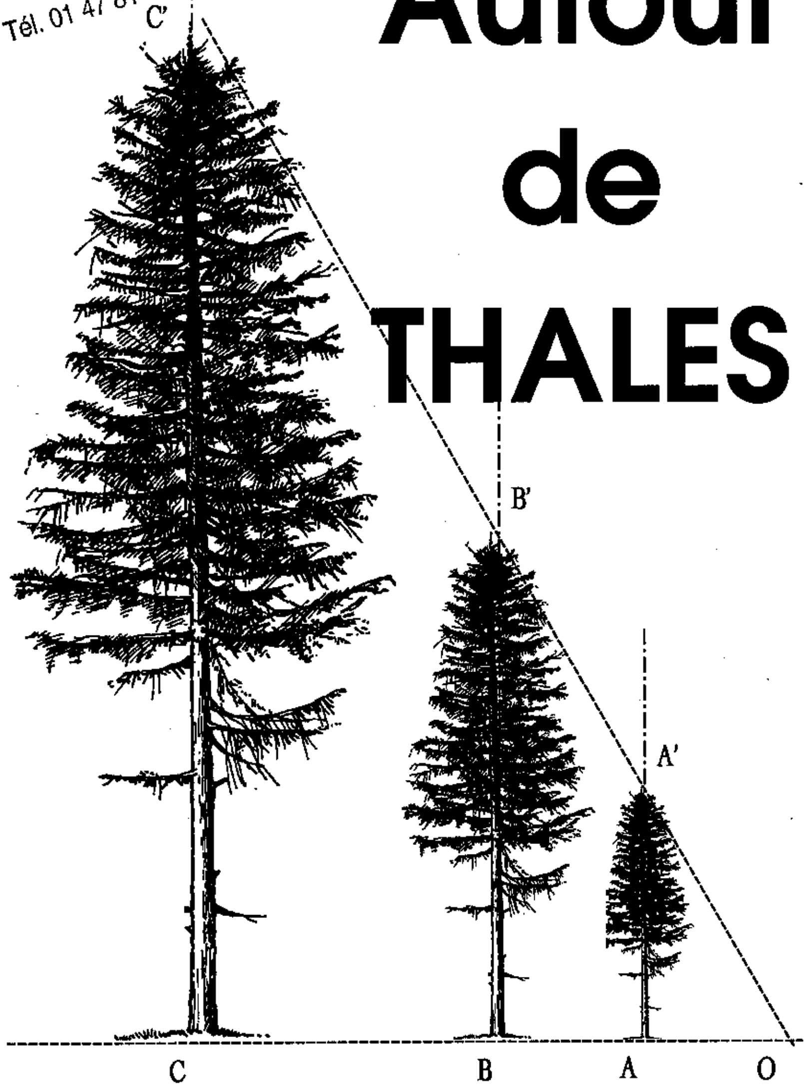
Autour de THALES



Commission Inter-IREM Premier Cycle

PRÉFACE

La Commission Inter-IREM Premier Cycle, comme son nom l'indique, a pour objectif essentiel une réflexion sur l'enseignement des mathématiques au collège et une communication de cette réflexion au plus grand nombre.

C'est dans ce cadre que Robert DELORD, alors responsable de la commission, lança l'idée d'une brochure sur des thèmes en géométrie.

«Thalès» ne devait être qu'une rubrique, mais les échanges vifs et passionnés, lors des réunions, ont amené une production féconde d'articles. La rubrique devint la brochure *«Autour de THALES»*.

L'introduction vous en donnera les idées fortes. J'espère que sa lecture vous obligera certainement à débattre avec vos collègues sur ce thème et plus généralement sur l'enseignement des mathématiques au collège.

La brochure *«Autour de THALES»* a été réalisée grâce à la ténacité de Robert DELORD, au soutien de l'ADIREM, aux auteurs des articles qui n'ont pas mesuré leur temps et, comme pour notre précédent bulletin *«Des chiffres et des lettres au collège»*, au talent de Jean BARBIER, notre fidèle maquettiste.

A tous, j'adresse nos remerciements.

Christian MASSOT

Responsable de la commission
Inter IREM 1er Cycle

SOMMAIRE

(*) CII = Commission Inter-Irem

INTRODUCTION

Thalès entre nombre et pénombre

Théorème ou propriété, axiome ou résultat, Thalès a toujours été un moment redoutable d'enseignement gnement. A la fois liaison entre le géométrique et le numérique, et ouverture sur le vectoriel, le barycentre et l'homothétie, il apparaît comme une dernière organisation dans l'enseignement de la géométrie en premier cycle, et un nouveau contenu en second cycle: c'est la théorisation des liaisons entre proportionnalité et parallélisme, la mise en forme scientifique de l'homogénéisation du plan et de l'espace.

Historiquement, il a été associé à l'histoire du nombre, et en particulier au problème du passage du rationnel au réel, comme nous l'explique Rudolf BKOUCHE. S'il plane plus qu'une ombre sur la légende de la pyramide à laquelle on associe son émergence, son intérêt épistémologique est lui très fort.

A problème épistémologique, problème didactique. Henry PLANE illustre quel a été son enseignement ces derniers siècles, alors que Guy BROUSSEAU met en évidence les obstacles qui y sont liés.

L'enseignement actuel de ce théorème en troisième nous amène à constater :

- une certaine confusion entre les aspects projection et homothétie,
- les difficultés liées aux notions de contraposée et réciproque,

Autant de points abordés par des collègues de l'Inter IREM Premier Cycle, enseignants de collège.

D'autres ont préféré l'illustrer

- soit par les introductions qu'ils en proposent,
- soit comme motivation pour d'autres thèmes d'enseignement,
- soit par les applications qu'ils en font.

Entre premier cycle et second cycle, entre configurations et calcul vectoriel, entre agrandissement-réduction et homothétie, doit-il garder sa place, malgré la tentation d'attendre la seconde pour le formaliser ? En le supprimant au collège, c'est en fait le sens même de la géométrie qui disparaît, dans la mesure où la géométrie élémentaire est liée à la notion de figures semblables. Attendre la seconde, c'est attendre le calcul vectoriel. Si celui-ci est puissant, il occulte, pour le débutant, la rencontre avec "les cas de figure".

Si ces problèmes vous intéressent, bienvenue dans ce livre. Mais attention, si vous l'emmenez à l'étranger, vous y verrez que ***notre*** Thalès, est bien **un Thalès national.**

Pour la Commission Premier Cycle

Jean-Claude DUPERRET


Lien entre le géométrique et le numérique
2
5
3
1
4
9

Autour du Théorème de Thalès

variations sur les liens entre le géométrique et le numérique

RUDOLF BKOUCHE

Le géométrique et le numérique

Le géométrique rencontre constamment le numérique, d'abord avec la théorie de la mesure des grandeurs, ensuite avec la mise en place de la méthode des coordonnées (la géométrie analytique), laquelle fait encore appel à la mesure comme le montre Descartes écrivant au début de la *Géométrie*

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."

Ce lien entre le géométrique et le numérique pose le problème de la définition des rapports de grandeurs. Sur le plan théorique, on peut alors, soit construire une théorie des proportions à la façon d'Eudoxe-Euclide, éliminant ainsi tout recours aux nombres autres que les entiers, soit construire une théorie des nombres réels comme cela s'est fait au XIX[e] siècle avec Dedekind, Cantor, Weïerstrass et Méray; sur le plan du calcul pratique, on peut recourir à des procédés d'approximation, ce qui pose la question de leur légitimation.

Les constructions théoriques rappelées ci-dessus ainsi que les justifications des procédés d'approximation ne sauraient être enseignées à un niveau élémentaire bien que les problèmes posés ne puissent être évités; il y a ainsi une ambiguïté incontournable de l'enseignement et le problème se pose de savoir travailler dans cette ambiguïté. Une telle ambiguïté pose le problème de la rigueur sous une forme quelque peu paradoxale que l'on peut énoncer ainsi: d'une part la rigueur est nécessaire, d'autre part on ne peut expliciter les moyens de cette rigueur; il s'agit alors moins de mettre en place les conditions techniques de la rigueur que de mettre en évidence, à travers des raisonnements non nécessairement canoniques, la nécessité de la rigueur. Cela suppose, pour l'enseignant, à côté de de la maîtrise de la rigueur formelle qui structure le raisonnement mathématique, une rigueur de pensée sans laquelle l'enseignement risque de devenir informe; pour préciser ce qui vient d'être dit, disons que, si l'on ne peut donner, au collège ou même au lycée, une démonstration complète du théorème des lignes proportionnelles (appelé depuis la fin du siècle dernier le théorème de Thalès), on ne peut éviter de poser la question des rapports incommensurables et de leur prise en compte.

Cette relation géométrique-numérique conduit à poser de façon plus générale le problème de l'algébrisation de la géométrie (la géométrie analytique à la fois du point de vue du calcul numérique et du point de vue du calcul littéral), de même que le problème des cas de figures et de leur élimination. Il nous semble clair que, dans ces problèmes, l'aspect historique apporte des éléments de réflexion comme le montre, par exemple, la lecture des grands traités de géométrie élémentaire.

Nous abordons dans cet article le seul point de vue de la mesure des grandeurs, renvoyant à un article ultérieur pour une étude générale de la place du numérique dans la construction de la géométrie.

Autour du théorème de Thalès
variations sur les liens entre le géométrique et le numérique

"La connaissance évoluée, la connaissance fine, se fonde sur la connaissance "naturelle" qui ne peut cependant être envisagée que comme une approche sommaire de la connaissance évoluée."[1]

Ferdinand Gonseth

Introduction

Le théorème de Thalès[2] (ou théorème des lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments; en cela il est au coeur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique.

Commençons par rappeler le rôle de la proportionnalité dans la définition des figures semblables; cette définition marque la nature métrique de la notion de forme si l'on considère que la théorie de la similitude telle qu'elle se développe dans la géométrie élémentaire, exprime essentiellement que deux objets ont même forme[3]; ainsi Emile Borel dans un débat sur l'enseignement de la géométrie organisé par la Société Française de Philosophie à propos de la Réforme de 1902/1905, expliquait :

1 Gonseth [Go], p. 145

2 L'appellation "Théorème de Thalès" est récente; dans les ouvrages de géométrie élémentaire de langue française, elle apparaît seulement à la fin du XIX^e siècle, on peut citer le *Cours de Géométrie élémentaire* de Combette [Com] et quelques ouvrages du début du XX^e siècle comme ceux de Bourlet [Bourl] ou ceux de Vacquant et Macé de Lépinay [VM]. L'appellation devient officielle seulement dans les programmes de 1925 ; le grand traité de Hadamard [Ha] ne l'emploie pas qui parle du théorème des lignes proportionnelles. Quant à la part prise par Thalès dans la découverte de ce théorème, elle reste problématique et nous renvoyons aux pages consacrées à Thalès dans *La Géométrie Grecque* de Paul Tannery [TanP] et dans *Les Ecoles Présocratiques* édité par Jean-Paul Dumont [Dum]. Enriques, dans son article de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Enr], indique que le théorème des lignes proportionnelles est appelé par certains théoréme de Thalès tout en indiquant les réticences de Paul Tannery dans l'ouvrage cité ci-dessus. Pour l'histoire du théorème de Thalès et ses diverses formes dans les ouvrages de géométrie élémentaire, nous renvoyons à l'article de Henry Plane [Pl].

3 Bkouche [Bk1]

"Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première: c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur."[4]

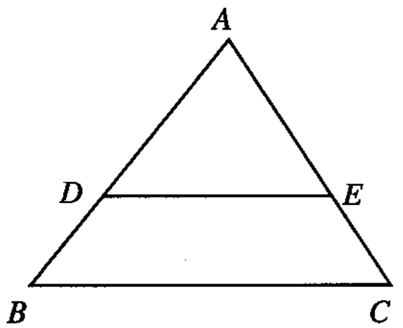
Rappelons la définition des figures semblables telle que l'énonce Euclide

"Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels."[5]

définition qui fait intervenir à la fois l'égalité des angles et les relations de proportionnalité entre côtés; la théorie des proportions permet de définir de façon précise cette notion de proportionnalité, le théorème de Thalès énonçant, quant à lui, un critère de proportionnalité géométrique.

Nous rappellerons d'abord les deux formes traditionnelles de ce théorème:

Premier énoncé. *"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les secteurs sera parallèle au côté restant du triangle."*[6]



Autrement dit, si la droite **DE** est parallèle au côté **BC**, on a la relation:

AD/DB = AE/EC

et réciproquement. Euclide considère seulement le cas où les points **B** et **D** d'une part, **C** et **E** d'autre part sont du même côté par rapport à **A**.

---

4 "L'Enseignement de la Géométrie", débat publié dans le *Bulletin de la Société française de Philosophie*, tome VII, ,1907

5 Euclide, *Eléments*, Livre VI, définition 1, p. 139 Les citations des *Eléments* sont extraites de la traduction de Peyrard [Pe], la pagination est celle de l'édition de 1993.

6 ibid. Livre VI, proposition 2, p. 141

Second énoncé. *"Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles."* [7]

Ces deux énoncés (équivalents) correspondent à des approches géométriques différentes que nous développons ci-dessous, l'approche euclidienne d'une part, l'approche d'Arnauld d'autre part, laquelle se veut, selon les conceptions de son auteur, plus *naturelle* [8].

Mais peut-être plus important que la différence de forme des énoncés, faut-il mettre en avant d'une part la différence des démonstrations (cf. ci-dessous), d'autre part la différence de conception quant à la notion de mesure.

Euclide, pour répondre à la crise provoquée par la découverte des irrationnelles, développe une théorie des proportions s'appuyant sur la notion d'ordre éliminant tout recours au numérique (c'est la théorie d'Eudoxe exposée au Livre V des *Eléments*).

Arnauld, quant à lui, développe une notion d'approximation au statut mal défini, peut-être plus proche du calcul numérique, même s'il ne va pas jusqu'à identifier un rapport de longueur à un nombre. A la même époque, d'autres mathématiciens tels Stevin ou Descartes acceptaient une telle identification même si le statut des nombres ainsi introduits (les nombres *sourds* ou *irrationnels*) restait incertain.

Il faudra attendre le XIXe siècle pour que le statut du numérique se précise avec la construction des nombres réels [9] permettant de redéfinir la relation entre le géométrique et le numérique. Cette relation se précisera avec l'insertion de la géométrie dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Ainsi le théorème de Thalès assure la liaison entre la problématique de la similitude et la problématique de la mesure (telle qu'elle est définie par la théorie des proportions (cf. ci-dessous)). Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur.

---

7 Hadamard [Ha], Livre III, chapitre I, p. 108

8 Nous verrons qu'elle est plus proche de la pratique de la mesure alors que la construction d'Eudoxe se présente comme indépendante de toute pratique, ce qu'elle est effectivement.

9 Dedekind [De], préface

Cet article est composé de trois parties.

La première partie est consacrée à une étude historique des diverses démonstrations du théorème de Thalès. Cette étude permettra de préciser comment se construit la relation entre le numérique et le géométrique.

La deuxième partie est consacrée aux implications du théorème de Thalès. Nous étudierons d'abord les propriétés liées à la similitude. Ensuite nous verrons comment le théorème de Thalès permet de fonder la géométrie analytique dans la mesure où celle-ci est liée à la notion de mesure. Enfin nous verrons comment le théorème de Thalès s'inscrit dans un cadre vectoriel et plus généralement dans le cadre de l'algèbre linéaire; on peut alors mettre en valeur le rôle du théorème de Thalès dans la *linéarisation* de la géométrie élémentaire.

Enfin *la troisième partie* aborde les problèmes d'enseignement. Ces problèmes sont d'autant plus difficile que les constructions théoriques qui définissent la relation entre le numérique et le géométrique ne sauraient être abordées dans un enseignement élémentaire (tel celui du collège, voire même du lycée) même si l'on rencontre très tôt des problèmes où géométrique et numérique se rencontrent; ainsi les problèmes de mesures et de calcul des grandeurs, ainsi les problèmes de proportionnalité géométrique liés à la similitude, ainsi aussi les problèmes de représentation analytique, etc. Apparaît ainsi une ambiguïté incontournable de l'enseignement dans la mesure où l'on est amené à travailler dans un certain *indéfini*, mais peut-être faut-il rappeler que ce sont les problèmes cités plus haut qui ont conduit à remplacer cet indéfini par des constructions précises. C'est essentiellement ce point que nous développerons dans la troisième partie de l'article.

PREMIÈRE PARTIE

LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS

La démonstration euclidienne

1. *La méthode des aires*
2. *La théorie des proportions*
3. *La démonstration d'Euclide*

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*
2. *La théorie des proportions*
3. *La théorie des parallèles*
4. *Le théorème des lignes proportionnelles*
5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*
2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*
3. *La méthode des aires*

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*
2. *Les proportions*
3. *Les lignes proportionnelles*

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*
2. *Constructions des nombres réels et mesures des grandeurs*
3. *Les grandeurs proportionnelles*
4. *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

La démonstration euclidienne

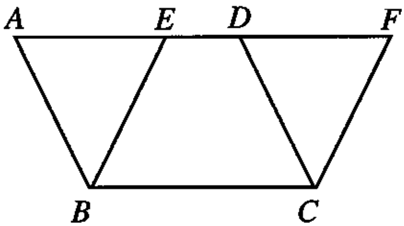
La démonstration euclidienne s'appuie d'une part sur la méthode des aires, d'autre part sur la théorie des proportions.

1. *La méthode des aires*

La méthode des aires, telle qu'elle est exposée dans le Livre I des *Eléments* énonce des critères d'égalité d'aires; on peut la considérer comme la légitimation du procédé empirique de découpage et de recomposition des aires qui permet d'affirmer que des surfaces sont égales. Elle est l'un des points forts de la méthode euclidienne que l'on retrouve tout au long des *Eléments* et plus généralement dans les travaux des géomètres grecs.

La méthode des aires s'appuie d'une part sur le postulat des parallèles (lequel permet de montrer l'égalité des angles alternes-internes ou des angles correspondants définis par une sécante coupant deux droites parallèles) et les cas d'égalité des triangles (qui légitiment l'opération de recomposition); ainsi la proposition 35 du Livre I :

> *"Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."*



En fait l'égalité des triangles *ABE* et *CDF* (les côtés *AB* et *BE* sont respectivement égaux aux côtés *DC* et *CF*, les angles *ABE* et *DCF* sont égaux) implique l'égalité des aires des parallélogrammes *ABCD* et *EBCF*; en effet le quadrilatère *ABCF* est composé du triangle *ABE* et du parallélogramme *BCFE*, il est aussi composé du triangle *CDF* et du parallélogramme *ABCD*.

De façon plus générale on peut énoncer (proposition 36 du Livre I) :

> *"Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."*

On passe aux triangles en remarquant qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme (proposition 34 du Livre I), remarque évidente mais qu'Euclide démontre en utilisant l'égalité des angles alternes-internes et les cas d'égalité des triangles; on peut alors énoncer les deux propositions suivantes (propositions 37 et 38 du livre I) :

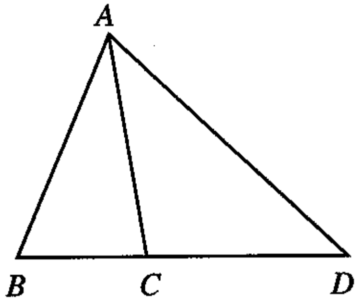
> *"Des triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux."*
>
> *"Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux."*

On remarquera les deux sens du terme *égalité*, égalité des aires et égalité au sens de la superposition; le sens est déterminé par le contexte[10].

Si, dans un premier temps, la méthode des aires permet d'affirmer l'égalité de deux surfaces, le problème de la mesure des aires est de comparer deux aires, d'exprimer leur rapport, c'est-à-dire combien de fois chacune des aires contient une partie aliquote commune (c'est-à-dire une partie contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles).

On peut alors énoncer (proposition 1 du Livre VI)

> *"Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases."*



autrement dit, on a la relation

$$\frac{\text{aire}\,ABC}{\text{aire}\,ACD} = \frac{BC}{CD}$$

---

10 En fait, la superposition doit être entendue comme un critère d'égalité, l'égalité étant l'égalité de grandeur, ce que laisse supposer les énoncés des *"notions communes"*. Notons cependant que, en ce qui concerne les longueurs et les angles, l'égalité est équivalente à la superposition comme on le voit dans la démonstration de la proposition 4 du Livre I (le deuxième cas d'égalité des triangles).

