès que la vérité semble écornée pour s'en convaincre : la rigueur logique est une seconde nature chez tout professeur de mathématiques. Qu'il s'agisse de la précision tatillonne des notations, de la virtuosité des enchaînements déductifs ou de la perfection des rédactions attendues des élèves, peu importe que les instructions officielles mettent explicitement ou non l'accent sur son importance dans le discours, pas de cours de mathématiques sans rigueur !

Au lycée, l'analyse était jusqu'à présent le terrain de prédilection de cet attachement au raisonnement : les problématiques étaient claires, les définitions substantielles, les théorèmes consistants. Le cours était gratifiant : les " e " n'étaient sacrifiés qu'en cas d'impérieuse nécessité (pour les classes très éloignées des futures études supérieures)... On observe aujourd'hui la quasi-impossibilité d'un retour en arrière, et ceci aussi bien chez les jeunes professeurs que chez les anciens. Privé de quantificateurs, le discours leur paraît vidé de contenu, et chacun donne l'impression d'avoir à surmonter d'énormes difficultés pour présenter des notions comme celles de limite ou de dérivée.

Une anecdote peut à elle seule servir à illustrer ce phénomène : il suffit de s'arrêter un instant sur l'engouement développé récemment à propos "d'analyse non-standard". Cette miraculeuse façon de procéder allait enfin rendre "corrects" les raisonnement quelque peu cavaliers des physiciens en matière de passage à la limite. Les " e " pourraient alors aisément être remplacés, pour le confort de tous, par des raisonnements intuitifs mais cependant légitimes. On a presque pu croire un instant que l'aspiration profonde de tout professeur de mathématiques était de voir ses élèves jongler librement avec les symboles du calcul de Leibniz. On aurait juré, à entendre les zélateurs de la nouvelle analyse, qu'ils étaient prêts à reconnaître qu'une trop grande part de rigorisme pouvait éventuellement entraver la compréhension naturelle... Or que s'est-il passé ? Les démarches de cette nouvelle analyse étaient-elles infondées ? Les raisonnements restaient-ils sacrilèges ?

Simplement, ceux qui s'enthousiasmaient pour le remède miracle ne sont pas parvenus à sortir de sa présentation formalisée, si bien qu'il apparaît toujours impossible d'enrober les "démarches intuitives" avec un discours qui puisse les justifier aux yeux des puristes. Il n'est donc plus question de les trouver présentables aux élèves ! Quelle dose de justification axiomatique aurait-il donc été "raisonnable" d'ajouter pour que le "naturel" devienne enseignable ?

Une frustration analogue s'observe aisément au collège. La réforme des maths modernes y avait bien été ressentie (par certains) comme "un peu trop formelle", il n'empêche qu'elle venait à point nommé pour remettre quelque rigueur dans les programmes antérieurs. On mesure aujourd'hui son impact réel dans les comportements quand on sait qu'une majorité de professeurs enseigne toujours le langage des ensembles et des lois de composition sans trouver, hors de ce contexte, d'autre façon de présenter les contenus actuels en matière de numérique ou de géométrique. Là encore l'excès de rigueur ne présentait pas que des défauts... Malgré les avatars un peu perturbants des théorèmes de Pythagore ou de Thalès, on disposait d'une progression rigoureuse, permettant de séparer le bon grain des propositions démontrées de l'ivraie des affirmations admises. Mieux : l'outil vectoriel donnait la possibilité de "vraies preuves" algébriques à la place de raisonnements toujours sujets à caution à partir des figures.

Le programme actuel est mal vécu car chacun a le sentiment d'un immense laxisme au niveau des constructions logiques : les théorèmes deviennent des "propriétés" dont le statut est peu clair, les vastes enchaînements théoriques disparaissent. Alors comment s'étonner (par exemple) que la majorité des professeurs de quatrième se défoulent sur l'apprentissage de la démonstration ou s'acharnent sur de rares îlots "présentables" comme celui qui subsiste autour de la notion de projection, de cosinus et de droite des milieux ?... Comment s'étonner que les équations de droites soient reléguées au niveau des chapitres "sur lesquels il n'y a rien à dire"?... Comment s'étonner que les seules voix qui s'élèvent réclament un retour au calcul vectoriel ou, à tout prendre, à la géométrie des cas d'égalité des triangles ?...

Rigueur indispensable, rigueur desséchante, on a déjà tout dit sur ce "paramètre" de l'enseignement des mathématiques. Peut-être convient-il cependant d'insister sur son caractère avant tout sécurisant pour le professeur, et aussi sur son côté

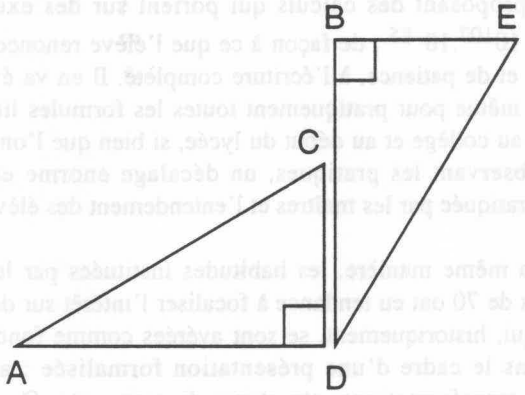
fortement marqué d'*esthétisme gratuit*.

Certes la rigueur du discours passe pour donner une cohérence à "l'édifice", il n'en reste pas moins qu'à l'analyse, elle est le plus souvent artificielle et, sans aller jusqu'à rappeler perfidement que la "théorie naïve des ensembles" n'est en fait qu'un leurre, dont ce sont précisément les contradictions internes qui ont entraîné un retour historique aux fondements, on aurait beau jeu de relever les insuffisances logiques inévitables de tout cours de mathématiques élémentaires. A quoi bon, en effet, faire semblant de démontrer un théorème si celui-ci est directement équivalent à la propriété que l'on vient d'admettre pour lui servir de justification ? A quoi bon insister sur des raffinements de pure forme, dont la sophistication n'est nécessaire que dans le cadre de théories élaborées ? Apporte-t-on vraiment quelque chose aux élèves de lycée en précisant que l'existence d'une solution évidente sur le graphique résulte, en bonne logique, du théorème des valeurs intermédiaires et du fait que R est complet ? Pense-t-on vraiment éclairer un élève de collège en mettant systématiquement l'accent sur ce qui "est un axiome" et sur ce qui "est démontré" ?

Un exemple illustrera ce que je veux dire.

Considérons deux triangles rectangles ADC et DBE placés comme sur la figure ci-contre, et pour lesquels on ait :

$$AD = BD \text{ et } CD = BE .$$



Pourquoi les angles en A et en D sont-ils égaux ?

Interrogez les professeurs de troisième et demandez-leur quelle démonstration ils donnent à leurs élèves : tous vous affirmeront que les deux angles sont égaux parce que leur tangente est la même ! Aucun n'osera dire que l'on a affaire à des angles qui sont manifestement égaux parce que les triangles rectangles ADB et DBE sont des triangles égaux (ou, si l'on préfère, superposables).

Chacun reconnaîtra là le tabou actuel concernant les "cas d'égalité". La notion d'égalité entre deux figures passe en effet pour difficile à formaliser car elle semble désuète si on la traite comme une simple relation d'équivalence (un peu à la manière d'Euclide), ou compliquée, lorsqu'on la ramène à la notion d'isométrie : il faudrait alors décrire explicitement le cheminement qui permet de transformer le triangle ADB de façon à l'amener sur le triangle DBE . Personne ne semble plus (même inconsciemment) ressentir le fait qu'il puisse s'agir là d'un réflexe très naturel, et qui mérite bien d'être accepté sans aucune formalisation, lorsqu'il est à la base d'une démonstration aussi simple.

Mais où est donc le profit au niveau logique ? Pour introduire et justifier la notion même de tangente (ou de cosinus) d'un angle, il aura bien fallu admettre, à un moment ou à un autre, le résultat suivant : deux triangles rectangles qui ont les mêmes côtés de l'angle droit (voire des côtés de l'angle droit proportionnels) ont nécessairement les mêmes angles, *et ceci quelle que soit la position qu'ils occupent dans le plan ou dans l'espace*... On ne peut même pas arguer du fait que ces "cas d'égalité" ne seraient pas naturels aux élèves, puisque la plus grande partie de la géométrie de sixième et cinquième tourne autour de problèmes de construction et que chacun intègre donc très vite l'idée que des "données" telles que la longueur des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle induisent une "même" construction ; c'est-à-dire des triangles ayant les mêmes éléments !

Les limites de la rigueur

Il ne faut pas s'y tromper, nous touchons ici à un paradoxe fondamental : alors qu'elle est censée expliquer le passage d'une propriété à une autre en donnant l'impression que l'on est face à un édifice logique complètement maîtrisé, la rigueur déductive est condamnée (dans l'enseignement) à se déployer sur des champs très restreints. Et à force d'habitude, le discours n'évite pas toujours quelques hérésies dont l'analyse détaillée mettrait largement à mal ce *parti-pris* de la rigueur mathématique ! Or chacun tient, en quelque sorte, à "faire semblant de ne rien laisser au mystère", comme si l'efficacité des outils mathématiques en dépendait de façon essentielle.

Mais il s'agit d'être clair : mon but n'est pas de plaider pour une rigueur accrue ou pour un retour salutaire à des présentations sans défauts. Il est au contraire de faire sentir en quoi le *goût de la déduction* est un paramètre important de l'enseignement des mathématiques, et en quoi ce *goût de la déduction* arrive souvent à faire oublier d'autres finalités tout aussi légitimes, comme celles de simplicité, de clarté, d'intuition ou de compréhension. Cela ne peut se faire que si l'enseignement *assume* de lui-même les limites du déductivisme. Celui-ci est considéré la plupart du temps comme un dogme et transforme les salles de classes en des temples, où le rituel devrait en permanence être un hymne à la "vérité mathématique". Or les liants logiques n'ont d'autre efficacité, avec les enfants, que d'établir (autant que faire se peut) des connexions pertinentes entre les concepts.

