delà des Anciens.

C'est ainsi que, partant de la relation (3) écrite : $a.PA \geq b.P\beta + c.P\gamma$, on peut écrire par permutation circulaire dans le triangle et addition :

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 2(a.P\alpha + b.P\beta + c.P\gamma)$$

ou $\quad a.PA + b.PB + c.PC \geq 4\,(\text{Aire}(PBC) + \text{Aire}(PCA) + \text{Aire}(PAB))$

soit : $\quad a.PA + b.PB + c.PC \geq 4\ \text{Aire}(ABC)$

∗ En plaçant *P au centre du cercle circonscrit à ABC* :

$PA = PB = PC = R$ (rayon du cercle circonscrit à ABC)

alors : $(a + b + c).R \geq 4\ \text{Aire}(ABC)$

avec : $\text{Aire}(ABC) = pr$ (r rayon du cercle inscrit)

$2pR \geq 4pr$ *ou* $R \geq 2r$

et, avec $\text{Aire}(ABC) = \dfrac{a.b.c}{4R}$, $2pR = \dfrac{a.b.c}{R}$ ou $2pR^2 \geq a.b.c$

Ou encore, à partir de la relation (4) :

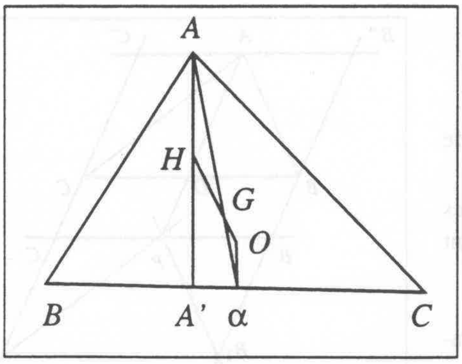
∗ En plaçant *P au centre I du cercle inscrit* dans le triangle ABC : (r rayon du cercle inscrit)

$$2(3r) \leq IA + IB + IC$$
$$6r \leq IA + IB + IC$$

∗ En plaçant *P* au *centre O du cercle circonscrit* de rayon R :

$$2(O\alpha + O\beta + O\gamma) \leq OA + OB + OC = 3R$$

mais α, β, γ sont les milieux des côtés et on sait que $2O\alpha = HA$, H étant *l'orthocentre du triangle ; :* $\quad HA + HB + HC \leq 3R.$



* En plaçant *P* à *l'orthocentre H* :

$2(HA' + HB' + HC') \leq HA + HB + HC$, AA', BB' et CC' étant les hauteurs de ABC

Mais : $\quad AA' = AH + HA'$, $BB' = BH + HB'$, $CC' = CH + HC'$

alors : $\quad 2(AA' + BB' + CC') = 2(HA' + HB' + HC') + 2(HA + HB + HC)$

$$\leq 3(HA + HB + HC \leq 9R.$$

$$AA' + BB' + CC' \leq 9/2R \quad etc...$$

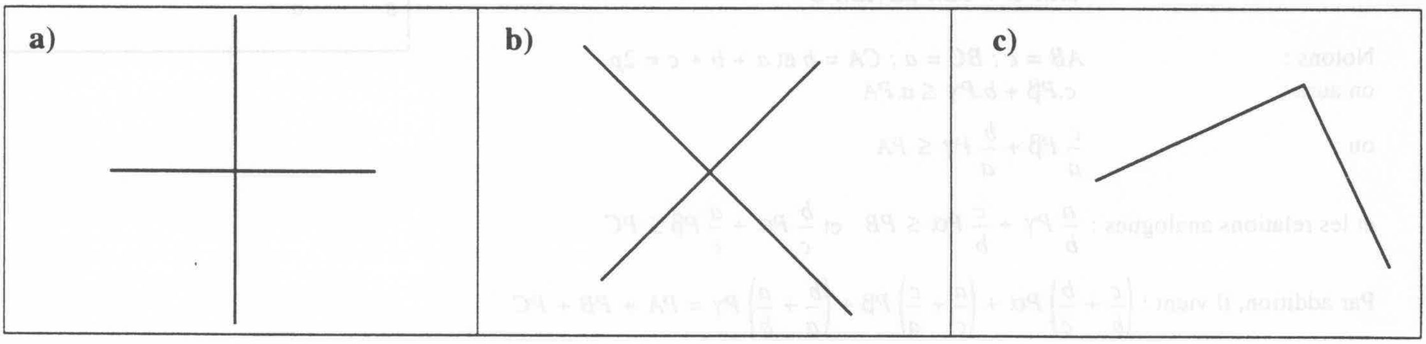
Ainsi, sans chercher à reconstituer un exposé de géométrie, la lecture des anciens ouvrages, au-delà de la dimension historique acquise, fournit au moins sur le point étudié ici un renouvellement de l'exercice plaisant et délectable. ■