Cela suppose d'avoir défini de façon précise sinon le rapport de deux grandeurs (ici des aires ou des longueurs) du moins l'égalité de ces rapports. Lorsque les grandeurs sont commensurables (c'est-à-dire, ont une partie aliquote commune), le rapport se définit comme on l'a dit ci-dessus. De façon précise, soit λ une partie aliquote commune de BC et CD, alors $BC = m\lambda$, $CD = n\lambda$, m et n étant des nombres entiers; on peut alors considérer une division de BC et CD en parties de longueur λ, la proposition 38 du Livre I montre alors que les triangles de sommet A et de base une partie de longueur λ ont même aire, soit σ l'aire d'un tel triangle, alors

$$\text{aire } ABC = m\sigma$$
$$\text{aire } ACD = n\sigma$$

ce qui prouve l'assertion.

Ce raisonnement n'est plus valide si BC et CD sont incommensurables (c'est-à-dire, n'ont pas de partie aliquote commune), il devient alors nécessaire d'expliciter une théorie des proportions (c'est-à-dire de l'égalité des rapports) pour des grandeurs incommensurables.

2. *La théorie des proportions.*

Tant que les géomètres grecs ne connaissaient que des rapports de grandeurs commensurables, la théorie des proportions n'était qu'un simple chapitre de l'arithmétique, le rapport de deux grandeurs étant défini comme rapport d'entiers. La découverte (via le théorème de Pythagore) des grandeurs incommensurables posait un nouveau problème et il devenait nécessaire d'élaborer une théorie des proportions prenant en compte l'incommensurabilité[11].

La théorie des proportions fut développée par Eudoxe, mathématicien contemporain de Platon, elle est exposée au Livre V des Eléments d'Euclide auquel nous renvoyons, une partie de ce livre est exposée et commentée dans *Mathématiques au fil des âges*[12]; nous renvoyons aussi à l'article d'Eliane Cousquer sur l'histoire des nombres[13].

Nous rappelons ici les définitions euclidiennes nécessaires à la compréhension de la suite de l'exposé :

---

11 Pour une étude historique de l'incommensurabilité, nous renvoyons aux ouvrages de Knorr [Kn] et de Caveing [Ca] ainsi qu'aux nombreuses notes qui accompagnent l'édition anglaise des *Eléments* d'Euclide par Heath [He1]. On peut lire aussi le mémoire de DEA de Soussan [Sou].

12 *Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE], p. 120-122

13 Eliane Cousquer [Co2]

3. *Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.*
4. *Une proportion est une identité de raison.*
5. *Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.*
6. *Des grandeurs sont dites être de même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, à d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leurs sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.*

En fait Euclide ne définit pas la raison (le rapport) de deux grandeurs homogènes, il explique dans la définition 5 que si deux grandeurs ont une raison entre elles, il existe un multiple de chacune d'elles qui surpasse l'autre, ce qui précise la définition 3.

La définition importante est la définition 6 qui explicite ce qu'on entend par proportion. En termes d'aujourd'hui on pourrait écrire :

a et b étant deux grandeurs homogènes, c et d étant deux autres grandeurs homogènes, alors

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

si, n et m étant deux nombres entiers, les assertions suivantes sont vérifiées:

si $ma > nb$, alors $mc > nd$,
si $ma = nb$, alors $mc = nd$,
si $ma < nb$, alors $mc < nd$.

Pour l'étude des propriétés des proportions, nous renvoyons aux ouvrages cités ; le lecteur peut, à titre d'exercice, montrer les propriétés suivantes :

i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

ii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ et $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

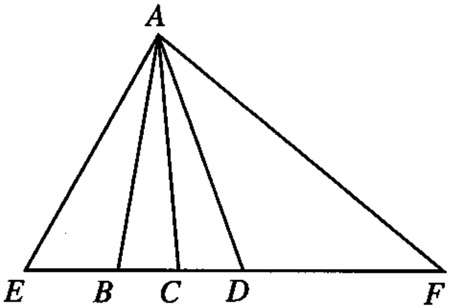
iii) si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $a > b$ implique $c > d$ (resp. $a < b$ implique $c < d$, resp. $a = b$ implique $c = d$)

iv) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Remarque : Le rapport de deux grandeurs n'est pas un nombre (sauf si la première est un multiple de la seconde) ni même un rapport de nombres (sauf si les grandeurs sont commensurables) ; la théorie d'Eudoxe-Euclide élimine ainsi le numérique. Notons que dans les calculs pratiques, les géométres grecs savaient approcher les rapports de grandeurs par des rapports de nombres (les fractions d'aujourd'hui), un exemple est donné par le calcul approché de p par Archimède[14] ou les calculs d'aires et de volumes par Héron d'Alexandrie[15].

3. *La démonstration*

Nous allons voir comment la notion d'égalité de raison permet de montrer la proposition 1 du Livre VI.



Soient m et n deux nombres entiers et soient les points E et F sur la droite CD tels que

$$CE = m\,CB$$
$$CF = n\,CD$$

la proposition 38 du Livre I implique

$$\text{aire } ACE = m \text{ aire } ACB$$
$$\text{aire } ACF = n \text{ aire } ACD$$

On montre aisément que si CE est plus grand que, égal à, ou plus petit que CF, alors l'aire du triangle ACE est plus grande que, égale à, ou plus petite que l'aire du triangle ACF ; autrement dit

$m\,CB > n\,CD$ implique m aire $ACB > n$ aire ACD
$m\,CB = n\,CD$ implique m aire $ACB = n$ aire ACD
$m\,CB < n\,CD$ implique m aire $ACB < n$ aire ACD

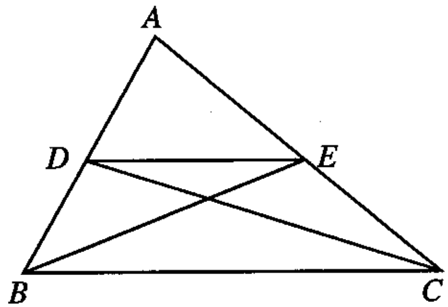
14 Archimède [Arc], p. 140-143

15 Heath [He2], vol. 2, p. 320-343

donc la raison de BC à CD est la même que celle du triangle ABC au triangle ACD.

On peut alors montrer le théorème de Thalès (proposition 2 du Livre VI) :

"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle."



On veut montrer l'égalité

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$$

On sait, d'après la proposition précédente, que

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\text{aire } EBD}{\text{aire } EDA}$$

$$\frac{CE}{CA} = \frac{\text{aire } DCE}{\text{aire } DAE}$$

d'autre part, les triangles BED et CED ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, d'où la proposition.

On laisse au lecteur le plaisir de démontrer la réciproque.

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*

La démonstration euclidienne ne veut laisser aucun point obscur dans la démonstration, c'est-à-dire que les principes ayant été énoncés (définitions, postulats, axiomes), les propositions s'enchaînent logiquement sans faire appel à des références extérieures à ces principes et aux règles de la logique (ce qui n'exclut pas l'usage de l'intuition géométrique, c'est-à-dire d'une appréhension globale des objets que l'on étudie).

Ainsi, le postulat des parallèles une fois énoncé, Euclide peut montrer l'égalité des angles correspondants et des angles alternes-internes définis par une sécante coupant deux droites parallèles, de même le principe de l'égalité par superposition permet de montrer les cas d'égalité des triangles; on a ainsi les ingrédients nécessaires à la mise en place de la méthode des aires. La théorie des proportions d'Eudoxe permet alors de démontrer la proposition 1 du Livre VI et d'en déduire le théorème de Thalès.

Si la rigueur de l'enchaînement des raisonnements conduit à la certitude, la démonstration elle-même n'explique pas les raisons de la propriété démontrée, on comprend qu'elle est non seulement vraie mais aussi nécessairement vraie (elle ne peut pas ne pas être vraie), on ne comprend pas pourquoi elle est vraie. C'est la critique que feront les philosophes de Port-Royal à la démonstration euclidienne, critique que Antoine Arnauld et Pierre Nicole vont développer dans *La Logique de Port-Royal* en énumérant les défauts de la méthode des géométres (c'est-à-dire des géomètres grecs et de leurs successeurs), parmi lesquels nous citerons[16]:

> *"Avoir plus le soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plus que de l'éclairer."*
>
> *"Prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves."*
>
> *"Démonstration par l'impossible."*[17]
>
> *"Démontrer par des voies trop éloignées."*
>
> *"N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature."*

Cette derniére critique est un point essentiel de la philosophie de Port-Royal, la recherche du *vrai ordre de la nature* auquel s'identifierait un ordre

---

16 Arnauld, Nicole [AN], quatrième partie, chapitre IX; pour une analyse de la critique de Port-Royal, cf. Barbin [Ba].

17 Il s'agit de la démonstration par l'absurde; nous verrons cependant que Arnauld ne peut s'en passer dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*.

naturel de la connaissance, ce qu'Arnauld exprime au début de ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

> *"Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement."*[18]

Cette recherche d'un ordre naturel explique la position critique de Port-Royal envers la méthode euclidienne; si la science se construit sur ce que nous savons naturellement, ce savoir naturel n'a, quant à lui, pas besoin d'être prouvé, ce que Pascal expliquait déjà dans la première des règles de la démonstration qu'il énonçait dans son opuscule *De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader*:

> *"N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on ait rien de plus clair pour les prouver."*[19]

Le rôle de la démonstration n'est plus alors seulement de convaincre par un discours logiquement parfait.

> *"Il ne suffit pas pour avoir une parfaite science de quelque vérité, d'être convaincu que cela est vrai, si de plus on ne pénètre par des raisons prises de la nature de la chose même pourquoi cela est vrai."*[20]

écrivent Arnauld et Nicole, précisant que c'est la seule façon de satisfaire l'esprit.

C'est en cela que les démonstrations par des voies trop éloignées ne sauraient être satisfaisantes; en effet, introduisant, pour des raisons liées à l'ordre logique du discours, des notions qui peuvent être étrangères à la nature même des objets sur lesquels portent ces démonstrations, elles occultent les *vraies raisons* de la vérité des assertions démontrées.

Parmi ces entorses au vrai ordre de la nature, Arnauld et Nicole citeront la place de la théorie des proportions au milieu d'un exposé de géométrie plane (livres I à IV et livre VI) et l'usage des aires pour montrer des propriétés de lignes. C'est évidemment la place accordée à la méthode des aires qui est critiquée, en particulier, en ce qui nous concerne, le détour par les aires pour montrer que des lignes sont proportionnelles.

L'ouvrage d'Arnauld, publié en 1667, se propose alors de mettre *un ordre naturel* dans l'exposé de la géométrie, ce que l'auteur explique dans sa

---

18 Arnauld [Arn1], livre I.

19 Pascal[Pa], p. 357

préface :

> *"étant persuadé que c'est une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire les pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclairent les unes par les autres, il (l'auteur) a toujours quelques pensées de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion."*[21]

et, revenant sur le vrai ordre qu'il se propose d'introduire dans son ouvrage, Arnauld précise :

> *"Il (l'auteur) ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire, mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire... démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont établis..."*

Notre propos n'est pas d'analyser l'ouvrage d'Arnauld et l'ordre de son développement mais d'expliciter à travers l'étude du théorème de Thalès, le principe de la méthode et de la comparer à celle d'Euclide. Nous avons dit ailleurs l'influence des idées de Port-Royal dans le développement de l'enseignement de la géométrie en France[22], nous verrons ici comment cette influence s'est manifestée à propos du théorème des lignes proportionnelles.

2. *La théorie des proportions*

A l'époque où Arnauld écrit son ouvrage, la notion de nombre s'est élargie, même si les nombres *sourds*[23] qui représentent les rapports de grandeurs incommensurables n'ont pas un statut théorique bien défini. On sait cependant effectuer les opérations arithmétiques sur les raisons (qu'elles soient de nombre à nombre, c'est-à-dire des raisons de grandeurs commensurables, ou qu'elles soient sourdes, c'est-à-dire des raisons de grandeurs incommensurables) et en calculer des approximations ; on sait aussi, une longueur étant donnée, construire une seconde longueur ayant une raison donnée (de nombre à nombre ou sourde) avec la première. Cela conduira Stevin à identifier nombres et raisons et ainsi énoncer une notion *unifiée* de nombre même

---

21 Arnauld [Arn1], préface.

22 Bkouche [Bk2]

23 Le terme sourd signifie *"que la raison n'entend pas"*, autrement dit *inaccessible à la raison*; cette expression est d'origine arabe.

s'il n'en définit pas le statut[24]. Ce *coup de force* ne sera pas accepté sans réserve et l'on verra les auteurs se partager entre ceux qui acceptent cette identification (ainsi Descartes dans sa *Géométrie* de 1637) et ceux qui, plus prudents, continuent à distinguer raisons et nombres.[25]

Notre propos n'est pas de faire un historique de la notion de nombre (nous renvoyons aux ouvrages de Jean Dhombres et Eliane Cousquer cités dans la bibliographie); nous dirons seulement que s'est mise en place une arithmétique qui unifie les opérations sur les nombres et les opérations sur les grandeurs, même si elle distingue nombres et grandeurs[26].

C'est sur une telle arithmétique qu'Arnauld va fonder la théorie des proportions. C'est ainsi que son ouvrage commence par quatre livres consacrés à cette arithmétique.

Après avoir expliqué, dans un premier livre, les opérations arithmétiques sur les nombres et les grandeurs, Arnauld étudie au livre II la théorie des proportions[27] :

L'auteur commence par définir la raison comme la manière dont une grandeur (l'antécédent) est contenue dans, ou contient, une autre (le conséquent), distinguant deux sortes de raisons :

> *"L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre."*

ce qu'il appelle *"raison exacte"* ou *"raison de nombre à nombre"*, puisque dans ce cas la raison peut s'exprimer comme raison d'un nombre entier à un autre.

> *"L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre."*

ce qu'on appelle une *"raison sourde"*.

---

24 Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans*Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE].

25 On peut lire à ce sujet l'article *"Nombres"* dans l'Encyclopédie (cf. *Encyclopédie Méthodique* [Enc], section Mathématiques, tome deuxième, p. 464 et sq.) ; nous renvoyons aussi à l'article cité d'Eliane Cousquer [Cou2]

26 Il faudrait citer les travaux de Viète qui, distinguant le calcul numérique (calcul sur les nombres) et le calcul spécieux (calcul sur les grandeurs), les unifie via le calcul littéral.

27 Arnauld [Arn1], livre II.

Une proportion est alors une égalité de raison qu'Arnauld définit ainsi :

> *"Deux raisons sont appelées égales quand les antécédents contiennent également les conséquents, ou sont également contenus dans les conséquents."*

Si cette première définition donne une idée de ce qu'est une proportion, elle est insuffisante pour les raisons sourdes, ce qui amène Arnauld à donner une seconde définition :

> *"Deux raisons sont appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacune également contenues dans chaque conséquent."*

autrement dit, soient a, b, c, d quatre grandeurs, a et b homogènes, c et d homogènes, nous dirons que la raison de a à b est égale à la raison de c à d (a est à b comme c est à d, ce qu'Arnauld note $a.b :: c.d$)) si x et y étant deux mêmes parties aliquotes de a et c (c'est-à-dire telles que $a = mx$ et $c = my$, m étant un nombre entier) l'une des deux assertions est vérifiée :

i) si x est précisément tant de fois dans b, alors y est autant de fois dans d, auquel cas la raison de chaque antécédent à son conséquent est de nombre à nombre.

ii) si x n'est jamais précisément tant de fois dans b, mais toujours avec quelque résidu, alors y est autant de fois dans d mais avec quelque résidu, auquel cas la raison est sourde.

Arnauld remarque alors que, si aucune partie aliquote de a n'est contenue un nombre entier de fois dans b, il se pourrait que pour l'une d'entre elles, la partie aliquote de c correspondante soit contenue un nombre entier de fois dans d ; il montrera plus loin que cela est impossible. Nous proposons, à titre d'exercice, que le lecteur vérifie cette proposition qui prouve qu'une raison sourde ne peut être égale à une raison de nombre à nombre, assurant la cohérence de la théorie des proportions selon Arnauld.

Arnauld peut alors étudier les propriétés des proportions ce que nous ne ferons pas ici, renvoyant à l'ouvrage d'Arnauld. Toutefois nous proposons au lecteur, à titre d'exercice, de montrer, façon Arnauld, les propriétés suivantes[28] :

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$,

28 ibid. p. 5 et 6

iii) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Notons que Arnauld ne dit pas qu'une raison est un nombre.

Arnauld donnera une nouvelle formulation de la théorie des proportions dans les éditions ultérieures de son ouvrage[29], se proposant de rendre plus accessibles les deuxième et troisième livres (ceux consacrés à la théorie des proportions et au calcul des raisons).

La raison devient *"la quantité relative d'une grandeur comparée à une autre"*[30], ce qui, à défaut de clarifier le concept de raison, en souligne le caractère quantitatif par rapport à la *"manière"* de la première édition (laquelle n'est pas sans rappeler la définition 3 du Livre V des *Eléments* d'Euclide).

En précisant que la raison est une quantité, Arnauld exprime que l'on peut comparer les raisons :

> *"Comme la raison est une quantité, quoique relative, toutes les propriétés de la quantité lui conviennent; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison"*[31]

Arnauld distingue encore raison de nombre à nombre et raison sourde; si la raison de nombre à nombre est représentée par une *"fraction"* ou *"nombre rompu"*, la raison sourde *"ne peut être marquée par aucun nombre"*[32]

Arnauld énonce alors plusieurs axiomes sur les proportions qui vont lui permettre d'énoncer le théorème suivant :

> *"Deux raisons sont égales quand toutes les aliquotes communes pareilles de chaque antécédent sont également contenues dans son conséquent"*[33]

Ainsi Arnauld démontre ce qui lui servait de définition de l'égalité des raisons dans la première édition.

Le théorème est évident dans le cas des raisons de nombre à nombre.

Dans le cas des raisons sourdes, Arnauld utilise le fait que, des raisons étant des grandeurs, on peut les comparer. Il montre alors, en utilisant la

29 Une seconde édition sera publiée en 1683, puis corrigée en 1693 ; cette dernière est publiée dans le tome 42 des *Œuvres complètes* d'Arnaud.

30 Arnauld [Arn2], p. 39

31 ibid.

32 ibid.

33 ibid. p. 49.

classique double réduction à l'absurde (la méthode d'exhaustion des géomètres grecs[34]) que si les aliquotes pareilles des antécédents sont également contenues dans les antécédents, alors les raisons sont égales.

En effet, considérons les raisons $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (notons que dans la troisième édition, Arnauld emploie la notation $\frac{a}{b}$ pour désigner la raison de a à b, a étant appelé le numérateur et b le dénominateur) telles que les aliquotes pareilles de a et c sont également contenues dans b et d; cela signifie que si α est une partie aliquote de a et γ la partie aliquote pareille de c, soit

$$a = n\alpha \qquad\qquad c = n\gamma$$

alors b contient un même nombre de fois α augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que α et d contient le même nombre de fois γ augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que γ, soit

$$b = p\alpha + \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon < \alpha$$

$$d = p\gamma + \eta \qquad\qquad \eta < \gamma$$

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ne sont pas égales, alors $\frac{a}{b}$ est supérieure ou inférieure à $\frac{c}{d}$.

Supposons $\frac{a}{b}$ supérieure à $\frac{c}{d}$, alors en augmentant le conséquent b, on diminue la raison $\frac{a}{b}$ jusqu'à la rendre égale à $\frac{c}{d}$ (le fait que $\frac{a}{b}$ diminue lorsque b augmente est une conséquence des axiomes énoncés par Arnauld[35]). On peut alors trouver z tel que $\frac{a}{b+z} = \frac{c}{d}$; si on prend une partie aliquote de a inférieure à z, on arrive à une contradiction comme le vérifiera aisément le lecteur. Ainsi $\frac{a}{b}$ ne peut être supérieur à $\frac{c}{d}$. Un raisonnement

34 Rappelons l'ambiguïté du terme *"exhaustion"* inventé par Grégoire de Saint-Vincent pour lequel il signifie *"l'épuisement"* d'une surface ou d'un volume par une somme infinie de surfaces polygonales ou de volumes polyédraux (cf. l'article de Jean-Pierre Le Goff [LeG] cité dans la bibliographie). En ce qui concerne les géomètres grecs, lorsqu'on parle de la méthode d'exhaustion, il s'agit de l'exhaustion des cas : deux grandeurs étant données, l'une d'elles est nécessairement supérieure ou égale à la seconde, si l'on montre que les deux premiers cas conduisent à une contradiction, alors l'égalité est vraie. La méthode d'exhaustion des Grecs participe ainsi du raisonnement par l'absurde.

analogue montre que $\frac{a}{b}$ ne peut être inférieur à $\frac{c}{d}$. On en conclut l'égalité des deux raisons.