Poursuivez l'expérience que j'évoquais précédemment à propos de l'égalité des triangles rectangles et faites remarquer aux professeurs l'aspect quelque peu acrobatique de leur explication fondée sur l'égalité des tangentes. Généralement ils ne tarderont pas à abandonner le terrain de la logique pour vous faire remarquer que l'expérience prouve qu'en définitive les élèves «comprennent mieux» avec une telle démonstration...

En l'occurrence, ce nouvel argument n'est pas totalement dénué de fondement, mais n'allez pas en déduire trop hâtivement que ce nouveau "paramètre" relatif à la *compréhension des enfants* serait celui qui commanderait en réalité la démarche scolaire ! Mais ce n'est cependant pas un hasard si les débats qui ont précédé la mise en place des programmes de 1970 tournèrent d'abord autour de l'opposition entre "dogmatisme" et "constructivisme". C'est-à-dire entre l'aspect définitif du discours du maître et la compréhension nécessairement progressive de l'élève.

On sait malheureusement ce qu'il est advenu de ce beau rêve. Le dogmatisme que les réformateurs voulaient abattre s'est au contraire développé à un point tel qu'il fallut bientôt se rendre à l'évidence : jamais sans doute les cours de mathématiques n'avaient autant ressemblé à des traités de logique ou

d'algèbre, jamais les mathématiques n'avaient semblé aussi ésotériques, jamais le sens profond de la discipline ne s'était autant éloigné des problèmes un tant soit peu concrets. La machine ne fonctionnait désormais que comme une vaste entreprise destinée à produire de la logique, les corollaires suivaient les théorèmes, les théorèmes suivaient les propositions, les propositions suivaient les définitions et les axiomes... et les exercices ne consistaient plus guère qu'en des applications immédiates des divers énoncés !

On aurait tort de croire que le problème est simple, et j'ai déjà dit plus haut l'importance — objective ou non — qu'il faut bien accorder à la rigueur. Si bien que la réponse au conflit précédent est loin d'être évidente. On s'en convaincra vite en analysant avec un peu de recul le compromis actuel, qui consiste "à construire du déductif" à partir du "non-déductif"... Traduisons : il convient, dans un premier temps, de laisser les enfants appréhender les problèmes et les outils mathématiques sous forme d'activités qui ne soient pas nécessairement soumises à un déroulement purement "logico-déductif" ; c'est seulement dans un second temps que le rôle du maître devient primordial au niveau de la rigueur, il s'agit alors de préciser, de suggérer les généralisations ou les limites, de faire expliciter, bref : *d'apporter les formulations mathématiques indispensables...*

On reconnaîtra ici les deux phases bien établies, de l'*apprentissage* d'une part, et de l'*institutionnalisation* d'autre part. On notera d'ailleurs au passage une particularité de la "didactique" française, qui est d'avoir dévolu la mise au point des séquences d'apprentissage à une branche particulière de la réflexion dénommée "ingénierie didactique"...

Faut-il en déduire que le rôle du "didacticien" est seulement de commenter, au niveau théorique, les activités existantes ? Nous y reviendrons.

Le problème des contenus

En réalité, si l'apport de l'expérience passée se résumait dans la découverte d'une parade supplémentaire au dogmatisme des cours magistraux, il ne serait sans doute pas indispensable de s'y arrêter si longtemps. Malheureusement il est une autre leçon, beaucoup plus grave, à tirer de l'échec des programmes de 1970 : elle concerne les contenus mêmes de l'enseignement des mathématiques.

Les "refondateurs" des années 60 pensaient en fait détenir la réponse idéale au conflit entre rigueur mathématique et difficultés des élèves, elle tenait en deux noms : Bourbaki et Piaget. C'est-à-dire qu'entre les nécessités didactiques, qui doivent prendre en compte des phases spiralaires ainsi que des ruptures spécifiques à tout apprentissage, et les contraintes imposées par la science à construire, Piaget défendait l'idée d'une analogie inespérée entre les stades génétiquement assimilables par l'enfant et... les étapes axiomatiques du formalisme structural retenu par Bourbaki. On faisait ainsi d'une pierre deux coups : non seulement les contenus "obsolètes" des programmes antérieurs se trouvaient "modernisés" (donc en prise avec la science-vivante-qui-ne-cesse-de-se-remettre-en-question), mais encore la progression axiomatique, remaniée de fond en comble, allait simplifier la tâche des élèves. Rigueur à tous les niveaux et puissance didactique devenaient enfin complémentaires...

L'ennui est que l'on s'aperçut vite que "cela ne marche pas" ! La géométrie perdait son sens en devenant essentiellement fondée sur l'algèbre linéaire, et l'analyse s'éloignait de tout problème concret en se cantonnant dans un niveau de langue principalement destiné à l'étude des cas pathologiques. Bref, les préoccupations mathématiques creusaient d'abord un écart immense entre le discours et ses éventuelles applications, puis on dut bien convenir que la démarche axiomatique elle-même était fondée sur des points d'ancrage désespérément abstraits...

Il n'est pas sûr que le retour de balancier actuel ait suffisamment assumé l'échec des programmes de 70 sur ce point. La leçon est pourtant claire : *la démarche discursive qui amène constamment à aller du général au particulier ou qui porte à mettre systématiquement en avant les acquis de la formalisation mathématique est un handicap constant pour la compréhension.*

Considérons par exemple une règle d'apparence aussi simple que celle-ci : $10^p.10^q = 10^{p+q}$. Le "professionnalisme" de l'enseignant l'entraîne à penser que non seulement elle est claire, mais aussi qu'elle est "signifiante" pour les enfants. Or qu'en est-il, même pour les bons élèves ? Aucun ne trouve naturel un tel langage. Ceux qui se sortent avec brio des exercices d'application écrivent dans chaque cas le nombre de facteurs égaux à 10 qui sont nécessaires et ils effectuent les simplifications évidentes... Le seul moyen de faire "sentir" un tant soit peu le sens d'une telle formule est de la faire "réinventer" en proposant des calculs qui portent sur des exemples comme $10^{107}.10^{-85}$, de façon à ce que l'élève renonce, faute de place et de patience, à l'écriture complète. Il en va évidemment de même pour pratiquement toutes les formules littérales utilisées au collège et au début du lycée, si bien que l'on mesure, en observant les pratiques, un décalage énorme entre la langue pratiquée par les maîtres et l'entendement des élèves.

De la même manière, les habitudes instituées par les programmes de 70 ont eu tendance à focaliser l'intérêt sur des propriétés qui, historiquement, se sont avérées comme fondamentales dans le cadre d'une présentation formalisée : algèbre linéaire, transformations, structures diverses, etc. On oublie trop souvent que si ces aspects des objets mathématiques ont mis un temps très long à s'imposer, c'est parce qu'ils n'ont rien d'évident et exigent une *décantation poussée de la pratique*. Cette seule remarque devrait donner à réfléchir avant toute analyse sérieuse des contenus. On peut penser, par exemple, que des propriétés aussi naïves que celles de commutativité, d'associativité ou de distributivité sont suffisamment fondamentales et abordables pour être très tôt mises en valeur... Mais qu'elle est, au fond, leur efficacité ? Dès l'école primaire, l'enfant découvre (ou apprend) que pour effectuer l'addition

$$\begin{array}{rr} & 1425 \\ & 297 \\ + & 4625 \\ \hline & \end{array}$$

ou la multiplication : $5 \times 78 \times 20$, il a intérêt à effectuer des regroupements comme : $5 + 7 + 5 = 10 + 7$, ou comme : $5 \times 78 \times 20 = 100 \times 78$. De même, il a mainte fois l'occasion de rencontrer des manipulations du type : $62 \times 9 = (62 \times 10) - (62 \times 1)$. A quoi peut bien lui servir une atomisation de sa stratégie en des étapes *qui ne sont jamais utilisées séparément*, mais relèvent au contraire d'actions globales tellement naturelles qu'il fut, au cours de l'histoire, excessivement difficile d'en saisir la décomposition ? Est-il donc prouvé qu'un élève

n'ayant pas rencontré ces raffinements dès la sixième comprenne moins bien le jour où il est confronté à des transformations géométriques ou à des quaternions ? Sur quelles bases a-t-on décidé que l'on devait absolument centrer la majeure partie des programmes du collège sur de tels raffinements ?

Toutefois, rien n'est simple en matière didactique. Et l'enfer est presque toujours pavé de bonnes intentions... Car parallèlement à ces remarques qui pourraient donner à penser que l'abstraction est un défaut dont il faut se garder, il serait bien imprudent de croire que les mathématiques peuvent aisément être rendues purement concrètes. On se rappellera opportunément, en effet, que certaines images sont éventuellement susceptibles de préparer des obstacles auxquels on ne pense pas forcément. Il pourrait notamment en aller ainsi dans bien des domaines algébriques, comme par exemple celui de la résolution des équations du type : $ax + b = cx + d$. L'idée pédagogique de la balance, si elle permet de faire honnêtement comprendre la manipulation qui consiste à ajouter ou retrancher une même quantité à chaque membre, n'en présenterait pas moins le risque d'ancrer trop fortement l'assimilation des nombres à des quantités concrètes, et par conséquent de rendre plus difficile l'acceptation intuitive de la règle des signes, lorsque l'on aborde la multiplication des nombres négatifs.

Pourquoi ne pas le reconnaître ? La situation actuelle est que *l'on ne sait pas ce qu'il faut enseigner*, ni comment l'enseigner ! Quelle géométrie doit-on privilégier ? Quel "niveau de langue" est-il préférable de choisir pour apprendre l'analyse ? Quelle dose d'algèbre convient-il de mettre en avant ? Personne, aujourd'hui ne sait répondre à ces questions de façon objective. Prenons l'exemple du théorème de Thalès. Les programmes d'avant 70 l'ont considéré comme l'un des piliers de la géométrie élémentaire en y voyant un prétexte à raisonner et à calculer sur les figures. L'époque des maths modernes n'a voulu y voir qu'une façon (axiomatique) de donner une cohérence aux structures numériques de chaque droite, et même parfois une occasion pour signaler la structure archimédienne de l'ensemble des nombres réels. Mais qui pourrait dire où est la bonne méthode : le théorème de Thalès est-il un mystère propre à émerveiller la curiosité ? est-il un outil puissant pour résoudre des problèmes de géométrie ? est-il une simple occasion de manipuler la proportionnalité ? est-il le passage fondamental par lequel la division des longueurs prend un sens ? est-il l'aboutissement de la géométrie pure qui débouche sur le calcul segmentaire ? est-il le lien entre l'analytique et la figure ? Doit-il être relégué au rang des accessoires au profit de l'homothétie ? de la similitude ? de la trigonométrie ? de la multiplication des vecteurs par un scalaire ? des équations de droites ?

