Agrandissements, Projections, Thalès...

Programme à revoir

Serge BETTON
IREM de LYON

Une enquête que j'avais faite, il y a quelques années, pour le groupe «liaison troisième-seconde» de l'IREM de Lyon, m'avait permis de voir que dans une même académie, on trouvait au moins sept versions distinctes de l'énoncé du théorème de Thalès en classe de troisième ou au début de seconde.

Les nouveaux programmes de collège ne permettent plus une telle variété de présentations, le langage vectoriel ou l'utilisation de mesures algébriques ne sont plus possibles. C'est un progrès pour le passage du collège au lycée. Mes élèves de troisième, comme de seconde, utilisent plus facilement ce théorème. Mais il reste des difficultés.

Je ne veux pas parler ici des difficultés dans les démonstrations ou encore de la capacité de l'élève à réinvestir un théorème que l'on vient de «voir» dans un exercice nouveau. Je me place plutôt dans l'histoire de la construction des connaissances au collège. Cette histoire me semble, à travers les programmes actuels, trop complexe. L'améliorer doit aussi aider à résoudre ces difficultés.

Voici donc une proposition d'aménagement qui, me semble-t-il, améliorerait la cohérence et la continuité des apprentissages sans alourdir le programme.

Il s'agit de privilégier le point de vue similitude en introduisant, dès la cinquième, la notion de triangles semblables, ce qui permettrait d'amener le théorème de Thalès (réduit aux configurations «triangles» actuelles) en classe de quatrième. Le théorème des milieux apparaît alors pour ce qu'il est, un simple cas particulier. Ma proposition n'utilise plus la notion de projection. Ceci, en plus d'un allégement de programme, supprime, à mon avis, un obstacle didactique dans l'acquisition des connaissances au collège.

I - Les triangles semblables en cinquième

Je voudrais montrer ici comment l'on peut, par un ajout assez naturel dans cette classe, mieux utiliser le programme de cinquième actuel pour faire évoluer ensuite ceux de quatrième et de troisième.

Partons du programme actuel de cinquième. On y trouve les capacités exigibles suivantes:

Tracer un triangle connaissant:
- Les longueurs des trois côtés;
- Les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces côtés;
- La longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.

Sans entrer dans le détail d'une activité en petits groupes avec échange de messages, voici le résumé d'un travail possible avec les élèves pour atteindre les connaissances visées.

Les élèves sont en groupes de 2 ou 3.

La consigne est la suivante :

«Dessiner un triangle sur une feuille. Vous pouvez en mesurer les trois côtés et les trois angles. Ecrire ensuite un message comportant le ***minimum*** *de renseignements possibles pour qu'un autre groupe puisse dessiner avec ce minimum de renseignements un triangle identique au votre».*

Le professeur échange les messages entre chaque groupe.

Un bilan des propositions et des résultats obtenus permet de mettre en évidence que: *«Dans tous les cas, on a besoin d'au moins une longueur. Trois angles ne sont pas suffisants pour caractériser un triangle».*

C'est à partir de là que je propose de prolonger les observations et de poser la question: *«Que peut-on dire de deux triangles qui ont des angles égaux ?»*

Ils ont bien sûr la même forme. De tels triangles s'appellent des **triangles semblables** !

Ce qui nous conduit au seul ajout nécessaire pour la classe de cinquième.

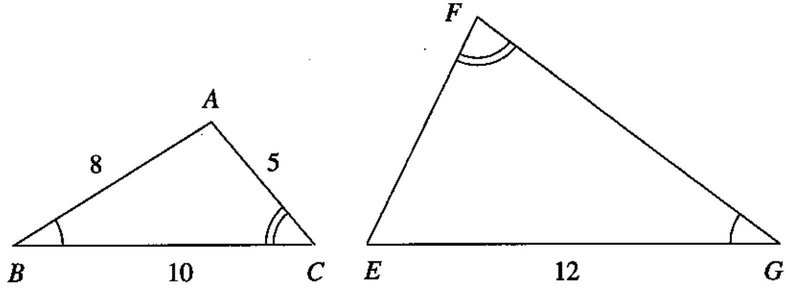
Théorème :

> **Si deux triangles ont leurs angles égaux, alors leurs côtés ont des longueurs proportionnelles.**

(L'utilisation d'un logiciel tel que Cabri-Géomètre peut aussi aider à la mise en place de cette propriété).

