

A PROPOS DE LA DÉFINITION DE LA MÉDIANE

La notion de médiane est prévue dans les programmes de Troisième et de Seconde, bien qu'elle ne soit pas exigible.

L'examen des manuels de Troisième montre la nécessité de mieux distinguer le cas d'un caractère statistique discret et le cas d'un caractère continu.

Dans le cas continu, la définition de la médiane ne pose aucun problème. Son approche fournit une occasion de faire des Travaux Pratiques

- avec réinvestissement du Théorème de Thalès, de la détermination d'une équation d'une droite définie par deux points ;

- avec des activités pluridisciplinaires.

Dans le cas discret, la définition qu'on trouve couramment de la médiane m_e peut s'écrire :

$\text{card}(X \leq m_e) \geq n$ et $\text{card}(X \geq m_e) \geq n$ où n désigne l'effectif total. On peut aussi utiliser

$\text{card}(X < m_e) \leq n$ et $\text{card}(X > m_e) \leq n$ ou encore des versions équivalentes liées aux rangs dans la série ordonnée.

Pour la série $\{1 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8\}$ une telle définition conduit à $m_e = 8$. Mais dans ce cas, se pose le problème de la pertinence de la notion de médiane, comme celle de moyenne d'ailleurs.

Peut-on vraiment dire que le "milieu" de la série est 8 alors que c'est la plus grande valeur ?

Pour ma part, je propose de retenir comme définition de la médiane celle qu'on trouve dans des ouvrages comme : Henry ROUANET, Brigitte LE ROUX, Marie-Claude BERT, Statistiques en sciences humaines : procédures naturelles, Dunod, c'est-à-dire :

$$\text{card}(X < m_e) = \text{card}(X > m_e).$$

Avec une telle définition, la série statistique précédente n'a pas de médiane. Comme la notion n'était pas pertinente, n'est-ce pas mieux ainsi ?

Daniel FREDON
IREM de LIMOGES

G É O M É T R I E

DES AIRES, OUTILS DE DÉMONSTRATION

Les pages qui suivent n'ont pas pour projet de dresser le plan, parfaitement concevable par ailleurs d'un exposé de géométrie prenant comme point de départ la notion d'aire d'une figure simple, rectangle ou triangle.

Il ne s'agit ici que de présenter des démonstrations reposant justement sur des propriétés des surfaces et démonstrations glanées dans divers ouvrages nés au cours des âges.

Faut-il s'étonner de cette abondante variété ?

Si on se reporte aux "Éléments d'Euclide", on constate déjà les géomètres grecs fondaient souvent leurs raisonnements sur des égalités établies entre les rapports de segments et rapports de surface (rapports de grandeurs et non de mesures). Ainsi au Livre 6, Proposition 1 : «les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases».

Ce n'est qu'au XVII^e siècle - en particulier avec la géométrie d'ARNAUD - qu'un ordre d'exposition qui se voulait plus rationnel, plaçait tout ce qui a trait aux segments de droite ou de courbe avant les surfaces et abandonnait les démonstrations par les surfaces, lesquelles pouvaient être considérées comme un détour. Ensuite, une autre conception du rapport par l'intermédiaire des mesures - longueurs et aires - ainsi qu'une autre maîtrise des irrationnels allait soutenir ce changement.

Faudrait-il donc rejeter maintenant cet outil que constitue l'usage des surfaces simples, connues tôt par le débutant et souvent même avant qu'il n'ait abordé le raisonnement géométrique ?

La présente petite enquête historique peut aider qui rêve de l'exposé cité en commençant, mais montre surtout la diversité et, par là, la richesse des moyens en mathématiques pourvu qu'on ne reste pas esclave d'un certain monolithisme.

I - Pourquoi ne pas commencer par des égalités d'aires chez EUCLIDE ?

Il s'agit de propriétés de surface, mais qui seront ensuite interprétées comme propriétés de nombres en particulier chez les indiens, par exemple BHASCARA (début du XII^e siècle).

- Avec EUCLIDE :

$$\text{Carré}(a+b) = \text{Carré}(a) + \text{Carré}(b) + 2 \text{ Rectangles}(ab)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

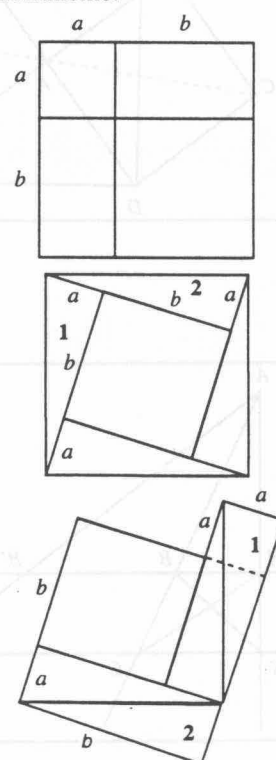
- Avec BHASCARA :

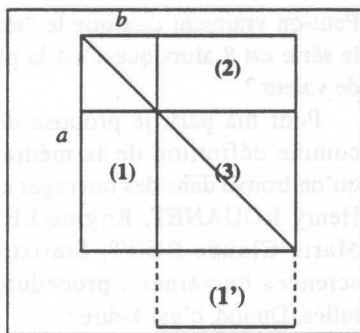
Dans un carré, on trace quatre triangles rectangles égaux de côtés a et b . Il reste au centre un carré de côté $(b-a)$. Si on "déplace" les deux triangles 1 et 2, on obtient une figure formée de deux carrés de côtés a et b .