Peut-on attendre les réponses à toutes ces questions des mathématiciens professionnels ? Encore faudrait-il en trouver deux qui soient d'accord et qui soient assez imprudents pour ne pas avoir tiré, précisément, les leçons des trente dernières années... Car ce sont des mathématiciens qui ont encouragé la mise en place des programmes de 1970, au nom d'une rupture avec un certain empirisme. Et ce sont des mathématiciens (souvent les mêmes) qui ont tordu le cou à cette réforme en s'apercevant que cet empirisme n'avait pas que des désavantages. Dès lors, ceux qui se risquent encore aujourd'hui à parler au nom de la communauté des savants cherchent surtout l'explication de l'échec là où elle les gêne le moins : dans l'inadaptabilité du "système", c'est-à-dire de l'institution en général et de ses dirigeants en particulier !

Mais mieux vaut être clair... Les choix des contenus relèvent d'au moins trois paramètres que personne ne peut prétendre maîtriser vraiment, et qui sont d'ordres *sociologique*, *épistémologique* et *didactique*. D'abord il serait irresponsable de penser que l'enseignement des mathématiques puisse se résumer à faire faire aux enfants des "gammes" qui ne serviraient (au mieux) qu'à un élève sur dix ou sur cent entrant en sixième. Ensuite il serait naïf de croire que quiconque puisse connaître à l'avance les chemins d'un apprentissage propice à la formation des mathématiciens. Enfin il serait bien présomptueux d'affirmer que les ressources actuelles en matière de didactique soient capables d'optimiser les contenus accessibles aux élèves.

Chacun peut avoir son opinion sur ces questions, mais une réflexion réaliste sur le "flux de savoirs" que constitue le champ de l'enseignement, tout en prenant en compte la "rugosité" éventuelle du système éducatif, se doit d'abord de comprendre les phénomènes de "viscosité" au sens de la métaphore que j'ai utilisée au début de cet exposé... Autant dire que la période qui s'achève marque la fin d'une sorte d'âge d'or : nous avons tous été chassés du "jardin des délices piagétiennes", où chacun espérait que les mathématiques pouvaient s'enseigner sans grande difficulté par le truchement d'un formalisme adapté aussi bien à la rigueur déductive qu'au développement progressif de l'enfant. Désormais, la "didactique" ne peut pas ne pas prendre en compte cet échec, et nous allons essayer de voir dans quelle direction elle envisage maintenant cette problématique.

Deuxième Partie : la dérive rhétorique

Si le champ d'une didactique des mathématiques est relativement simple à circonscrire, il n'en reste pas moins d'une étendue telle que la "science" dont nous parlons ici n'a rien à envier aux autres disciplines scientifiques. Les "phénomènes d'apprentissage des mathématiques" valent bien, en richesse, en diversité et en complexité, les phénomènes étudiés par la physique, la chimie, la biologie ou toute autre "science expérimentale"... Mais sans entrer dans une querelle sur le fait de savoir si l'on doit considérer la "didactique" comme plus proche des "sciences humaines" que des "sciences pures", il est clair que toute réflexion didactique se doit de prendre en compte aussi bien la réalité des faits observés que l'analyse rationnelle susceptible de les éclairer.

Théorie et expérience

Tout "didacticien" est donc confronté d'emblée à une double tentation : faut-il partir uniquement de l'observation — voire de l'expérimentation —, ou vaut-il mieux chercher avant toute chose des "théorisations", des "modèles", apportant les clefs des phénomènes d'apprentissage ?

Il n'est pas besoin de parcourir très longuement les publications pédagogiques pour ressentir immédiatement les limites de l'observation *a priori* d'enfants soumis à des tests de type scolaire ou à des entretiens avec les expérimentateurs... Le traitement des résultats a beau faire appel aux outils statistiques les plus sophistiqués ou à des trésors de patience et de psychologie, on s'aperçoit vite que, (mis à part quelques détails inattendus surgis parfois d'une discussion), la plupart des conclusions utilisables d'une expérimentation sont d'une banalité telle que pratiquement tous les faits observés ne sortent pas de ce qui était prévisible longtemps à l'avance. On peut certes voir là des confirmations rassurantes de la "théorie"... encore faudrait-il

que les résultats en question ne se contentent pas de confirmer des évidences ou les intuitions du simple bon sens, d'ailleurs ancrées depuis belle lurette dans les pratiques de tout enseignant. On risque fort, en effet, de "prouver" avec force quantification des vérités premières comme : «les opérations inverses (soustraction, division) sont plus difficiles que les opérations directes (addition, multiplication)» ; ou des truismes du genre : «les étudiants de Deug saisissent moins vite le concept de suite de Cauchy que les élèves des classes préparatoires» ; voire des "vraies-fausses" surprises telles que : «la moitié des élèves du cours élémentaire trouvent une réponse au célèbre énoncé : un bateau transporte 26 moutons et 10 chèvres, quel est l'âge du capitaine ?»...

C'est que l'observation pour l'observation manque en général d'une idée originale qui soit "porteuse". On s'en rendra vite compte si l'on espère tirer, par exemple, des conclusions didactiques de la quantité astronomique de résultats rassemblés chaque année lors des évaluations nationales conduites à l'entrée au CE2 et en Sixième. L'accumulation d'informations n'apporte guère plus que l'expérience des maîtres "blanchis sous le harnois" et n'aboutit pas à des théorisations particulièrement nouvelles.

Dès lors, la plupart des pédagogues se sentent souvent encouragés dans la tentation inverse et préfèrent se livrer à une théorisation préalable de leurs réflexions épistémologiques ou de leur propre expérience. On ne s'étonnera guère de voir ces tentatives s'éloigner de la didactique des mathématiques d'autant plus fortement qu'elles affichent l'ambition de théoriser la plupart des "situations didactiques" afin d'en dégager les formules optimales. De la notion générale de "contrat didactique" à l'étude de l'influence occulte d'une redoutable "noosphère" sur les phénomènes de transposition des savoirs, les occasions ne manquent pas de créer un vocabulaire de plus en plus ésotérique destiné à concurrencer les jargons déjà omniprésents dans les "sciences" dites de l'éducation.

Mais parfois, ces "théorisations" se souviennent qu'elles se réclament de l'apprentissage des mathématiques pour encourager des recherches urgentes sur quelque notion fondamentale... Il s'agit alors essentiellement de traquer les "variables didactiques" ou de disséquer le concept "d'obstacle épistémologique"...

Cette notion d'obstacle épistémologique est à bien des égards exemplaire d'une certaine impuissance des "théories" générales dès qu'elles tentent d'aborder des problèmes précis : on peut sans difficultés dénombrer une cinquantaine de définitions de la notion "d'obstacle" dans la littérature. Le mot n'est plus que prétexte à querelles byzantines pour les spécialistes, il n'a acquis aucun autre sens plus précis que son sens habituel pour l'utilisateur. Un "obstacle" est-il le résultat d'une erreur pédagogique ? est-il la résurgence d'une difficulté déjà rencontrée dans l'histoire ? est-il l'inévitable manifestation d'un problème intrinsèquement difficile ? est-il un accident de parcours spécifique à un type de progression ? est-il un phénomène lié au profil de certains élèves ? Il ne semble pas que le moindre consensus soit proche sur toutes ces questions.

D'ailleurs certaines façons de considérer des obstacles laissent rêveur ! Considérons par exemple le fameux "problème de l'âge du capitaine"... Si la *vox populi* à retenu ce genre de question-piège au même titre que celle qui porte sur "la couleur du cheval blanc d'Henri IV", c'est à n'en pas douter parce qu'elle cristallise de façon emblématique un type de difficulté "universel" et peut, suivant les circonstances, entraîner la chute d'un interlocuteur qui n'est pas "sur ses gardes". La vie courante, mais aussi l'histoire des sciences, sont jalonnées de ce genre d'erreurs, qui ne sont pas forcément aussi caricaturales et n'en sont pas moins — comme *toute conjecture fausse* — le résultat de la projection d'un rapport de cause à effet qui n'a pas lieu d'être. On peut même dire que, depuis les Pythagoriciens, les mathématiciens n'ont cessé d'espérer et de rechercher des rapports plus ou moins miraculeux entre les nombres et que cette "mystique mathématique" n'est pas pour rien dans le progrès des sciences !

En réalité le fond de la question est ce que l'on pourrait appeler "l'obstacle de l'indécidabilité". Pour rester dans le domaine de l'apprentissage, l'élève de Cours élémentaire qui trouve "l'âge du capitaine" ne fait pas une erreur de nature différente de celle de l'élève de cinquième qui répond oui lorsqu'on lui demande si un quadrilatère ayant quatre angles droits est un carré. Dans les deux cas on observe l'espoir que la situation induise plus qu'elle ne le peut vraiment, et dans les deux cas la réponse devrait être : «je ne peux pas répondre». Mais dans les deux cas cette non-réponse aboutit à un "obstacle" fort difficile : s'agit-il de «je ne sais pas répondre parce que je ne trouve pas» ? ou s'agit-il de «je ne peux pas répondre parce que j'ai des exemples qui montrent que la réponse peut aussi bien être ceci ou cela» ?

On peut se demander si le fait que 50% des enfants de 9 ans peuvent être amenés à chuter sur "l'âge du capitaine» est si étonnant... lorsqu'on compare ce résultat au pourcentage de la population adulte susceptible d'accorder quelque crédibilité aux prédictions astrologiques ! C'est un phénomène tout à fait analogue "d'indécidabilité", même s'il n'invoque pas toujours des nombres.