Ce résultat peut être réinvesti dans des activités intéressantes pour l'apprentissage de la déduction :

Exemple 1



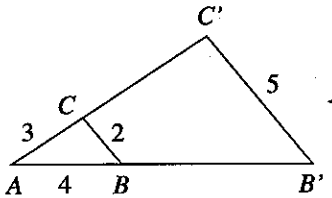
Dessin de Michel *Dessin de Pierre*

Trouve les dimensions manquantes sur le dessin de Pierre.

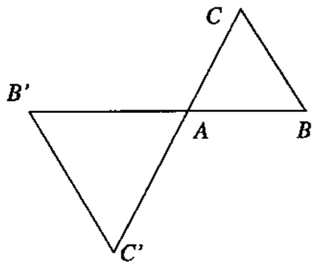
Un objectif ici est d'apprendre à reconnaître les côtés correspondants.

Ce serait aussi l'occasion de réinvestir les notions d'angles alternes-internes et d'angles correspondants qui sont actuellement au programme de cinquième.

Exemple 2



Sachant que (BC) est parallèle à (B'C'), en utilisant les longueurs indiquées sur le dessin, calcule AB' et AC'.

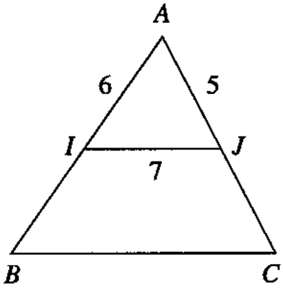


Idem avec la configuration ci-contre.

Voici un dernier exercice et une proposition de rédaction de sa solution :

Exemple 3

On sait que I est le milieu de [AB] et (IJ) est parallèle à (BC). En utilisant les longueurs indiquées sur le dessin, calcule AB, AC et BC.
Quelle remarque peux-tu faire ?



Solution possible :

On sait que I est le milieu de $[AB]$. Or, $AI = 6$, donc $AB = 12$.

On sait que $(IJ)//(BC)$. Les angles $\widehat{I}$ et $\widehat{B}$ sont donc correspondants.

TH: Deux angles correspondants sont égaux, donc $\widehat{I} = \widehat{B}$

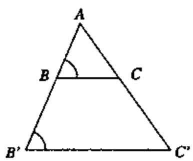
De même, on démontre que $\widehat{J} = \widehat{C}$.
Les triangle AIJ et ABC ont leurs angles égaux.
TH: Si deux triangles ont leurs angles égaux, alors leurs côtés sont proportionnels.
Comme $AB = 2AI$ alors $AC = 2AJ = 10$ et $BC = 2IJ = 14$.
Remarque : $J \in [AC]$ et $AC = 2AJ$ donc J milieu de $[AC]$.

Aucun théorème supplémentaire ne serait à introduire au niveau de cette classe.

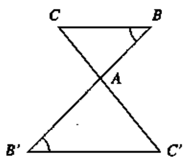
II - Le théorème de Thalès en quatrième

Avec ce seul ajout, en classe de cinquième, on pourrait alors introduire, dès la quatrième, le théorème de Thalès sous la forme suivante :

Théorème 1
A, B, B' étant alignés
A, C, C' étant alignés
Si $(BC)//(B'C')$
alors $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BC}{BC'}$.



Cas 1



Cas 2

La démonstration impose cependant d'envisager deux cas de figure :

Dans le cas 1, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{B'}$ sont correspondants, donc égaux, ainsi que $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$. Dans le cas 2, les angles sont alternes-internes. Dans les deux cas, les triangles ABC et $AB'C'$ ont leurs angles égaux et d'après le théorème admis en cinquième, leurs côtés sont proportionnels. Il suffit alors de traduire le tableau de proportionnalité :

AB	AC	BC
AB'	AC'	$B'C'$

en rapports égaux, ce qui est une activité du cadre numérique de la classe de quatrième.

L'énoncé de ce théorème 1 introduit tout de suite les rapports des trois côtés : ce n'est plus le théorème de Thalès ! Je propose d'ailleurs de réserver ce nom à la classe de seconde, pour la forme vectorielle :

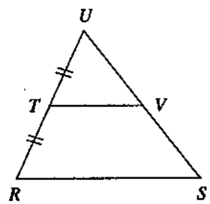
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

Ce théorème 1 est une bonne continuité entre les classes de cinquième et de quatrième. C'est le théorème de «Thalès homothétie», et comme le dit Jean-Claude DUPERRET (cf. l'article *Pour un Thalès dynamique*), l'utilisation du mot «homothétie» au collège ne gêne pas si on reste raisonnable. On peut parler, par exemple, de «situation de triangles homothétiques» afin de la distinguer de «situation de triangles semblables». Cependant, contrairement à Jean-Claude DUPERRET, ma proposition conduit logiquement à l'introduction de «Thalès projection» **après** le «Thalès homothétie» ; mais j'accepte le débat...

