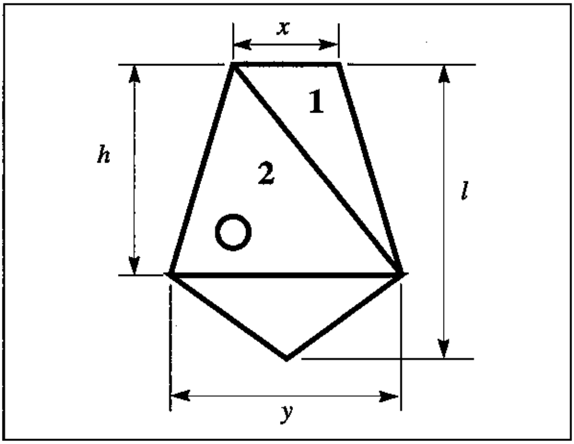
Agrandissement-Réduction :

un chemin pour Thalès

Annick et Christian MASSOT
IREM des Pays de la Loire

Introduction



L'activité «Cravate» présentée dans la brochure du suivi scientifique de troisième s'appuyait sur l'observation d'une cravate regardée successivement sur des écrans de télévision de diagonales différentes. Elle utilisait aussi, un pré requis mis en évidence les années précédentes : lorsque deux dessins ont «la même forme», l'un est un agrandissement de l'autre (échelle 1 comprise) ; les côtés correspondants sont proportionnels et les angles correspondants sont égaux.

Cette activité avait pour objectif principal de faire découvrir que si les longueurs d'un objet géométrique sont multipliées par k, alors les aires correspondantes sont multipliées par k^2 **par des lectures de graphiques seulement**.

En effet, il était demandé aux élèves de dessiner la cravate observée sur un écran donné, à partir du schéma ci-dessus et de ses dimensions sur cet écran.

Ensuite, en fonction de deux autres diagonales d'écrans données, ils devaient dessiner la cravate, calculer les aires des différents morceaux correspondants pour représenter les dimensions ou les aires sur un écran en fonction des dimensions ou des aires respectives sur un autre écran.

La consigne était :

«Observe les graphiques obtenus. Quelles remarques peux-tu faire ?»

Mais les élèves ne manquaient pas de nous rappeler que les angles étaient conservés d'un dessin à l'autre.

Pour gérer beaucoup de valeurs, ils les mettaient assez naturellement dans des tableaux et les coefficients de proportionnalité entre les longueurs ou les aires apparaissaient parfois mieux sur les tableaux que sur les graphiques.

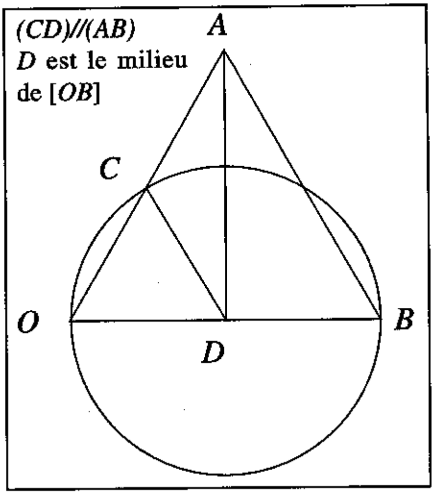
Ainsi, cette activité, assez longue en passation, est très vite apparue plus riche qu'elle ne le paraissait.

Par ailleurs, nous introduisions la propriété directe de Thalès (limitée aux triangles) par les projections. Le passage du rapport de longueur de segments d'une droite à l'égalité du rapport des longueurs correspondantes sur la droite de projection était amené de façon artificielle auprès des élèves, cela ne leur permettait pas de voir les triangles dans leur globalité et la démonstration de la conséquence était difficile.

Ces constats ont entraîné une réflexion à la concertation qui se fait depuis plusieurs années avec nos collègues de mathématiques de notre collège.

En même temps, une recherche-action menée, depuis plusieurs années dans notre collège avec les autres disciplines, nous avait amenés à travailler la notion d'agrandisement-réduction dès la sixième. D'une part, pour ne pas faire de rupture sur ce point avec l'école primaire et, d'autre part, pour préparer la notion d'échelle qui, bien que particulièrement travaillée en classe de cinquième, posait problème.

En continuité, par exemple, des élèves de quatrième, lors de la recherche du problème s'appuyant sur la figure ci-contre, ont dit que le triangle *OAB* est un agrandissement du triangle *OCD*.



Ils en déduisent que les côtés correspondants sont proportionnels et que *C* est le milieu de [*OA*].