Il n'empêche que, face à la manifestation d'un "obstacle" qui mérite l'attention, puisqu'elle montre que les enfants ne maîtrisent pas le "sens des opérations" au niveau espéré — ce qui n'a rien d'ailleurs de surprenant lorsque l'on observe un enfant de cet âge —, la "didactique" n'a cessé de considérer cet exemple comme la parfaite illustration de la notion de "contrat didactique". C'est-à-dire que, jusqu'à présent, l'analyse a été essentiellement axée sur le thème «à question idiote, réponse idiote», dans des tentatives diverses pour dégager les "règles du jeu" imposées à l'élève. Ce n'est certes pas un aspect inutile de la réflexion, mais on remarquera que l'exemple est alors uniquement tiré vers son caractère "psychopédagogique"... et que son seul aspect *spécifiquement mathématique* est complètement détourné. Or il s'agit bel et bien d'un obstacle évident : «à question difficile, réponse fausse». Un enfant doit non seulement apprendre les opérations arithmétiques, il doit aussi découvrir peu à peu le pourquoi et le comment de leurs applications dans les diverses situations concrètes.

Négliger cet éclairage trahit en fait une des tendances les plus malheureuses du "contrat didactique" imposé aux enfants en matière de mathématiques : ils sont censés savoir d'eux-mêmes découvrir les applications pertinentes des objets qu'ils apprennent à manipuler ! Il ne suffit pas de fustiger la méthode du «j'apprends, j'applique», encore faut-il commencer par lui redonner sa juste portée qui devrait être celle d'un «j'apprends, et j'*apprends à* appliquer». Nous ne sommes ici en présence de rien d'autre que de ce qu'il faut pompeusement appeler une "variable didactique", et pareille impasse sur les multiples difficultés qui peuvent surgir quand on envisage les types d'énoncés dans lesquels on demande aux élèves d'investir leurs connaissances laisse mal augurer de la recherche "à l'aveuglette" des

"variables didactiques"... Mais à vrai dire, que peut-on vraiment espérer dans une démarche qui consiste à décider de "chercher les variables" ? La méthode est sans doute efficace lorsqu'il s'agit de résoudre un problème scolaire, elle n'a jamais fonctionné en matière scientifique... Au contraire. Et les adeptes de Bachelard devraient le savoir ! Ainsi, la chimie a été régie pendant des millénaires par des "variables" comme "le froid, le chaud, l'humide, le sec, le subtil ou l'épais", qui se rattachaient toutes à la théorie des quatre éléments ; et il a fallu attendre le génie d'un Lavoisier pour dégager enfin les premières variables théoriquement pertinentes... Ce qui n'empêcha pas, rassurons-nous, l'*ingénierie chimique* d'accumuler quantité de réussites importantes ; tandis que les "théoriciens" amoncelaient, pour la postérité, des matériaux fort utiles à l'étude des obstacles épistémologiques !

La connaissance rationnelle passe rarement par l'expérimentation hasardeuse ou par des "méta-réflexions". Les progrès sont essentiellement marqués par d'heureuses conjonctions d'hypothèses, confirmées ou infirmées par l'observation. Je ne voudrais pas donner l'impression qu'il n'existe aucune tentative de ce type en matière de didactique des mathématiques, mais je voudrais insister sur le fait qu'elles n'ont une certaine force de conviction que lorsqu'elles parviennent à s'évader des idées par trop générales. C'est à l'une d'elles que je vais m'attacher un moment. Je me bornerai à celle-ci pour ne pas me faire trop d'ennemis... mais surtout parce qu'elle soulève des questions intéressantes et qu'elle commence à être suffisamment vulgarisée, si l'on en juge par le nombre de travaux qui y font référence.

La dialectique outil-objet

Introduite il y a bientôt une dizaine d'années par Régine Douady, la notion de "dialectique outil-objet" repose sur une idée relativement simple à expliquer parce que tout à fait universelle. On pourrait dire qu'elle date de bien avant que le monde ne soit monde, et qu'elle a pris naissance le jour ou le premier animal s'est servi d'une pierre pour briser une noisette ou, plus probablement, le crâne d'un congénère. Il venait d'inventer "l'outil" et par là-même le rapport "dialectique" entre *l'objet* et la *fonction* qu'il venait de lui assigner. Inutile de préciser que, d'énormes progrès technologiques ayant été accomplis, ce rapport dialectique s'est considérablement enrichi depuis cette époque ! Non pas qu'il ne soit plus question d'attenter aux boîtes crâniennes ; mais on en vint, comme l'on sait, à créer de toute pièce des *objets* destinés à remplir de telles fonctions. On apprit même à détourner des outils pour en créer d'autres, voire à transformer des outils en simples objets à caractère plus ou moins inutile. Ainsi une innocente bouteille (objet dont la fonction d'outil passe pour naturelle) peut très bien achever une carrière bien remplie (si l'on peut dire !), pour devenir le plus magnifique des supports de lampe (nouvel outil d'usage courant), tout en servant au passage d'objet d'ornement du plus bel effet... et accessoirement — pourquoi pas ? — d'instrument contondant dans le cadre d'une délicieuse intrigue policière !

On aura compris que l'idée originale de Régine Douady est d'avoir transposé au domaine des *objets* mathématiques l'étude des rapports dialectiques qu'ils sont susceptibles d'entretenir avec leurs possibilités d'utilisation comme *outils* dans la résolution de problèmes...

C'est en premier lieu un important *positionnement épistémologique* que d'avoir rappelé cette "utilité" des concepts mathématiques, à une époque où l'influence des "maths modernes" avait laissé croire que les *objets* forgés par les mathématiciens s'apparentaient à de transcendantales chimères dont les seules contraintes étaient de s'inscrire dans une construction logique dont, au fond, personne ne connaîtrait vraiment les finalités. Surtout dans une ambiance diffuse où le "plaisir du sens" cède trop souvent la place à un certain "bigotisme du sens", et où les polémiques entre "apprentissage de techniques" et "apprentissage du sens" servent maladroitement d'alibi au goût du formalisme que j'évoquais précédemment. Or tous les concepts mathématiques ne sont rien si on néglige leur *fonction*, c'est-à-dire leur nature "d'outil". Qu'il s'agisse de résoudre un problème de mécanique, d'acoustique, de physique des particules, ou qu'il s'agisse "simplement" d'élucider une épineuse énigme d'arithmétique ou de géométrie, ces outils ont pour la plupart demandé des siècles de fréquentation et de mise au point. Et s'il sont devenus peu à peu des sortes d'objets indépendants de leur contexte originel, c'est toujours pour acquérir une puissance plus grande en servant à des problèmes inattendus, et c'est très souvent parce qu'ils se sont mis, à leur tour, à servir de *champ d'action* à des outils "d'une nouvelle génération" destinés à la résolutions de questions plus difficiles.

On oublie trop aisément que les *concepts* se dégagent progressivement de la fréquentation de *techniques*, comme on oublie d'ailleurs que les techniques mathématiques opèrent essentiellement sur les *objets-concepts* avec lesquels on s'est antérieurement familiarisé ! Cela ne signifie malheureusement pas que les problèmes créateurs d'outils-objets — ou, si l'on préfère, d'objets-outils — soient simples, ni même "élémentaires", car c'est bien d'une *dialectique* complexe qu'il s'agit lorsque l'on s'interroge sur le type de rapports possibles entre l'aspect "outil" d'une notion et son caractère "d'objet" en tant qu'entité plus spécifiquement mathématique.

Le point de vue épistémologique qui consiste à ne considérer qu'un seul schéma disant : «les nombres (ou les fonctions, ou les vecteurs, etc.) ont été inventés d'abord comme *outils* en vue de résoudre tel ou tel problème, sont devenus ensuite des *objets* étudiés pour eux-mêmes dans le cadre d'*ensembles* de nombres (de fonction, de vecteurs, etc.)», est une approche par trop réductrice. Elle est séduisante uniquement dans l'optique ensembliste où on peut regarder, en effet, l'évolution des nombres — ou des fonctions — sous forme d'une escalade progressive dans l'édification de collections dotées de structures plus ou moins spécifiques. Mais il convient de ne pas négliger de nombreux autres aspects de ces rapports dialectiques entre l'aspect "outil" et l'aspect "objet"... Ainsi un nombre, une fonction, une figure, peuvent être regardés comme des objets intéressants en eux-mêmes, et pas seulement dans les liens qu'ils entretiennent avec d'autres objets analogues, comme c'est surtout le cas dans le point de vue purement structural. Un nombre peut être fascinant par le mystère qui entoure ses décimales, une fonction peut être étudiée pour la nature particulière de son développement en série, une figure peut receler une foule de phénomènes exceptionnels, etc., etc.

De même, il n'est pas rare qu'un objet découvert dans le cadre algébrique se révèle comme un outil d'un grand intérêt dans le cadre de la géométrie, ou inversement, qu'une théorie géométrique ou analytique permette de résoudre certaines questions d'arithmétique... Enfin il serait faux de croire qu'une règle générale veuille que la naissance d'un objet-outil ait toujours lieu dans le contexte de problèmes qui demandent la création d'outils inconnus jusqu'alors : les nombres négatifs, par exemple, sont d'abord apparus comme des "parasites" donnant de "fausses solutions" aux questions qui étaient posées, et il en

va largement ainsi pour les nombres complexes... De même la notion de fonction, qui semble bien être "l'outil par excellence", n'est sans doute rien d'autre que le résultat de la rencontre fortuite, sous les yeux d'un Galilée, de la loi de la chute des corps et des propriétés intéressantes de l'objet géométrique "parabole" étudié antérieurement sans autre finalité que de percer le secret de sa forme...