Ici encore, Arnauld utilise le raisonnement par l'impossible. Ce caractère incontournable est lié à *"la divisibilité à l'infini"* comme le remarque Arnauld qui écrit :

> *"Or il est clair que tout ce qui tient de l'infini ne saurait être compris par un esprit fini tel que celui de l'homme."*[36]

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir pour des raisons sourdes *"des notions aussi claires"* que pour les raisons de nombre à nombre ; Arnauld distingue ainsi les preuves négatives dans lesquelles intervient le raisonnement par l'absurde des preuves positives. Le terme *négatif* marque ici la limite de la compréhension humaine; on le retrouve dans la classique notion de *théologie négative,* laquelle se propose moins de dire ce que Dieu est que d'approcher la connaissance de Dieu en exprimant ce qu'il n'est pas.

Pour une étude plus complète de la théorie des proportions chez Arnauld et de la comparaison des éditions successives des *Nouveaux Elémens de Géométrie,* nous renvoyons à un article à paraître de Anne Chevalier[37].

3. *La théorie des parallèles*

Au livre VI de ses *Nouveaux Elémens de Géométrie,* Arnauld énonce deux manières de considérer des parallèles, l'une négative et l'autre positive :

> *"La négative est de ne se rencontrer jamais, quoi que prolongée à l'infini."*
>
> *"La positive, d'être toujours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points sont également distant de l'autre : c'est-à-dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre, sont égales".*[38]

et l'auteur remarque que la notion négative est une conséquence de la notion positive.

Avec la définition dite positive, Arnauld admet implicitement qu'une ligne dont les points sont à une même distance d'une droite donnée est encore une droite, on sait aujourd'hui que cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles. La définition positive permet à Arnauld d'énoncer que si deux

36 Arnauld [Arn2], troisième axiome p.46

37 ibid. p.97

38 Arnauld [Arn1], livre VI, p. 103-104

droites sont perpendiculaires à une droite donnée, alors toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à la seconde (sixième lemme) et d'en déduire que ces deux droites sont parallèles (première proposition).

Par contre, pour montrer l'égalité des angles alternes-internes, Arnauld a besoin de la mesure des angles qu'il relie à la mesure des arcs de cercle, et ce n'est qu'au livre VIII qu'il énonce la propriété suivante :

> *"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."*[39]

Etant donnée l'importance de cette propriété, nous expliquons comment Arnauld la démontre.

Arnauld montre d'abord la possibilité de définir la mesure des arcs de cercle indépendamment du rayon, pour cela il énonce (huitième théorème du livre VII) :

> *"Quand plusieurs circonférences sont concentriques et que du centre on tire des lignes indéfinies, les arcs de toutes ces circonférences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonférences."*

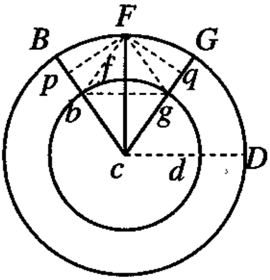
La démonstration repose sur la théorie des proportions précédemment définies.

Notons d'abord que, dans un cercle ou dans deux cercles égaux, l'égalité des arcs soutenus par des cordes égales et l'égalité des cordes soutenant des arcs égaux (pourvu que ces arcs soient plus petits qu'un demi-cercle, sont posées en axiome (cinquième axiome du livre V), conséquence *"évidemment nécessaire de l'entière uniformité de la circonférence"*[40].

Arnauld définit alors le *sinus* d'un arc moindre que le quart de la circonférence comme la perpendiculaire menée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité et remarque que le sinus n'est autre que la moitié de la corde sous-tendant le double de l'arc (notons que le sinus est une ligne), deux arcs égaux ont ainsi même sinus et réciproquement[41]. Arnauld peut alors démontrer le huitième théorème du livre VII.

La démonstration repose sur l'idée qu'une partie aliquote de l'arc de la grande circonférence définit une partie aliquote de l'arc de la petite circonfé-

39 ibid. livre VIII, p. 152
40 ibid.livre V, p. 86
41 ibid. livre VII, p. 126-127



rence et que la première partie aliquote est contenue dans la grande circonférence, avec peut-être un résidu, autant de fois que la seconde partie aliquote est contenue dans la petite circonférence[42].

On veut montrer que les arcs *BD* et *bd* sont entre eux comme les circonférences qui les portent.

Soit *X* une partie aliquote de *BD*, et *BF* égal à cette aliquote, alors *bf* est la même aliquote de *bd*; pour le prouver, Arnauld construit l'arc *FG* égal à l'arc *BF* et montre que les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

En effet les arcs égaux *BF, FG* ont même sinus, alors les droites *pb* et *qg* sont égales (cela résulte de ce que deux cordes égales sont équidistantes du centre, quatrième du livre VII) et par conséquent les droites *Fb* et *Fg* sont égales, la droite *Fc* est donc la perpendiculaire à *bg* passant par son milieu et coupe l'arc *bg* en son milieu (second théorème du livre VII), ainsi les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

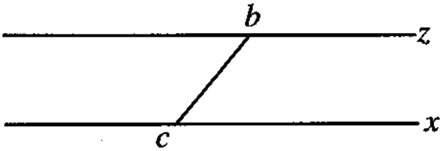
On laisse au lecteur le soin de terminer.

Le huitième théorème du livre VII permet alors de définir la mesure des arcs, la circonférence ou une partie déterminée de la circonférence étant prise pour unité[43].

L'angle étant défini, au début du livre VIII, comme une surface comprise entre deux lignes qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, ce point étant le sommet de l'angle, Arnauld peut alors énoncer la relation usuelle entre angle et arc de cercle, relation qui permet de définir la mesure des angles à partir de la mesure des arcs[44]. En particulier on peut définir le *sinus* d'un angle, un rayon (c'est-à-dire la longueur des côtés) étant donnée. On peut alors énoncer la proposition suivante (premier corollaire du livre VIII)

> *"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."*

42 ibid. livre VII, p.128
43 ibid. livre VII, p. 129
44 ibid. livre VIII, p. 142-143



Pour le montrer, Arnauld remarque que, si l'on prend pour rayon la ligne *bc*, les sinus des angles alternes sont égaux.

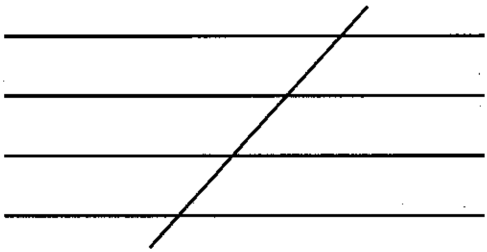
Arnauld en déduit les deux corollaires (second et troisième corollaires):

> *"Les obliques égales entre les mêmes parallèles font des angles égaux (avec les parallèles)."*

> *"Les obliques entre parallèles qui font des angles égaux sont égales."*

ce qui implique (septième corollaire) :

> *"Plusieurs parallèles étant également distantes les unes des autres, c'est-à-dire la première de la deuxième, la deuxième de la troisième, la troisième de la quatrième..., si une même ligne les coupent toutes, toutes les portions de ces lignes comprises entre deux de ces parallèles sont égales."*



4. *Le théorème des lignes proportionnelles*

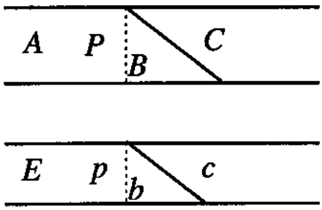
Au début du livre X consacré à l'étude des lignes proportionnelle, Arnauld introduit la notion d'espace parallèle, *"un espace compris d'une part entre deux droites parallèles et indéfini de l'autre"*[45].

Après avoir rappelé les résultats du livre VIII, Arnauld peut alors énoncer la proposition fondamentale :

---

45 ibid. livre X, p. 188

"Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces, et leur éloignement de la perpendiculaire sont aussi en même raison."[46]



Soient les deux espaces *A* et *E*, on notera *P* et *p* les perpendiculaires respectives dans l'espace *A* et dans l'espace *E*, de même *C* et *c* les obliques respectives, *B* et *b* les éloignements respectifs. Alors *P* est à *p* comme *C* est à *c* et comme *B* est à *b*.

Divisons *P* en parties égales, *x* étant la partie aliquote de *P* ainsi définie, et menons par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace *A*, lesquelles rencontrent *C* qu'elles divisent en parties égales, soit *y* la partie aliquote de *C* ainsi définie ; par les points de division de *C*, on mène des parallèles à *P*, lesquelles rencontrent *B* qu'elles divisent en parties égales et on note *z* la partie aliquote de *B* ainsi obtenue ; il est clair que *P* contient autant de fois *x* que *C* contient *y* et que *B* contient *z*.

Cela fait, prenons *x* pour mesurer *p* de l'espace *E*, *x* est contenu un certain nombre de fois dans *p* avec peut-être un résidu moindre que *x*, alors en menant par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace *E*, on divise *c* en autant de parties égales avec peut-être un résidu, et en menant par les points de division de *c* des parallèles à *p*, on divise de même *b* en autant de parties égales avec peut-être un résidu ; ainsi par la définition des grandeurs proportionnelles, **P** est à *p* comme **C** est à *c* et comme ***B*** est à b, ce qui prouve la proposition fondamentale.

Arnauld énonce plusieurs conséquences parmi lesquelles les deux suivantes (premier et second corollaires)[47] :

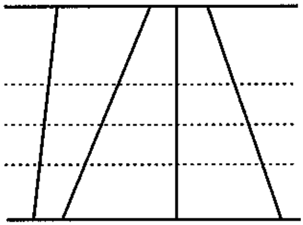
"Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espa-

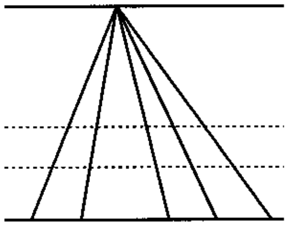
46 ibid. livre X, p. 190

47 ibid. livre X, p. 193-194

ce, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième... comme chaque autre toute à la même partie première, ou deuxième, ou troisième..."

"Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle qui les termine."





On comparera l'énoncé du premier corollaire du livre X avec celui du septième corollaire du livre VIII, cité ci-dessus.

5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Après la découverte des irrationnelles le numérique (les nombres entiers et les fractions d'entiers) devenait insuffisant pour construire une théorie de la mesure des grandeurs, la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide se proposait alors de définir la mesure à partir de la seule considération des grandeurs ; elle s'appuyait pour cela sur la notion d'ordre et la mesure des grandeurs se définissait comme comparaison de grandeurs indépendamment de toute détermination numérique ; en cela la théorie de la mesure se différenciait de la pratique de la mesure. D'une part, mesurer consiste essentiellement, la grandeur unité ayant été choisie, à associer un *nombre* à la grandeur que l'on mesure, savoir, le nombre de fois que la grandeur contient l'unité (ou une partie de l'unité) ; or la théorie d'Eudoxe élimine le numérique pour les raisons que nous avons dites, elle énonce des règles de comparaison de rapports, non une méthode de détermination de la *valeur* d'un rapport. D'autre part, la pratique de la mesure s'appuie sur la détermination de parties (au sens des sous multiples) de la grandeur que l'on mesure et de l'unité, alors que la théorie d'Eudoxe s'appuie sur des considérations d'équimultiples.

Nous avons signalé ci-dessus comment des méthodes de calcul approché pouvaient relier ces deux aspects de la mesure, mais sur le plan théorique, la mesure des grandeurs restait indépendante de toute représentation numérique et le restera tant qu'une construction appropriée ne sera pas mise en place, construction qui sera liée elle-même à la mesure des grandeurs, nous y reviendrons.

La problématique d'Arnauld nous semble, au contraire, beaucoup plus proche de la pratique de la mesure : une unité étant choisie, la mesure est définie par le nombre de fois que la grandeur contient l'unité, ou une partie de l'unité, avec peut-être un résidu, c'est la façon même dont Arnauld explicite le rapport de deux grandeurs homogènes lorsqu'il prend comme unité une partie aliquote de la première.

Ainsi deux points de vue apparaissent. Le premier propose une construction rigoureuse s'appuyant sur la notion d'ordre ; s'il élimine la difficulté posée par l'incommensurabilité, il s'écarte, pour les raisons que l'on a dites, de la pratique qu'il veut théoriser. Le second reste plus proche de la pratique de la mesure, contribuant ainsi à mettre en valeur la relation entre le numérique et le géométrique même s'il reste impuissant à définir ce lien de façon rigoureuse jusqu'à la construction des nombres réels.

C'est ce lien entre le géométrique et le numérique défini par la mesure qui conduisait Descartes, en 1637, à unifier les deux calculs, le numérique et le spécieux (le calcul sur le grandeurs), définis par Viète dans son *Introduction à l'Art analytique* [Vi].

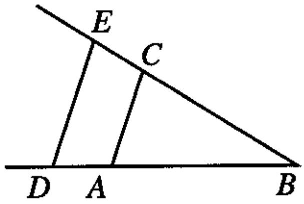
Descartes remarque d'abord, au début de sa *Géométrie* :

> *"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."*[48]

Mettant alors en place ce calcul géométrique qu'est la méthode des coordonnées, Descartes remarque que les grandeurs géométriques qu'il considère peuvent être représentées par des nombres dès lors qu'on a choisi une unité de longueur ; le calcul géométrique, qui participe du calcul spécieux de Viète, devient ainsi un calcul numérique. Notons que Descartes ne pose pas le problème des irrationnelles, il lui semble évident qu'une unité étant choisie, toute longueur peut être représentée par un nombre et inversement tout nombre peut être représenté par une longueur. Descartes rejoint ainsi le point de vue de Stevin (cf. ci-dessus). Ce point de vue lui permet de représenter le produit de deux lignes par une autre ligne, comme il explique

48 Descartes [Des], p. 333

au début de son ouvrage, utilisant le théorème des lignes proportionnelles pour justifier sa construction[49].



Du point de vue géométrique, alors que les géomètres grecs vont chercher dans la méthode des aires les conditions de la rigueur, la notion d'aire, via une théorisation du découpage et de la recomposition des surfaces, devenant une notion première de la géométrie, Arnauld, conformément à sa recherche du *vrai ordre de la nature*, pose l'antériorité de la ligne par rapport à la surface; c'est cet ordre posé *a priori* qui l'amène à mettre en valeur, d'abord la définition positive des parallèles, ensuite la propriété qui énonce que des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments égaux, propriété qu'il énonce deux fois, d'abord au livre VIII (septième corollaire), ensuite au livre X (huitième lemme), propriété qui énonce *la raison géométrique* du théorème des lignes proportionnelles, c'est elle en effet qui, une fois définie la théorie des proportions, guide la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, respectant ainsi le *vrai ordre de la nature*.

Notons le détour par la mesure des angles que propose Arnauld pour démontrer l'égalité des angles alternes-internes; les auteurs ultérieurs qui s'inspireront des méthodes d'Arnauld en donneront une démonstration plus simple s'appuyant sur les cas d'égalité des triangles, lesquels ne semblent pas avoir dans l'ouvrage d'Arnauld l'importante place qu'ils occupent dans l'oeuvre euclidienne; cependant la démonstration de la proportionnalité des angles et des arcs proposée par Arnauld restera un point important des traités de géométrie élémentaire.

D'Alembert pourra ainsi affirmer:

> *"Les propositions fondamentales(de la géométrie) peuvent être réduites à deux: la mesure des angles et le principe de superposition."*[50]

49 ibid. p. 334

50 D'Alembert [Dal], *Essai*,p. 113 ; voir aussi l'article *"Géométrie"* dans l'Encyclopédie [En].

Euclide, après avoir montré que des angles au centre égaux découpent sur des cercles égaux des arcs égaux (*Eléments* Livre III, Propositions 24, 26, 27), utilisait la théorie des proportions du Livre V pour montrer cette proportionnalité (Livre VI, Proposition 33)[51]. Nous verrons ci-dessous comment les auteurs des grands traités de géométrie ont résolu le problème de la proportionnalité des angles et des arcs d'une façon analogue à celle dont ils démontrent le théorème des lignes proportionnelles.

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*

On a vu que pour Arnauld la théorie de la mesure des grandeurs relève d'une arithmétique englobant nombres et grandeurs et que la théorie des proportions relève de cette arithmétique. Cette conception, qui remet en question l'ordre euclidien, sera reprise dans la plupart des grands traités de géométrie élémentaire ultérieurs ; dans ces traités le chapitre consacré aux lignes proportionnelles, qui devient le chapitre introductif à la mesure des grandeurs, s'appuie sur cette arithmétique préalable qui traite des raisons, mêlant arithmétique des nombres et arithmétique des grandeurs (le calcul numérique et le calcul spécieux de Viète) et précisant parfois, à la façon de Descartes, que le choix d'une unité permet d'*identifier* ces deux calculs ; on évite ainsi une définition précise des proportions, se contentant de les définir comme des égalités de rapports sans que la notion de rapport soit toujours explicitée, soit que l'auteur renvoie à un traité d'arithmétique, soit qu'il juge inutile de préciser une notion qui lui apparaît claire.

Citons, parmi ces traités, les *Eléments de Géométrie* [La] de Lamy, publiés en 1685 et plusieurs fois réédités tout au long du XVIIIe siècle, ouvrage proche de celui d'Arnauld dont il reprend certaines parties, parfois textuellement ; le projet de Lamy était de compléter l'ouvrage d'Arnauld en y ajoutant la géométrie solide, comme Lamy l'explique dans la préface de son ouvrage.

---

51 Notons la difficulté posée par la définition d'un multiple d'un angle ou d'un arc ; en effet, pour Euclide, la notion d'angle implique que celui-ci est moindre que deux droits, cependant Euclide peut être amené à considérer des sommes d'angles plus grandes que deux droits ; pour une discussion de ce problème, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Heath [He1] (tome II, p. 275-276). Le point de vue d'Arnauld, qui utilise les parties, évite cette difficulté.

Lamy s'appuie sur la théorie des grandeurs qu'il a développé dans un ouvrage antérieur et dont il donne un extrait à la fin de ses *Eléments de Géométrie*[52].

Comme dans l'ouvrage d'Arnauld, la raison est *"la manière dont une grandeur contient ou est contenue dans celle avec laquelle on la compare"*[53], une proportion étant une égalité de raison. Si Lamy distingue raison de nombre à nombre et raison sourde, il n'explicite pas l'égalité de raison sourde.

Lamy introduit, comme Arnauld, la notion d'espace parallèle et démontre, utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles, les deux lemmes suivants[54] :

> *"Les lignes également obliques des espaces parallèles dans des espaces égaux sont égales."*
>
> *"Les lignes également obliques dans des espaces parallèles inégaux sont inégales ; plus grande si l'espace est plus grand, plus petite si l'espace est plus petit."*

Il peut alors énoncer le théorème :

> *"Ayant partagé un espace parallèle par deux ou plusieurs parallèles, la perpendiculaire de l'espace et la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement"*

En fait Lamy ne démontre le théorème que dans le cas commensurable, se contentant de remarquer, sans autre précision, que si une division en parties égales de la perpendiculaire laisse une partie soit plus petite soit plus grande, la même propriété aura lieu pour la division définie sur l'oblique. Si ce raisonnement semble renvoyer à celui d'Arnauld, il reste incomplet dans la mesure où l'égalité de raison n'est pas définie.