Cela ne faisait pas partie des propriétés institutionnalisées ... nous avons été interpellé!

Les élèves ont donc à leur disposition un nouvel outil qu'ils sont prêts à vouloir manipuler: la notion d'agrandissement-réduction et il est difficile de leur dire : *«On ne peut pas utiliser ce que vous connaissez!»*

Tout était mûr pour une plus grande utilisation de l'activité «Cravate». Non seulement, à la suite de plusieurs expérimentations et de remarques de collègues, elle a été améliorée dans ses consignes et dans son déroulement, mais, en plus de ses objectifs sur agrandissement-réduction, elle nous permet maintenant de préparer:

L'introduction de la propriété directe de Thalès (limitée aux triangles), du sinus et de la tangente.

En effet, comme les élèves remarquent que, lorsqu'il y a agrandissement ou réduction, les angles correspondants sont conservés, la question suivante leur est posée:

> **«Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»**

Les élèves ne trouvant pas de contre-exemple pour les triangles, concluent que la réponse est oui pour ceux-ci et on peut en déduire que les côtés correspondants sont proportionnels (premier cas de similitude permettant de prouver que des triangles «semblables», ont la même forme).

L'activité «La cravate du présentateur» nous paraît ainsi s'inclure davantage dans l'esprit du programme de troisième et mieux mériter le temps nécessaire à sa passation.

LA CRAVATE DU PRÉSENTATEUR

I - Objectifs de l'activité

1) Objectifs principaux :

- Agrandissement, réduction et conséquences sur les angles, les longueurs et les aires (en prenant appui sur les dessins, les tableaux et les graphiques d'une part et le travail en groupes d'autre part).
- Préparation de l'introduction de la propriété directe de Thalès, du sinus et de la tangente.

2) Objectifs secondaires :

- Calcul d'aires, gestion de données.
- Illustration de «en fonction de».
- Fabrication de graphiques.
- Réinvestissement de la fonction linéaire.
- Lecture de graphiques.
- Lecture de coefficients de proportionnalité à partir de tableaux ou de graphiques.
- Calcul littéral.
- Réinvestissement de la notion d'échelle.
- Notion de réciproque.

II - Des choix sur les formes de travail et le déroulement

Par rapport à la brochure du suivi scientifique troisième, le déroulement a été modifié pour être plus efficace :

- Le travail est davantage partagé entre le travail en classe et le travail à la maison (un dessin de la cravate agrandie ou réduite est fait et vérifié en classe, l'autre est fait à la maison, par exemple).
- Les remarques, à la fin de l'activité, ne sont plus à faire seulement à partir des graphiques, mais aussi à partir des tableaux de valeurs et des dessins. Ce qui permet de travailler la notion d'agrandissement à partir de plusieurs entrées ; les élèves font des allers et retours entre les dessins, les tableaux et les graphiques pour vérifier, pour confirmer ou pour infirmer leurs conjectures (même forme sur les dessins, points alignés avec l'origine pour les graphiques, obtention exacte des coefficients de proportionnalité à partir des tableaux, lecture rapide de valeurs à partir de graphiques,...).
- Ces remarques sont à faire en groupe sur transparents pour préparer le débat, qui corrigera les erreurs faites, mettra en évidence les visions que

chacun peut préférer...après que les transparents aient été triés et présentés en fonction d'une progression choisie par l'enseignant.

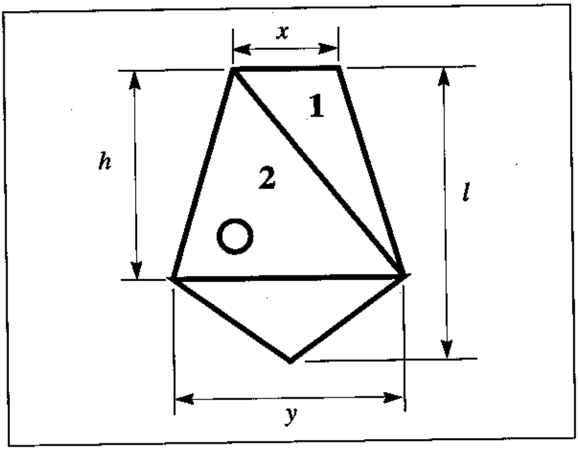
De plus, dans sa première mouture, une première institutionnalisation était plus ou moins faite pendant le bilan de l'activité. Elle est maintenant un temps à part et l'application aux aires de la «propriété k ; k^2» qui était donnée à faire à la maison, est maintenant travaillée en classe pour favoriser l'appropriation.

Ces différentes étapes sont absolument nécessaires aux élèves.