Bref, la *dialectique* outil-objet en mathématique est une question particulièrement riche du fait même de la nature abstraite des concepts mis en jeu. Elle est sans doute plus compliquée que dans d'autres domaines scientifiques, bien que ceux-ci ne fasse pas pour autant l'économie de ce genre de problème. Pour s'en convaincre, il suffirait de penser au cas de la physique, confrontée à un bouleversement comme celui qui a vu un *outil* tel que la notion de "champ" s'imposer, dans certains cas, comme *l'objet* même à prendre en compte au niveau initial de la modélisation. Les mathématiques ne sont pas à l'abri de tels revirements, mais elles paraissent, jusqu'à présent, capable de les "digérer" assez aisément grâce à une escalade constante dans la formalisation...

Régine Douady, sans négliger la complexité du problème épistémologique, se limite surtout à l'éclairage apporté par l'idée de "changement de cadre" à l'intérieur des divers domaines mathématiques, et elle s'attache évidemment au *positionnement didactique* qui peut résulter de la dialectique outil-objet. C'est en effet une question primordiale pour l'enseignement : «doit-on apprendre un concept donné en le rencontrant plutôt sous son aspect "d'objet", ou plutôt sous son aspect "d'outil" ? ». Un enfant doit-il d'abord apprendre le mécanisme de l'addition ou de la division par 2, avant d'être confronté à des problèmes de bilans ou de partage, à propos de jeu de billes ou de tirelire ? Doit-il passer par la résolution de tels problèmes pour découvrir le "principe" de l'addition ou de "l'idée" de moitié ? Un élève de collège doit-il pénétrer dans l'univers des équations algébriques à partir de problèmes "concrets", ou doit-il avoir rencontré au préalable des "équations abstraites" afin de n'avoir pas à les découvrir au moment où il est déjà en face d'autres difficultés ? Un lycéen peut-il, ou doit-il, saisir la notion de fonction uniquement à travers l'étude plus ou moins détaillée d'un exemple particulier ?

Aucune de ces questions n'a de réponse évidente. Ceux qui penseraient détenir la solution peuvent paraître bien optimistes ou bien inconscients... et feraient bien de se rendre compte que la question n'est pas de nature différente de celles-ci : peut-on (ou doit-on) explorer la structure architecturale d'un viaduc uniquement à partir de sa fonction en vue du franchissement d'une vallée ? peut-on comprendre l'attirance provoquée par un diamant en la rapportant simplement à l'outil du vitrier ? Il me suffira cependant de citer les conclusions auxquelles abouti prudemment Régine Douady à propos d'apprentissages élémentaires :

« De notre expérience, nous pouvons tirer l'hypothèse suivante : pourvu que « assez » de notions visées par l'apprentissage soient introduites par dialectique outil-objet, d'autres peuvent faire l'objet d'un apport direct par l'enseignant ou par la lecture d'un manuel. Un problème didactique important est celui des critères de choix, de l'organisation et de l'articulation des notions selon leur mode d'introduction. De ce point de vue là, nous n'apportons pas des réponses de principe mais des exemples de réalisation. »

De même que sa conclusion générale quelque peu frustrante :

« 1) Il existe une *masse critique* de connaissances anciennes et d'habitudes dans chacun des cadres concernés.

2) Il existe un *seuil critique d'interrogation* au dessous duquel la réflexion ne s'enclenche pas. »

L'effet Jourdain

Comme on le voit, un des premiers mérites de Régine Douady est d'avoir dégagé une problématique particulièrement importante (et difficile) qui est au centre de nombreuses questions de la didactique. On peut notamment considérer que le rappel de l'aspect "d'outil" des notions mathématiques n'est pas pour rien dans les tentatives actuelles pour développer les idées pédagogiques autour de démarches comme celle de "modélisation". Mais, bien que les références à la "dialectique outil-objet" ne manquent pas dans la littérature pédagogique, on en arrive souvent à s'interroger sur les prolongements effectifs apportés à cette théorie depuis bientôt dix ans...

Les occasions de "changements de cadres", ou de mise en évidence d'un "concept-outil" sont évidemment très nombreuses. On voit ainsi fleurir les "jeux de cadres" dans tous les domaines : depuis l'introduction à la notion de fonction qui conduit à tout l'éventail entre numérique, graphique et algébrique (on voit mal comment il pourrait en aller autrement dans quelque contexte pédagogique que ce soit !), jusqu'au moindre contact entre le "cadre analytique" et le "cadre géométrique" offert par la... géométrie analytique (domaine inépuisable à peu de frais !), en passant par les activités les plus modernes et les plus "innovantes", telles que des "jeux de cadres analyse-calculatrices", destinés sans doute à remplacer les "jeux de cadres analyse-règle à calcul" de notre enfance ! Bien entendu, ces diverses occasions d'invoquer la "dialectique outil-objet" sont le plus souvent agrémentées de perles de culture incantatoire du type : «Régine Douady a signalé qu'il était formateur de mettre en place des changements de cadres... ».

On pense inévitablement au Bourgeois Gentilhomme qui apprend qu'il "fait de la prose" et qui s'en va répétant sa découverte, comme si son seul but était de montrer les méfaits d'une rhétorique mal comprise... Mais les psychopédagogues ont déjà donné un nom à ce phénomène en parlant "d'effet Jourdain", et il est donc inutile d'insister sur l'aspect caricatural des appels aux "jeux de cadres" qui semblent en oublier aussi bien la problématique que les limites éventuelles. Il convient en revanche de souligner les dangers d'une telle attitude, car les perversions possibles d'une démarche "jeux de cadres" ou "dialectique outil-objet" mal comprises laissent place à de nombreuses ambiguïtés, qui me semblent déboucher sur deux erreurs particulièrement importantes.

La première consiste à oublier que si l'insistance sur la notion "d'outil" a introduit une forme intéressante d'antidote à l'acharnement des programmes de 1970 dans le choix systématique vers la contemplation "d'objets mathématiques", il n'en reste pas moins que les amateurs de "maths modernes" pouvaient (et peuvent encore) se présenter comme d'imbattables utilisateurs de "changements de cadres"... Rarement, en effet, on aura autant décomposé les "cadres" où l'on désirait faire opérer les divers concepts, et on peut même considérer que l'élève était en permanence confronté à la difficulté d'établir les relations nécessaires entre des "cadres" artificiellement distincts. Reportons-nous, par exemple, aux tribulations de la droite dans les programmes de collège : tantôt "droite ordonnée", tantôt "droite affine", tantôt "droite euclidienne", tantôt "droite vectorielle", tantôt "droite physique", tantôt "droite numérique"... ; rappelons-nous les diverses incarnations de

l'ensemble des nombres complexes : points du plan, couples de réels, matrices, similitudes, etc., qui constituaient, il n'y a pas si longtemps, la bête noire des étudiants préparant le Capes et bien obligés de ne pas trop se perdre dans les finesses de la mesure des angles... Les "jeux de cadres" ne manquaient pas.

Il est donc clair que cette stratégie n'est pas forcément constructive en elle-même et qu'elle ne saurait être mise sans conséquence au service de n'importe quelle approche des contenus ou des programmes. Une part des remèdes éventuels contre de telles dérives tient naturellement dans l'accent mis par Régine Douady sur ce qui fonde la "dialectique outil-objet" et tient précisément dans l'importance donnée à l'*utilisation* des notions introduites. Malheureusement, le raisonnement simpliste qui consisterait à croire qu'il suffise d'aborder une notion en la faisant utiliser d'entrée de jeu par les élèves aboutit à une deuxième erreur fréquente. Elle correspond à ce que certains peuvent légitimement qualifier "d'activisme pédagogique" en observant nombre des "activités" qu'il est devenu courant de proposer aux enfants, en pensant qu'elles sont susceptibles d'être, à elles seules, des introductions à des concepts particulièrement difficiles.

On néglige souvent, en effet, une des caractéristiques essentielles du phénomène de "changement de cadre" : elle tient dans la déstabilisation qui en résulte... Ainsi, un élève de 7 ou 8 ans peut très bien savoir traduire de façon parfaitement intuitive la lecture des heures comme 13h, 14h, 19h,... en les reliant à 1h, 2h, 7h,... , il ne s'en trouvera pas moins perturbé dès qu'il lui faut effectuer des opérations comme : 13 – 12 , 14 – 12 ou 19 – 12 ! De même, l'élève de collège peut rencontrer des difficultés pour faire le lien entre la notion de tangente d'un angle et la pente d'une droite dans un repère orthonormé ; sans parler des multiples occasions où il sera obligé de passer plus fondamentalement d'un point de vue à l'autre, comme c'est notamment le cas entre le "rapport de projection orthogonale", le "cosinus d'un angle" et la "fonction cosinus"... Le simple changement de contexte introduit un nouvel écueil, alors même que des aspects non négligeables d'une notion peuvent être considérés comme acquis. Les exemples sont évidemment légions, et le problème didactique est trop souvent simplifié : on oublie tout simplement que la gestion par le maître d'un "changement de cadre" est toujours la gestion d'une *déstabilisation* de l'élève ! Cela ne semble pas empêcher une foule de propositions "d'activités" destinées à "faire découvrir" des concepts aussi sophistiqués que la *proportionnalité* ou la *notion de fonction* au travers de quelques applications des plus simplettes.

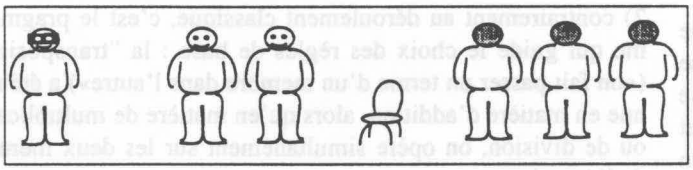
La confiance dans les capacités des enfants laisse souvent rêveur... En fin de compte, que ce soit la volonté des "théoriciens" de se cantonner dans le "théorique" ou la façon dont de nombreux praticiens se contentent de faire appel aux discours généraux, tout contribue à laisser l'impression d'une *dérive rhétorique* qui prend plaisir à éloigner la réflexion de la réalité des problèmes. Nous allons voir que ce sentiment se confirme très vite dès que l'on s'intéresse d'un peu près à un exemple...