Notons que si Lamy ne définit pas la raison comme un nombre, il lui associe ce qu'il appelle l'*exposant* de la raison, qu'il définit comme le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, mais le quotient lui-même n'est pas défini ; voici ce qu'écrit Lamy :

> *"Divisant l'un des deux termes d'une raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appelé l'exposant de cette raison.*

---

52 Dans l'édition (posthume)de 1753, la théorie des grandeurs est intégrée dans les *Éléments de Géométrie.*

53 Lamy [La1], p. 338

54 ibid. p. 103

Parce qu'il expose et fait connaître la manière que l'un des deux termes contient l'autre ou en est contenu"[55]

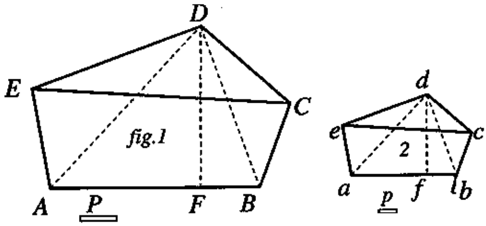
Dans les *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Arnauld avait défini l'exposant d'une raison de nombre à nombre ; pour une telle raison, l'exposant est représenté par la fraction irréductible qu'elle détermine[56] ; deux raisons de nombre à nombre sont alors égales si et seulement si elles ont le même exposant. Arnauld précisait que cette dernière proposition ne peut s'étendre aux raisons sourdes, la notion d'exposant ne pouvant être définie dans ce cas[57].

Lamy ne semble pas prendre de telles précautions ; d'une certaine façon, l'exposant, même s'il n'est pas un nombre, se comporte comme un nombre. Tout cela nous montre l'ambiguïté de la mise en place d'une relation entre grandeurs et nombres, ambiguïté née du coup de force de Stevin, ambiguïté qui marque une étape obligée dans le développement de la notion de nombre comme nous le verrons avec les traités de Legendre et de Lacroix.

Les idées développées par Arnauld seront reprises tout au long du XVIII^{e} siècle, nous ne pouvons ici citer tous les ouvrages traitant de la théorie des proportions géométriques, nous arrêtant seulement à deux traités, les *Elémens de Géométrie* de Clairaut qui restent l'un des meilleurs ouvrages d'introduction à la géométrie écrit jusqu'à ce jour (ouvrage malheureusement ignoré par l'enseignement) et le *Traité Elémentaire de Géométrie* de Bossut pour la démonstration qu'il donne du théorème des lignes proportionnelles.

Dans la préface de son ouvrage, Clairaut précise ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie insistant sur la nécessité de construire cet enseignement à partir d'une problématique bien définie. C'est ainsi qu'il s'appuie sur la mesure des terrains, problématique qu'il a choisi dans la mesure où elle lui sert *"d'occasion pour faire découvrir les principales propriétés géométriques"*[58].

C'est la nécessité de représenter à l'échelle les terrains que l'on veut mesurer qui conduit Clairaut à introduire la notion de figures semblables.



55 ibid. p. 341
56 Arnauld [Arn1], p. 60 et Arnauld [Arn2], p. 92
57 Arnauld [Arn2], p. 102
58 Clairaut [Cl], p. xiv

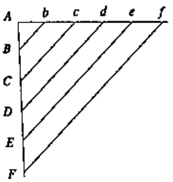
Deux figures *ABCDE* et *abcde* sont semblables si d'une part les angles *A, B, C, D, E* sont respectivement égaux aux angles correspondant a, *b, c, d, e*, et si chacun des cotés *ab, bc, cd, de, ea* de la seconde figure contient une partie *p* autant de fois que chacun des côtés correspondants *AB, BC, CD, DE, EA* contient une partie *P*[59]. C'est cette dernière condition qui définit, selon Clairaut, la proportionnalité[60].

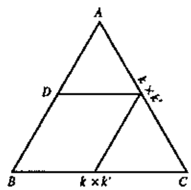
Dans un premier temps, Clairaut développe la théorie des figures semblables pour les seuls rapports commensurables ; il montre en particulier que deux triangles équiangles sont semblables, de façon précise si les triangles *ABC* et *abc* sont équiangles et si *ab* est égal à une fraction de *AB*, alors *ac* (resp: *bc*) est égal à la même fraction de *AC* (resp: *BC*)[61].

C'est seulement à la fin du livre II, consacré à des calculs d'aires, que Clairaut étudie le cas des rapports incommensurables en utilisant une méthode d 'approximation proche de celle d'Arnauld[62].

Le traité de Bossut a été rédigé à l'usage des candidats des concours d'entrée aux Ecoles militaires[63].

Dans la section de son traité relative aux lignes proportionnelles, Bossut montre d'abord que, si un côté d'un angle est divisé en parties égales et si l'on mène à partir des points de division des droites parallèles, elles découperont sur l'autre côté des parties égales (proposition I[64]). Il peut alors énoncer que dans un triangle *ABC*, une parallèle *DE* au côté *BC* partage les deux autres côtés en parties proportionnelles (proposition II[65]); lorsque *AB* et *AD* sont des grandeurs commensurables, Bossut divise *AB* en parties égales à une partie aliquote commune et la démonstration se réduit à un comptage, lorsque *AB* et *AD* sont des grandeurs incommensurables, Bossut divise le côté *AB* en *"une infinité de parties égales"*, les parallèles à *BC* menées par les points de division partagent le côté *AC* en parties égales, alors les points *D* et *E"tomberont ou seront censés tomber sur deux points de*





59 ibid. Livre I, Article XXXIII
60 ibid. Livre I, Article XXXV
61 ibid. Livre I, Article XXXIX
62 ibid. Livre II, Article XXVII
63 Taton et als [Tat]
64 Bossut [Bos], chapitre III, section I, p. 83
65 ibid. p. 86

division de AB et AC", ce qui implique la proposition.

On peut comprendre une telle démonstration si on la relie à la géométrie de l'infini telle que l'ont développée Wallis et plus tard Fontenelle, variante de la théorie des indivisibles, l'infini apparaissant comme un *"nombre"* supérieur à tous les entiers[66].

On pourrait alors poser le problème d'une mise en forme d'une telle démonstration dans le cadre d'une géométrie non-standard qui userait des méthodes proches de celles de l'analyse non-standard.

2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*

Avec l'ouvrage de Legendre[67], c'est un retour à Euclide qui se met en place ; nous n'analyserons pas ici l'ouvrage dans son ensemble, renvoyant à un article ultérieur[68], nous nous contenterons ici d'étudier la démonstration du théorème de Thalès et la relation entre le numérique et le géométrique sur laquelle elle s'appuie. Si Legendre revient à la méthode des aires pour retrouver la rigueur euclidienne (on verra en particulier l'utilisation de la méthode d'exhaustion), sa théorie de la mesure s'appuie sur une arithmétique préalable dont il rappelle les résultats au début de son ouvrage, et à laquelle il renvoie les notions de raison et de proportion, comme il l'explique dans la préface des premières éditions :

> *"Il est nécessaire, pour l'intelligence de cet ouvrage, que le lecteur ait la connaissance de la théorie des proportions, que l'on trouve expliquée dans les traités ordinaires d'arithmétique ou d'algèbre..."*[69]

Il peut ainsi mêler dans ses raisonnements, comme nous le verrons, les méthodes euclidiennes et les propriétés numériques.

Au début du livre III, intitulé *Les proportions des figures* Legendre remarque a propos des proportions :

> *"Si on a la proportion* A:B :: C:D (A est à B comme C est à D), *on sait que le produit des extrêmes* $A \times D$ *est égal au produit des moyens* $B \times C$."[70],

et il explique

> *"Cette vérité est incontestable pour les nombres; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou*

66 cf. Wallis[We] et Fontenelle [Fo] ; cf. aussi Chevalier [Chl] et Michel Blay [Bl].

67 Legendre [Le]

68 Bkouche [Bk3]

69 Legendre [Le], préface de la troisième édition p. ii

70 ibid. p. 61

qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer: par exemple, si A, B, C, D, sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres."

mêlant ainsi, comme le veut la tradition cartésienne (Cf. ci-dessus), calcul numérique et calcul spécieux.

3. *La méthode des aires*

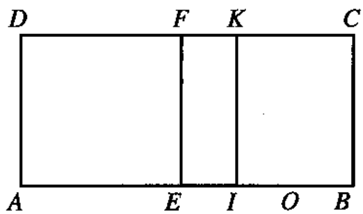
Notons d'abord que l'un des objectifs de Legendre est de démontrer le postulat des parallèles qu'il énonce sous la forme :

"Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits."

Les diverses éditions de son ouvrage correspondent aux différentes démonstrations qu'il donne de cette assertion, (notons que dans les neuvième, dixième et onzième éditions, devant les critiques, il renonce à cette démonstration jusqu'à ce qu'il en trouve une nouvelle qu'il publie dans la douzième édition), mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici.

Une fois démontrée cette assertion, Legendre peut démontrer la proposition énoncée comme postulat par Euclide, puis l'égalité des angles correspondants et alternes-internes définis par deux droites parallèles coupant une autre droite. Au livre III de son ouvrage, Legendre montre d'abord, à la façon d'Euclide, que les parallélogrammes (resp. les triangles) ayant des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents (c'est-à-dire ont des aires égales), puis il énonce l'assertion (proposition 3) :

"Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases."



Lorsque les bases sont commensurables, l'assertion résulte d'un découpage convenable.

Lorsque les bases sont incommensurables, Legendre utilise la méthode d'exhaustion (c'est-à-dire la double réduction à l'absurde (cf. ci-dessus note 32))

On veut montrer que l'aire $ABCD$ est à l'aire $AEFD$ comme AB est à AE, on considère le point O défini par la proportion

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEFD :: AB : AO$$

l'existence du point O étant assurée par les propriétés arithmétiques des proportions numériques (en particulier le recours à l'arithmétique assure l'existence de la quatrième proportionnelle, dans la mesure où l'on admet que l'unité de longueur étant donnée, à tout nombre correspond une longueur).

On va montrer que O et E coïncident en prouvant que chacune des inégalités $AO > AE$ et $AO < AE$ conduit à une contradiction.

Supposons $AO > AE$, auquel cas le point O est entre E et B ; divisons AB en parties égales à une longueur inférieure à celle de EO, il existe alors un point de division I situé entre E et O, auquel cas, considérant le rectangle $AIKD$, on peut écrire

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AIKD :: AB : AI$$

et par conséquent,

$$\text{aire } AIKD : \text{aire } AEFD :: AI : AO$$

mais $AEFD$ est plus petit que $AIKD$ et AO est plus grand que AI, ce qui est contradictoire.

De même, on montre que l'hypothèse $AO < AE$ est contradictoire, ce qui prouve l'égalité $AO = AE$, donc les points O et E coïncident.

Les ingrédients de la démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires sont ainsi en place, mais le théorème apparaît seulement à la proposition 15 ; avant d'utiliser la méthode des aires, Legendre explique comment on peut dire que l'aire d'un rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, en reliant cette formule au choix des unités. En fait, Legendre énonce la propriété suivante (proposition 4):

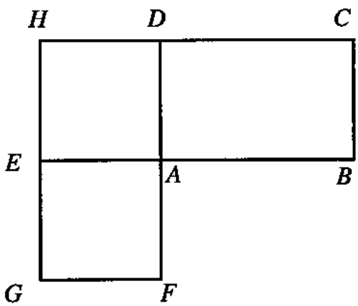
Deux rectangles quelconques $ABCD$, $AEGF$ sont entre eux comme les produits des bases multipliés par les hauteurs, de sorte qu'on a

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEGF :: AB \times AD : AE \times AF$$

En effet, disposant les deux rectangles comme ci-dessous, on a les proportions

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEHD :: AB : AE$$
$$\text{aire } AEHD : \text{aire } AEGF :: AD : AF$$

on obtient la proportion cherchée par multiplication.



Legendre remarque alors que *"l'on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la* *base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur"*[71].

Legendre explique que cette mesure n'est pas absolue, mais qu'elle le devient si on prend comme unité de surface le carré dont le côté est l'unité de longueur.

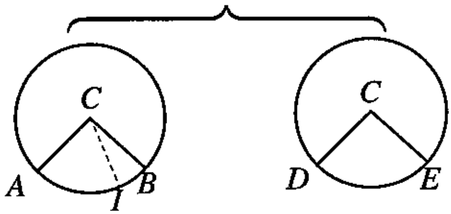
Cela étant dit, la méthode des aires devient une méthode de calcul et c'est ainsi qu'il l'utilise dans la suite, transformant en calcul le raisonnement euclidien, mêlant calcul numérique et calcul spécieux.

Legendre démontre ainsi plusieurs résultats des livres I et II des *Eléments* d'Euclide, dont le théorème de Pythagore (sa démonstration est celle d'Euclide), le théorème de Thalès est énoncé seulement à la proposition 15, l'énoncé et la démonstration sont ceux d'Euclide.

La suite du livre III est consacrée à l'étude des figures semblables. Il en déduit les classiques relations métriques dans un triangle. Ces relations portent, une fois l'unité choisie, sur les mesures de longueurs; les démonstrations se ramènent ainsi à un simple calcul (en cela Legendre se détache de la tradition euclidienne).

Notons que Legendre utilise la même méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs[72]. Il montre d'abord, en utilisant le principe de superposition, la proposition suivante (Livre II, proposition 15):

"Dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, les angles égaux **ACB, DCE** *dont les sommets sont au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux* **AB, DE.**



Réciproquement, si les arcs **AB, DE** *sont égaux, les angles* **ACB, DCE** *seront aussi égaux."*

Legendre montre alors l'égalité des rapports des angles aux centres et des rapports des arcs qu'ils sous-tendent dans le cas commensurables (proposition 16), puis, utilisant une méthode analogue à celle qu'il utilisera pour la démonstration de la proposition 3 du Livre III (cf. ci-dessus), il montre l'égalité des rapports dans le cas incommensurable (proposition 17). Nous laissons au lecteur le plaisir d'écrire une telle démonstration, sachant que Legendre admet, comme Euclide, l'existence de la quatrième proportionnelle. Ici la démonstration est indépendante de tout recours au numérique.

71 ibid. p. 66

72 ibid., p. 43 et sqq

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

On dit souvent que, jusqu'à la réforme dite des *mathématiques modernes*, l'enseignement de la géométrie en France a suivi l'ouvrage de Legendre, c'est en partie vrai[73], mais c'est oublier l'influence de Lacroix et à travers lui de Port-Royal. Lacroix s'appuie à la fois sur les logiciens de Port-Royal et sur l'empirisme des Lumières, en particulier le sensualisme de Condillac, comme il l'explique dans un long discours préliminaire publié dans certaines éditions de ses *Elémens de Géométrie*[74].

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*

Les Elémens de Géométrie de Lacroix constituent le troisième volume d'un cours élémentaire de mathématiques pures à l'usage des élèves de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations[75], cours qui comprend un *Traité élémentaire d'Arithmétique*, des *Elémens d'Algèbre*, les *Elémens de Géométrie*, un *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, ainsi que des *Compléments des Elémens d'Algèbre*.

Dans le discours préliminaire qui introduit les *Elémens de Géométrie*, Lacroix exprime les principes généraux qui ont guidé l'ouvrage et qui reposent sur *le vrai ordre de la nature* et la correspondance entre cet ordre et l'ordre de la connaissance, *l'ordre des abstractions* pour utiliser le langage de Condillac. En fait, même si les logiciens de Port-Royal refusent l'empirisme[76], un empiriste comme Condillac partage avec eux le principe d'un ordre de la nature et le principe d'une correspondance entre l'ordre de la connaissance et l'ordre naturel. Ainsi Condillac écrit dans son *Essai sur l'origine des connaissances humaines*:

> *"La nature indique elle-même l'ordre qu'on doit tenir dans l'exposition de la vérité."*[77]

C'est ce souci du *"vrai ordre de la nature"* qui conduit Lacroix à reprendre, en ce qui concerne les propriétés des lignes proportionnelles, l'exposé d'Arnauld qui démontre ces propriétés en s'appuyant sur les lignes, évitant le détour euclidien par les aires, mais ce souci du vrai ordre de la

---

73 En particulier, la division en Livres du cours de géométrie est restée celle de l'ouvrage de Legendre jusqu'au milieu de notre siècle.

74 Lacroix [La3], discours préliminaire (publié dans la quatrième édition) ; pour une étude de l'influence de Port-Royal et des empiristes sur l'enseignement de la géométrie, nous renvoyons aux deux articles de Bkouche [Bk2] et [Bk3].

75 sur l'Ecole Centrale des Quatre Nations, cf. Taton [TaT], p...

76 Arnauld, Nicole [AN], p. 69-72

77 Condillac [Cn], p. 288

nature n'exclut pas la rigueur, et la rigueur est celle d'Euclide, comme l'explique Lacroix dans son discours préliminaire, se proposant de montrer *"qu'on peut accorder l'ordre et la rigueur"*[78], l'ordre de la nature et non l'ordre artificiel de la construction euclidienne, et la rigueur euclidienne trop oubliée dans les ouvrages du XVIII^e^ siècle.

Nous noterons cependant l'usage de la méthode d'exhaustion dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, même si Lacroix utilise la méthode des limites pour d'autres questions, méthode qui nous semble plus proche du point de vue d'Arnauld; mais c'est que la relation entre le géométrique et le numérique se heurte encore à la question de la définition des nombres, question qui ne sera résolue que par la construction des réels dans la seconde partie du siècle. Lacroix hésite dans son exposé entre une méthode d'exhaustion qui reste la méthode rigoureuse, même si elle apparaît comme un détour peu naturel, et une méthode des limites plus naturelle mais encore floue. Nous verrons ci-dessous comment Lacroix, à propos des incommensurables qu'il ne sait pas définir rigoureusement, évite la question dans ses *Elémens d'Algèbre* et, pour rendre rigoureux son discours géométrique, admet implicitement, comme le fait Legendre, l'existence d'une quatrième proportionnelle; par contre, pour éviter les difficultés du calcul sur les grandeurs, il exprime, via la mesure, les relations métriques comme des relations numériques. Nous verrons plus loin quelle fut son influence sur les traités de géométrie élémentaire des XIXe et XXe siècle.

2. *Les proportions*

Les *Elémens de Géométrie* s'appuient sur la connaissance préalable de l'arithmétique dont relève la théorie des proportions; notons que le *Traité d'Arithmétique* ne traite que des rapports entiers ou fractionnaires[79], de même le supplément d'arithmétique placé au début des *Elémens de Géométrie*, qui traite du calcul des proportions. Les nombres irrationnels apparaissent dans les *Elémens d'Algèbre* avec le calcul des racines carrées; Lacroix y montre que la racine carrée d'un entier n'est en général pas un entier mais ajoute:

> *"Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque..."*[80]

---

78 Lacroix [La3], discours préliminaire, p. xxii; Lacroix se réfère à l'exemple donné par Bertrand qui a plublié en 1778 un ouvrage intitulé. *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques*, ouvrage souvent cité à l'époque.

79 Lacroix [La 1], n° 108-120

80 Lacroix [La 2], n° 99

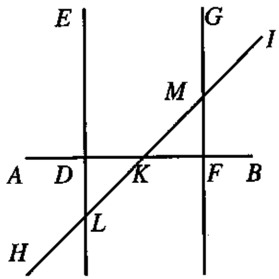
ce qui le conduit à distinguer deux sortes de nombres, les nombres rationnels qui sont commensurables avec l'unité et les nombres irrationnels qui sont incommensurables, avant d'exposer la méthode arithmétique de calcul approché des racines carrées.

En ce qui concerne la géométrie, il explique dans les premières pages de son ouvrage comment trouver la commune mesure de deux droites, méthode analogue à la recherche du p.g.c.d. de deux nombres, distinguant deux cas suivant que l'opération s'arrête ou non[81].

3. *Les lignes proportionnelles*

Nous ferons d'abord quelques remarques sur la théorie des parallèles ; celles-ci étant définies comme des droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas, Lacroix admet l'axiome qui dit que *"une droite perpendiculaire à une autre, est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre"*[82]; rappelons qu'un axiome est, pour Lacroix comme pour Legendre, *"une propriété évidente par elle-même"*.