Le prolongement de cette activité pose la conjecture suivante : *« Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ? »* Suite à un travail individuel et à une mise en commun avec leur voisinage, les élèves prennent conscience que l'on peut dire oui pour les triangles. Ce résultat est institutionnalisé et servira à la démonstration de la propriété directe de Thalès : il permettra de déduire que les côtés correspondants de triangles, en configuration de Thalès, sont proportionnels.

III - L'activité : les consignes données aux élèves et le déroulement prévu

Travail maison



Un gros plan est fait sur la cravate d'un présentateur de télévision. Sur l'écran, on ne voit qu'elle, comme sur le schéma ci-contre !

Cette cravate est formée d'un trapèze isocèle et d'un triangle isocèle.

Sur la cravate, il y a un disque (placé où l'on veut dans le triangle **2**) et une rayure qui partage le trapèze isocèle en deux triangles **1** et **2**.

Sur un écran dont la diagonale mesure 50 cm, on a : l = 15 cm ; d = 1 cm (d est le diamètre du disque) ; h = 12,5 cm ; x = 1 cm ; y = 3 cm.

1) Dessine la cravate représentée ci-dessus et seulement la cravate, sur une feuille de papier à dessin.

Tu prendras la feuille dans le sens de la longueur, tu la partageras en trois parties égales, comme sur le schéma ci-contre (pour la suite de l'activité).

maison 1	 2 classe	maison 3

Tu feras le dessin demandé dans la partie gauche.

2) Calcule l'aire du disque, des triangles 1 et 2, du trapèze, du triangle isocèle et l'aire totale de la cravate.

Travail en classe et/ou à la maison

Première partie

Consigne

A) Travail individuel puis par groupes de deux :

Dessine la cravate sur la feuille de papier à l'emplacement 2, quand la diagonale mesure :

- 60 cm (élève 1)
- 30 cm (élève 2).

(tu feras le dessin non fait en classe, à la maison et à l'emplacement 3).

Auprès du dessin effectué, tu noteras les dimensions obtenues et tu calculeras les mêmes aires que précédemment. Après avoir vérifié tes résultats avec tes voisins, puis auprès du professeur, note les résultats obtenus par ton voisin après qu'il les aient vérifiés puis passe à la question suivante, même si les élèves de ton futur groupe n'ont pas fini.

B) Seul puis par groupes de trois :

1) Représente graphiquement sur du papier millimétré :

a) les dimensions obtenues sur l'écran de :
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 30 cm (élève 1).
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 2).
- 30 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 3).

b) les aires obtenues sur l'écran de :
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 30 cm (élève 1).
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 2).
- 30 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 3).

(1 cm représente 2 cm^2 sur chacun des axes).

2) Observe les dessins, les tableaux et les graphiques obtenus dans le groupe.

Quelles remarques, quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Notez-les sur transparent pour présenter à la classe.

<u>Déroulement du A</u>

Pour assurer le bon déroulement, le travail de l'enseignant repose sur trois axes :

1) Gestion de la vérification :

- Vérifier les résultats, les arrondis du travail maison.
- Vérifier les dessins du travail maison après le démarrage de l'activité.

2) Gestion de la correction :

- Prévoir sur transparents les dessins et les graphiques pour permettre de voir rapidement les erreurs et éventuellement aux élèves de se corriger, d'analyser leurs erreurs.

3) Gestion du protocole de l'activité :

- Ne donner que la première partie de l'activité (pour ne pas dévoiler l'objectif principal) et la faire lire.
- Présenter le déroulement puis demander ce qu'il y aura à faire dans la partie A (réponse attendue des élèves : beaucoup de calculs répétitifs à gérer par des tableaux).

Sur chacun des dessins, on décide de mettre les dimensions.

Tableau des dimensions
(écrites dans l'ordre des données, pour faciliter les lectures)

écran de	l	d	h	x	y

Tableau des aires
(écrites dans l'ordre des données).

écran de	Aires					
	Disque	Triangle 1	Triangle 2	Trapèze	Tr.Isocèle	Cravate

- *Chaque élève ne fait qu'un dessin et qu'une série de calculs, l'autre dessin se fait à la maison.*

- Les voisins vérifient entre eux leurs résultats et leurs dessins, puis il est fait appel au professeur, s'il y a problème et pour la vérification finale.
- Chacun remplira les tableaux des dimensions et des aires en entier.
- *Ne pas faire de commentaires sur les nombres, sur les dessins pour que, au moment des remarques, calculs, dessins et graphiques puissent être utilisés en aller et retour* (changements de cadre).
- Les élèves qui ont terminé peuvent passer au B.