Il vient : $\text{Carré}(b-a) + 4 \text{ Triangles}(ab) = \text{Carré}(b) + \text{Carré}(a)$

$$\text{Carré}(b-a) + 2 \text{ Rectangles}(ab) = \text{Carré}(b) + \text{Carré}(a)$$

$$(b-a)^2 + 2ab = b^2 + a^2$$





- En revenant à la figure grecque du "gnomon" dans l'esprit de l'indien - sur la diagonale du carré de côté a , prenons un point d'où l'on mène les parallèles aux côtés. On définit ainsi un petit carré de côté b , deux rectangles (1) et (2) égaux et un autre carré (3).

On a : Carré (a) - Carré $(b) = (1) + (2) + (3)$
 Déplaçons (1) en (1') : Carré (a) - Carré $(b) = (1') + (2) + (3)$
 ou : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
 puisque (1'), (2) et (3) forment un seul rectangle aux côtés connus.

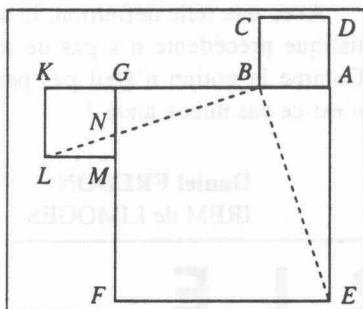
II - Autour du théorème de PYTHAGORE

a) A côté de la démonstration d'EUCLIDE (qui est par les aires), figurent maintes autres démonstrations qui répondent souvent à d'autres questions.

Construire un carré égal à deux autres donnés

(Il s'agit, bien sûr, d'égalité d'aires. La méthode est attribuée à un manuscrit sanscrit par BONCOMPAGNI).

On place côte à côte les deux carrés donnés $ABCD$ et $AEFG$. On trace EB et on déplace le petit carré en $GKLM$. Les triangles ABE et KLB sont égaux. Il s'en suit que $\widehat{LBE}$ est droit.



Par la translation $\overrightarrow{BL}$: ABE devient LMP .

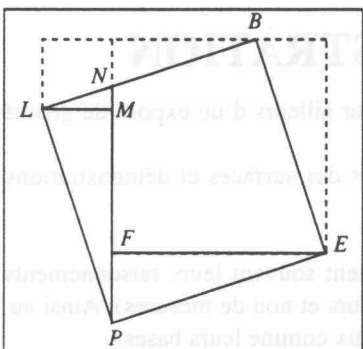
Par la translation $\overrightarrow{LP}$: KLB devient FPE .

On a bien carré $EBLP$ somme des carrés $GKLM$ et $AEFG$, c'est-à-dire :

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

(On peut également obtenir la figure finale par rotation de BKL autour de L et de ABE autour de E .)

Il existe une variante de cette construction chez CLAIRAUT ((*Eléments de géométrie*, en 1743).



b) La configuration suivante est attribuée à NASIR ED DIN, géomètre arabe du XII^e siècle.

Soient les carrés $ABCD$ et $AEFG$ sur les côtés du triangle AED . Les droites (BC) et (FG) se coupent en H . Les orthogonales à (DE) en D et E définissent les points J sur (HC) et K sur (HF) .

On démontre l'égalité des triangles ADE , CDJ , FKE . Donc $DEKJ$ est un carré et le triangle HJK est aussi égal à ADE .

On évalue de deux façons l'aire de $DEFHC$ et on a l'égalité entre :

$$\text{Aire}(ADE) + \text{Aire}(ABCD) + \text{Aire}(AEFG) + \text{Aire}(AGHB)$$

et

$$\text{Aire}(DEKJ) + \text{Aire}(DJC) + \text{Aire}(KFE) + \text{Aire}(JKH).$$

$$\text{Comme : Aire}(AGHB) = 2 \text{ Aire}(ADE)$$

$$\text{On obtient : Aire}(ABCD) + \text{Aire}(AEFG) + 3\text{Aire}(ADE) = \text{Aire}(DEKJ) + 3\text{Aire}(ADE)$$

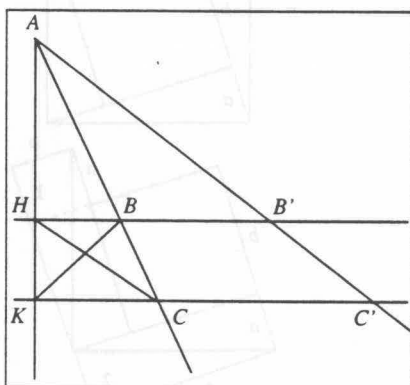
$$\text{Donc : } AD^2 + AE^2 = DE^2$$

Lorsqu'on aura constaté l'égalité des quadrilatères $CFKJ$ et $FCBG$, on pourra après avoir construit la figure $DEFGBC$, la couper selon (CF) , retourner $FGBC$ et associer au reste $CDEF$, reconstituer $DEFKJC$ et on aura :

$$\text{Aire}(ABCD) + \text{Aire}(AEFG) + 2\text{Aire}(ADE) = \text{Aire}(DEKJ) + 2\text{Aire}(ADE).$$

Remarque : Les figures précédentes peuvent être matérialisées en papier et les opérations de découpe se faire par pliage.

Démonstrations par reconstruction ...



III - Autour du théorème dénommé, au XX^e siècle, de THALÈS.

Soient deux sécantes ABC et $AB'C'$ aux deux parallèles BB' et CC' (cette forme du théorème n'apparaît qu'au XVII^e siècle) ? La droite AHK est orthogonale aux parallèles.

On notera que l'usage de la "perpendiculaire" AK n'est pas un artifice, car les parallèles sont très souvent introduites comme des perpendiculaires à une même droite (bandes à distance constante, cf. ARNAUD).