Il peut alors montrer l'égalité des angles correspondants et alternes-internes en utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles[83]:

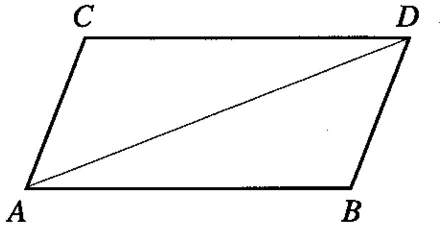


Soit la droite HI coupant les parallèles DE et FG en deux points L et M et soit K le milieu de LM, on mène de K la perpendiculaire aux deux parallèles données, alors les triangles rectangles DLK et FMK sont égaux, ce qui implique les égalités cherchées.

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème :

> *"Les parties AC et BD de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement."*[84]

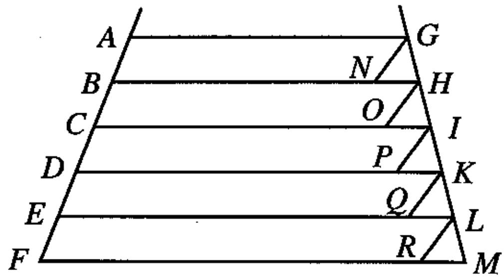
81 Lacroix [La 3], n° 3-4
82 ibid. n° 39
83 ibid. n° 47-47
84 ibid. n° 55



Il suffit de remarquer que les triangles *ABD* et *ACD* sont égaux. On en déduit que deux parallèles *"sont partout également éloignées l'une de l'autre"*[85].

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

> *"Si deux droites quelconques AF et GM sont coupées par un nombre quelconque de parallèles, AG, BH, CI, etc. menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties GH, HI, IK, etc. de la seconde, seront aussi égales entre elles."*[86]



Il suffit de remarquer, d'abord que les droites *GN*, *HO*, *IP*, etc. sont égales, puis que les triangles *GNH*, *HOI*, *IPK*, etc. sont égaux.

On montre alors le théorème :

> *"Trois parallèles AG, DK, FM, coupent deux droites quelconques AF et GM en parties proportionnelles."*[87]

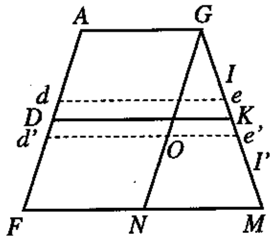
---

85 ibid. n° 55

86 ibid. n° 56

87 ibid. n° 58

Si AD (Cf. figure ci-contre) est commensurable avec AF, c'est une conséquence du théorème précédent. Lorsque AD et AF sont incommensurables, Lacroix utilise la méthode d'exhaustion, admettant implicitement, comme nous l'avons déjà dit, l'existence d'une quatrième proportionnelle.



Soit I le point de la droite GM tel que

$$AF : AD :: GM : GI$$

on va montrer que les points I et K coïncident.

Supposons $GI < GK$, et divisons AF en parties égales suffisamment petites de sorte qu'il existe un point de division d tel que la parallèle menée par d à AG rencontre GM en un point e situé entre I et K, alors

$$AF : Ad :: GM : Ge$$

et par conséquent

$$Ad : AD :: Ge : GI$$

or $Ad < AD$ et $Ge > GI$, ce qui est contradictoire.

De même si on suppose $GI > GK$, on obtient une contradiction, par conséquent $GI = GK$, autrement dit I et K coïncident.

Notons que ce même raisonnement d'exhaustion est employé dans la suite de l'ouvrage pour montrer la proportionnalité entre angles et arcs[88], c'est aussi, nous l'avons vu, la méthode qu'emploie Legendre dans ses *Elémens de Géométrie*.

Une fois démontré le théorème des lignes proportionnelles, Lacroix étudie la similitude et en déduit les relations métriques usuelles dans les triangles ; comme chez Legendre, ces relations portent sur les mesures des grandeurs considérées. C'est ainsi que Lacroix énonce le théorème de Pythagore :

> *".. les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse, est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés."*[89]

En fait il montre d'abord le théorème :

> *"Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on appelle hypoténuse,*
> *1°. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui*

88 ibid. n° 109
89 ibid. n° 75

seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux.
2°. elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.
3°. La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse."[90]

Dans l'énoncé et dans la démonstration de ce théorème, Lacroix travaille sur les lignes, mais pour effectuer les calculs qui conduisent au théorème de Pythagore, il utilise les mesures, se ramenant à un calcul purement numérique ; en cela il se distingue de Legendre qui, comme on l'a déjà remarqué, mêle calcul numérique et calcul spécieux.

Enfin notons que l'ouvrage de Lacroix marque l'abandon dans les traités d'enseignement de la méthode des aires.

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*

Tout au long du XIX^e siècle et dans la première partie du XX^e siècle[91] on retrouve plusieurs points communs dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles (qui deviendra le théorème de Thalès), lesquels se rattachent essentiellement au point de vue de Lacroix[92].

D'un point de vue géométrique, on abandonne définitivement la méthode des aires et on utilise essentiellement la démonstration de Lacroix, que l'on énonce le théorème pour un triangle ou pour la figure formée par deux droites coupées par des parallèles. Nous n'insisterons pas sur ce point.

En ce qui concerne les rapports de grandeurs, les auteurs s'appuient sur une arithmétique préalable, soit qu'ils renvoient à d'autres ouvrages, soit qu'ils explicitent cette arithmétique préalable dans leur ouvrage.

Les rapports de grandeurs sont définis via la mesure des grandeurs dont on admet qu'elle est possible (rejoignant ainsi le point de vue de Legendre (cf. ci-dessus)).

Voici par exemple la définition donnée en 1883 par Amiot dans ses *Eléments de Géométrie* (rédigés d'après les programmes de l'enseignement scientifique des lycées) :

---

90 ibid. n°74

91 nous ne parlerons pas dans cet article des ouvrages de la réforme de 1970 et des contre-réformes qui ont suivi.

92 on peut noter ici une continuité depuis le point de vue développé par Arnauld et les Philosophes de Port Royal.

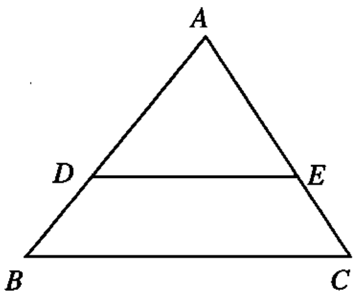
"Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre qui exprimerait la mesure de la première si on prenait la seconde pour unité."[93]

Amiot distingue alors entre rapports de grandeurs commensurables et rapport de grandeurs incommensurables ; dans le premier cas, le rapport est un nombre entier ou fractionnaire, dans le second cas, *"il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde comme unité"*.[94]

Amiot remarque alors que deux grandeurs *A* et *B* incommensurables étant données, on peut trouver une grandeur *A'* commensurable à *B* *"qui diffère de A aussi peu que l'on veut"*, et il précise : *"dans les applications numériques, on remplace* A *par A', et lorsqu'on parle du rapport de A à B, il faut entendre celui de A' à B*[95].

L'égalité des rapports se ramène ainsi, sans que Amiot l'explicite plus, à l'égalité des rapports commensurables.

Dans un ouvrage antérieur, le *Cours de Géométrie élémentaire* (à l'usage des Lycées et Collèges et de tous les établissements d'instruction public) publié en 1859, Guilmin , après avoir énoncé le théorème :



"Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles"[96]

et démontré celui-ci dans le cas ou *AB* et *AD* sont commensurables, expliquait :

"Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments AD, DB du même côté de AB, ce théorème est donc vrai en général."[97]

On rencontre de telles explications encore au XX^e siècle. Ainsi dans les *Eléments de Géométrie* de Vacquant et Macé de Lépinay (à l'usage des classes de sciences des lycées), les auteurs écrivent, après avoir donné une

93 Amiot [Am], p. 55

94 Ainsi, la question se pose encore de savoir si un rapport incommensurable peut être représenté par un nombre.

95 Amiot [Am], p. 56

96 Guilmin [Gu], p. 77

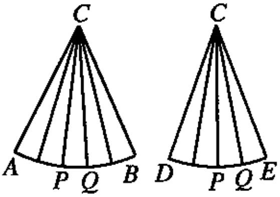
97 Guilmin [Gu], p. 78

démonstration de l'égalité des rapports des arcs et des angles qui les sous-tendent en utilisant des approximations rationnelles des rapports incommensurables,

> *"Pour le commençant, il convient de terminer comme il suit la démonstration (donnée dans le cas commensurable) : le théorème étant vrai quelque soit la commune mesure entre les arcs, il est encore vrai quand les arcs sont incommensurables."*[98]

La démonstration donnée par Vacquant et Macé de Lépinay met l'accent sur les problèmes de l'incommensurabilité d'une façon qui, si elle reste insuffisante du point de vue canonique (les nombres réels ne sont pas définis), met en valeur les points essentiels du problème; nous indiquons ici les grandes lignes de la démonstration[99].

> *"Si, des sommets de deux angles comme centre, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre les côtés de chacun des deux angles."*



Les auteurs démontrent d'abord le théorème dans le cas ou les arcs *AB* et *DE* ont une commune mesure; c'est alors un simple exercice de comptage.

Dans le cas où les arcs *AB* et *DE* sont incommensurables, on partage *DE* en un certain nombre de parties égales, soit *n* ; supposons que *AB* soit supérieur à *m* de ces parties mais inférieur à *m*+1 d'entr'elles, les auteurs raisonnent de la façon suivante :

> *"Les nombres m/n et (m + 1)/n sont les valeurs approchées par défaut et par excès, à moins de 1/n, du rapport des arcs* AB *et* DE. *Or si nous menons les rayons par les points de division des arcs* AB *et* DE, *l'angle* DCE *se trouve partagé en n parties égales, et l'angle* AOB *est supérieur à m de ces parties et inférieur à m + 1. Les nombres m/n* et *(m + 1)/n sont donc aussi les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de 1/n, du rapport des angles* AOB *et* DCE. *Les valeurs approchées à moins de 1/n des deux rapports étant égales, quelque soit n, les rapports sont égaux."*

L'argument renvoie à une propriété énoncée au début de l'ouvrage à propos de la mesure des grandeurs.

98 Vacquant et Macé de Lépinay [VM], p. 81, note 1.

99 ibid. p. 80-81 ; en ce qui concerne le théorème de Thalès (ainsi appelé dans l'ouvrage), les auteurs renvoient à cette démonstration, cf. p. 134.

Vacquant et Macé de Lépinay y appelle *"**rapport** de deux grandeurs de même espèce, rangées dans un certain ordre, le nombre qui est la **mesure** de la première quand on prend la seconde pour unité"*[100].

La mesure est définie soit par un nombre entier ou fractionnaire lorsque les grandeurs sont commensurables, soit comme limite de valeurs approchées lorsqu'on compare la première grandeur à une grandeur commensurable à la seconde (la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$ près du rapport de A à B est le nombre m/n tel que A contienne m fois la n-ième partie de B mais soit contenu dans $m + 1$ fois cette partie). Cette limite (dont l'existence est admise) est appelée un *"nombre incommensurable"*.

Vacquant et Macé de Lépinay expliquent alors que, quatre grandeurs de même espèce étant données, le rapport de A à B et le rapport de C à D sont égaux si ces rapports ont même valeur approchée à moins de $1/n$ près pour toute valeur de n. On peut y voir une forme plus élaborée de la définition d'Arnauld.

On trouve ici la trace de la construction des réels élaborée dans la seconde partie du XIXᵉ siècle et la mise en place d'une théorie de la mesure s'appuyant sur cette construction, même si les auteurs, s'adressant à des élèves de lycées s'en tiennent à un niveau intuitif. En fait, il s'agit moins de donner une construction rigoureuse que d'indiquer les grandes lignes de ce que serait cette construction en précisant la notion d'approximation, celle-ci restant liée à l'opération même de mesure, et l'existence du nombre défini par l'opération de mesure étant admise[101].

On voit ici, par rapport aux ouvrages du siècle précédent, un effort de rigueur dans la définition des rapports incommensurables ; en particulier, la mesure n'est plus un simple donné auquel on renvoie comme le fait Legendre, elle est au coeur de la construction et l'arithmétique préalable s'inscrit dans le géométrique[102]. On peut comprendre alors que les auteurs demandent, dans une première lecture, de passer outre et d'admettre le pseudo-raisonnement qu'ils proposent au commençant.

2- *Constructions des nombres réels et mesure des grandeurs*

Nous avons déjà cité dans le paragraphe précédent des ouvrages s'appuyant, implicitement ou explicitement, sur la notion des nombres réels

100 ibid. p.5-7

101 On trouve une démonstration analogue (toujours à propos de la mesure des arcs et des angles dans le Cours de Géométrie de Neveu et Bellanger à l'usage des écoles primaires supérieures [NB] (1ère année, p. 152-156). La démonstration du théorème de Thalès (2ème année, p. 17) renvoie à cette démonstration.

102 Il faut toutefois noter que les nombres ont ici une existence propre indépendante de la géométrie

telle qu'elle s'est élaborée dans la seconde moitié du XIXe siècle. C'est l'aspect géométrique (ou plus généralement l'aspect mesure des grandeurs) qui est mis en valeur. Mais la notion de grandeur n'est pas absente de la construction des réels même si cette construction se réduit à des considérations purement arithmétiques (ce que l'on a appelé *l'arithmétisation de l'analyse*), l'arithmétique jouant ici le rôle d'un principe unificateur des mathématiques avant que ce rôle ne soit dévolu à la théorie des ensembles.

Le lien entre arithmétique et géométrie est souligné par Dedekind dans son cours d'analyse lorsqu'il développe la construction des nombres réels par les coupures[103].

Même si la problématique de Dedekind relève de l'analyse (comment fonder le calcul différentiel[104]), c'est la géométrie qui va guider la construction (la *création* dit Dedekind) des nombres réels ; c'est pour établir une correspondance biunivoque entre les nombres et les points de la droite et assurer ainsi la continuité des nombres que Dedekind fabrique les nombres réels ; en retour, la construction *arithmétique* des nombres réels, indépendamment de tout recours à la géométrie, permet de préciser ce qu'on entend par continuité de la droite[105]. En ce sens, c'est la construction du continu arithmétique qui permet de redéfinir le continu géométrique.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire des nombres réels, celle-ci ne nous intéresse que par ses relations avec la mesure des grandeurs. Une construction purement arithmétique du numérique permet une nouvelle définition de la mesure des grandeurs, définition qui, nous le verrons, est plus proche de la pratique de la mesure (associer un nombre à une grandeur) que la construction d'Eudoxe, tout en apportant du point de vue de la rigueur le fondement qui manquait aux méthodes d'approximations développées aux XVIIe et XVIIIe siècles[106].

C'est une telle construction de la mesure des grandeurs que développe Jules Tannery dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, ouvrage

103 Ce cours eut lieu en 1862-1863, mais ne sera publié qu'en 1872. Il constitue la première partie de l'édition anglaise: *Essay on the theory of numbers* [Ded]. Pour une étude de cet ouvrage, nous renvoyons à l'ouvrage de P. Dugac [Dug].

104 Dedekind [Ded], p. 1.

105 Comme l'explique Dedekind, la continuité de la droite *«n'est autre qu'un axiome»* (ibid, p.12) l'existence d'un espace n'impliquant pas qu'il soit continu. Une fois les nombres réels construits, c'est un axiome géométrique qui précisera la correspondance biunivoque entre les nombres réels et les points de la droite, ce que l'on a appelé *l'axiome de Cantor-Dedekind* (voir par exemple: Valiron [Va], p. 3 et l'article de Enriques dans l'*Encyclopédie des Siences Mathématiques* [Enr], p. 34-36).

106 Bourbaki [Bou], p. 184-185.

qui s'inscrit dans une collection à l'usage de la classe de Mathématiques[107], collection qui comprend entre autres les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

Les trois derniers chapitres qui *"s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques"*[108] exposent la construction des nombres réels (chapitre XII), la théorie de la mesure des grandeurs (Chapitre XIII) et une introduction à la théorie des nombres (chapitre XIV).

Après avoir construit les nombres réels par la méthode des coupures de Dedekind, Tannery définit la mesure des grandeurs comme correspondance entre grandeurs et nombres.

Les nombres ayant été construits de façon autonome (c'est-à-dire indépendamment de toutes considérations de grandeurs), Tannery se propose de mettre en forme la définition classique

> *"On appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution."*[109]

Tannery élimine d'abord de son étude les grandeurs discrètes (dont la mesure ne relève que du comptage) et s'intéresse aux grandeurs satisfaisant la propriété suivante :

> *"Si l'on compare deux états A, A' quelconques, mais distincts, il y a au moins un état intermédiaire A"*[110].

autrement dit, si $A < A'$, il existe A'' tel que $A < A'' < A'$; Tannery remarque alors qu'il y a une infinité d'états intermédiaires.

Il peut alors établir la correspondance suivante :

> *"Etant donné deux états* A, A' *de la grandeur* (G) *et supposons qu'on ait* A < A' (...) *imaginons qu'on fasse correspondre aux états* A et A' *deux nombres entiers,* 10 *et* 20 *par exemple, en ayant soin de faire correspondre le plus petit entier* 10 *à la plus petite des grandeurs* A, A'.
>
> *Aux différents nombres entre* 10 *et* 20, *nous allons faire correspondre des états intermédiaires à* A *et* A' *en observant la condition suivante que j'appellerai la condition fondamentale, si aux nombres distincts* b, c, *on fait correspondre les états distincts* B, C, *on aura* B < C *ou* B > C *suivant que* b < c *ou* b > c. *A des nombres égaux, on fera correspondre les mêmes états de grandeur.*

---

107 Il s'agit de la classe terminale plus tard appelée classe de *mathématiques élémentaires*, devenue après la réforme Fouchet de 1965, la TC (Terminale C).

108 Tannery [TanJ], préface de la première édition (1894), p.vi de l'édition citée. On peut voir, à la lecture de ces ouvrages, que ceux-ci ne se réduisent pas à de simples manuels.

109 Tannery [TanJ], p. 470.

110 ibid., p. 471

Aux nombres entiers compris entre 10 *et* 20 *faisons correspondre, d'après une loi déterminée mais d'ailleurs arbitraire, des états intermédiaires à* A *et* A', *en observant la graduation précédente.*

On a ainsi établi une certaine échelle des graduations entre A *et* A'."[111]

On peut alors affiner l'échelle en ajoutant des nombres fractionnaires entre 10 et 20, cet affinement pouvant être mené aussi loin qu'on le veut; on peut ainsi associer à tout nombre rationnel (ici compris entre 10 et 20) un état de la grandeur considérée (G).

Tannery remarque alors qu'un état B de la grandeur (G) est alors soit numéroté par un rationnel, soit n'est pas numéroté. Dans ce dernier cas, il est clair que B détermine une coupure donc un nombre irrationnel ; à tout état B de la grandeur (G) intermédiaire à A et A', on associe ainsi un nombre réel compris entre 10 et 20. On peut dire que la grandeur (G) est *continue* si à tout nombre réel b compris entre 10 et 20 correspond un état B de la grandeur (G).

La construction se précise lorsque la grandeur (G) est additive, c'est-à-dire si l'on sait associer à deux états A et B de la grandeur (G) une grandeur $A + B$, l'opération d'addition satisfaisant aux propriétés suivantes[192] :

i) si A et A' sont égales, si B et B' sont égales, alors $A + B$ et $A' + B'$ sont égales.

ii) l'addition est commutative et associative.

iii) il existe une grandeur nulle, c'est-à-dire telle que l'addition de cette grandeur à une grandeur donnée ne change pas cette dernière.

iv) si C n'est pas la grandeur nulle, alors $A + C > A$.

v) si $A > B$, il existe une grandeur C telle que $A = B + C$.

vi) A et B étant données toutes deux non nulles, il existe un entier m tel que $mA > B$ (axiome d'Archimède).

vii) étant donné un entier m, pour toute grandeur B, il existe une grandeur A telle que $B = mA$, autrement dit on peut diviser une grandeur en m parties égales.

Ce sont les propriétés nécessaires pour construire une correspondance additive entre états d'une grandeur et nombres. Tannery montre ensuite

111 ibid, p. 471-472

112 ibid, p.447 ; noter que Tannery ne considère que des grandeurs positives ou, comme on dit aussi, des *grandeurs arithmétiques*. Les propriétés iv et v expriment alors le lien entre l'ordre et le calcul : "*$A > B$ si et seulement si il existe C tel que $A = B + C$*" (pour une étude historique de ce lien, cf. Sinaceur [Si]).

quelques propriétés qu'on pourrait énoncer ainsi :

$$m(A + B) = mA + mB$$
$$(m + n)A = mA + nA$$
$$(mn)A = m(nA)$$

m et n étant des entiers.

