ATELIER N°6

Analyse d'une situation-problème de proportionnalité à l'aide d'outils didactiques

Monique GÉRENTE

Organisation de l'atelier.

L'objectif est de fournir aux participants, à travers une mise en situation, quelques outils didactiques leur permettant d'analyser des situations de classe.

La séance s'articule en différentes phases faisant alterner le travail individuel ou en petits groupes avec des mises en commun des productions des groupes et des apports de l'animatrice.

Travail demandé aux participants de l'atelier

- Individuellement, résoudre le problème.
- Collectivement, recenser les procédures utilisées, les classer et les comparer.
- Rechercher les procédures justes ou erronées pouvant être utilisées par les élèves.
- Analyser les productions écrites de groupes d'élèves.
- Analyser les notes d'observation des mêmes groupes d'élèves et repérer ce qu'elles apportent de plus que les productions écrites.

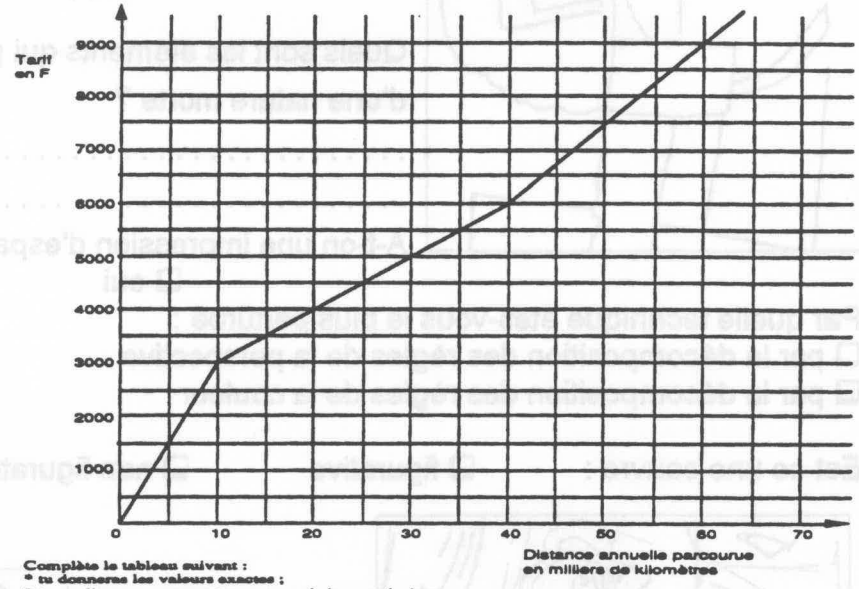
La situation-problème à analyser est celle de la Compagnie d'Assurance, activité pour classes de Troisième, élaborée et expérimentée par un groupe d'enseignants de Collège au cours d'un stage MAFPEN de l'IREM de Grenoble.
Ce problème est "mixte", c'est-à-dire comportant une première partie relevant de la proportionnalité, et une deuxième partie de type non proportionnel, affine. L'objectif de ce choix est de permettre aux élèves de rentrer facilement dans le problème en mettant en œuvre des procédures de proportionnalité, puis de les conduire à se poser la question de leur validité pour la seconde partie du problème (non proportionnelle). La remise en cause des procédures de proportionnalité exige une analyse globale de la situation (retour à l'énoncé, à la situation physique ou au graphique).

Texte du problème

LA COMPAGNIE D'ASSURANCE AUTOBOUM

Une compagnie d'assurances automobiles présente ses tarifs pour l'année 1990. Ces tarifs sont donnés sous la forme d'un graphique en fonction de la distance annuelle parcourue en milliers de kilomètres.

Voici ce graphique.



Complète le tableau suivant :
- **tu donneras les valeurs exactes ;**
- **tu expliqueras comment tu as trouvé chaque résultat.**

Distance en milliers de km	3	5		10	17	20		30			42		55	58	60
Tarifs en F			2400				4500		5600	6000		7500			

Conditions de réalisation

Les élèves travaillent par groupes de trois ou quatre pendant une heure et doivent se mettre d'accord pour fournir une seule solution écrite pour le groupe.

Les groupes sont observés. Nous disposons donc des productions des élèves et des notes d'observation de chaque groupe.

Objectifs visés dans ce problème

- permettre une mobilisation du concept de proportionnalité dans une situation où il n'est pas seul en cause.
- faire intervenir les deux cadres "graphique" et "tableau".
- utiliser des procédures affines liées à la notion de taux de variation.

Quelques éléments d'analyse

Voici d'abord des indications de résolution du problème :

Pour compléter le tableau, toutes les colonnes étant incomplètes, il faut lire les coordonnées de certains points sur le graphique. En fait, il est facile de trouver de nombreuses valeurs du tableau rien qu'en lisant le graphique, parce que ce sont des nœuds du quadrillage donné. Par exemple, les points (5;1500), (10;3000), (20;4000), (25;4500), (30;5000), (40;6000), (50;7500), (60;9000). Il reste alors sept valeurs à calculer. Les quatre première colonnes correspondent à la partie proportionnelle visible du problème. Le calcul du coefficient de proportionnalité (3000/10 = 300) permet de trouver les couples (3;6900) et (8;2400).

Il y a une autre partie proportionnelle dans le problème, à partir du point (40;6000), mais elle n'est pas repérable sans travail intermédiaire :

- soit un prolongement de la demi-droite correspondante ;
- soit des calculs de rapports entre les nombres (7500/50 = 9000/60 = 150) ;
- soit le calcul de l'équation de la droite correspondante (on obtient $y = 150x$).

Ceci permet de déterminer les couples (42 ; 6300), (55 ; 8250), et (58 ; 8700).

Il reste à calculer deux valeurs dans la partie non proportionnelle du problème.