Les triangles AHB et AKB ont même hauteur HB ,

donc :
$$\frac{\text{Aire}(AHB)}{\text{Aire}(AKB)} = \frac{AH}{AK}$$

mais :
$$\text{Aire}(AKB) = \text{Aire}(AHB) + \text{Aire}(HBK)$$

et :
$$\text{Aire}(HBK) = \text{Aire}(HBC)$$

donc :
$$\frac{AH}{AK} = \frac{\text{Aire}(AHB)}{\text{Aire}(AHB) + \text{Aire}(HBK)} = \frac{\text{Aire}(AHB)}{\text{Aire}(AHB) + \text{Aire}(HBC)} = \frac{\text{Aire}(AHB)}{\text{Aire}(AHC)}$$

Ces deux derniers triangles ont même hauteur issue de H , leur rapport est égal à celui de leurs bases (EUCLIDE, livre VI).

$$\frac{AH}{AK} = \frac{AB}{AC} \text{ et de même } \frac{AH}{AK} = \frac{AB'}{AC'}$$

Mais aussi - et cela était très utile pour l'usage du "compas de proportion", outil de base de la géométrie pratique jusqu'au début du XIX^e siècle - en considérant ces deux triangles AHB et AHC de même base AH et donc de hauteur HB et KC

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{KC} = \frac{HB'}{KC'} = \frac{HB' - HB}{KC' - KC} = \frac{BB'}{CC'}$$

Rapports entre segments sur les sécantes et sur les parallèles tout à fait dans la ligne des triangles semblables.

IV

Un théorème qui apparaît tardivement, est fort utilisé puis est occulté lorsque la trigonométrie s'insère dans le corps de la géométrie à la fin du XVIII^e siècle. Il est encore utilisé par CATALAN (1848).

On envisage deux triangles ayant un angle égal. Les angles égaux peuvent donc être opposés par le sommet (théorème connu de THALÈS).

Les triangles ABC et ADE ont leurs angles égaux en A . Joignons BE .

On peut écrire :
$$\frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(ABE)} = \frac{AC}{AE} \quad (\text{triangles ayant la même hauteur})$$

et :
$$\frac{\text{Aire}(ADE)}{\text{Aire}(ABE)} = \frac{AD}{AB}$$

d'où :
$$\frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(ADE)} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

"*dividendo et intervendo* les proportions" ainsi que l'on disait au Grand-Siècle.

Théorème : Si deux triangles ont un angle égal, le rapport de leurs aires est égal à celui des produits des côtés de cet angle.

Remarque 1 : Le théorème est le même avec deux angles supplémentaires.

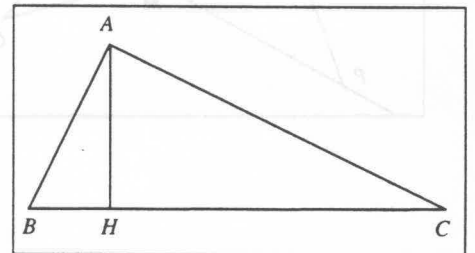
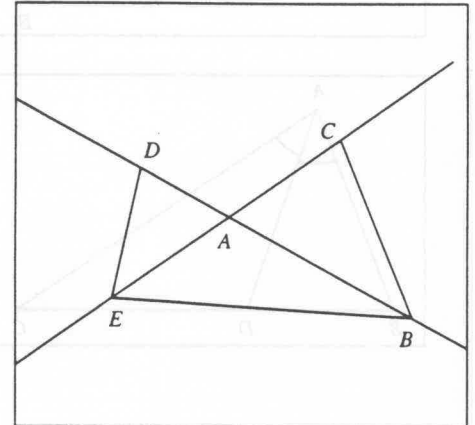
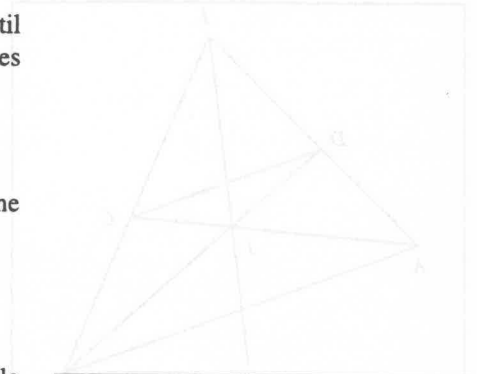
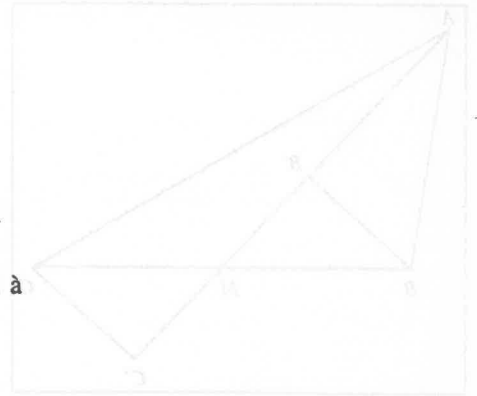
Remarque 2 : Si, de plus, les triangles ABC et ADE sont semblables (deuxième angle égal)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ donc } \frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(ADE)} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

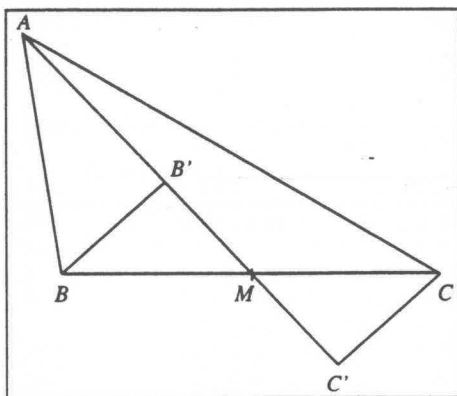
Et c'est alors qu'on peut rappeler la plus courte démonstration du théorème de PYTHAGORE. Elle est due au Père Bernard LAMY dans sa géométrie (1683). Il la place après l'étude des triangles semblables dont il montre que les aires sont proportionnelles aux carrés des segments homologues. Donc, avec la hauteur AH du triangle rectangle ABC , on a trois triangles semblables ABC , HBA et HAC .