Aides prévues si nécessaire :

- Sur transparent, le dessin d'un écran de 50 cm de diagonale (diagonale tracée).
- Puis un écran de 30 cm de diagonale pour faire penser à la proportionnalité.
- Puis, s'il y a des problèmes pour les calculs, montrer un écran de 10 cm de diagonale.

Déroulement du B

1) Protocole de travail

Le travail de chacun est différent mais semblable (seules les valeurs changent), ce qui incite au débat dans le groupe et permettra d'avoir un certain nombre de valeurs pour pouvoir conjecturer.

2) Choix des variables

- Les unités à choisir sur les axes ne sont pas précisées pour la première série de graphiques (1 cm pour 1 cm pour chacun des axes), quant à la deuxième série, nous avons fait le choix de donner les unités pour que chaque groupe puisse avancer à son rythme et faciliter la vérification des graphiques (le choix des graduations n'est pas un objectif principal).
- Les diagonales choisies permettent d'avoir d'une part un agrandissement de coefficient 2, ce qui donne un carré facile à repérer (mais cette valeur peut entraîner sur une fausse piste, s'il n'y a pas vérification avec les autres valeurs: 4 est le carré de 2 mais c'est aussi le double de 2) ; puis d'autre part, un agrandissement quelconque et une réduction.

3) Gestion du temps

- S'il y a problème(s), on essaie de le(s) résoudre dans le groupe, sinon on fait appel au professeur.
- Puis les remarques (par rapport au sujet traité) sont élaborées en réfléchissant d'abord seul(e), puis une mise en commun est faite dans le groupe (prévoir un transparent par groupe pour les remarques).

Aide prévue si nécessaire (par élève, par groupe ou en classe entière) :

- Sens de «en fonction de»

- Position dans laquelle on prend le papier millimétré.

Présentation en classe entière des transparents

Chaque groupe présente à la classe son transparent, lentement pour que chacun puisse écouter et prendre des notes sur ce qui lui paraît intéressant (erreurs, bonnes idées,...).

Exploitation

Pendant la phase de mise en commun, penser à deux points :

1 - Un «plus» dans la lecture des graphiques :

- penser qu'on peut utiliser le 10 en abscisse pour trouver le coefficient de proportionnalité : la valeur obtenue peut être plus juste qu'à partir d'une abscisse de 1.

2 - Les résultats essentiels à faire ressortir :

- Les coefficients 2 et 4 obtenus pour les graphiques 60 en fonction de 30 peuvent aider à penser k ; k^2.
- Faire ressortir le(s) tableau(x) des coefficients de proportionnalité des dimensions et des aires pour aider les élèves qui n'auraient pas vu le k ; k^2.
- Faire conjecturer : dans l'agrandissement ou la réduction, d'un objet géométrique, quand les dimensions sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2.
- Penser pour la suite à la conservation des angles.

Deuxième partie

<u>Consigne</u>

1 - Prouve le résultat conjecturé pour :

- un carré de côté a
- un rectangle de longueur L et de largeur l
- un disque de rayon r
- un triangle de base b et de hauteur h
- ...

quand ils sont transformés par un agrandissement ou une réduction de coefficient k.

2 - Le résultat obtenu pour des figures particulières étant admis pour toute figure, en déduire la longueur et l'aire totale de la cravate quand la diagonale de l'écran est 45 cm, puis 6,4 cm.

3 - Un dessin technique est à l'échelle 20/1

a) Quelle est l'aire réelle d'une pièce représentée sur le dessin par un rectangle de 3600 mm^2 ?

b) Quelle est l'aire du disque représentant sur le plan une pièce circulaire d'aire réelle 3,5 mm^2 ?

Déroulement

Travail individuel, puis avec le voisin, suivi d'une mise au point en commun.

Question 1 : Généralisation du résultat conjecturé k ; k^2. aux figures de base.

En faisant démontrer le résultat conjecturé pour un carré de côté a, un rectangle de dimensions L et l, un disque de rayon r ... avec un coefficient k (calcul littéral), la généralisation est admise.

Question 2 : Application du résultat à des cravates vues sur d'autres écrans

L'objectif est de faire déduire l'aire et la hauteur de la cravate pour des diagonales données. Cette partie, absolument indispensable, est à faire en classe car les élèves admettent assez facilement le résultat, mais passent difficilement à l'utilisation directe du k^2 pour le calcul d'une aire.

Question 3 : Application du résultat à un problème quelconque : décontextualisation de l'activité.