Le théorème 2 suivant apparaît bien alors comme un cas particulier du théorème 1. Ce qui est plus logique et moins perturbant pour les élèves que de le faire apparaître comme une application de la conservation du milieu par projection, comme le propose le programme actuel.

Théorème 2 :

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté, qui est parallèle à un deuxième côté, coupe le troisième en son milieu.



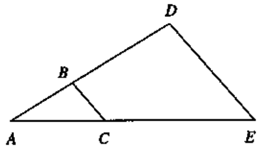
Cas particulier du théorème précédent. (On a de plus $TV = RS/2$).

La réciproque du théorème 1 pose toujours le problème de l'ordre respectif des points. On pourrait, comme on le fait actuellement, admettre cette réciproque, en la mettant en place au cours d'activités. Je propose par exemple l'énoncé suivant :

Théorème 3

A, B, D étant alignés, et *A, C, E* étant alignés dans le même ordre,

Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ alors *(BC)//(DE)*



On peut énoncer le cas particulier :

Théorème 4 : (Théorème des milieux)

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

III - Et la projection ?

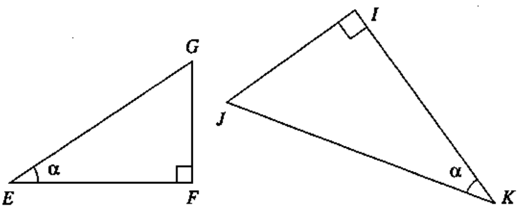
Les modifications ci-dessus tendent à éliminer des programmes la notion de projection.

Peut-on s'en passer complètement ?

Voici quelques propositions :

1) L'introduction du **cosinus**, par exemple, est une bonne occasion de réinvestir le résultat admis en cinquième, sans utiliser les projections :

Etant donné un angle α (de mesure α en degrés!), tous les triangles rectangles possédant un angle aigu de même mesure, sont semblables, ils ont leurs angles égaux.

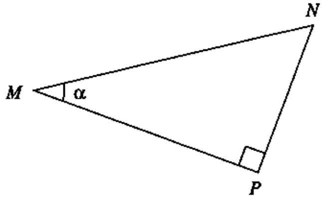


On sait, depuis la classe de cinquième, que ces triangles ont leurs côtés proportionnels, donc :

$$\frac{EF}{IK} = \frac{EG}{JK} \text{ d'où (programme de } 4^{\text{ème}}\text{) } \frac{EF}{EG} = \frac{IK}{JK}.$$

et pour tout autre triangle rectangle *MNP* ayant les mêmes angles (par exemple $\widehat{M} = \alpha$) alors :

$$\frac{EF}{EG} = \frac{MP}{MN}$$



Ce rapport constant caractérise l'angle α et se nomme cosinus α.

2) La notion de projection est utilisée actuellement pour un autre point du programme de quatrième :

«Les coordonnées du milieu d'un segment»

Voici une proposition qui permet de s'en passer :

a) Si l'on présente le problème avec le dessin suivant :

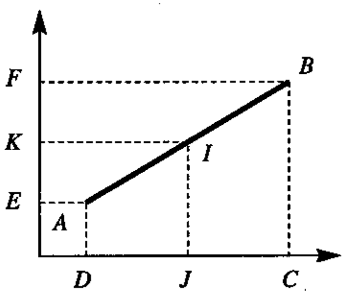
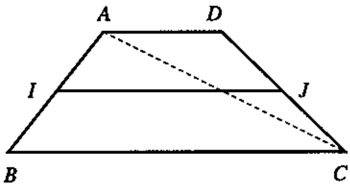


Figure 1

Il suffit de préparer cette étude par l'exercice ci-dessous :

Dans un trapèze *ABCD* de bases [*AD*] et [*BC*], démontrer que si *I* et le milieu de [*AB*] alors la parallèle à *(AD)* passant par *I* coupe [*DC*] en son milieu *J*.