Troisième partie : recherches et trouvailles

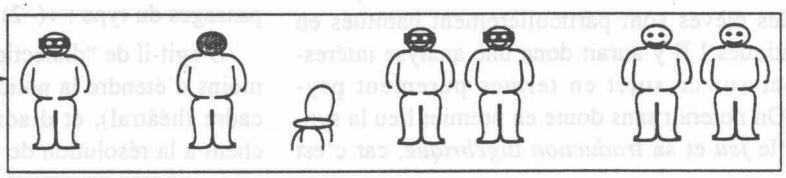
Je m'attacherai donc à un problème qui, à en croire la nomenclature officielle, relève purement et simplement de l'*ingénierie didactique*... : je veux parler de l'idée proposée par Michèle Muniglia à ce colloque d'utiliser une forme de "théâtralisation" pour l'apprentissage des équations au collège. Il s'agit, en effet, d'une séquence susceptible d'être commentée en profondeur — tant en ce qui concerne sa démarche qu'en ce qui touche aux questions laissées ouvertes —, et pour laquelle on pourra se reporter aux actes des présentes journées.

Les grandes lignes de la séquence

Sans rentrer dans tous les détails, disons simplement que la démarche de Michèle Muniglia consiste à faire "représenter" aux élèves de cinquième certaines équations du type : $ax + b = cx + d$, dans une "mise en scène" qui permet de décrire les étapes de leur résolution algébrique. Pour prendre un exemple immédiat, l'équation $x + 2 = -3$ est d'abord "écrite" en faisant appel à six élèves qui prennent place sur une même ligne :

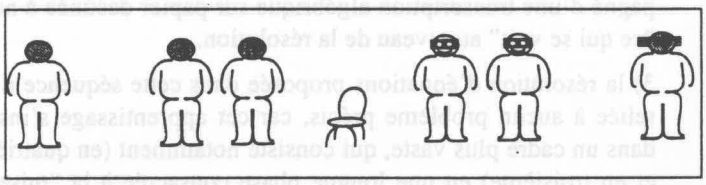


Une chaise marque le signe " = ", et les élèves sont face au public s'ils correspondent à des nombres positifs, ils tournent le dos au public s'il s'agit de nombres négatifs. L'élève représentant l'inconnue " x " est masqué, ou porte simplement un signe distinctif tel qu'une casquette ou un foulard, afin de le distinguer des autres "acteurs". Avec ce genre de conventions, l'équation $x - 1 = 2x + 2$ s'écrit :

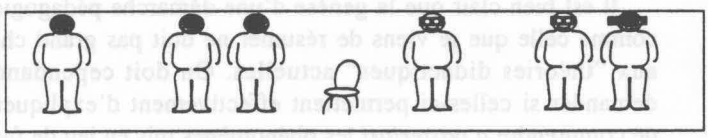


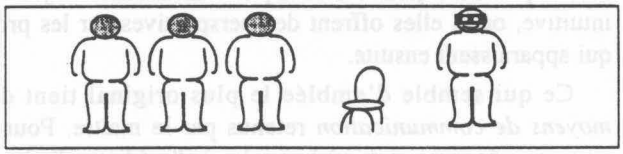
Le "jeu de la résolution" consiste, dans un premier temps à "faire passer les x " d'un même côté du signe " = " (c'est-à-dire de la chaise), ainsi qu'à "faire passer les constantes" de l'autre côté pour obtenir la valeur de l'inconnue. Le "jeu de scène" est fondé sur deux règles :

1) les acteurs peuvent changer de côté par rapport à la chaise à condition de la *contourner*, c'est-à-dire qu'un enfant situé face au public au départ doit se retrouver dos au public, une fois dans l'autre membre. Inversement, un enfant initialement placé dos au public se trouve face au public après son déplacement.



2) la réduction s'opère ensuite dans chacun des deux membres par suppression de *tous les couples* possibles formés de *deux élèves placés dans des position opposées* par rapport au public.

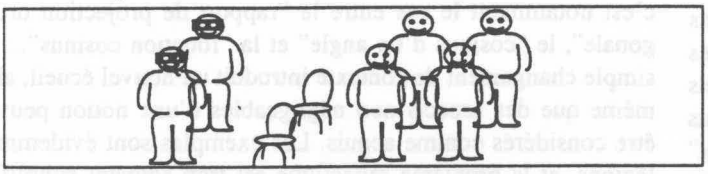




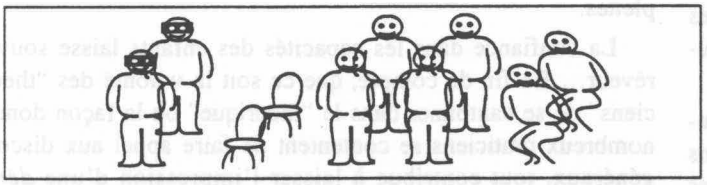
Ceci concerne évidemment toutes les équations dont la réduction ne nécessite que des appels à

l'addition. La démarche doit être complétée pour aborder ne serait-ce que le cas de : $2x = 4$. On introduit alors une troisième règle du jeu :

3) il est possible de "partager" l'équation donnée en autant d'équations identiques que nécessaire ; de façon, par exemple à obtenir, à partir de " $2x = 4$ " :



La même règle s'applique évidemment à l'équation : $2x = 5$. Elle nécessite alors une nouvelle convention d'écriture pour signifier qu'un élève est obligé de se "partager en deux" afin d'effectuer la séparation. Le problème est résolu en utilisant par exemple deux enfants accroupis qui viennent remplacer un enfant debout... :



Je laisse le soin au lecteur d'imaginer lui-même quelques "mises en scènes", notamment pour résoudre une équation du type : $(1/2)x = 1/3$, pour laquelle il convient de faire appel à la règle inverse de la règle n° 3, c'est-à-dire qu'il faut "dédoubler" l'équation initiale puis "rassembler" les deux égalités obtenues. On se reportera à la description complète donnée par Michèle Muniglia pour les détails de la progression et se convaincre que les élèves aboutissent ainsi aisément à la résolution d'équations comme : $(1/3)x + (1/2) = (1/4)x - (1/3)$. J'ajouterai seulement trois remarques importantes à cette description succincte :

1) les "règles du jeu" ne reposent sur aucune justification mathématique préalable, elles sont imposées aux élèves comme de simples contraintes de mise en scène,

2) le travail "théâtral" de la séquence est en permanence accompagné d'une transcription algébrique sur papier destinée à noter "ce qui se voit" au niveau de la résolution,

3) la résolution d'équations proposée dans cette séquence n'est reliée à aucun problème précis, car cet apprentissage s'inscrit dans un cadre plus vaste, qui consiste notamment (en quatrième et en troisième) en une longue phase consacrée à la "mise en équation" de problèmes variés.

Une lecture "didactique"

Il est bien clair que la genèse d'une démarche pédagogique comme celle que je viens de résumer ne doit pas grand chose aux "théories didactiques" actuelles. On doit cependant se demander si celles-ci permettent effectivement d'expliquer et de comprendre *a posteriori* les phénomènes mis en jeu de façon intuitive, ou si elles offrent des perspectives sur les problèmes qui apparaissent ensuite.

Ce qui semble d'emblée le plus original tient dans les *moyens de communication* retenus par le maître. Pour utiliser un terme récemment mis à la mode : la "médiation" n'est pas de celles auxquelles les élèves sont particulièrement habitués en classe de mathématiques ! Il y aurait donc une analyse intéressante à développer sur ce sujet en termes purement psychopédagogiques. On noterait sans doute en premier lieu la synthèse opérée entre le *jeu* et sa *traduction algébrique*, car c'est précisément dans une sorte de juxtaposition permanente des contraires que réside l'intérêt de la séquence. Je laisserai cependant les amateurs de "dialectiques diverses" prendre le temps de l'éclairer en termes de complémentarité-opposition à différents niveaux possibles : activité ludique / apprentissage ; dynamique de groupe / recherche individuelle ; expression corporelle / expression écrite ; action / symbolisation ; imagination / institutionnalisation ; etc., etc.

L'important me paraît résider, en l'occurrence, dans quelques remises en cause d'idées reçues qui méritent que l'on s'y arrête plus longuement. La première touche à la façon de gérer les difficultés entre "rigueur mathématique" et "compréhension des élèves", telles que celles que j'ai évoquées dans la première partie de cet exposé, la seconde se rapporte à la problématique de type "dialectique outil-objet" sur laquelle j'ai jugé nécessaire de m'appesantir quelque peu dans la seconde partie.

Le calcul algébrique est volontairement ramené à de simples "règles du jeu" qui ne se rattachent à *aucune préparation* de type déductif. On pourrait presque dire que les élèves sont invités à résoudre des équations comme s'ils apprenaient à jouer à "la marelle" ou à "la balle au camp"... Le succès de la séquence repose essentiellement sur l'acceptation du jeu par les enfants et, au fur et à mesure de son déroulement, sur leur capacité à découvrir les moyens "scéniques" pour multiplier ou diviser les deux membres de l'équation proposée. Ainsi le *but avoué* de l'apprentissage n'est pas mathématique : il semble porter, au contraire, sur la représentation théâtrale, sur la rigueur des attitudes, sur l'efficacité de la mise en scène. Mais parallèlement, l'objectif *apparemment secondaire* de transcription sur la feuille de papier en symbolisme algébrique est évidemment primordial pour le maître.

Ce but mathématique passe par des choix "épistémologiques" qui sont loin d'être innocents et sur lesquels repose la simplicité du "jeu numérique" proposé aux élèves :

1) contrairement au postulat piagétien, les nombres ne sont pas utilisés comme des "transformations" : ils ne sont que des "entités" (des "rassemblement d'unités") sur lesquels opèrent des transformations, des mouvements, qui correspondent aux simplifications requises par la résolution. On notera en particulier que l'addition n'a rien à voir avec les sempiternelles translations sur lesquelles on fonde habituellement la calcul sur les relatifs : elle est imagée par un "modèle quantique" où les nombres positifs et négatifs sont constitués de "particules" positives et négatives qui se détruisent éventuellement par couplage "particule / antiparticule"...