Nous avons décidé de mettre le mot«échelle» plutôt que le mot coefficient d'agrandissement pour que les élèves puissent faire le lien entre agrandissement-réduction et échelle. Parmi les échelles, nous avons choisi celle d'un agrandissement (les agrandissements sont moins familiers aux élèves que les réductions).

Troisième partie

Consigne

«Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»

Déroulement

- La consigne ci-dessus est donnée à la classe (réflexion individuelle, en petits groupes puis débat).
- On suppose que les élèves ont retrouvé que lorsqu'un dessin A est un agrandissement d'un dessin B, alors les longueurs correspondantes sont proportionnelles et les angles correspondants sont égaux.

IV - Ce qui s'est passé lors de la dernière passation

Première partie

- La fabrication des dessins et des graphiques ne pose problème qu'à quelques élèves.

- Certains élèves ont appliqué le coefficient des longueurs aux aires, mais après discussion dans les groupes, cette solution est évacuée parce qu'elle ne semble pas «marcher» puisque le résultat n'est pas le même en calculant les aires cherchées à partir des dimensions agrandies ou réduites : procédure qui fait l'accord dans les groupes. Le travail de groupe a permis de soulever le problème (d'où la nécessité de faire cette partie en classe). Mais le pourquoi reste à voir.

Quelques remarques provenant d'une classe de 24 élèves. Après l'analyse des transparents d'élèves (voir l'annexe), sur huit groupes :

- Quatre groupes signalent qu'il y a conservation des angles.
- Six groupes parlent de l'alignement de points avec l'origine et l'associent à la proportionnalité entre les longueurs et les a ires considérées.
- Cinq groupes utilisent des tableaux pour leurs explications.
- Quatre groupes trouvent les coefficients exacts pour les longueurs et deux groupes pour les aires.
- Un groupe conclut que le coefficient des aires est le double de celui des longueurs (on passe de deux à quatre).
- Un groupe constate que le graphique des dimensions est plus «abrupte» que celui des aires en faisant remarquer que cela dépend peut-être des graduations.
- Un groupe remarque le k ; k^2.

Un débat s'est alors instauré entre les élèves, à partir de leurs transparents (voir l'annexe) présentés dans un ordre choisi par l'enseignant en fonction des erreurs observées.

Dans le débat, le rôle de l'enseignant a surtout été celui d'arbitre.

Les trois dernières remarques surtout ont été discutées.

La première d'entre elles a été vite contredite. Quant à la suivante, par superposition des transparents, on s'aperçoit que ceci n'est vrai que pour l'écran de 30 en fonction de 50.

Et il a été assez difficile de faire trouver que lorsque k est inférieur à 1, k^2 est inférieur à k.

La classe est arrivée aux conjectures suivantes :

- Dans un agrandissement-réduction, les angles sont conservés, les longueurs et les aires correspondantes sont proportionnelles entre elles. Quand les longueurs sont multipliées par k, les aires correspondantes le sont par k^2.
- Quand k est supérieur à 1, il y a agrandissement et k^2 est supérieur à k.
- Quand k est inférieur à 1, il y a réduction et k^2 est inférieur à k.

Sur le plan méthodologique, **Prudence! Il faut regarder plusieurs cas avant de généraliser une conjecture.**

Deuxième partie

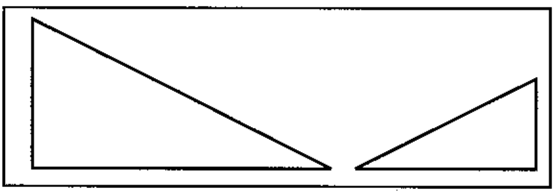
- La démonstration du k ; k^2 pour le carré a été faite en classe et le professeur, voyant qu'elle ne posait pas trop de difficultés, a décidé que la recherche des autres cas (rectangle, triangle, disque,...) se ferait à la maison. La généralisation a ensuite été admise en classe.
- Les application du k ; k^2 posent toujours problème, comme prévu.
- La définition d'une échelle a été rappelée.
- Pour calculer l'aire d'un disque ayant l'aire agrandie et l'échelle, les élèves sont bloqués: «Il leur manque» le rayon. Ils pensent très difficilement à l'utilisation du k ; k^2. La propriété obtenue n'est pas encore opérationnelle. Est-ce dû à la prégnance des formules pour calculer une aire ?

Quant à la question: «Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?», elle a provoqué un débat intéressant, acharné dans les groupes comme en classe entière.