La relation entre les nombres est de type affine. On peut utiliser la proportionnalité des accroissements. Par exemple, pour le couple (17;*y*),
$y = 3000 + (7/10)\times1000 = 3700$
et pour le couple (*x*;5600),
$x = 30 + (600/1000)\times10 = 36$.

Éléments d'analyse préalable

Le problème comporte deux parties *P* dont l'une est très évidente (le segment de droite tracé passe par l'origine des axes) et l'autre au contraire est cachée (il faut prolonger la demi-droite pour le voir). Le graphique suffit à déterminer les parties *P* ou *NP* du problème, à condition d'admettre que les points de la courbe qui ont l'air d'être situés sur les nœuds du quadrillage le sont effectivement.

Le cadre de présentation du problème est graphique. Le cadre de résolution du problème est numérique et graphique : il comporte un graphique à lire, un tableau à compléter et des calculs à faire.

Les calculs sont nécessaires, mais explicitement demandés.

Les questions concernent des grandeurs différentes.

Les écarts entre les nombres du tableau ne sont pas lisibles, car aucune colonne n'est complète.

Les coefficients de proportionnalité, en F/milliers de km, les deux parties proportionnelles sont entiers dans un sens (300 et 150) et rationnels non décimaux dans l'autre sens (1/300 et 1/150). Leur calcul est simple.

Les données sont fournies par un graphique et les réponses sont à mettre dans un tableau et à justifier. Aucune colonne du tableau n'étant complète, l'interaction entre tableau et graphique est obligatoire. Certains couples ne pouvant être lu précisément sur le graphique, des calculs sont nécessaires. La validation des résultats obtenus passe par un retour au graphique ou par une étude de la monotonie des suites du tableau.

L'interaction entre cadre de présentation et cadre de résolution est une variable incontournable pour une problématisation de la proportionnalité. Nous dirons qu'elle est variable de commande pour signifier qu'elle caractérise les apprentissages de la proportionnalité liés à la situation.

Cette situation semble donc riche en interaction entre les différents cadres de référence.

Typologie des procédures de résolution

Les procédures de calcul mises en jeu pour résoudre le problème sont en général d'une grande diversité.

On peut les classer d'après la typologie de S.B. SOKONA :

R règle de trois, *C* produit en croix, **P** rapports proportionnels, **O** calcul d'un opérateur (O1 opérateur fonctionnel, O2 opérateur scalaire), **U** recours à l'unité, **d** décomposition additive, **L** fonction linéaire, **A** fonction affine.

Analyse du déroulement en classe d'après les productions écrites des élèves.

Il est demandé aux participants à l'atelier les productions écrites de deux groupes d'élèves : les groupes 1 et 2.

Groupe 1 :

Le tableau est rempli et partagé en trois par un trait entre 10 et 17 et un autre trait entre 40 et 42. Les élèves distinguent les trois parties du graphique, reconnaissent la proportionnalité pour les parties 1 et 3 mais n'utilisent pas le mot. Ils mettent en évidence les opérateurs analytiques O1 correspondants (× 300 et × 150).

Pour la partie 2, ils précisent qu'ils ont lu sur le graphique : les résultats donnés sont entiers mais approchés. Aucun commentaire n'est fait à ce propos en référence à la consigne : "tu donneras des valeurs exactes".

Groupe 2 :

Les élèves n'ont pu se mettre d'accord et ont rendu deux feuilles : l'une avec le tableau complété et des explications, l'autre avec seulement le tableau complété. Les deux tableaux diffèrent pour la partie non proportionnelle.

Les explications sont rédigées à la première personne, apparemment par un seul élève. Il indique ce qu'il fait pour chaque colonne.

Il a trouvé l'opérateur O1 (3000:10=300) et précise qu'il "ne marche que pour 3, 5, 2400 et 10 car après la courbe dévie". Pour les autres valeurs, il a soit lu le graphique, soit calculé des produits en croix en utilisant la colonne voisine, objet de la réponse précédente, ce qui donne un tableau cohérent.

Pour les quatre premières colonnes, un deuxième calcul est proposé.

Pour 17, il trouve un résultat en contradiction avec le graphique. Après vérification de son calcul, il conclut qu'il "y a une faute de graphique".

L'autre tableau est donné sans commentaires.

Analyse du déroulement en classe d'après les notes d'observation .

Les notes d'observation des deux groupes sont alors distribuées avec la consigne de chercher ce qu'elles apportent de plus que les productions écrites.

Groupe 1 :

Le mot proportionnalité est prononcé tout de suite.

Un élève mesure sur le graphique, les autres font des calculs à la calculatrice, essentiellement des produits en croix. L'élève qui mesure valide ou invalide les résultats des autres.

Ils ont repéré que la deuxième partie "n'est pas linéaire" et que "le produit en croix ne marche donc pas".

Un élève est persuadé "qu'au milieu, pour trouver les valeurs exactes, il y a une méthode".

Finalement, ils se mettent d'accord : "pour le milieu, on n'a pas trouvé. On dit qu'on a fait une lecture graphique".

Donner les valeurs exactes correspond à calculer à la calculatrice.

Groupe 2 :

Le travail de groupe fonctionne mal : certaines propositions ne sont pas prises en compte par les autres. Un seul élève rédige les réponses.

Un élève refuse la lecture graphique : "c'est pas comme ça, c'est trop facile".

Le produit en croix n'est pas lié à la proportionnalité.

Conclusion :

Cette étude montre que la question essentielle pour l'enseignement de la proportionnalité est celle de la problématique de cette notion. En effet, elle est utilisée par les élèves de collège quel que soit le contexte. Ce n'est donc pas la proportionnalité qui pose question, mais son domaine de validité.