A l'égalité :
$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(HBA) + \text{Aire}(HAC)$$

on substitue :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



V - Applications diverses glanées çà et là, des traducteurs d'Euclide aux auteurs du XIX^e siècle.

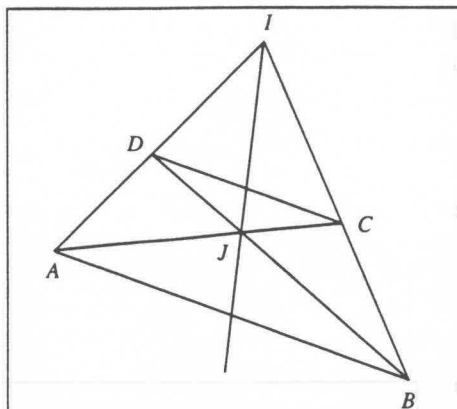


a) AM médiane du triangle ABC :

$$MB = MC \text{ donc } \text{Aire}(AMB) = \text{Aire}(AMC)$$

car les triangles AMB et AMC ont même hauteur issue de A et des bases BM et CM égales. Ils ont aussi la même base AM et des hauteurs BB' et CC' égales.

Réciproquement : la droite passant par A et équidistante de B et C - et coupant $[BC]$ - est médiane.



b) Dans un trapèze $ABCD$, montrer que la droite qui joint l'intersection I des côtés AD et BC avec l'intersection J des diagonales AC et BD passe par les milieux des côtés parallèles.

$$\text{Aire}(ACD) = \text{Aire}(BCD)$$

$$\text{donc : } \text{Aire}(AJD) + \text{Aire}(JCD) = \text{Aire}(BJC) + \text{Aire}(JCD)$$

$$\text{Aire}(AJD) = \text{Aire}(BJC)$$

Par ailleurs

$$\frac{\text{Aire}(AJI)}{\text{Aire}(AJD)} = \frac{AI}{AD} = \frac{BI}{BC} = \frac{\text{Aire}(BJI)}{\text{Aire}(BJC)}$$

donc :

$$\text{Aire}(AJI) = \text{Aire}(BJI).$$

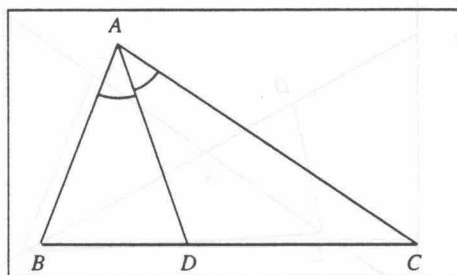
Les deux triangles AJI et BJI ont même base JI ,

donc :

$$\text{distance de } A \text{ à la droite } (JI) = \text{distance de } B \text{ à la droite } (JI)$$

(IJ) est médiane du triangle IAB .

c) **Propriété de la bissectrice AD dans le triangle ABC .**



$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$$

alors

$$\frac{\text{Aire}(ABD)}{\text{Aire}(ADC)} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$$

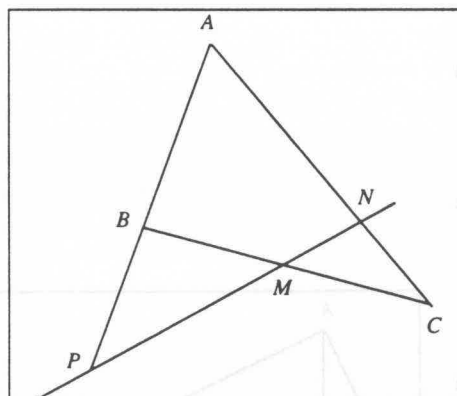
mais ces triangles ont la même hauteur issue de A :

$$\frac{\text{Aire}(ABD)}{\text{Aire}(ADC)} = \frac{BD}{DC}$$

donc

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

d) **Théorème de MENELAUS (dénomination fin XIX^e siècle).**



$$\frac{\text{Aire}(APN)}{\text{Aire}(BPM)} = \frac{PA \cdot PN}{PB \cdot PM} \text{ de même } \frac{\text{Aire}(BPM)}{\text{Aire}(CNM)} = \frac{MB \cdot MP}{MC \cdot MN} \text{ APN et BPM d'une part,}$$

BPM et CNM d'autre part ont un angle égal.

$$\text{et } \frac{\text{Aire}(CNM)}{\text{Aire}(APN)} = \frac{NC \cdot NM}{NA \cdot NP} \text{ CNM ET APN ont deux angles supplémentaires.}$$

donc :

$$\frac{\text{Aire}(APN)}{\text{Aire}(BPM)} \cdot \frac{\text{Aire}(BPM)}{\text{Aire}(CNM)} \cdot \frac{\text{Aire}(CNM)}{\text{Aire}(APN)} = 1$$

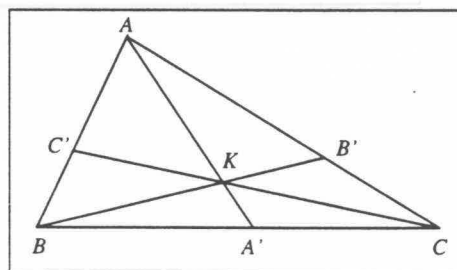
D'où

$$\frac{PA \cdot PN}{PB \cdot PM} \cdot \frac{MB \cdot MP}{MC \cdot MN} \cdot \frac{NC \cdot NM}{NA \cdot NP} = 1$$

en simplifiant :