Par exemple, un élève a dit: «En maths, ce n'est pas comme en français. Pour qu'une propriété soit vraie, il faut qu'elle le soit tout le temps».
Le professeur: «Pourquoi dites-vous cela ?»
Des élèves: «On n'est pas d'accord: elle dit que pour les triangles c'est vrai, je sui d'accord avec elle, mais comme pour des rectangles ça peut être faux (dessin à l'appui), donc c'est faux».

Ne trouvant pas de contre exemple pour les triangles, la classe admet que la phrase est vraie pour les triangles, mais qu'en général, A n'est pas un agrandissement ou une réduction de B. La classe est perplexe parce que la démonstration n'est pas faite pour les triangles et peut-être qu'il n'a pas été trouvé de contre-exemple, mais l'enseignant garantit!

Une remarque : nous admettons que deux triangles ayant leurs angles égaux sont tels que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre, même quand il y a eu «retournement», comme dans les triangles ci-dessous...!



Résumé donné à l'issue de l'activité.

AGRANDISSEMENT-RÉDUCTION

I - Reproduction d'un dessin à l'échelle k :

1) **$k > 1$: C'est un agrandissement.**

Exemple : $k = 3$, toutes les longueurs sont multipliées par 3.

2) **$k < 1$: c'est une réduction**

Exemple : $k = \frac{2}{5}$, toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{5}$.

3) **Remarques :**

a) Dans le langage courant, «réduire une figure deux fois» signifie qu'on divise les longueurs par 2 :

$$k = \frac{1}{2} = 0,5$$

b) Dans un agrandissement ou dans une réduction, **les angles sont conservés.**

c) **Deux triangles qui ont leurs angles égaux sont un agrandissement ou une réduction l'un de l'autre.**

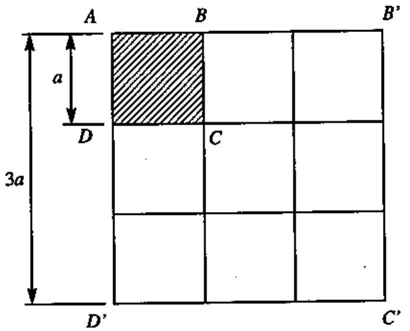
Cette propriété n'est pas forcément vraie pour d'autres figures.

II - Conséquences

1) Sur les aires :

Quand les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2.

Exemple :



	côté	aire
petit carré $ABCD$	a	a^2
gd carré $AB'C'D'$	$3a$	$3a \times 3a$ $= 9a^2$

2) Sur les volumes :

Fiche complétée après l'étude des volumes.

La propriété directe de Thalès

Consigne

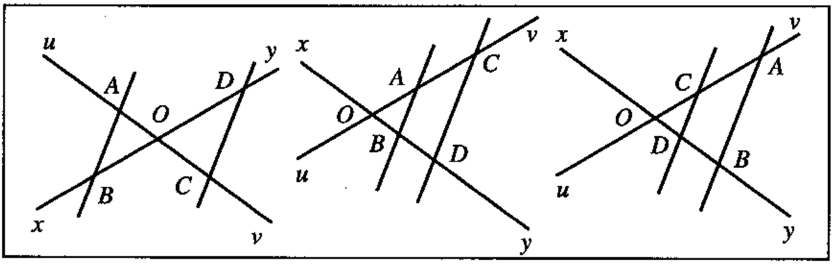
Soit deux droites *(uv)* et *(xy)* qui se coupent en O.
Soit A un point de *(uv)* et B un point de *(xy)*.
Soit *(CD)* une droite parallèle à *(AB)* et telle que C est un point de *(uv)* et D un point de *(xy)*.

- Dessine tous les cas de figures possibles. Compare avec ton voisin.
- Que peux-tu dire des triangles OAB et OCD ?
- Qu'en déduis-tu ?

Déroulement

Après un temps individuel de réflexion, les élèves proposent les trois figures ci-dessous (plus celle du cas particulier où *(CD)* passe par O qui est évacué. Nous ne l'avons pas exclu dans la consigne pour ne pas induire les réponses des élèves).

Se pose alors le problème de ce qu'on entend par « dessine **tous** les cas de figures possibles » qui est confondu avec « **toutes les figures** possibles ».



A la suite de la mise au point faite en classe entière, on note :
Les triangles AOB et COD sont tels que :

- $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (angles opposés par le sommet ou confondus),
- $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$ (angles correspondants ou alternes-internes formés par les parallèles *(AB)* et *(CD)* et la sécante *(AC)*).
- et $\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$ (angles correspondants ou alternes-internes, formés par les parallèles *(AB)* et *(CD)* et la sécante *(BD)*).