La démonstration utilise deux fois le théorème 2 du II ci-dessus, dans les triangles *ABC*, puis *ACD*. Il suffit ensuite d'utiliser ce résultat dans les trapèzes *ABCD* et *ABFE* de la figure 1.

b) Mais si l'on présente le problème avec le dessin suivant :

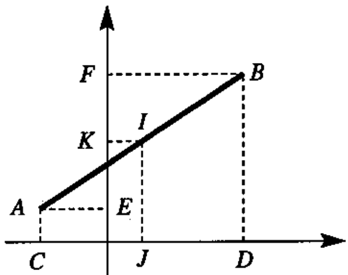
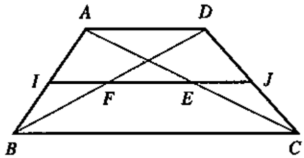


Figure 2

Les segments [*AB*] et [*EF*] sont les diagonales du trapèze *AEBF*. Donc, il faut préparer cette situation par l'exercice ci-dessous :

Montrer que dans un trapèze *ABCD* de bases [*AD*] et [*BC*], les milieux des côtés non parallèles et des diagonales sont alignés sur une parallèle aux bases.



Les hypothèses sont ici *I, F, E, J* milieux respectifs de [*AB*], [*BD*], [*CA*] et [*CD*]. Dans le triangle *ABC*, d'après le théorème des milieux, *(IF)//(AD)* et donc *(IF)//(BC)*. Dans le triangle *ABC*, on a aussi *(IE)//(BC)*. On en déduit *I, E, F* alignés. On démontre de même que *F, E, J* sont alignés. Les quatre points sont bien alignés sur une parallèle aux bases.

Revenons à la figure 2 : si I est le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[EF]$, d'après ce qui précède, la droite *(IK)* est parallèle à *(FB)* et *(AE)*, donc au premier axe du repère. L'ordonnée de I est bien l'abscisse de K, milieu de $[EF]$, sur le deuxième axe.

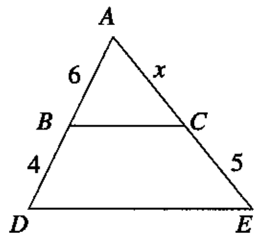
Au prix ici d'une activité un peu lourde, on peut se passer encore des projections.

3) Une dernière remarque :

L'expression : *«H est le **projeté orthogonal** de A sur (d)»* est plus rapide que *«La perpendiculaire à (d) passant par A coupe cette droite en h»* ou *«H est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A»*. Mais, est-elle plus facile pour nos élèves ?

IV - Le théorème de Thalès en troisième

Ce sera l'occasion d'introduire un peu de projection et de régler le problème des «petits bouts» dont parle Jean-Claude Duperret et qu'il faut bien que je remercie pour son excellent article qui me permet aujourd'hui de compléter le mien.



Les «petits bouts», ce sont les segments $[BD]$ et $[CE]$ de la figure ci-contre.

Pour l'instant, d'après le théorème 1, «Thalès homothétie», on peut écrire l'équation $\frac{x}{x+5} = \frac{6}{10}$ qui a les mêmes solutions que $10x = 6x + 30$, soit $4x = 30$. Si un élève me propose $\frac{x}{5} = \frac{6}{4}$, bravo, je ne vais surtout pas interdire cette équation équivalente aussi à $4x = 30$. Nous constaterons au contraire que $4x = 30$ est aussi équivalente à $\frac{x}{6} = \frac{5}{4}$ ou encore $\frac{x}{6} = \frac{x+5}{10}$. Après un complément de travail où l'on aura l'occasion de se tromper avec $\frac{x}{5} = \frac{BC}{DE}$, je pourrai énoncer le théorème de «Thalès projection» qui me permet aussi du rapport de projection k de *(AB)* sur *(AC)* : $k = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$.

La projection arrive en son temps au moment où elle est utile pour répondre à un questionnement d'élève. Je ne pense pas d'ailleurs qu'il soit nécessaire d'aller plus loin au collège. C'est en seconde, comme je le dis plus haut, et pour la forme vectorielle, que l'on pourra reparler de projection.

On trouvera d'autres pistes de travail sur les deux aspects de Thalès dans l'article de Jean-Claude DUPERRET.

Je voudrais, par contre, rappeler qu'en seconde j'utilise toujours avec profit, pour l'introduction de l'homothétie, la situation de l'IREM de Lyon décrite page 209 dans le Bulletin Inter Irem *«Maths en Seconde : Énoncés et scénarios»* (Personnellement, j'interdis l'usage de la règle graduée).

IV - Des programmes alourdis ?

Je ne pense pas alourdir ainsi le programme de quatrième puisqu'il est « soulagé » de tout ce qui concerne les projections. Il ne faudrait pas, bien sûr, transférer en quatrième tout ce qui se fait actuellement en troisième à propos du théorème de Thalès.