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

e) **Théorème de CEVA (GIOVANNI)**



$$\frac{\text{Aire}(A'AB)}{\text{Aire}(A'AC)} = \frac{A'B}{A'C} \quad (\text{même hauteur})$$

$$\text{D'où : } \frac{\text{Aire}(A'AB)}{\text{Aire}(A'AC)} = \frac{\text{Aire}(A'KB)}{\text{Aire}(A'KC)} = \frac{\text{Aire}(KAB)}{\text{Aire}(KAC)} \quad (\text{par différence des termes des rapports})$$

De même : $\frac{\text{Aire}(AKC)}{\text{Aire}(KBC)} = \frac{C'A}{C'B}$ et $\frac{\text{Aire}(KBC)}{\text{Aire}(KBA)} = \frac{B'C}{B'A}$

d'où $\frac{\text{Aire}(KAB)}{\text{Aire}(KAC)} \cdot \frac{\text{Aire}(KAC)}{\text{Aire}(KBC)} \cdot \frac{\text{Aire}(KBC)}{\text{Aire}(KBA)} =$

donc : $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1$

Remarque : Pour le point K extérieur au triangle, les démonstrations précédentes s'adaptent par somme ou différence. On peut également les algébriser.

f) Théorème de GERGONNE.

$\frac{\text{Aire}(A'KC)}{\text{Aire}(A'AC)} = \frac{A'K}{A'A} = \frac{\text{Aire}(A'KB)}{\text{Aire}(A'AB)} = \frac{\text{Aire}(A'KC) + \text{Aire}(A'KB)}{\text{Aire}(A'AC) + \text{Aire}(A'AB)} = \frac{\text{Aire}(KCB)}{\text{Aire}(ABC)}$
comme : $\text{Aire}(KCB) + \text{Aire}(KCA) + \text{Aire}(KAB) = \text{Aire}(ABC)$

$$\frac{A'K}{A'A} + \frac{B'K}{B'B} + \frac{C'K}{C'C} = 1$$

Relation qui peut être énoncée autrement, car :

$$\frac{A'K}{A'A} = 1 - \frac{KA}{A'A} \text{ et } \frac{B'K}{B'B} = 1 - \frac{KB}{B'B}, \frac{C'K}{C'C} = 1 - \frac{KC}{C'C}$$

alors

$$\frac{AK}{AA'} + \frac{BK}{BB'} + \frac{CK}{CC'} = 2$$

Même remarque en ce qui concerne à la position de K par rapport à ABC .

g) Où l'on retrouve "la puissance d'un point par rapport à un cercle".

B, C, D et E sont cocycliques.

Soient sur (AE) :

$$AC' = AC, \text{ sur } (AC) : AE' = AE.$$

On a : $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ et $\widehat{AEC} = \widehat{AE'C'}$

donc : $(E'C') \parallel (BD)$

alors : $\text{Aire}(BDE') = \text{Aire}(BDC')$

même base BD et hauteurs égales

et, avec le triangle ABD :

$$\text{Aire}(AE'D) = \text{Aire}(AC'B)$$

Les angles en A sont égaux pour ces deux triangles,

$$\text{donc : } AE' \cdot AD = AC' \cdot AB$$

$$\text{d'où : } AE \cdot AD = AC \cdot AB \text{ ou } \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

Remarque : cette notion de puissance est apparue au XIX^e siècle. Pendant longtemps, on a qualifié les droites BD et CE d'«antiparallèles» et elles faisaient l'objet d'une étude dans divers traités. Les parallèles déterminent des segments en proportion et les antiparallèles en "proportion réciproque".

h) Second théorème de PTOLÉMÉE

(déjà ainsi dénommé en 1881 dans le traité de GIROD)

$ABCD$ est inscrit dans un cercle.

Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ sont supplémentaires.

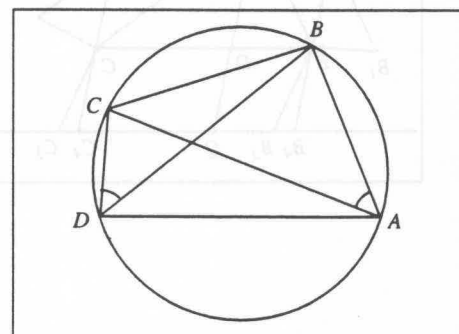
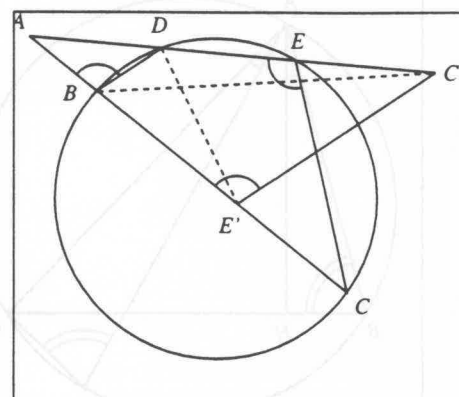
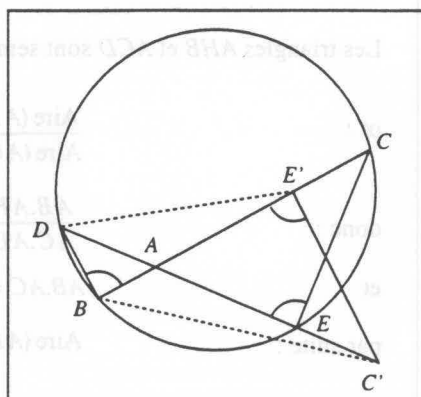
$$\text{donc : } \frac{\text{Aire}(ABD)}{\text{Aire}(CBD)} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ donc : } \frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(CBD)} = \frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC}$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} \text{ donc : } \frac{\text{Aire}(ACD)}{\text{Aire}(CBD)} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD}$$