Les triangles AOB et COD ont leurs angles égaux, l'un est donc un agrandissement de l'autre, leurs côtés correspondants sont proportionnels, et $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

Il est alors annoncé que ce qui vient d'être démontré est la propriété de Thalès, propriété rédigée ainsi :

Lorsque deux triangles *OAB* et *OCD* sont tels que :

$C \in (OA)$,

$D \in (OB)$,

et $(AB)//(CD)$

alors $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$

Remarques :

La propriété de Thalès semble alors apparaître comme une conséquence naturelle de ce qui précède. En particulier, l'erreur classique sur des «petits bouts» ($\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AC}{BD}$) est plus rare.

Par ailleurs, le sinus et la tangente sont introduits comme une application de la propriété de Thalès ou de la propriété sur les côtés de deux triangles rectangles ayant deux angles égaux (après avoir mis en évidence les rapports équivalents obtenus à partir de deux rapports égaux).

Conclusion

Dans les commentaires des programmes, on peut lire sur agrandissement-réduction :

«Dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété : si les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 ; les angles sont conservés».

Au delà de ces compétences exigibles, et pour introduire la propriété de Thalès, il nous a paru important de poser le problème : «Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»

Ceci permet, dans un premier temps, de mettre en évidence auprès des élèves du collège une réciproque fausse.

Dans un deuxième temps, elle met en avant la spécificité des triangles, où la restriction de la propriété proposée donne une réciproque vraie, et conduit à l'énoncé :

«Quand deux triangles ont leurs angles égaux, l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre».

Une telle propriété admise en cinquième ou au début de la quatrième permettrait d'aborder :
- «La droite des milieux».
- Le conservation du rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle dans un agrandissement-réduction.
- L'étude plus particulière des rapports des côtés d'un triangle rectangle : cosinus, sinus et tangente.

Maintenant que nous avons un peu de recul sur les programmes, nous présentons la propriété de Thalès appliquée au triangle comme un cas particulier des différents cas d'agrandissements ou de réductions rencontrés au collège.

Ce choix fait, à la suite des réactions de nos élèves de troisième, s'inscrit dans une continuité qui nous paraît assez naturelle avec ce qui se fait dans les classes précédentes car la proportionnalité, dominante forte du collège, finit par être assez familière à nos élèves.

ANNEXE

Transparents produits par les élèves et présentés dans l'ordre suivant

$\boxed{\text{Tranparent n°1}}$

* - Tous les graphiques sont proportionnels et passent tous par l'origine O.

- la ligne du graphique des aires se rapproche plus de l'ordonnée que de l'abscisse par rapport ~~aux~~ à la ligne du graphique des mêmes dimensions pour un même écran.

- Comme les longueurs sont proportionnelles sur le graphique, elles le sont donc sur le dessin.

* - le coefficient des graphiques pour les dimensions est :

$$\frac{\text{abscisse}}{\text{ordonnée}}$$

- le coefficient des graphiques pour les aires est :

$$\frac{\text{aire totale en abscisse}}{\text{aire totale en ordonnée.}}$$

Transparent n°2

Nous conjecturons, qu'il y a proportionnalité entre les aires et les longueurs puisque sur les graphiques les points sont alignés avec l'origine. Donc il y a agrandissement ou réduction entre les cravates

écran	50 cm	60 cm	30 cm
I	15 cm	18 cm	9 cm
D	1 cm	1,2 cm	0,6 cm
H	12,5 cm	15 cm	4,5 cm
X	1 cm	1,2 cm	0,6 cm
Y	3 cm	3,6 cm	1,8 cm
Aire disque	0,78 cm²	1,1 cm²	0,28 cm²
Aire triangle 1	6,25 cm²	9 cm²	2,25 cm²
Aire triangle 2	18,75 cm²	24 cm²	6,75 cm²
Aire trapèze	25 cm²	36 cm²	9 cm²
Aire triangle isocèle	3,75 cm²	5,4 cm²	1,35 cm²
Aire totale	28,75 cm²	41,6 cm²	10,35 cm²

lorsqu'il y a agrandissement ou réduction il y a conservation de la mesure des angles

Transparent n°3

Dimensions.

D'après les graphiques, tous les points du graphique, sont sur une même droite et passent par l'origine donc, les dimensions sont proportionnelles entre elles.

D'après le tableau:

G \ L	I	D	H	x	y
50	15	1	12,5	1	3
30	9	0,6	7,5	0,6	1,8
60	18	1,2	15	1,2	3,6

×0,6 ×1,2 ×2

D'une ligne à l'autre, il y a un coefficient de pro-portionnalité.

D'après les dessins, que ce soit un agrandissement ou une réduction de l'originale, les angles sont conservés.