2) contrairement au déroulement classique, c'est le pragmatisme qui guide le choix des règles de base : la "transposition" («on fait passer un terme d'un membre dans l'autre») a été retenue en matière d'addition, alors qu'en matière de multiplication ou de division, on opère simultanément sur les deux membres de l'équation...

3) contrairement au formalisme algébrique rigoureux, la méthode ne s'embarrasse d'aucune des subtiles distinctions entre "signe attaché à l'opération" et "signe attaché au nombre" ; c'est-à-dire qu'aucune précaution n'est prise pour signaler des passages du type : $+(-2) = -2$ ou $-(-2) = +2$ ...

S'agit-il de "dialectique outil-objet" et de "jeu de cadre" ? A moins d'étendre la notion de "cadre" à une espèce nouvelle (le cadre théâtral), et d'admettre au titre "d'outil" ceux qui touchent à la résolution de problèmes de mise en scène, il est clair

que ce n'est pas de cela qu'il peut être question ici : le "jeu" dans la classe n'est rien d'autre qu'un simple *transfert d'écriture* destiné à précéder une écriture plus symbolique sur le tableau ou sur la feuille de papier.

En réalité la notion de "modélisation" est complètement étrangère à la séquence et il s'agit au contraire d'un renversement de la problématique outil-objet. Une stratégie analogue à celle de Régine DOUADY supposerait en effet d'initier à l'usage et à la résolution des équations à partir de situations-problèmes pour lesquelles le calcul algébrique soit susceptible de procurer un outil naturel. Il n'en est rien ici, car toute *utilisation* des équations est rejetée dans des stades ultérieurs de l'apprentissage. En d'autres termes, les équations sont enseignées *pour elles-mêmes* — comme objets purement mathématiques —, exactement comme on apprendrait à compter à un enfant avant même de lui faire dénombrer quoi que ce soit !

Vue sous cet angle, la méthode de Michèle Muniglia consiste à offrir aux élèves une pratique sophistiquée pour résoudre les équations, comme s'il s'agissait de "compter sur leurs doigts"... Et c'est bien là l'intérêt de cette démarche. On aurait tort de croire qu'elle ne consiste, au fond, qu'en une décomposition systématique des difficultés techniques contenues dans une équation du type " $ax + b = cx + d$ ". Le "théâtre" est d'abord un "truc" auquel les enfants ont la possibilité de se raccrocher pour retrouver les règles, et surtout pour *se retrouver* dans les règles. C'est cela le véritable objectif caché derrière le "but avoué" de la mise en scène. C'est de faire prendre possession de l'espace et d'en tirer des *images* — ou, si l'on préfère, des *images mentales* ! — qui aident les élèves pour lesquels le travail sur feuille n'est pas assez "parlant"...

En voyant fonctionner la séquence avec des élèves, on se convainc assez vite de son efficacité pour l'approche des équations algébriques "simples" comme : $(2/3)x + 1/4 = (1/5)x - 1/2$. Je renvoie donc à l'exposé de Michèle Muniglia pour une analyse de son fonctionnement.

Epistémologie et didactique

Si j'ai choisi cet exemple c'est naturellement parce qu'il illustre bien les "contre-pieds" qu'il est facile d'exhiber par rapport aux idées admises, mais c'est aussi parce qu'il touche à un problème didactique fondamental. Il est clair, en effet, que la difficulté suivante est d'accéder au cas général des équations $ax = b$, mettant en jeu des nombres "quelconques" (du moins au sens des exigences du programme de troisième ou de seconde), et il semble tout aussi clair que nous touchons ici à l'un des enjeux les plus importants du cycle du collège... même s'il paraît situé bien en aval des notions chères aux théoriciens du "contrat didactique". Comment, donc, faire franchir aux élèves ce cap de "l'extension des scalaires" ? Et comment, inciter les "didacticiens" à se pencher enfin sur ce genre de question qui allie l'avantage d'être pertinente à l'inconvénient d'être difficile ?

Contrairement à des sciences principalement préoccupées d'établir d'interminables taxonomies qui confinent souvent à la pure et simple *sodomisation de diptères*, les mathématiques ont une particularité : la délectation avec laquelle elles ne cessent de se pencher sur les moindres détails d'une question irritante. Le problème qui nous occupe ici n'échappe évidemment pas à la règle, car il se rattache à une question épistémologique ouverte, pourrait-on dire, à l'époque de PYTHAGORE de Samos et de THALES de Milet...

Pour les géomètres grecs une opération comme la multiplication, étendue à autre chose que des nombres entiers, était loin d'être banale : d'abord il lui fallait un "sens" (il convenait donc, dans une égalité notée aujourd'hui " $ax = b$", de tenir compte de la nature des "quantités" a , x et b), ensuite multiplication et division n'étaient pas vraiment considérées comme des opérations inverses l'une de l'autre, puisque le produit correspondait à un calcul de surface ou de volume alors que la division renvoyait essentiellement à la notion de rapport entre grandeurs homogènes. Malgré ces difficultés conceptuelles, on peut considérer que les Grecs savaient parfaitement (depuis Eudoxe) maîtriser les opérations sur les nombres irrationnels. Leur méthode n'avait pas grand chose à envier à celle de Dedekind, si ce n'est que nous en connaissons sans doute mieux aujourd'hui les tenants et aboutissants axiomatiques, et que nous savons la relier à la méthode des suites de Cauchy.

On touche ici à une première approche épistémologique du problème qui nous occupe : étendre la résolution des équations simples au cas irrationnel par invocation du "passage à la limite".

Mais, bien qu'il soit passé de façon beaucoup plus implicite dans les mœurs, il existe un tout autre aspect de la question à prendre en compte en matière "d'extension des scalaires". Il s'agit du prolongement des règles élémentaires à d'autres nombres que les relatifs dans un domaine que je qualifierai de "formel" : cas de " $\sqrt{2}x = (1/\sqrt{3})$ " , cas de " $\pi.x = \pi + 2$ " , cas du "littéral" , cas de $\cos(a).x = 1 / \tan(a)$, etc., etc. Dans toutes ces situations, le calcul ne nécessite pas un quelconque "passage à la limite", il n'est rien d'autre qu'une extension algébrique formelle, acceptée au même titre que de futures généralisations à des nombres comme $(a + ib)$ lorsque l'on envisage le corps des complexes.

Epistémologiquement parlant le fond du problème est complètement différent : le premier point de vue relève de l'analyse, le second relève de l'algèbre.

On peut d'ailleurs noter une troisième approche qui, *grosso modo* semble intermédiaire entre les deux précédentes : elle découle de la systématisation de l'usage des nombres décimaux. D'une part on y retrouve un aspect calculatoire "formel", d'autre part elle se relie naturellement à la notion d'approximation des valeurs numériques et peut donc constituer une variante du passage à la limite. Elle ne remplace cependant ni l'une ni l'autre... on sait en particulier la mauvaise impression provoquée par une solution du type 1,9999999... !

Au total, les pistes sont donc nombreuses pour les suites à donner à une séquence comme celle que propose Michèle Muniglia. Je laisserai de côté la "méthode grecque", bien qu'elle fut pratiquée jusqu'au XIX^{e} siècle mais, cela étant, nombre d'approches peuvent sembler légitimes. Citons-en trois :

1) une étude géométrique des nombres réels (notamment autour de la notion de longueur et de calcul de surfaces) permettant une sorte "d'extension douce" au cas général "$ax = b$",

2) une systématisation (notamment à travers l'usage de la calculatrice) de l'emploi des décimaux en une liaison, par exemple, avec l'étude des fonctions du type : $y = ax$,

3) une formalisation plus nette conduisant essentiellement à l'emploi d'irrationnels simples, en application des règles sur les radicaux ou des formules géométriques classiques enrôlant le

nombre π .

Faute de réponse didactique sérieuse, chacun en est réduit à la démarche empirique et on peut évidemment penser que tous les problèmes que je viens de citer sont importants, et doivent donc être rencontrés dans la scolarité d'un enfant. Encore faut-il ne pas se tromper de problématique ! La tendance aujourd'hui — sans aucun doute dans la foulée des programmes de maths modernes — est malheureusement d'introduire dans cette question des difficultés qui n'ont nullement besoin d'y être, tout en considérant que d'autres, bien réelles cette fois, ne méritent même pas que l'on s'y arrête, quelles que soient les facilités des élèves.

Les "réflexes", en effet, de tous ceux qui veulent bien réfléchir à la question de l'extension des scalaires dans le cas qui nous occupe ici peuvent se résumer en deux grandes familles :

1) il y a ceux qui voient immédiatement là une problématique sous-jacente du type "passage du cas rationnel au cas réel",

2) il y a ceux qui ne regardent en fait le problème que sous son angle formel et jugent, qu'au fond, il ne s'agit de rien d'autre que d'une application liée au "sens de la division".

Il est facile de rattacher chacun des aspects épistémologiques que j'ai évoqués précédemment à l'une ou l'autre de ces deux attitudes. On peut même voir que, paradoxalement, chacune des deux a été fortement ancrée dans les esprits à la suite des programmes de 1970. La première découle évidemment de l'habitude qui fut alors prise d'insister sur l'importance des divers "ensembles de nombres", et donc de bien marquer une soi-disant "différence de nature" entre ce qui relèverait du cas fractionnaire et du cas irrationnel. La seconde est un avatar du point de vue qui revenait tout bonnement à considérer le "cas littéral" comme premier et qui, pratiquement, allait même jusqu'à considérer que la résolution de " ax = b ", en "multipliant par l'inverse dans chaque membre", constituait la *définition même* de la division.