Henri PLANE
IREM de DIJON

RECONNAITRE UN ANGLE DROIT

I- Importance de la notion dans les programmes.

La capacité à reconnaître un angle droit intervient dans de très nombreuses activités géométriques : identification des hauteurs, des médiatrices d'un triangle, de certains quadrilatères, utilisation de la trigonométrie ou du théorème de Pythagore, vérification de la validité d'un tracé, etc. On peut affirmer qu'un élève ne maîtrisant que partiellement cette capacité aura des difficultés très importantes en géométrie au collège et au-delà. Les évaluations de début de sixième montrent qu'un nombre relativement important d'élèves est dans ce cas. Nous avons nous-mêmes testé cette aptitude auprès de 80 élèves de sixième. Voici un extrait des tests utilisés :



Les élèves ont tous reconnu un angle droit sur la figure **a**). 8 élèves n'ont pas reconnu d'angle droit sur le figure **b**) et 17 sur la figure **c**).

La capacité à reconnaître un angle droit est fondamentale en géométrie. A l'entrée en sixième, de nombreux élèves ne maîtrisent pas cette capacité.

Si l'on souhaite aller au-delà du constat des difficultés, une question essentielle se pose : «Comment reconnaît-on un angle droit?»

II- Aspects historiques

Nous retiendrons deux définitions utilisées historiquement.

Euclide : Lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait deux angles de suite égaux, chacun des deux angles égaux est droit.

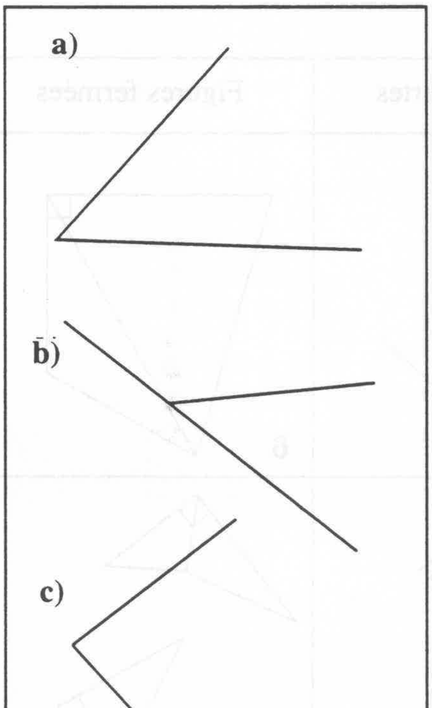
Clairaut : Il faut prendre la plus courte des lignes *DA*, *DB*, *DC*, ... c'est cette ligne à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire.

Ces deux définitions renvoient à des images différentes et, sans doute, à une mise en œuvre différente dans la reconnaissance d'un angle droit.

Plusieurs conceptions de l'angle droit ont été présentes chez les mathématiciens au fil des siècles.

III- Aspects actuels : la reconnaissance de l'angle droit chez les enseignants.

Lors de plusieurs stages, j'ai proposé aux collègues d'analyser leurs propres modes de reconnaissance d'un angle droit.



Des figures étaient projetées à l'aide d'un rétroprojecteur, une par une, et les stagiaires devaient noter au fur et à mesure comment ils reconnaissaient que l'angle était ou n'était pas droit (par exemple, pour les figures **a), b), c)**). Ils étaient, pour la figure **d)**, invités à imaginer une droite passant par *A* et perpendiculaire à *d*.