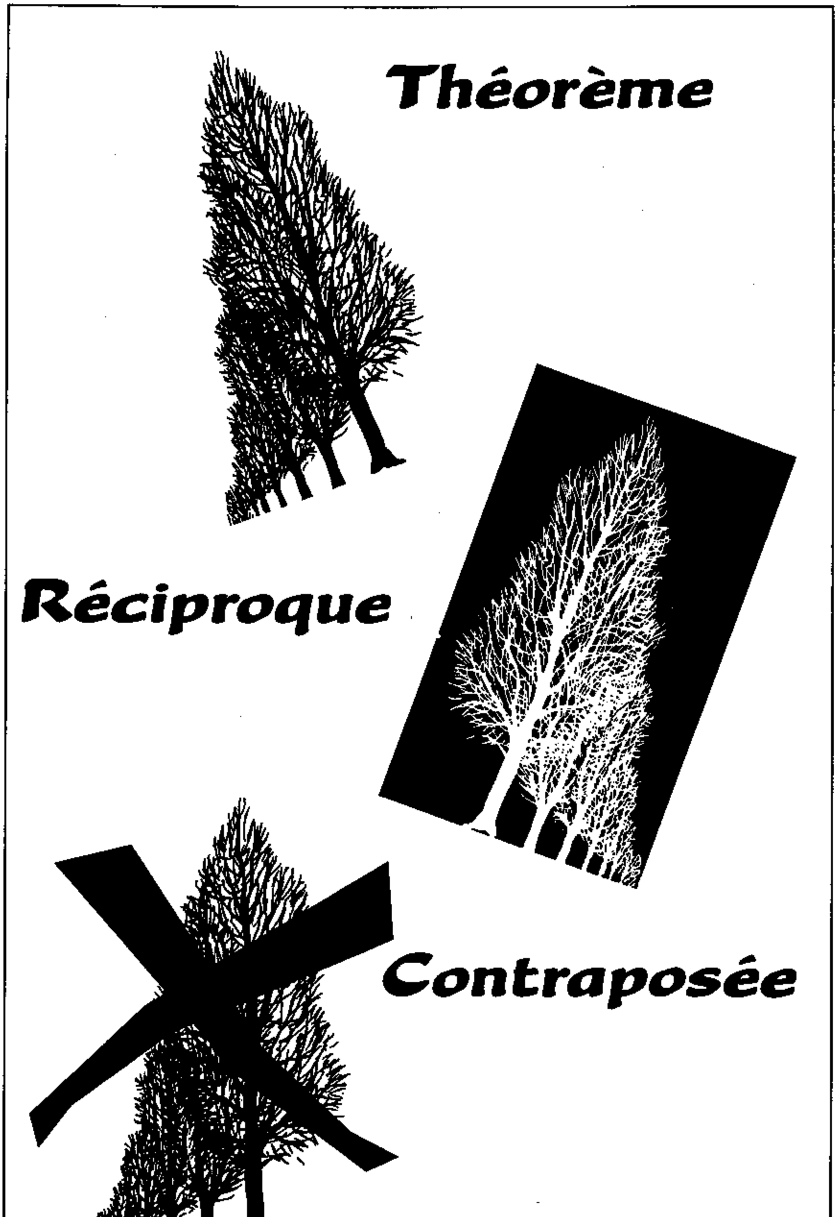
Le programme de troisième ne nécessite plus une introduction au «Théorème de Thalès», mais ce sont les problèmes posés qui permettent de le compléter dans son aspect projection. Il est aussi réinvesti dans les plans de l'espace.

Le sinus et la tangente d'un angle aigu pourraient, de la même façon, se présenter dans la continuité de ce qui a été fait en classe de quatrième pour le cosinus.

Le chapitre Agrandissement-réduction serait bien un prolongement des activités de la classe de cinquième, comme le souhaite déjà le programme actuel. Pour deux triangles semblables, l'un est un agrandissement de l'autre.

En conclusion, je voudrais rappeler que j'ai beaucoup défendu les programmes actuels du collège et que je les trouve bons. Mais, proposer des évolutions à partir des observations faites dans mes classes de collège, mais aussi de seconde, me semble nécessaire. Il existe d'autres points des programmes actuels sur lesquels on peut réfléchir.

C'est l'un des rôles des IREM que de réfléchir et de proposer ces évolutions.



Bulletin Inter-IREM Commission Premier Cycle