Mais : $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(ACD)$

$$\text{d'où : } \frac{\text{Aire}(ABCD)}{\text{Aire}(CBD)} = \frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC} + \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC + AC \cdot AD \cdot DC}{BC \cdot BD \cdot DC} \quad (1)$$



et : $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABD) + \text{Aire}(CBD)$

d'où :
$$\frac{\text{Aire}(ABCD)}{\text{Aire}(CBD)} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{CB \cdot CD} = \frac{(AB \cdot AD + CB \cdot CD) BD}{CB \cdot BD \cdot DC} \quad (2)$$

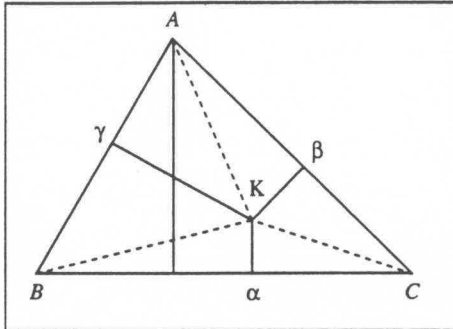
Il vient, en égalant (1) et (2) :

$$AC(AB \cdot BC + DA \cdot DC) = BD(AB \cdot AD + CB \cdot CD)$$

ou :
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{AB \cdot BC + DA \cdot DC}$$

i) Une relation métrique dans le triangle.

Soit K un point intérieur au triangle ABC et se projetant en α , β et γ sur les côtés.



$$\frac{\text{Aire}(KBC)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{K\alpha}{\text{hauteur}}$$

Mais, $\text{Aire}(KBC) + \text{Aire}(KCA) + \text{Aire}(KAB) = \text{Aire}(ABC)$

Par suite :
$$\frac{K\alpha}{h_a} + \frac{K\beta}{h_b} + \frac{K\gamma}{h_c} = 1$$

* Si le triangle est équilatéral : $K\alpha + K\beta + K\gamma = h$.

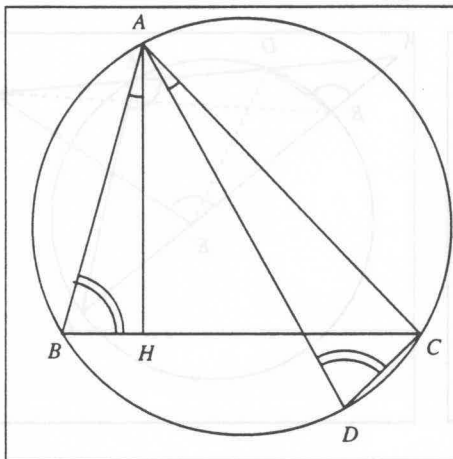
* Si k est le centre du cercle inscrit : $K\alpha = K\beta = K\gamma = r$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

On trouvera plus loin des relations d'inégalité.

j) Un calcul d'aire ...

AD est diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC et AH hauteur.



Les triangles AHB et ACD sont semblables :
$$\frac{\text{Aire}(ABH)}{\text{Aire}(ACD)} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

or :
$$\frac{\text{Aire}(ABH)}{\text{Aire}(ACD)} = \frac{AB \cdot AH}{AC \cdot AD}$$

donc :
$$\frac{AB \cdot AH}{AC \cdot AD} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

et $AB \cdot AC = AD \cdot AH$

par suite :
$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{AD}$$

qui n'est autre que :
$$\text{Aire}(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

où $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et R est le rayon du cercle circonscrit à ABC .

VI - Retour à PAPPUS (Collections livre IV - vers 400)

Théorème bien connu concernant les aires.

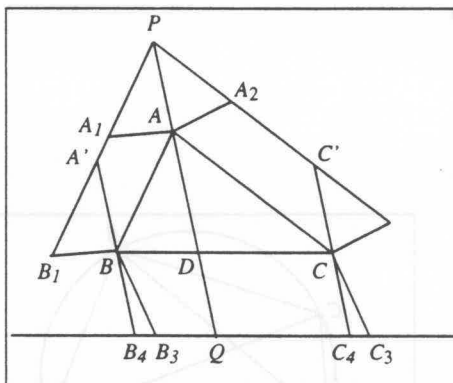
Soit un triangle ABC .

On construit à l'extérieur de celui-ci deux parallélogrammes quelconques ABB_1A_1 et ACC_2A_2 . Les droites (B_1A_1) et (C_2A_2) se coupent en P . La droite (parallèles) recoupe le côté BC en D .

On construit alors :

- sur la droite (PA) le point Q tel que $DQ = PA$.

- sur la parallèle à BC menée par Q les points B_3 et C_3 tels que BCC_3B_3 soit un parallélogramme.



Théorème de PAPPUS :

$$\text{Aire}(BCC_3B_3) = \text{Aire}(ABB_1A_1) + \text{Aire}(ACC_2A_2)$$

Démonstration :

Mener par B et C les parallèles à (AD) .

La parallèle issue de B coupe (B_1A_1) en A' et (C_3B_3) en B_4 ,

la parallèle issue de C coupe (C_2A_2) en C' et (C_3B_3) en C_4 .

On peut alors écrire :

$$\text{Aire}(ABB_1A_1) = \text{Aire}(ABA'P) = \text{Aire}(QDBB_4)$$

$$\text{Aire}(ACC_2A_2) = \text{Aire}(ACC'P) = \text{Aire}(QDCC_4)$$

$$\text{Aire}(QDBB_4) + \text{Aire}(QDCC_4) = \text{Aire}(BCC_4B_4) = \text{Aire}(BCC_3B_3)$$

Remarque : Lorsque le triangle ABC est rectangle en A , on retrouve avec NASIR ED DIN (début XIII^e siècle) le théorème de PYTHAGORE

Mais la figure de PAPPUS prend une forme simple souvent rencontrée sans faire appel au grec.