Tannery peut alors définir la mesure d'une grandeur, une unité A_1 étant choisie.

Un état de la grandeur A_1 ayant été choisi comme état unité, on peut définir une graduation de (G) associant à tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ la grandeur $A = \frac{p}{q} A_1$; $\frac{p}{q}$ est appelé la mesure de A lorsqu'on a choisi A_1 comme unité, c'est aussi par définition le rapport de A à A_1.

Un état B de la grandeur (G), s'il n'est pas une fraction de A_1 définit de façon évidente une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, donc un nombre réel (nécessairement positif dans le cas qui nous intéresse ici); ce nombre réel a est appelé la mesure de B lorsqu'on a choisi A_1 comme unité, c'est aussi le rapport de B à A_1 .

Ainsi la classique définition du rapport de deux grandeurs comme le nombre qui mesure la première quand on a choisi la seconde comme unité prend tout son sens.

Tannery montre que la mesure ainsi définie est additive, cela est évident pour les nombres rationnels et résulte de la définition de l'addition des nombres réels dans le cas général.

L'étude des changements d'unité montre que le rapport de deux grandeurs est égal, une unité ayant été choisie, au rapport de leurs mesures. La démonstration, facile, est laissée au plaisir du lecteur.

Enfin une grandeur est *continue* si, une unité ayant été choisie, tout réel (ici il s'agit de réels positifs) est la mesure d'un état; cette propriété est évidemment indépendante de l'unité choisie[113].

113 cf. note 105 ci-dessus. On peut rapprocher cette définition des grandeurs continues du dernier groupe d'axiomes de la construction hilbertienne, lequel exprime la propriété de *continuité* de la géométrie (Hilbert [Hi], p. 40-45) ; ce groupe contient deux axiomes, l'axiome de la mesure ou d'Archimède et l'axiome d'intégrité, ce dernier axiome assure l'existence d'une correspondance biunivoque conservant l'ordre entre l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des nombres réels (Hilbert [Hi], p. 88-89) ; en un certain sens, cet axiome définit une construction géométrique des nombres réels. Notons que l'axiome d'intégrité est lié à la propriété que IR est *le plus grand* corps ordonné archimédien (Hilbert [Hi], p. 40-45).

3- *Les grandeurs proportionnelles.*[114]

La proportionnalité concerne les grandeurs additives. Nous en rappelons la définition

> *Etant données deux espèces de grandeurs additives* (G) *et* (G'), *une correspondance entre* (G) *et* (G') *est dite proportionnelle si, étant donnés deux états* A *et* B *de la première grandeur et les états correspondants* A' *et* B' *de la deuxième grandeur, les rapports* A/B *et* A'/B' *sont égaux.*

Tannery établit alors la propriété que l'on peut énoncer de la façon suivante :

> *Considérons une correspondance entre deux espèces de grandeurs* (G) *et* (G') *telle que :*
> *i) à deux grandeurs égales de l'espèce* (G) *correspondent deux grandeurs égales de l'espèce* (G')
> *ii) la correspondance est additive, c'est-à-dire qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce* (G) *correspond la somme des grandeurs correspondantes de l'espèce* (G')
> *alors la correspondance considérée est proportionnelle.*[115]

Tannery montre d'abord qu'à la grandeur nulle de (G) correspond la grandeur nulle de (G') ; en effet la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à une autre grandeur, donne la même grandeur.

En outre, la définition de la soustraction implique que la correspondance conserve l'ordre[116].

En effet, soit A et B deux états de la grandeur (G) tels que A soit inférieur à B, on notera A' et B' les états de (G') correspondant à A et B ; puisque $A < B$, il existe un état C tel que $B = A + C$. Notons C' l'état correpondant à C, alors $B' = A' + C'$, ce qui prouve $A' < B'$.

Considérons alors deux grandeurs A et B d'espèce (G) et les grandeurs correspondantes A' et B' d'espèce (G'),

i) si B/A est un nombre rationnel, l'additivité implique l'égalité des rapports A/B et A'/B'.

ii) si B/A est un nombre irrationnel, la conservation de l'ordre implique que

114 ibid, p.483 et sqq

115 On peut rapprocher la proposition de Tannery du classique du théorème : *Soit f une application monotone et additive de IR dans IR, alors, f est une application linéaire.* ce dernier énoncé fait apparaître le lien entre proportionnalité et linéarité.

116 Rappelons que l'on ne considère que des grandeurs positives.

B/A et *B'/A'* déterminent la même coupure, par conséquent $B/A = B'/A'$. ce qui achève la démonstration.[117].

Le critère de proportionnalité énoncé par Tannery permet d'obtenir les théorèmes de proportionnalité de la géométrie élémentaire : proportionnalité des angles et des arcs, théorème des lignes proportionnelles (théorème de Thalès), calculs d'aires. C'est ainsi que dans ses *Leçons de Géométrie*, Hadamard renvoie au critère de Tannery[118] même si, pour des raisons de cohérence interne de l'ouvrage, il indique le principe de la démonstration, remarquant qu'il ne fait que reproduire la démarche de Tannery[119].

4- *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

La méthode de Tannery s'appuie sur une construction explicite des nombres réels, ici la méthode des coupures de Dedekind. D'autres auteurs vont travailler directement sur les grandeurs, les nombres irrationnels étant introduits pour mesurer les grandeurs n'ayant pas de commune mesure avec l'unité.

Nous citerons ainsi le classique *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse[120].

La notion de nombre entier étant considérée comme connue, le propos de Rouché et Comberousse est de définir la mesure des grandeurs. Les auteurs précisent d'abord ce qu'il faut entendre par grandeur en écrivant :

> *"On ne considère, en mathématiques, que des grandeurs dont on peut définir d'une manière précise l'égalité et l'addition"*.

On peut alors définir multiples et parties aliquotes d'une grandeur. Deux grandeurs sont alors dites *commensurables* si elles sont des multiples d'une même grandeur, laquelle est appelée une *commune mesure*; si les grandeurs données n'ont pas de commune mesure, on dit qu'elles sont *incommensurables*.

Une unité étant choisie, mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité. Les auteurs expliquent alors que, suivant que la

117 En fait, Tannery ne parle pas en terme de coupures, mais renvoie à la notion de graduation telle que définie auparavant.

118 Rappelons que les ouvrages de Hadamard et de Tannery font partie d'une même collection à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques (cf. note 107 ci-dessus).

119 Hadanard [Ha], p. 19-20, 198-199, 239

120 Rouché Comberousse [RC], Première Partie : Géométrie Plane, Note I, p. 411-419.

grandeur que l'on mesure est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, le nombre qui la mesure est un nombre entier ou fractionnaire (un rapport d'entier). La mesure des grandeurs commensurables avec l'unité renvoie ainsi à l'arithmétique.

Lorsque la grandeur que l'on mesure est incommensurable avec l'unité, Rouché et Comberousse introduisent la notion de valeur approchée.

Soient U la grandeur unité et A une grandeur incommensurable avec l'unité, un nombre entier ou fractionnaire n étant donné, *la valeur approchée par défaut à moins de* $1/n$ est égale à m/n où m est le nombre entier qui mesure le plus grand multiple de U/n contenu dans A ; autrement dit, A contient m fois U/n avec un reste moindre que U/n. Le nombre $(m + 1)/n$ est appelé *la valeur approchée par excès à moins* de $1/n$.

Notant pour tout nombre n ,a_n la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$, a'_n la valeur approchée par excès à moins de $1/n$, Rouché et Comberousse définissent alors la mesure de A comme *la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées par défaut à moins de* $1/n$ *lorsque n croît indéfiniment.*

Le problème se pose alors de justifier cette définition en montrant l'existence et l'unicité de la limite (rappelons que les seuls nombres définis sont les entiers et les nombres fractionnaires).

Les auteurs remarquent d'abord que a_n n'augmente pas toujours avec n[121], de même a'_n ne diminue pas toujours lorsque n augmente; pour définir la limite, ils définissent alors *les valeurs principales* par défaut et par excès à moins de $1/n$ d'une grandeur A, respectivement notée a_n et a'_n.

La valeur principale par défaut à moins de $1/n$ est la plus grande des valeurs approchées par défaut à moins de 1/n pour n non supérieure à n. De même la valeur principale par excès à moins de 1/n est la plus petite des valeurs approchées par excès à moins de 1/n pour n non inférieure à n.

Il est alors clair que a_n augmente (ou du moins ne diminue pas) et a'_n diminue (ou du moins n'augmente pas) lorsque n augmente ; comme les a_n sont majorés par les a'_n et comme $a'_n - a_n$ est moindre que la fraction $1/n$, laquelle tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, on *"voit de suite"* que a_n et a'_n ont une limite commune qui n'est autre que la mesure cherchée.

On voit ici les problèmes que posent un tel raisonnement ; comment se justifie l'existence de la limite et quel est le statut de ce nombre limite ? La réponse est donnée par la définition des nombres incommensurables.

121 ainsi, si A est la diagonale du carré de côté égal à l'unité, on montre $a_n = 14/10$ et $a_{n+1} = 15/11$ (cf. Rouché Comberousse [RC], p. 413, note 1).

Voici la définition donnée par Rouché et Comberousse :

> *"Un nombre est dit* ***commensurable*** *ou* ***incommensurable*** *suivant que la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les entiers et les fractions".*

Reste à définir les opérations sur les nombres incommensurables :

> *"Par définition, le résultat d'une opération sur les nombres incommensurables est la limite du résultat de la même opération sur leurs valeurs approchées à moins de 1/n, lorsque n croît indéfiniment".*

Il faut alors démontrer l'existence et l'unicité de la limite, ce que les auteurs font pour chacune des opérations arithmétiques[122].

Cela fait, on peut définir le rapport de deux grandeurs comme le nombre par lequel il faut multiplier la première pour avoir la seconde ; les auteurs démontrent alors que le rapport de deux grandeurs est égal au nombre qui mesure la première lorsque l'on prend la seconde comme unité.

Enfin, après avoir défini des grandeurs proportionnelles comme des grandeurs (qui peuvent être de nature différente) qui se correspondent de telle façon que le rapport de deux valeurs de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, Rouché et Comberousse démontrent le théorème

> *"Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde".*

La démonstration utilise ici les propriétés des valeurs approchées.

Ce théorème est alors utilisé dans le cours de l'ouvrage pour démontrer les théorèmes usuels de proportionnalité (arcs et angles[123], lignes proportionnelles[124], calculs d'aires[125])

Il reste que malgré un souci de rigueur dans les démonstrations (en particulier les problèmes d'existence), il manque dans cet exposé une définition *numérique* de la notion de nombre en ce sens que les nombres ne sont définis

---

122 Rouché Comberousse [RC], p. 414-416

123 Rouché Comberousse [RC], p. 63

124 Rouché Comberousse [RC], p. 111

125 Rouché Comberousse [RC], p. 310

que comme mesure de grandeurs[126]. En outre, la notion de limite de grandeurs reste intuitive et c'est l'intuition d'icelle qui conduit à définir la limite de nombres, c'est ainsi que les auteurs admettent, sans précaution aucune, que la suite des valeurs principales par défaut, dans la mesure où elle est majorée, a une limite. On doit admettre alors, pour démontrer le théorème sur les grandeurs proportionnelles, que deux grandeurs de nature différente étant données, si, des unités convenables étant choisies, une grandeur de la première espèce et une grandeur de la seconde espèce ont les mêmes valeurs approchées, elles sont mesurées par le même nombre, ce qui est effectivement admis par les auteurs.

Le cours de *Géométrie Plane* de Niewenglowski et Gérard, publié en 1898, propose une présentation axiomatique de la mesure des grandeurs[127], qu'il relie à la théorie des nombres irrationnels pour laquelle les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski[128].

Un système de grandeur de même espèce est un ensemble d'êtres pour lesquels on a défini l'*égalité* et l'*addition*. On entend par là, précisent les auteurs, que l'on a indiqué dans quel cas deux de ces êtres doivent être considérés comme *égaux*, et que l'on a indiqué un procédé au moyen duquel, étant donné deux quelconques de ces êtres, A et B, on peut en trouver un troisième C que l'on appellera *somme* de A et B et que l'on notera $A + B$[129]. L'addition permet de définir une notion d'ordre : on dit que la grandeur A est plus grande que la grandeur B s'il existe une grandeur C telle que $A = B + C$.

On suppose alors que l'égalité et l'addition satisfont aux axiomes suivants[130] (que l'on peut comparer aux axiomes de Tannery) :

i) L'égalité doit être réflexive, symétrique, transitive
ii) L'addition doit être univoque, commutative et associative
iii) Entre deux grandeurs quelconques, A et B, du système, il doit y avoir une des trois relations

126 Il s'agit ici moins d'une définition explicite que de l'hypothèse implicite assurant que, une unicité étant choisie, toute grandeur est mesurée par un nombre ; la définition de la mesure par les valeurs approchées et la notion de nombre incommensurable qui la représente ne font alors qu'exprimer la correspondance, dont l'existence est admise, entre grandeurs et nombres.

127 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-335

128 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 4-21

129 Ces précisions nous montrent que le point de vue métrologique n'est pas absent de la notion de mesure des grandeurs, c'est un tel point de vue qui guide la construction de Tannery (cf. ci-dessus). Cet aspect métrologique nous semble inséparable de la notion de mesure des grandeurs, nous y reviendrons dans la seconde partrie de cet article.

$$A = B, \qquad A > B, \qquad A < B$$

et chacune de ses relations doit être incompatible avec les deux autres.

Ces axiomes étant posés, on peut alors définir les multiples entiers d'une grandeur. La notion de sous-multiple (partie aliquote) est définie si l'on admet que *"étant donnés une grandeur quelconque* A *du système et un entier quelconque n, on peut trouver une autre grandeur* X *du système, telle que* nX = A"[131]. On montre aisément, tenant compte de l'axiome iii, l'unicité de X. On peut alors définir les multiples fractionnaires d'une grandeur.

Niewenglowski et Gérard énoncent alors l'axiome d'Archimède.

Pour achever la théorie de la mesure des grandeurs, il reste d'une part à expliciter la notion de limite, d'autre part à définir le produit d'une grandeur par un nombre irrationnel.

La notion de limite est définie pour les grandeurs : une suite illimitée de grandeurs, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ étant donnée, on dit que "l*a suite a pour limite la grandeur* L *lorsque n augmente indéfiniment, si, à toute grandeur* G, *on peut faire correspondre une grandeur* n, *tel que, pour n* > n, l*a différence entre* A_n et L *soit moindre que* G"[132].

On vérifie aisément l'unicité de la limite.

Niewenglowski et Gérard énoncent alors les deux axiomes qui relient les notions d'ordre et de limite :

Axiome 1- *Si la grandeur* A_n *croît avec n, mais reste toujours inférieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* L.

Axiome 2- *Si la grandeur* A_n *décroît quand n augmente, mais reste toujours supérieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* L.

Reste à définir le produit par un nombre irrationnel.

Les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski déjà cité.

Un nombre irrationnel est défini par la donnée de deux suites illimitées de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

vérifiant les inégalités

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a'_n < \ldots < a'_2 < a'_1$$

130 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-317

131 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 318

132 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 321

et tels que la différence $a'_n - a_n$ tende vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire, précisent les auteurs, qu'à tout nombre rationnel positif δ, on puisse faire correspondre un entier v tel que, pour $n > v$, on ait $a'_n - a_n < \delta$.

Niewenglowski et Gérard distingue et alors deux cas.

Il existe un nombre rationnel a supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, alors, une grandeur A étant donnée, la grandeur aA est supérieure à toutes les grandeurs a_nA et inférieure à toutes les grandeurs a'_nA et c'est la seule grandeur vérifiant cette propriété.

Il n'existe aucun nombre rationnel supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, dans ce cas *"on convient de dire que les deux suites définissent un nombre irrationnel a"*[133]; il existe alors une grandeur et une seule supérieure à toutes les grandeurs a_nA et inférieure à toutes les grandeurs a'_nA (cela résulte des axiomes sur les limites), c'est cette grandeur notée αA que Niewenglowski et Gérard appellent le produit de la grandeur A par le nombre irrationnel α.

On montre aisément (la démonstration est laissée au lecteur) les propriétés suivantes :

Soient A une grandeur, α et β deux nombres (rationnels ou irrationnels), alors

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

Soient A et B deux grandeurs, α un nombre (rationnel ou irrationnel), alors

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Soient A et B alors deux grandeurs de même espèce, il existe un nombre et un seul x tel que $A = xB$; c'est le *rapport* de A à B ou la *mesure de* A *quand on prend* B *pour unité.* (la démonstration est classique, nous laissons au lecteur le plaisir de l'écrire dans le contexte de l'ouvrage de Niewenglowski et Gérard).

Niewenglowski et Gérard montrent alors que, quatre grandeurs étant données, A et B d'une même espèce et A' et B' d'une même espèce, les rapports de A à B et de A' à B' sont égaux si et seulement *si, quelle que soit la fraction f, les différences* A - *f*B *et* A' - *f*B' *sont de même signe*, cette dernière expression signifiant que si A est supérieure (resp. inférieure) à fB alors A'

133 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 232 ; dans son Cours d'Algèbre, Niewenglowski explicite, à partir de cette construction, la condition d'égalité de deux nombres irrationnels, la relation d'ordre sur les nombres ainsi que les opérations arithmétiques ([N], tome 1, p. 5-11) ; le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter ces diverses constructions dans le contexte proposé par Niewenglowski.

est supérieure (resp. inférieure) à fB'. (on laisse au lecteur le soin de vérifier cette assertion)[134].

Etant donné deux systèmes de grandeurs, elles sont proportionnelles si elles se correspondent de telle sorte que le rapport de deux grandeurs du premier système est égal au rapport des grandeurs correspondantes de la seconde espèce ; Niewenglowski et Gérard montrent alors le théorème

> *"Pour que les grandeurs de deux systèmes soient proportionnelles, il faut et il suffit que: 1°) à deux grandeurs égales du premier système correspondent deux grandeurs égales du second; 2°) à la somme de deux grandeurs quelconques du système corresponde la somme des grandeurs correspondantes du second."*[135]

Nous indiquons ici les idées essentielles de la démonstration de Niewenglowski et Gérard: il suffit de montrer qu'une correspondance satisfaisant les propriétés 1° et 2° est une correspondance proportionnelle.

Soient **A** et **B** deux grandeurs de la première espèce, A' et B' les grandeurs correspondantes de la seconde espèce, supposons que $B=\frac{m}{n}A$, on montre aisément, à partir des propriétés 1° et 2° que $B'=\frac{m}{n}A'$.

Lorsque $B=\alpha A$ où α est un nombre irrationnel, on va montrer que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$., les différences $B-\frac{m}{n}A$ et $B'-\frac{m}{n}A'$ sont de même signe.

Si $B>\frac{m}{n}A$, alors $B=\frac{m}{n}A+C$ et par conséquent $B'=\frac{m}{n}A'+C'$, où C' est la grandeur du second système qui correspond à C, ce qui implique $B'>\frac{m}{n}A$.

Si $B<\frac{m}{n}A$, un raisonnement analogue montre que $B'<\frac{m}{n}A$.

On en déduit l'égalité des rapports A/B et A'/B'.

Notons que Niewenglowski et Gérard n'utilisent pas cette dernière proposition dans le cours du texte ; en fait ils montrent que deux rapports A/B et A'/B' sont égaux en vérifiant que, une fraction $\frac{m}{n}$. étant donnée, l'inégalité

---

134 On peut comparer cette remarque de Niewenglowski et Gérard avec la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide et avec la théorie exposée par Jules Tannery à partir de la notion de coupure.

135 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p.333

$A > \frac{m}{n} B \left(\text{resp. } A < \frac{m}{n} B\right)$ implique l'inégalité $A > \frac{m}{n} B \left(\text{resp. } A < \frac{m}{n} B\right)$[136].