Les réponses obtenues ont été très variées :

- en tournant la tête ou en faisant tourner la figure dans ma tête pour la placer en situation verticale/horizontale,
- par "projection" sur la figure d'une équerre que j'ai dans ma tête,
- par "essais erreurs" (j'imagine diverses positions possibles),
- par comparaison de deux angles,
- en imaginant le plus court chemin,
- c'est instantané, je ne sais pas,
- je me suis demandé si c'était un dessin dans l'espace…

Les situations géométriques proposées étaient très simples. D'autres situations permettraient, sans doute, d'avoir une liste de réponses beaucoup plus longue.

Deux points nous semblent néanmoins pouvoir être tirés de cette brève expérience.

Pour une figure donnée, les modes de reconnaissance varient d'un individu à l'autre.

Pour un individu donné, les modes de reconnaissance varient d'une figure à l'autre, suivant les caractéristiques de la figure.

Les réponses des enseignants sont variées. Toutefois, il nous apparaît que l'on peut les regrouper en deux grandes catégories :

1 Reconnaissance par mise en correspondance avec une figure type, abstraite (par exemple : une droite verticale croisée par une horizontale) ou concrète (par exemple : une équerre) présente dans notre mémoire.

2 Reconnaissance par vérification d'une propriété de l'orthogonalité (angles égaux, plus courte distance par exemple).

La mise en œuvre efficace de ces modes de reconnaissance nécessite d'une part, d'avoir la capacité de faire tourner, soit mentalement, soit physiquement (rotation de la feuille ou de la tête), la figure donnée ou la figure de référence disponible en mémoire. D'autre part, il faut être capable d'extraire certaines parties de la figure dans le cas de situations géométriques complexes. Bien entendu, si c'est une propriété de l'orthogonalité qui est en jeu, il faut que les savoirs et savoir faire liés à cette propriété soient disponibles.

IV- Les apprentissages à l'école primaire

On retrouve fréquemment le double-pliage d'une feuille de papier pour introduire la notion d'angle droit. Le pliage pourrait être utilisé pour une présentation "à la Euclide de l'angle droit. En pratique, l'activité de pliage n'est pas exploitée de cette manière : elle se termine le plus souvent par l'affirmation que l'on vient de fabriquer un angle droit, éventuellement en le vérifiant à l'aide d'une équerre. L'outil privilégié de vérification dans les exercices est l'équerre. Le pliage ne semble pas être le moyen de vérification auquel sont incités les élèves, même dans la phase d'apprentissage. Quelques discussions avec des maîtres nous ont montré qu'outre le pliage, une autre voie était souvent utilisée dans l 'approche de l'angle droit : l'observation des angles droits présents dans l'environnement : coin du tableau, de la table, etc…

Par rapport aux deux grandes catégories de réponses données par les experts (voir ce-dessus), on peut dire que ce qui est implicitement visé dans l'introduction des angles droits en primaire, c'est la fabrication d'une image mentale d'un angle droit en en montrant un certain nombre et c'est la capacité à utiliser une équerre. L'utilisation de propriétés de l'orthogonalité pour vérifier si un angle est droit n'est pas envisagée. (La même remarque est sans doute valable pour le travail fait en début de collège).

V - La reconnaissance chez les élèves

En demandant à des élèves de sixième d'expliciter leur mode de reconnaissance d'un angle droit, nous avons recueilli les réponses suivantes :

- je tourne la tête,
- je regarde si cela forme un "plus",
- je regarde si cela forme une vraie croix (sic),
- je regarde si cela fait comme un coin de la feuille, du tableau…
- etc…

D'une manière générale, les modes d'élèves à l'entrée en sixième sont plutôt du côté de la mise en correspondance avec une figure mémorisée que du côté de l'utilisation de propriétés de l'orthogonalité. Ceci est tout à fait cohérent avec la présentation de l'angle droit faite en primaire. Quand on observe les erreurs faites par les élèves de sixième, les "théorèmes-élèves" ci-dessous semblent être utilisés implicitement assez fréquemment :

- un "coin" d'une figure est un angle droit,
- deux lignes qui se croisent forment un angle droit,
- deux lignes dont l'une des deux est soit verticale, soit horizontale, forment un angle droit.