Aires.

Contrairement aux dimensions les aires ne sont pas proportionnelles entre elles par rapport au tableau, mais par rapport aux graphiques elles sont proportionnelles.

Transparent n°4

.On remarque que : la droite formée par les points
- Sur les graphiques, les points sont alignés et passe par l'origine donc il y a proportionnalité entre les dimensions et également entre les aires.
- Comme il y a proportionnalité, il y a donc agrandissemen et réduction donc la mesure des angles est conservée.
- Le coefficient de proportionnalité entre les aires et les dimensions est différent. Celui des aires (4) est le double de celui des dimensions (2).

Transparent n°5

Tous les points sont alignés et la droite passe par l'origine c'est un point commun de tous les graphiques donc il y a proportionnalité.

Chacune des trois représentations graphiques à un coefficient de proportionnalité différent.

élève 1:
coefficient ×2
élève 2:
coefficient ×1,2
élève 3:
coefficient ×0,6

Pour chaque élève, les coefficients de proportionnalités sont les mêmes pour les dimensions et les aires.

Le graphique des dimensions est plus abrute que celui des aires, mais cela dépend peut-être de la graduation.

Transparent n°6

Nous remarquons que dans tous les graphiques, les points sont aligné. Ce qui veut dire qu'il y a proportionnalité entre les dimension des absisses et les dimension des ordonnés. Il y a aussi proportionnalité entre les aires. En multipliant les dimensions de la première carate par un coefficient de proportionnalité, on trouve les dimension de la 2ème carate et en multipliant les dimensions de la 2ème carate par un 2ème coefficient de proportionnalité on trouve les dimensions de la 3ème carate.

On trouve le coefficient de proportionnalité en divisant la diagonale de l'écran de la 2ème carate par la diagonale du 1er écran

ex : $\frac{60}{50} = 1{,}2$

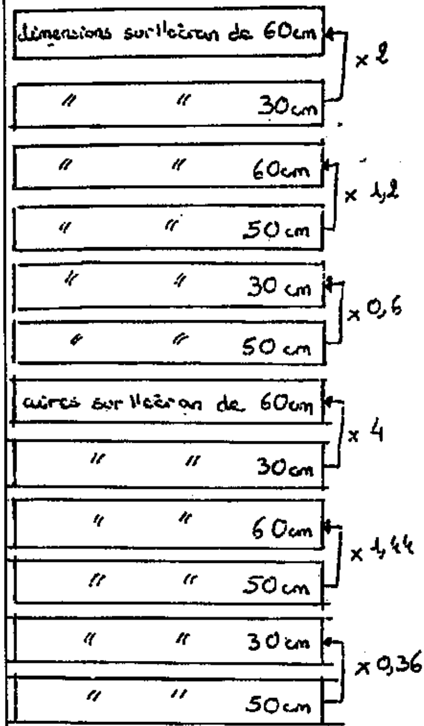
1,2 est le coefficient de proportionnalité entre la 1ère et la 2ème carate.

ex : $\frac{30}{60} = 0{,}5$

0,5 est le coefficient de proportionnalité entre la 2ème et la 3ème carate.

Comme il y a proportionnalité entre les carats, donc les angles sont égaux.

Transparent n°7



Le coefficient de proportionalité entre les dimensions sur l'écran de 60cm et les dimensions sur l'écran de 30cm se vérifie entre les coefficients de proportionalité de 60 et 50 et de 30 et 50 : $\frac{1,2}{0,6} = 2$

Même chose pour les aires : $\frac{1,44}{0,36} = 4$.

Les coefficients de proportionalité des aires sont les carrés des coefficients de proportionalité des dimensions

$4 = 2^2$

$1,44 = 1,2^2$

$0,36 = 0,6^2$

Transparent n°8

Nous remarquons que les dimensions et les aires sont respectivement proportionnelles entre elles car les points sont alignés avec l'origine et il y a un quotient de proportionnalité.

	60 en fonction de 30	60 en fonction de 50	30 en fonction de 50
Dimensions	: 2	: 1,2	: 0,6
Aires	: 4	: 1,44	: 0,36

* les dimensions de 60 divisées par 2 donnent les dimension de 30.
* les dimensions de 60 divisées par 1,2 donnent les dimension de 50.
* les dimensions de 30 divisées par 0,6 donnent les dimension de 50.
* les aires de 60 divisées par 4 donnent les aires de 30.
* les aires de 60 divisées par 1,44 donnent les aires de 50.
* les aires de 30 divisées par 0,36 donnent les aires de 50.