BIBLIOGRAPHIE

AMIOT A. [Am], *Eléments de Géométrie*, Delagrave, Paris 1883

ARCHIMEDE [Arc], "La mesure du cercle", in *Oeuvres* (texte établi et traduit par Charles Mugler) Les Belles Lettres, Paris 1970; tome I, p. 135-143

ARNAULD Antoine [Arn1], *Nouveaux Elémens de Géométrie* , Paris 1667

ARNAULD Antoine [Arn2], *Nouveaux Elémens de Géométrie* (3ème édition), La Haye 1693, publiée in *Oeuvres Complètes*, Paris1771

ARNAULD Antoine, NICOLE Pierre [AN], *La Logique de Port-Royal* (première édition 1667), Flammarion, Paris 1970

BARBIN Evelyne [Ba], "La démonstration mathématique, signification épistémologique et questions didactiques" *Bulletin APMEP* n°366, décembre 1988

BKOUCHE Rudolf [Bk1], "De la géométrie et des transformations", *Repères-IREM* n°4, 1991

BKOUCHE Rudolf [Bk2], "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert Hélène et als : *La France mathématique* Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société de Mathématiques de France 1991

BKOUCHE Rudolf [Bk3], "Sur quelques grands traités de géométrie élémentaire" (à paraître)

BLAY Michel, "Du Système de l'Infini au Statut des Nombres incommensurables dans les éléments de la Géométrie de Fontenelle" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanski et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992 ; Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

BOSSUT [Bos], *Traité élémentaire de Géométrie*, Paris 1775

BOURBAKI Nicolas [Bou], *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris 1974

BOURLET Carlo [Bourl], *Cours abrégé de Géométrie*, Hachette, Paris 1905

CAVEING Emile [Ca], *La constitution du type mathématique de l'idéalité*, Publications de l'Université de Lille

CHEVALIER Anne [Ch1], Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

CHEVALIER Anne [Ch2], "Rapports de grandeur et propositions dans les «Nouveaux Eléments de Géométrie» d'Antoine Arnauld" (à paraître)

136 Niewenglowski B. et Gérard L [NG], (arcs et angles) p. 79-81, (lignes proportionnelles) p. 125-127, (aire d'un rectangle) p. 286.

CLAIRAUT Alexis-Claude [Cl], *Elémens de Géométrie* (1743), Gauthier-Villars, Paris 1992
COMBETTE [Com], *Cours de Géométrie élémentaire* (Félis Alcan, Paris 1882
CONDILLAC [Con], *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Editions Galilée, Paris 1973
COUSQUER Eliane [Cou1], "Le calcul vectoriel" in *La rigueur et le calcul*, CEDIC, Paris 1982
COUSQUER Eliane [Cou2], *Histoire du concept de nombre*, IREM de Lille 1992
D'ALEMBERT Jean Le Rond [Da], *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986
DEDEKIND Richard [Ded], *Essay on the theory of numbers* (translated by W.W.Beman), Dover, New York 1963
DESCARTES René [Des] : "La Géométrie" in *Le Discours de la Méthode*, Fayard, Paris 1986, livre premier, p. 333
DHOMBRES Jean [Dh], *Nombres, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Cedic-Nathan, Paris 1978
DUGAC [Du], *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques* (Préface de Jean Dieudonné), Vrin, Paris 1976
DUMONT Jean-Paul et als [Dum], *Les Ecoles Présocratiques*, Gallimard, Paris 1991
Encyclopédie Méthodique [Enc] : "Mathématiques", Panckoucke, Paris 1784, réédition ACL Editions, Paris 1987
ENRIQUES Federigo [Enr], "Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées* (édition française), Tome III, Article 1, Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, 1911 ; réédition Jacques Gabay, Paris 1991
FONTENELLE Bernard de [Fo], *La Géométrie de l'Infini*, Paris 1757
GONSETH Ferdinand [Go], *Philosophie néo-scolastique et philosophie ouverte*, l'Age d'Homme, Lausanne 1973
Groupe Inter-IREM Epistémologie [GIIE], *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris 1987
GULMIN A. [Gu], *Cours de Géométrie élémentaire*, Durand, Paris 1859
Hadamard Jacques [Ha], *Leçons de Géométrie élémentaire*, Armand Colin, Paris 1898/1947, réédition de la dernière édition Jacques Gabay, Paris 1989
HEATH Thomas L. [He1], *The thirteen book of Elements of Euclid* (translation, introduction and commentaries) (1908/1925), Dover Publications, New-York 1956
HEATH Thomas L. [He2], *A History of Greek Mathematics* (1921), Dover Publications, New-York 1981

HILBERT David [Hi], *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique avec introduction et compléments préparés par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971
KLEIN Felix [Kl], *Le Programme d'Erlangen*, (1972) (traduction française Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
KNORR Wilbur Richard [Kn], *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel Publisching Company, Dodrecht, Boston 1975
LACROIX Sylvestre [Lac 1], *Traité élémentaire d'Arithmétique*
LACROIX Sylvestre [Lac 2], *Elémens d'Algèbre*
LACROIX Sylvestre [Lac 3], *Elémens de Géométrie*, quatrième édition, Paris 1804
LAMY [Lam], *Les Elémens de Géométrie*, Paris 1685
LEGENDRE Adrien-Marie [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Firmin Didot, Paris 1823
LE GOFF Jean-Pierre [LeG], "De la méthode d'exhaustion, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)" in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Colloque Inter-IREM Epistémologie (Besançon 1989), IREM de Besançon-IREM de Lyon 1990
NEVEU H. et BELLANGER H. [NB], *Cours de Géométrie* (8ème édition), Masson, Paris 1925
NIEWENGLOSKI B. [N], *Cours d'Algèbre* (troisième édition), Armand Colin, Paris 1893
NIEWENGLOSKI B. et GÉRARD L. [NG], *Cours de Géométrie élémentaire : Géométrie plane*, Gauthier-Villars, Paris 1898
PASCAL Blaise [Pa], "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader", in *Œuvres complètes* (éditées par Lafuma), Le Seuil, Paris 1963
PEYRARD [Pe], *Les Œuvres d'Euclide*, 2 volumes (1819), Blanchard, Paris 1966
PLANE Henry [Pl], Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, Limoges 1992
ROUCHÉ Eugène, Comberousse Charles de [RC], *Traité de géométrie* (2 volumes), 6ème édition, Gauthier-Villars, Paris 1981
SINACEUR Hourya [Si], "La construction Algébrique du Continu : Calcul, Ordre, Continuité" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992
SOUSSAN M'hammed [Sou], *Le traitement des proportions entre Eudoxe et Euclide (la théorie alternative de Knorr)*, mémoire de DEA, Université Charles de Gaulle, Villeneuve d'Ascq 1993 (à paraître)
TANNERY Jules [TanJ], *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* (7ème édition), Armand Colin, Paris 1917
Tannery Paul [TanP], *La Géométrie Grecque*, Gauthier-Villars, Paris

1887 ; réédition Jacques Gabay, Paris 1988
TATON René et als [Tat], *L'enseignement scientifique en France au XVIII^{e} siècle*, Hermann, Paris 1986
VACQUANT et MACÉ de Lépinay [VM], *Eléments de Géométrie*, (21ème édition), Masson, Paris 1917
VALIRON Georges [Va], *Théorie des fonctions*, Masson, Paris 1946
VIETE [Vi], *Introduction en l'Art Analytique*, in Vaulézard, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1630), Fayard, Paris 1986
WALLIS John [W], *Arithmetica Infinitorum*, 1655

Remarques et notes personnelles

Une invention française du XX^e siècle :

le théorème de Thalès

Henry PLANE

En Droit, celui qui découvre un objet non réclamé en est dit l'inventeur. Les enseignants français, du début du XX^e siècle semblent donc être inventeurs...

Pour notre tradition occidentale, les mathématiques sont dites nées au VI^e siècle avant notre ère lorsque, à partir d'un ensemble de résolutions de problèmes pratiques s'est édifié un corps de réflexions abstraites. Certes, tout le patrimoine d'alors, au Moyen Orient, en étant adopté par la Grèce n'a pas totalement suivi cette transformation. A côté de la «Géométrie à philosopher» demeure une «Géométrie intéressée» dans les entreprises de la science, dans la vie. Notre théorème vit de ces deux géométries.

C'est le nom de Thalès que l'histoire associe le premier à cette transformation et, lorsque la notion de proportion est mise en avant, l'élève du XX^e siècle évoque, en France, un certain théorème et l'homme de Milet.

Mais de l'œuvre de THALES, que savons-nous ?

Nous ne disposons que de témoignages sur le personnage et sur ses travaux. PLUTARQUE dans «le banquet des sept sages» rapporte l'exploit de la mesure d'une pyramide à l'aide d'un bâton et des ombres. Mais exploit de qui ? de THALES ou des Egyptiens chez qui il avait été étudier ? De plus, ce témoignage du début du II^e siècle qu'on trouve chez PLINE à peu près à la même époque, est incomplet. HIÉRONYME DE RHODES (– IV^e siècle), contemporain de Platon, précise, lui, que l'opération se faisait lorsque *«notre ombre nous est égale»*. Détail non négligeable qui ajoute un voile d'incertitude sur le rôle joué par «l'école de Milet» dans le chapitre «proportions et paral-

Document n°1(traduction de PEYRARD - 1804)

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

DÉFINITIONS

I. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont des angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

PROPOSITION PREMIÈRE

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Document n°2 (Peyrard, traduction 1804)

PROPOSITION II.

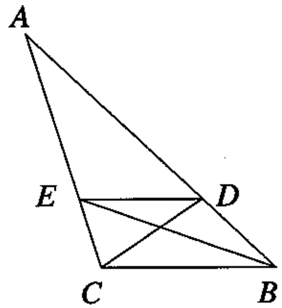
THÉORÈME

Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Que l'on mène la droite DE (fig. 122) de manière qu'elle soit parallèle à un des côtés du triangle ABC : je dis que CE est à EA comme BD est à DA.

Menez les droites BE, CD.

Le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop.3-1), parce qu'ils ont la même base et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles. Mais deux quantités égales ont la même raison avec une même quantité (prop.-5) : donc le triangle CDE est au triangle ADE comme le triangle BDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA : car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la base AB, sont entr'eux comme leurs bases (prop.1.6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA : donc BD est à DA comme CE est à EA (prop. II.5).



PROPOSITION III.

THÉORÈME

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les autres côtés de ce triangle ; et si les segmens de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite qui est menée du sommet de la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle ABC (fig.125), que l'angle BAC soit partagé en deux parties égales par la droite AD : je dis que BD est à DC comme BA est à AC.

lèles» et conduirait à s'en tenir à EUDOXE de CNIDE (– IV^e siècle) comme initiateur de ce chapitre.

Quant à PAPPUS (IV^e siècle) et PROCLUS (V^e siècle), quels théorèmes attribuent-ils à THALES ?

- Le diamètre partage le cercle en deux parties égales,
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux,
- Les angles opposés par le sommet sont égaux,
- Un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Alors, pour cette recherche de paternité, fouillons un peu le passé.

Comment EUCLIDE (fin – IV^e siècle) aborde-t-il le sujet ?

Après étude des rapports de grandeurs, c'est au Livre VI qu'on trouve sa définition et les proportions qui nous intéressent. ***- Documents 1 et 2 -*** (on a utilisé les deux traductions de PEYRARD, celle de 1804 offre l'avantage d'user de l'alphabet latin). Dans la définition, on soulignera le *«et dont les côtés...»* On notera aussi que la proposition 2 comporte la réciproque et on notera surtout sa démonstration par l'intermédiaire d'un *rapport d'aires égal à un rapport de longueurs de segments*, pour user de notre terminologie.

Il est enfin à signaler que cette propriété n'est pas spécialement mise à part dans ce livre IV. La suivent immédiatement : la propriété du pied de la bissectrice, ce que nous nommons les cas de similitude des triangles, et l'étude du triangle rectangle coupé par sa hauteur en deux triangles qui lui sont semblables et ce, avec l'apparition de moyennes proportionnelles.

La proposition 10 ***- Document 3 -*** est un problème. Sous ce vocable, il s'agit toujours de constructions, problème pratique donc géométrie «intéressée» et non «à philosopher».

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée qui n'est point partagée de la même manière qu'une autre droite donnée est partagée.

Soit AB (fig.150) la droite donnée qui n'est point partagée et AC la droite donnée qui est partagée : il faut partager la droite AB qui n'est pas partagée de la même manière que la droite AC est partagée.

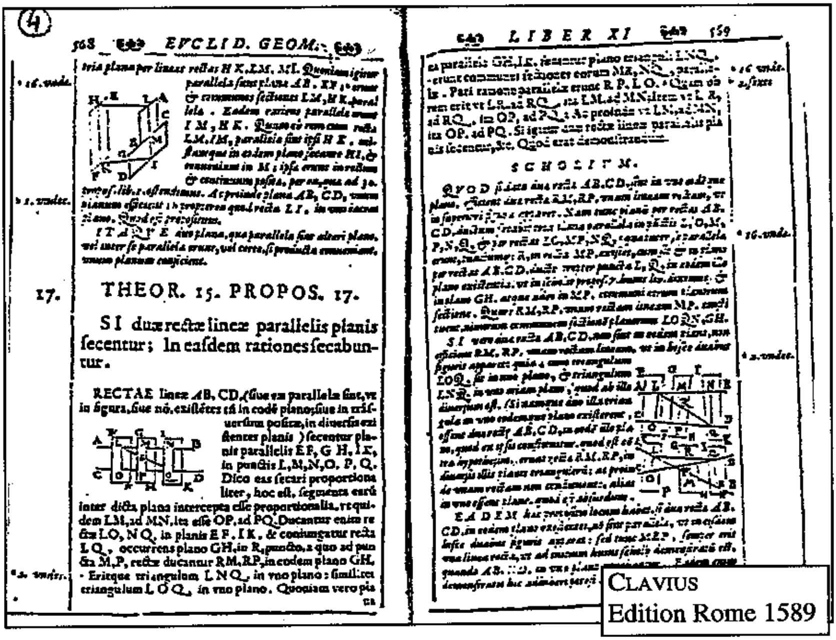
Que la droite AC soit partagée aux points D, E, et que les droites AC, AB soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque. Conduisez la droite BC, et par les points D, E, conduisez les droites DF, EG parallèles à la droite BC (prop.51.I), et par le point D conduisez la droite DHK parallèle à la droite AB.

Les figures FH, HB sont des parallélogrammes, et par conséquent la droite DH est égale à la droite FG et la droite HK égale à la droite GB (prop.54.I) ; et puisqu'on a conduit la droite HE parallèle à un des côtés du triangle DKC, savoir, au côté KC, la droite CE sera à la droite ED comme la droite KH est à la droite HD (prop.2.6) ; mais puisque la droite KH est égale à la droite BG et que la droite HD est égale à la droite GF, la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF. De plus, puisqu'on a conduit la droite FD parallèle à un des côtés du triangle AGE, savoir au côté EG, la droite ED sera à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA. Mais on a démontré que la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF : donc la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF, et la droite ED est à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA.

Donc la droite donnée AB, qui n'est partagée, a été partagée de la même manière que la droite AC ; ce qu'il fallait faire. (Traduction Peyrard 1804)

En ce qui concerne l'espace, la question sera abordée au livre XI, propriété 17, sous un autre aspect : *«Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées proportionnellement»*.

Si CLAVIUS, dans ses célèbres commentaires d'Euclide de 1574 s'arrête sur ce théorème, mais dans le suivi du Grec, la propriété est au milieu d'autres, sans prolongement. **- *Document 4* -** . Cette propriété sera souvent omise dans nombre d'ouvrages traitant de l'espace.


(4)

568 EVCLID. GEOM.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, ut in figura, siue nō, existētes tū in eodē plano, siue in trāsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earū inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ...

LIBER XI 569

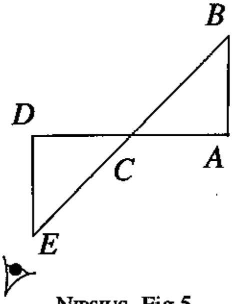
SCHOLIUM.

CLAVIUS
Edition Rome 1589

Toujours est-il que dans le plan, ce sont les figures semblables qui jouent le grand rôle.

Poursuivons notre quête à la suite des âges.

MARCUS JONIUS NIPSIUS, arpenteur romain du Ier siècle, donne le procédé suivant pour mesurer une distance AB lorsque seul le point A peut être atteint. Dans notre style, nous dirions (figure 5) : «sur la perpendiculaire en A à (AB), prendre deux points C et D tels que C soit le milieu de $[AD]$. Sur la perpendiculaire en D à (AD), déterminer le point E tel que E, C et B



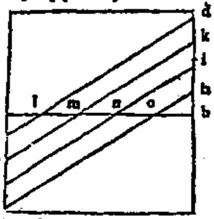
NIPSIUS- Fig.5

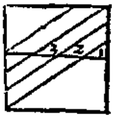
Document n°7

CAROLI BOVILLI SAMAROBRINI LIBELLVS DE MATHEMATICIS SVPPLEMENTIS AD STVDIOSISSIMVM VIRVM REMVNDVM BOVCHERIVM IVRISPERITVM.

Rectam lineam in quotlibet partes equales diuidere.

Quo pacto rectã lineã liceat in duo equa partiri: demõstrat Euclides. Quo autem modo sit quotlibet equalium partium numero, diuid[e]nda: hactenus quod norim proposuit demonstrauitq; nemo. huius tamẽ sciẽtia haud parum Geometricis conducet disciplinis. Nam frequentiusculet in geometricis demonstrationibus: experitur recte linee quãtalibet sectio atq; diuisio. Sit igitur recta linea a b: in quinq; partes equas diuidenda. Super puncta a et b educo in diuersam partẽ duas perpendiculares cuiuscũq; quãtitatis (Nã nil differt debent tamen esse inter se equales) a c et b d. que super lineã a b: creant rectos angulos coalternos c a b et a b d. Partior deinde ambas lineas a c et b d: in quattuor partes equales a c in punctis e f g: b d vero punctis h i k. Et duco lineas quattuor: c h, e i, f k, et g d. quib[us] pposita linea a b: erit in quinq; partes equales secta atq; diuisa: in punctis l. m. n. o. Huius enĩ rationẽ facile collige per lineas equidistantes et coalternos angulos. Erunt enim linee c h, e i, f k, et g d: inuicem equidistantes. quare et coalterni anguli qui ab ipsis super lineam a b: in punctis l m n o facti sũt: erunt equales: et intercepte inter equidistãtes linee a l, l m, m n, n o, et o b: angulorum coalternorum latera inter se equalia. Et eodem modo procede in quãtalibet recte linee partitione factis sup eam diuersa ex parte rectis angulis coalternis eorũq; lateribus vno minore numero equaliter sectis: q̃ sit proposite linee expetita diuisio. Si enim diuidenda est proposita linea ternario: partire coalternorum angulorũ perpendicularia super datã lineã latera binario. Si in quattuor eam partiri volueris: eadẽ latera in tria sunt partienda. Si in septẽ data linea est diuidenda: latera eadem diuide senario. Et ita deinceps.





Carolus BOVILLUS
Charles de Bouelle
ou Bouvelles.
Né aux environs d'Amiens (samarobrina) en 1470.
Enseigna et mourut à Noyon (1553)

Document n° 8

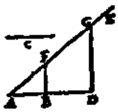
CONSTRVCT. DE DIVERS PROB. 117

Probleme XLVI.

Couper vne ligne droicte donnee en parties, qui soient entr'elles selon vne raison donnee.

Soit la ligne droicte donnée AD, qu'il faut couper en deux parties, qui ayent telle raison entr'elles que AF à C.

Soit conioinct AF avec AD, faisant l'angle DAF tel qu'on voudra, & icelle AF, estant prolongée iusques en E interminément, soit prise FG, egale à C; & ayant mené DG, soit menée FB, parallele à GD; & elle coupera AD en B, selon la raison de AF à FG, c'est à dire C, comme il est manifeste : ce qu'il faloit faire. 2. p. 6



SCHOLIE.

Le mesme se fera aussi avec le compas de propo. transferant la raison donnee sur l'vne des iambes, & prenant l'ouverture de l'extremité d'icelle de la ligne AD, & l'ouverture de l'extremité de AF, donnera le segment AB.

Probleme XLVII.

D'vn angle d'vn triangle rectiligne, mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon vne raison donnee.

Soit le triangle donné ABC, & il faut de l'angle B mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon la raison de D à E.