On envisage un triangle et un point P de son plan. On joint P à l'un des sommets tel que cette droite coupe le triangle (cela est possible pour trois sommets (P intérieur) ou un seul (P extérieur).)

Soit A le sommet remplissant la condition.

Par P , on mène les parallèles aux trois côtés du triangle et par A la parallèle à BC .

Alors : $\text{Aire}(ABB_1P) = \text{Aire}(AB''B'P)$ et $\text{Aire}(ACC_1P) = \text{Aire}(AC''C'P)$

et donc : $\text{Aire}(B'C'C''B'') = \text{Aire}(ABB_1P) + \text{Aire}(ACC_1P)$

Parallélogramme construit sur la "bande" BC parallélogramme construit sur la "bande" AB Parallélogramme construit sur la "bande" AC

Remarque : Lorsque (AP) ne coupe pas $[BC]$, on a une différence d'aires.

$\text{Aire}(B'C'C''B'') = \text{Aire}(ACC_1P) - \text{Aire}(ABB_1P)$ c'est encore le problème des cas de figures.

En évaluant les aires de ces parallélogrammes construits sur les "bandes" parallèles aux côtés d'un triangle, on obtient des relations intéressantes, en particulier, en notant que le produit $AP \cdot BC$ est une majorante de l'aire sur la "bande" BC .

On a : $\text{Aire}(\text{parallélogramme sur } [AB]) + \text{Aire}(\text{parallélogramme sur } [AC]) \leq BC \cdot PA$

Lorsque P est un point intérieur au triangle se projetant en α, β, γ sur les côtés, la relation s'écrit :

$$AB \cdot P\gamma + AC \cdot P\beta \leq BC \cdot PA \quad (3)$$

Cette conséquence de l'étude de PAPPUS a permis à KAZARINOFF de démontrer, au milieu de XX^e siècle, une conjecture d'ERDOS de 1935 et qui n'avait reçu qu'une longue démonstration analytique.

Appliquée au point P_1 , symétrique de P par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, cette dernière égalité (3) donne :

$$AB \cdot P_1\gamma_1 + AC \cdot P_1\beta_1 \leq BC \cdot P_1A$$

mais :

$$P_1\gamma_1 = P\beta, P_1\beta_1 = P\gamma, P_1A = PA$$

alors :

$$AB \cdot P\beta + AC \cdot P\gamma \leq BC \cdot PA$$

Par permutation circulaire : $BC \cdot P\gamma + BA \cdot P\alpha \leq BC \cdot PB$

$$CA \cdot P\alpha + CB \cdot P\beta \leq AB \cdot PC$$

Notons :

$$AB = c; BC = a; CA = b \text{ et } a + b + c = 2p$$

on aura :

$$c \cdot P\beta + b \cdot P\gamma \leq a \cdot PA$$

ou :

$$\frac{c}{a} P\beta + \frac{b}{a} P\gamma \leq PA$$

et les relations analogues : $\frac{a}{b} P\gamma + \frac{c}{b} P\alpha \leq PB$ et $\frac{b}{c} P\alpha + \frac{a}{c} P\beta \leq PC$

Par addition, il vient : $\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) P\alpha + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) P\beta + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) P\gamma = PA + PB + PC$

On sait que, quel que soit x , $x + \frac{1}{x} \geq 2$

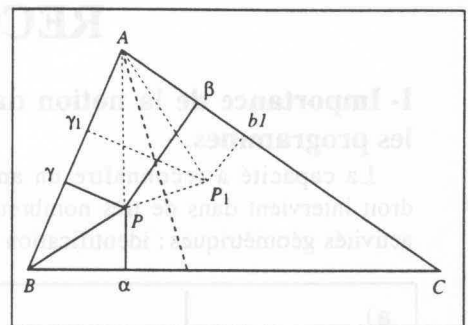
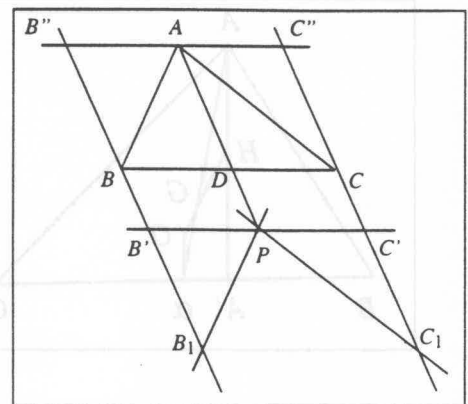
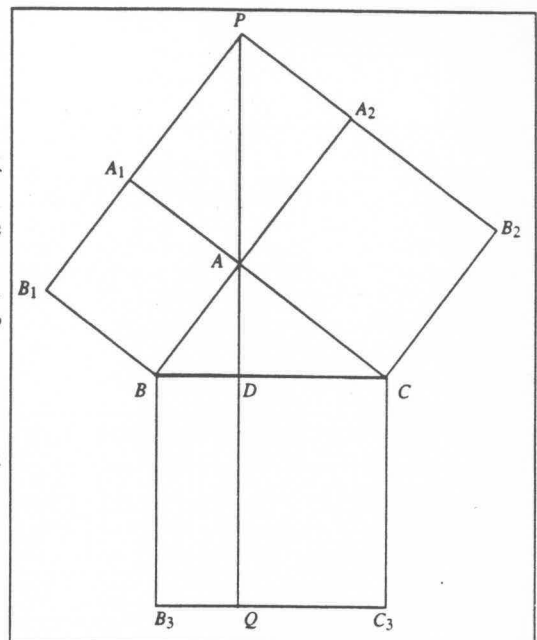
Donc

$$2(P\alpha + P\beta + P\gamma) \leq PA + PB + PC \quad (4)$$

Telle était la conjecture émise :

Le double de la somme des distances d'un point intérieur aux côtés du triangle est inférieure ou égale à la somme des distances aux sommets.