Disons-le tout net : ces deux tendances mènent à des impasses, et ceci pour ne pas dire plus brutalement qu'elles sont *didactiquement suicidaires !*

La *question des nombres réels* est sans doute une question passionnante pour les mathématiciens, mais elle ne correspond à *aucune préoccupation* des élèves, que ce soit à l'école élémentaire, au collège ou même au lycée. Il est pour le moins inquiétant de voir certaines relectures récentes d'un chapitre comme celui qui concerne la "mesure des grandeurs" s'attacher essentiellement à «considérer qu'il s'agit de mettre en rapport un ensemble de nombres et un ensemble géométrique comme la droite». Il ne s'agirait là que d'un surprenant exemple "d'illusion langagière" pour désigner une opération aussi familière aux élèves que l'usage désormais classique du double-décimètre... si on n'insistait pas, de surcroît, sur la nécessité de «montrer comment de telles opérations conduisent à des constructions sophistiquées comme celles de nombres rationnels, de nombres décimaux, ou de nombres réels»!

Toute *construction* des nombres induit un obstacle bien inutile — et parfaitement insurmontable — à ce niveau. Il est d'ailleurs effarant que, depuis quelques années, les "didacticiens" osent présenter comme exemple-type "d'obstacle didactique" une énormité comme : «la compréhension des nombres décimaux est susceptible de créer un obstacle à la compréhension des nombres réels». Ici encore on retrouve la même contamination d'un problème simple par des préoccupations particulièrement pédantes et dont on chercherait en vain la justification. Surtout lorsque l'on sait que "l'observation de base" qui semble donner son poids à ce genre de conclusion est tout simplement celle d'élèves qui affirment qu'un nombre comme 123,2 est plus petit qu'un nombre comme 123,18 ... On se perd en conjectures sur ce que peut bien signifier l'expression «compréhension des nombres décimaux» !

A l'inverse, l'habitude prise de "faire passer le calcul algébrique par le littéral" a fait passer au rang d'apprentissages inutiles les règles fondamentales *du calcul sur les quotients*. Revenons sur l'exemple où nous avons laissé l'aboutissement de la séquence précédente sur les équations. Le problème était de généraliser des cas simples comme : $\frac{2}{3}x = \frac{5}{2}$, au cas de coefficients plus généraux.

Or il faut bien comprendre qu'une telle situation possède *deux* extensions : la première consiste à la "littéraliser" sous la forme " $ax = b$" , la seconde consiste à l'étendre directement sous la forme : " $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$ ". On aboutit ainsi à deux types d'extensions que l'on pourrait schématiser :

$$\square\, x = \square \qquad \text{et} \qquad \frac{\square}{\square}\, x = \frac{\square}{\square}$$

Le problème est que les deux techniques de résolution correspondantes sont des passages indispensables pour une maîtrise élémentaire des calculs mathématiques. En effet, à moins de perdre toute occasion de simplification, on demande en permanence aux élèves de savoir réagir sur une équation comme : $\frac{2}{3}x = \frac{5}{2}$, soit en disant «je divise les deux membres par le *nombre* $\frac{2}{3}$ », soit en disant « je multiplie par 3 et je divise par 2 ». Combien d'enfants sentent-ils la "bonne opération" à effectuer en fonction de la situation ? Combien parmi ceux-là sont-ils capables de penser simultanément aux deux possibilités pour en tirer les éventuelles conclusions ? Je ne surprendrai personne en disant que ce genre de savoir-faire est précisément le propre des bons élèves.

Mais on peut malheureusement poser la question à l'envers : combien de professeurs — et de rédacteurs de programmes — pensent-ils que cet apprentissage est important et qu'il recèle un *véritable obstacle didactique* ? Au lieu de cela on se perd le plus souvent en une espèce de perfectionnisme déplacé sur les "fractions". Rares sont ceux qui veulent bien leur reconnaître le statut de nombres "comme les autres" et qui ne trouvent pas à redire sur une écriture comme :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0{,}75 \ .$$

Encore plus rares sont ceux qui ne donnent pas l'impression de se retenir de sauter au plafond en face d'une égalité comme :

$$\frac{1}{5} = \frac{0{,}2}{1{,}0} = 0{,}2 \ .$$

Le résultat le plus tangible est que les enfants ne savent plus ni pourquoi, ni à quel moment ils ont le droit d'effectuer les divisions. Et il faut bien reconnaître qu'à moins de facilités particulières, les élèves ont toutes les chances de ne jamais se voir expliquer clairement les enjeux véritables de la question...

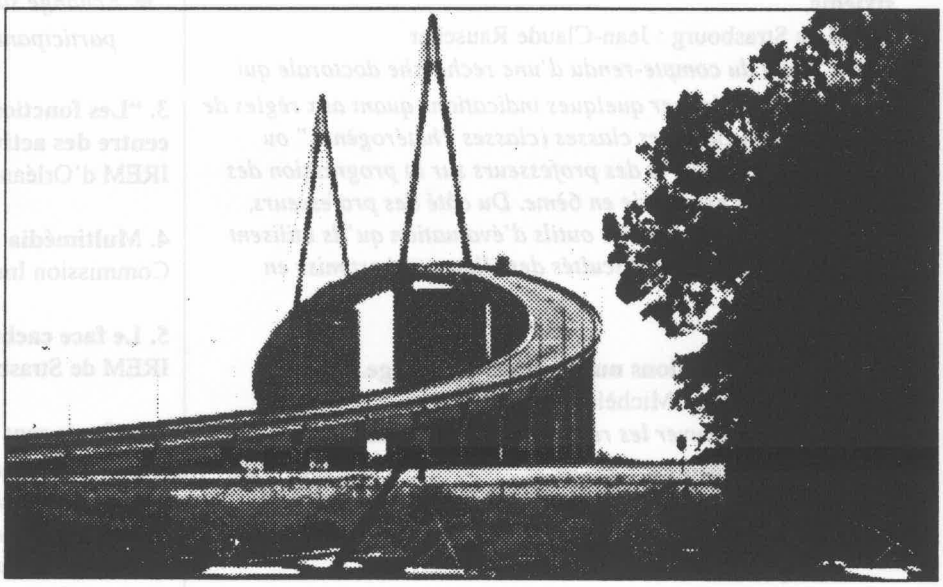
C'est une illustration supplémentaire de la focalisation sur des propriétés aussi "canoniques" que la commutativité et l'associativité ; elles ont fait oublier que dans un calcul du type :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a.d}{b.c},$$

on est confronté à des difficultés qui dépassent techniquement l'usage aléatoire des permutations et des regroupements. Il suffit d'observer les élèves pour se rendre compte que le passage aux nombres réels, pour peu qu'il ne soit pas agrémenté de considérations gratuites, ne constitue jamais un obstacle didactique. La difficulté essentielle représentée par le nombre π n'est aucunement sa propriété d'être irrationnel, mais simplement de faire appel à un alphabet oublié... Et c'est très bien ainsi ! D'ailleurs les calculatrices permettent parfaitement de surmonter tous les problèmes de ce genre. Ce qu'elles ne permettent pas, en revanche, c'est de savoir mener intelligemment un calcul.

Peut-être que le niveau général des élèves commencerait à s'élever... si l'on voulait bien reconnaître que cela s'apprend et que ce genre d'apprentissage passe sans aucun doute par des séquences du type de celle que je viens d'évoquer. Les mathématiques ne consistent pas, comme on s'est pris plaisir à le croire, dans la *contemplation d'objets*. La dialectique entre *outils* et *objets* ne doit pas être un simple alibi dans cette direction stérile. Les mathématiques consistent d'abord dans la *mise en œuvre des outils* qu'elles se sont forgés, donc l'apprentissage des mathématiques passe par l'apprentissage des *techniques* de calcul et de raisonnement et par l'*apprentissage systématique* des situations où ces techniques peuvent être mises en œuvre. Les réformateurs de 1970 n'avaient pas craint de parier que l'enseignement des "maths modernes" amènerait les enfants à savoir calculer, certes plus tardivement, mais... mieux !

Quels progrès la "didactique des mathématiques" peut-elle s'enorgueillir de nous avoir fait accomplir depuis ces vingt dernières années ?



Conclusion

Les problèmes didactiques touchent en permanence à des questions épistémologiques et à des choix sur les finalités mêmes de l'apprentissage. Peut-être que toutes les positions défendues ici paraîtront erronées ou choquantes. C'est possible. Mais l'erreur serait de croire que les questions qui les sous-tendent sont négligeables. En plagiant Henri Lebesgue, je dirai simplement pour conclure que l'important est avant tout de dire ce qui nous paraît critiquable dans les positions de chacun : c'est la condition pour mieux connaître ce qui nous sépare et donc pour enseigner mieux.

La période que nous traversons est une période d'incertitudes qui se traduit par des programmes "mous", bâtis en réaction aux programmes de 1970 et non pas sur des idées précises en matière de pédagogie et d'épistémologie. Ces programmes permettent au fond n'importe quel discours et ne satisfont personne pour des raisons qui sont souvent parfaitement contradictoires. Est-il besoin de répéter qu'on ne peut prétendre à l'existence d'une "didactique des mathématiques" tant que l'on est incapable d'apporter des réponses aux plus immédiates des questions sérieuses ?

Il serait certes injuste d'exiger d'une science qu'elle réponde à toutes les questions difficiles. Son rôle est avant tout de délimiter le champ des problèmes et de formuler des hypothèses constructives. Pas de résoudre d'emblée toutes les énigmes auxquelles elle est confrontée. Mais encore faut-il aborder les difficultés réelles, sans se défausser sur une soi-disant 'ingénierie" chargée de besognes soi-disant secondaires.

Il n'est pas besoin de parcourir longuement la littérature didactique actuelle pour s'apercevoir que les "trouvailles", quand elles existent, sont précisément du côté de cette "ingénierie", alors que les textes qui se veulent théoriques se cantonnent dans une "méta-didactique" dont personne n'a besoin. Le pire qui puisse arriver à la "didactique des mathématiques" est de constituer une discipline universitaire qui soit à la pratique enseignante ce que la critique littéraire est à la littérature. Peut-être cette "rhétorique" ne serait-elle pas nécessairement désintéressante *a priori*. Mais elle renoncerait à toute "création didactique". Et alors même qu'elle prétendrait chercher à *expliquer* et à *comprendre* les phénomènes liés à l'apprentissage, elle oublierait bien vite son ambition de construire une connaissance rationnelle, qui, pour citer un didacticien même, se doit d'être *opératoire*... ou de n'être pas.