Ces "théorème-élèves" ne fonctionnent pas de manière systématique mais sont mobilisés en fonction de la situation géométrique proposée à l'élève. Il nous semble possible d'identifier, au moins quatre éléments pouvant jouer un rôle dans la reconnaissance d'un angle droit par un élève :

1-l'orientation de l'angle

2-la figure proposée est ouverte ou fermée,

3-l'angle est isolé ou doit être isolé,

4-le support est blanc ou quadrillé.

Si l'angle est en situation verticale/horizontale, il est en général reconnu. Une autre orientation crée une difficulté, qui devient très importante si elle est conjuguée avec la nécessité d'isoler l'angle. Voici quelques exemples de figures obtenues en croisant les variables 1, 2 et 3 évoquées ci-dessus.

VI- Conclusion

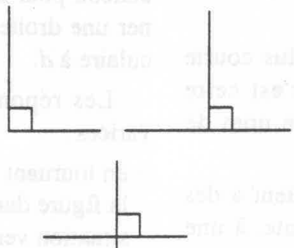
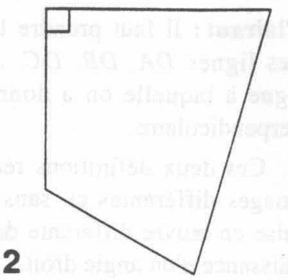
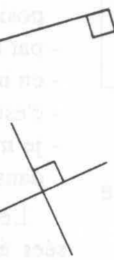
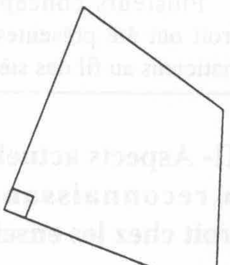
Nous souhaitions, dans cet article, pointer la complexité des tâches de reconnaissance, masquées par la simplicité apparente des figures, et la variété des réponses apportées par les individus qu'ils soient experts ou sur la voie de l'expertise…

Nous ébauchons ici un travail qui n'a pas la prétention d'être exhaustif. Par exemple dans les modes experts, il faudrait explorer la reconnaissance de certaines configurations, comme

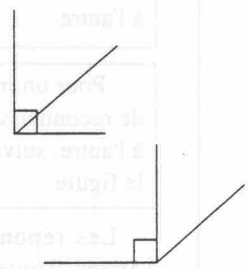
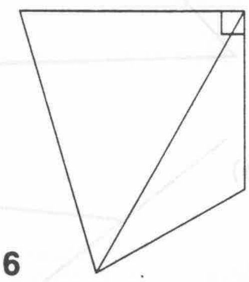
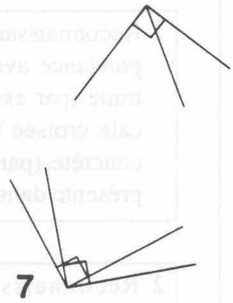
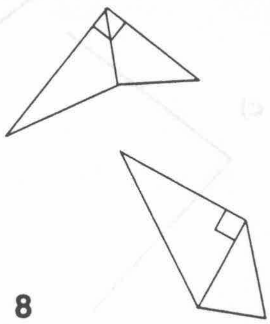
Tel qu'il se présente, il nous semble déjà fournir quelques pistes pour favoriser la reconnaissance des angles droits par les élèves :

- faire travailler les élèves sur les modes de reconnaissance experts (égalité d'angles, plus courte distance),
- développer la capacité à "faire tourner" les figures,

L'angle est isolé

	Figures ouvertes	Figures fermées
Orientation verticale horizontale	 1	 2
Autres orientations	 3	 4

L'angle doit être isolé

	Figures ouvertes	Figures fermées
Orientation verticale horizontale	 5	 6
Autres orientations	 7	 8

- développer la capacité à anticiper, par la pratique du tracé à main levée,
- varier les situations géométriques proposées,
- prendre en compte les conceptions de départ des élèves.

Des séquences menées dans nos classes de sixième nous ont montré que contrairement à ce que nous pensions il y a quelques années, il n'est pas trop tard pour agir à ce niveau, ni trop coûteux en temps. ■

René MULET-MARQUIS
(IREM de Lyon)