Ce résultat, comme d'autres qui ont été évoqués ici, montre la richesse, souvent renouvelée, du lien entre rapports de surfaces et rapports de segments et ce, bien au-



delà des Anciens.

C'est ainsi que, partant de la relation (3) écrite : $a.PA \geq b.P\beta + c.P\gamma$,

on peut écrire par permutation circulaire dans le triangle et addition :

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 2(a.P\alpha + b.P\beta + c.P\gamma)$$

ou

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 4(\text{Aire}(PBC) + \text{Aire}(PCA) + \text{Aire}(PAB))$$

soit :

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 4 \text{ Aire}(ABC)$$

* En plaçant P au centre du cercle circonscrit à ABC :

$PA = PB = PC = R$ (rayon du cercle circonscrit à ABC)

alors : $(a + b + c).R \geq 4 \text{ Aire}(ABC)$

avec : $\text{Aire}(ABC) = pr$ (r rayon du cercle inscrit)

$$2pR \geq 4pr \text{ ou } R \geq 2r$$

$$\text{et, avec } \text{Aire}(ABC) = \frac{a.b.c}{4R}, \quad 2pR = \frac{a.b.c}{R} \text{ ou } 2pR^2 \geq a.b.c$$

Ou encore, à partir de la relation (4) :

* En plaçant P au centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC : (r rayon du cercle inscrit)

$$2(3r) \leq IA + IB + IC$$

$$6r \leq IA + IB + IC$$

* En plaçant P au centre O du cercle circonscrit de rayon R :

$$2(O\alpha + O\beta + O\gamma) \leq OA + OB + OC = 3R$$

mais α, β, γ sont les milieux des côtés et on sait que $2O\alpha = HA$, H étant l'orthocentre du triangle ; : $HA + HB + HC \leq 3R$.

* En plaçant P à l'orthocentre H :

$$2(HA' + HB' + HC') \leq HA + HB + HC, \quad AA', BB' \text{ et } CC' \text{ étant les hauteurs de } ABC$$

Mais :

$$AA' = AH + HA', \quad BB' = BH + HB', \quad CC' = CH + HC'$$

alors :

$$2(AA' + BB' + CC') = 2(HA' + HB' + HC') + 2(HA + HB + HC) \leq 3(HA + HB + HC) \leq 9R.$$

$$AA' + BB' + CC' \leq 9/2R \text{ etc...}$$

Ainsi, sans chercher à reconstituer un exposé de géométrie, la lecture des anciens ouvrages, au-delà de la dimension historique acquise, fournit au moins sur le point étudié ici un renouvellement de l'exercice plaisant et délectable. ■

Henri PLANE

IREM de DIJON

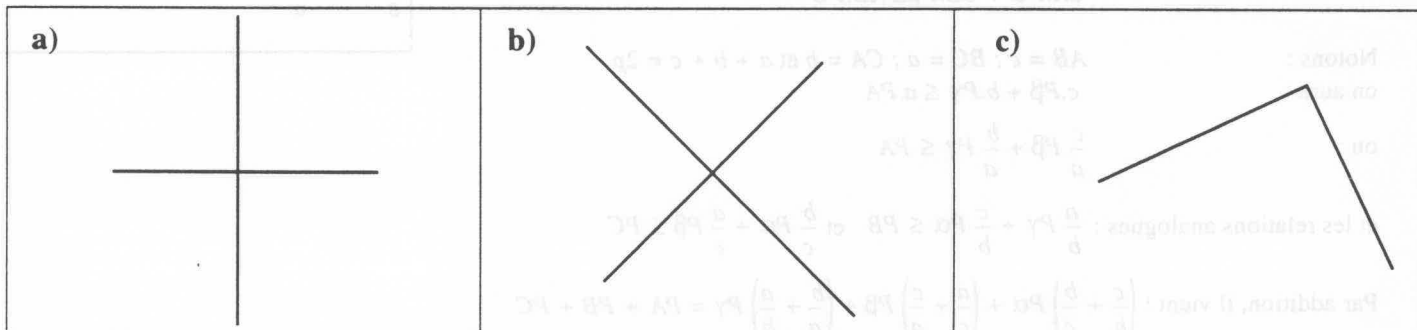
RECONNAITRE UN ANGLE DROIT

I- Importance de la notion dans les programmes.

La capacité à reconnaître un angle droit intervient dans de très nombreuses activités géométriques : identification des

hauteurs, des médiatrices d'un triangle, de certains quadrilatères, utilisation de la trigonométrie ou du théorème de Pythagore, vérification de la validité d'un tracé, etc. On peut affirmer qu'un élève ne maîtrisant que partiellement cette capacité aura des difficultés très impor-

tantes en géométrie au collège et au-delà. Les évaluations de début de sixième montrent qu'un nombre relativement important d'élèves est dans ce cas. Nous avons nous-mêmes testé cette aptitude auprès de 80 élèves de sixième. Voici un extrait des tests utilisés :



Les élèves ont tous reconnu un angle droit sur la figure a). 8 élèves n'ont pas reconnu d'angle droit sur la figure b) et 17 sur la figure c).

La capacité à reconnaître un angle droit est fondamentale en géométrie. A l'entrée en sixième, de nombreux élèves ne maîtrisent pas cette capacité.

Si l'on souhaite aller au-delà du constat des difficultés, une question essentielle se pose : «Comment reconnaît-on un angle droit?»