Soit par le prob. preced. coupé AC costé opposite à l'angle B en F, selon la raison de D à E, puis soit menée BF; & icelle diuisera le triangle selon le requis : ce qui est manifeste. 1. p. 6

soient alignés (visée optique). Alors $DE = AB$ les angles en C sont égaux».

Ici, on peut se demander pourquoi des perpendiculaires ? Pour nombre de géomètres, deux droites sont parallèles si elles sont perpendiculaires à une même droite.

Plus proche de ce que nous recherchons est le témoignage de FLAVIUS VEGETIUS RENATUS qui, dans sont «Epitome rei militaris», au début du Ve siècle, donne comment mesurer les hauteurs de murailles dont on ne peut aller qu'au pied. ***(Document 6)***.

Après une première méthode très pratique, il prescrit : *«Lorsque le soleil oblique projette l'ombre des murailles sur la terre, on mesure la longueur de celle-ci. Simultanément, on plante la perche de 10 pieds et on mesure son ombre. Ce dernier nombre noté, nul ne doute de trouver à partir de l'ombre de la perche la hauteur des murailles dont on sait qu'il en est autant de cette hauteur que de l'ombre»*.

Nous dirions que le rapport de la muraille à son ombre est le même que celui de la perche à la sienne. Il est bien question de similitude évidente : *«nemo dubitat»* nul ne doute.

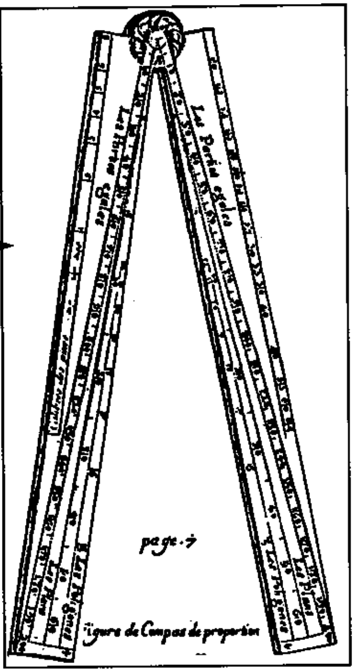
> Mensura autem colligitur duplici modo. Aut enim linum tenue expeditum uno capite necitur in sagitta : quae cum ad muri fastigia directa pervenerit ex mensura lini murorum altitudo deprehenditur. Aut certe, cum sol obliquus umbram turrium murorumque jaculatur in terram, tunc, ignorantibus adversariis umbræillius spatium mensuratur ; itemque decempeda figitur ex umbra ipsius similiter mensuratur : quoi collecto numero, nemo dubitat ex umbra decempedae inveniri altitudinem civitatis, cum sciatur quanta altitudo quantum umbrae emittat in longum.
>
> VEGECE Ve siècle
>
> *Il y a deux façons de mesurer.*
>
> *Ou bien un peleton de fil est noué par un bout à une flèche. Losque celle-ci parvient au droit du baut du mur de la longueur du fil on déduit la bauteur.*
>
> *Ou bien lorsque le soleil...*

La géométrie dite «faux BOECE» du Xe siècle n'aborde pas ce sujet, non plus que Gerbert — le pape de l'an 1000 - dans ce dont nous disposons de sa correspondance. Mais il lui est attribué plusieurs procédés de mesure à distance comme il en est pour Heron d'Alexandrie (– IIe siècle ?).

Si BOUELLE dans son «Art pratique de géométrie» (1509) donne un moyen de partager en n parties un segment de droite, il ne cite pas d'autre nom que celui d'EUCLIDE. Mais peut-être y a-t-il une autre idée dans ce texte. (***Document 7***). Et le *«ita deinceps»* amorce-t-il une récurrence ?

Pour rester dans le domaine des constructions (les "problèmes" des anciens), voyons l'ouvrage de HENRION intitulé : «La géométrie pratique» (1623) (***Document 8***) . Parmi de nombreux problèmes, le XLVI : *«Couper une ligne droite donnée en parties qui soient entr'elles selon une raison don-*

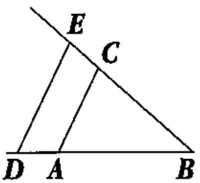
née». *B* coupe (*AD*) selon la raison de *AF* à *FG* **comme il est manifeste**. Et de renvoyer aussi pour résoudre au "compas de proportions". Cet instrument, outil de base jusqu'à la Révolution qui lui, repose, en fait, sur l'égalité des rapports $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}=\ldots$ ***(Document 9)***



Et DESCARTES ? En première page de sa "Géométrie" (1637) : *«Comment se font géométriquement la multiplication et la division....Je n'ai qu'à tirer la parallèle»* ***(Document 10)***. Pas de démonstration : Elémentaire, mon cher Schooten!

LA GEOMETRIE

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'à ioindre les points A & C, puis tirer DE parallèle à CA, & BE eft le produit de cette Multiplication.



Ou bien s'il faut diuifer BE par BD, ayant ioint les points E & D, ie tire AC parallèle a DE, & BC eft le produit de cete diuifion

Document 10

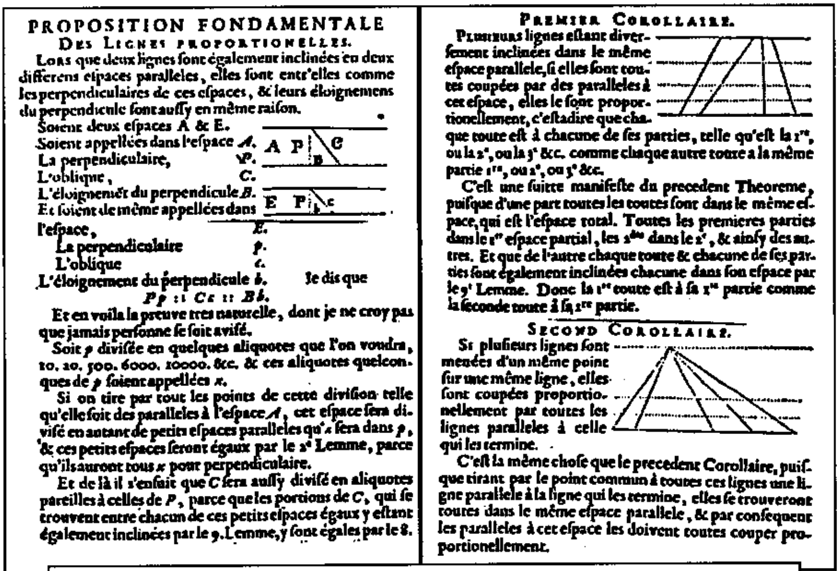
XVII^e - XVIII^e siècles, multiplication des ouvrages.

Il y a les fidèles d'EUCLIDE qui respectent son ordonnance : rapport d'aires, figures semblables avec le cas du triangle coupé par une parallèle à l'un des côtés. On y trouvera les Jésuites, sans doute sur "ordre" du Collège Romain : DESCHALLES - ses "Eléments d'Euclide" (1660) ont souvent été réédités, après révision par OZANAM, jusqu'en 1740 et PARDIES aussi avec sa "méthode courte" (1678 rééditée jusqu'en 1749). Curieusement, DESCHALLES au début de son livre, parle pour mesurer une distance inaccessible et du procédé relevé chez NIPSIUS, et de mesurer en "rapportant un triangle sur papier"...,"avec une échelle proportionnée", mais sans démonstration. Toujours le balancement entre géométries "intéressée" ou "à philosopher".

Et les autres ?

Ces "Messieurs de Port Royal", à côté de leur "Logique" et de leur "Grammaire" avaient besoin d'une géométrie. Pascal en avait parlé, un soir, qui maintenant avait des regards d'un autre "ordre"... C'est donc Arnauld (Antoine) qui va publier en 1667, les "Nouveaux élémens de géométrie". C'est un tout autre abord du sujet. Dans la préface, l'auteur écrit qu'il *«ne considère pas tant la géométrie que l'usage qu'on en peut faire»*. Il veut *«réduire les pensées à un ordre naturel»*.

On a alors une nouvelle proposition fondamentale au livre X, qui concerne les lignes proportionnelles ***(Document 11 ci-dessous)***.



PROPOSITION FONDAMENTALE
DES LIGNES PROPORTIONELLES.

LORS que deux lignes ſont également inclinées en deux differens eſpaces paralleles, elles ſont entr'elles comme les perpendiculaires de ces eſpaces, & leurs éloignemens du perpendicule ſont auſſy en même raiſon.

Soient deux eſpaces A & E.
Soient appellées dans l'eſpace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemēt du perpendicule *B*.
Et ſoient de même appellées dans l'eſpace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*. Je dis que
Pp :: *Cc* :: *Bb*.

Et en voila la preuve tres naturelle, dont je ne croy pas que jamais perſonne ſe ſoit aviſé.

Soit *p* diviſée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. & ces aliquotes quelconques de *p* ſoient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette diviſion telle qu'elle ſoit des paralleles à l'eſpace *A*, cet eſpace ſera diviſé en autant de petits eſpaces paralleles qu'*x* ſera dans *p*, & ces petits eſpaces ſeront égaux par le 2ᵉ Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'enſuit que *C* ſera auſſy diviſé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui ſe trouvent entre chacun de ces petits eſpaces égaux y eſtant également inclinées par le 9. Lemme, y ſont égales par le 8.

PREMIER COROLLAIRE.

PLUSIEURS lignes eſtant diverſement inclinées dans le même eſpace parallele, ſi elles ſont toutes coupées par des paralleles à cet eſpace, elles le ſont proportionellement, c'eſtadire que chaque toute eſt à chacune de ſes parties, telle qu'eſt la 1ʳᵉ, ou la 2ᵉ, ou la 3ᵉ &c. comme chaque autre toute à la même partie 1ʳᵉ, ou 2ᵉ, ou 3ᵉ &c.

C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Theoreme, puiſque d'une part toutes les toutes ſont dans le même eſpace, qui eſt l'eſpace total. Toutes les premieres parties dans le 1ᵉʳ eſpace partial, les 2ᵈᵉˢ dans le 2ᵉ, & ainſy des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ſes parties ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace par le 9ᵉ Lemme. Donc la 1ʳᵉ toute eſt à ſa 1ʳᵉ partie comme la ſeconde toute à ſa 1ʳᵉ partie.

SECOND COROLLAIRE.

SI pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur une même ligne, elles ſont coupées proportionnellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine.

C'eſt la même choſe que le precedent Corollaire, puiſque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles ſe trouveront toutes dans le même eſpace parallele, & par conſequent les paralleles à cet eſpace les doivent toutes couper proportionellement.

Nouveaux éléments de Géométrie - Livre X.

paru sans nom d'auteur chez Charles Savreux à PARIS M. DC. LXVII

avec privilège du Roy

L'ordre naturel fait traiter des lignes avant d'user des surfaces. On ne s'appuiera pas sur le rapport des secondes pour établir celui des premières. Conséquence : il faut traiter, à ce stade de l'exposé, le cas de la raison (le rapport) lorsqu'elle n'est ni entière ni quotient d'entiers, et souvent les successeurs escamoteront cette question. On use de parties aliquotes commune assez fines. CAVALIERI et les "indivisibles" sont, sans doute, là dans l'ombre. Une question : cette idée des bandes parallèles était peut-être en germe chez BOUELLE ? ARNAULD n'évoque ni réciproque, ni l'espace.

En ce qui concerne les collèges dirigés par les Oratoriens, il y a les "Elémens" du Père LAMY (1685, réédités jusqu'en 1731) ***(Document 12ci-contre).*** Ceux-ci sont rédigés dans l'esprit de l'ouvrage d'ARNAULD. Deux triangles sont dits semblables lorsque leurs côtés font des angles égaux ; la définition ne parle plus du rapport des côtés. Le cas de l'espace est étudié également chez cet auteur.

Mêmes idées dans l'ouvrage de l'abbé LA CAILLE (1744) et apparaît là une nouvelle figure sur ce sujet ***(Document 13 ci-dessous).***

Elements de Geometrie.

Livre II. Section V.

• Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indivisibles ; parce qu'on suppose des lignes qui ont une largeur indivisible à cause de sa petitesse.

On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui sont sur une même base, & qui ont la même hauteur ou qui sont entre deux paralleles ; car si on suppose que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles se diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles fassent des surfaces égales.

Si aussi on conçoit deux surfaces sur deux bases égales, composées d'un égal nombre de lignes indivisibles, qui sont diminuées proportionnellement ; de sorte que toutes soient égales chacune à chacune, il faut que ces deux surfaces qui sont deux triangles soient égales.

En general toutes les proprietés que nous avons démontrées sur les quantités proportionelles, conviennent aux lignes qui le sont. Ainsi nous supposerons toujours la démonstration de ces proprietés. Au reste, il ne s'agit ici que de proportions & progressions géométriques ; & c'est la partie la plus essentielle des Elements de Geometrie.

430. Pour la traiter avec ordre, supposons d'abord que sur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI, &c, & que l'on mene les paralléles DF, GH, IK, &c, sur la droite AC, il est clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite seront égales entre elles : car si on mene parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR seront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c. 41.

On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK ; & par conséquent AP somme de tous les antécédens est à AQ somme de tous les conséquents (241), comme un seul antécédent AD est à son conséquent AF, comme un nombre quelconque de parties de AB est au même nombre de parties de AC ; par exemple :: AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, &c.

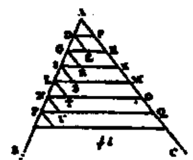
431. Donc 1°, *Si deux droites* AE, AD *sont coupées par deux ou par un plus grand nombre de paralléles* ED, CB, *leurs parties* CE, BD *seront proportionelles aux lignes entieres* AE, AD. 42.

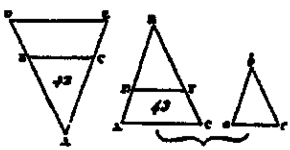
432. 2°, Si deux triangles ABC, *abc* sont semblables, tous leurs côtés homologues sont proportionels. 43.

Car si l'angle B = *b*, & si on prend sur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF paralléle à AC, le triangle BDF sera égal au triangle *abc*.

Or AB : BC :: BD : BF. Donc AB : BC :: *ab* : *bc*.

Des Lignes proportionelles.





Encore les "espaces parallèles" d'ARNAULD chez Rivard lequel dédie son ouvrage en 1732 au recteur de l'Université de Paris !... Il semble, en France au moins, qu'un nouveau point de vue prenne rang ; on le retrouve également dans l'ouvrage de MAZEAS (1770) au collège de Navarre. Le fond du problème est alors soulevé et c'est CLAIRAUT qui écrit : *«Euclide avait à convaincre* *des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux réalités les plus évidentes... Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte»* (Préface des "éléments de Géométrie" - 1743). C'est pourquoi *«Afin de suivre une route semblable à celle des inventeurs, il s'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains»*. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à la construction des figures en vraie grandeur. *«Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient à l'esprit de faire une figure semblable dans laquelle les pouces remplacent les toises[*(proposition 33) *«Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites»* (proposition 48).

Ce point de vue sera couronné par LAPLACE dans son "Exposition du système du monde" (An IV). Il écrit : *«La proportionnalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide»*.
Pour ces derniers, c'est donc proportionnalité qui engendre mêmes angles donc parallélisme - l'ordre est retrouvé -.

Et BÉZOUT ?

Dans ses "Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine" (1765-1770 et nombreuses rééditions), ne déclare-t-il pas : *«transportons aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres sur les proportions»* ? Certes, on retrouve la figure inaugurée par LA CAILLE et donc les parallèles avant les triangles semblables, mais l'idée de rapports de mesures donc de nombres vient apporter un autre éclairage que d'aucuns voient en germe chez ARNAULD. Poursuite de cet autre éclairage également dans une réédition du "Cours de mathématiques" de BÉZOUT faite par REYNAUD, examinateur à l'école Polytechnique, en 1836. Au chapitre de la similitude des triangles, on lit : *«Ces principes sont la base de toutes les parties des mathématiques théoriques ou pratiques. Nous insisterons un peu sur leurs usages...»*. Or, après quelque exemple, *«nous ne nous arrêterons pas plus longtemps parce que la trigonométrie nous fournira des moyens plus expéditifs...»*. En effet, la trigonométrie fait maintenant partie des ouvrages de géométrie. S'il a existé, dès le XVIe siècle, des ouvrages complets de trigonométrie, ceux-ci étaient distincts de ceux-là.

Mais nous sommes entrés dans le XIXe siècle.

Et LEGENDRE ?

C'est le retour à Euclide. Les "Eléments de géométrie de LEGENDRE" règneront sur l'enseignement des mathématiques de 1794 à 1823 (12 éditions de son vivant) tout en reprenant la démonstration et l'ordre du Grec. Ceux qui vont vivre de cette "Géométrie de Legendre", REYNAUD puis BLANCHET n'innovent pas. On ne compte plus les rééditions jusqu'en 1881... Et puis comme PEYRARD, en 1814 et 1819, publie sa nouvelle traduction d'Euclide à partir de textes anciens retrouvés, on ne regarde que de ce côté.

Toutefois DUPIN, dans son "Cours au Conservatoire des Arts et Métiers" (1826-28) - mathématiques intéressées-, reste fidèle à l'esprit de CLAIRAUT, donc aux bandes parallèles. Ensuite on trouve deux ouvrages qui furent discutés, leurs auteurs passant alors pour fort peu conformistes. Ils maintenaient la séparation entre les propriétés des parallèles et celles des triangles semblables. Ces auteurs sont :

- CATALAN (1ère édition : 1843 ; 2ème édition : 1866 ...). Il étudie d'abord les segments *«de deux droites quelconques déterminés par trois parallèles sont proportionnels»* puis les réciproques, puis le cas de *n* parallèles et, après seulement, les figures semblables. Il traite l'espace sous le titre : quadrilatère gauche.
- MERAY (1ère édition : 1874 ; 2ème édition : 1905 ...). Il étudie à la fois plan et espace, parle de "bandes" et de "murs parallèles", sépare les rapports, alors étudiés des figures semblables, évoque la notion de projection et use de rapports algébriques.

Par ailleurs, on relèvera que, dans leurs "essais sur la géométrie", ni CHASLES (1937) ni HOÜEL (1867) ne s'attarderont sur le sujet et ne citent Thalès à cette occasion.

Et les manuels scolaires ? Et les programmes ?

En effet, le XIXe siècle vit éclore ces nouvelles entités agissant plus ou moins les unes sur les autres.

Si l'on se plonge dans ces ouvrages "scolaires", aucune mention de THALES n'apparaît d'abord. Ni dans les multiples géométries d'après LEGENDRE qui régnèrent longtemps dans ce siècle, ni chez CIRRODE (1844) qui pourtant reprend l'idée d'ARNAULD, ni chez MACÉ de LESPINAY, ni chez VACQUANT (1866) - nous retrouverons ces noms plus tard - ni chez ANDRÉ (1895) ni chez GIROD (1881 et 1897) pour citer les plus répandus. Silence également après la réforme des programmes de 1905 et, toujours parmi les plus diffusés, on citera BOREL (1905) SAINTE LAGUE (1913) qui use de lignes proportionnelles avec sens, NIEWENGLOSKY et GÉRARD qui parlent de MÉNÉLAÜS et de CÉVA (1918), HADAMARD (1922) qui parle de "Théorème fondamental" avec la figure de LA CAILLE, Illovici et Robert qui usent de vecteurs et d'homothétie (1939), et même LECOMTE (1942).

Mais quand apparaît donc THALES ?

Dans "Eléments de géométrie" de Rouche et Comberousse (Réédition de 1883), au livre III : Figures semblables, on lit cette scolie : *«Dans le triangle, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés. Cette propriété fondamentale, dont la découverte est due à Thalès (639-548), ne subsiste pas pour les polygones quelconques».*

Curieuse entrée en scène. Mais et *le* "Théorème" ?

Il existe un ouvrage édité chez Mame à Tours, avec pour nom d'auteur J.F. mais sans date d'impression (Dans les dernières années du XIX[e] siècle certaines maisons d'édition ne mettaient pas de date pour, semble-t-il, des raisons d'imposition fiscale...). Cet ouvrage comporte un "Théorème de Thalès" ***(Document 14)***.

Théorème de Thalès

221. ***Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.***

Soit ABC un triangle quelconque, et DE une parallèle au côté BC. Il faut prouver que les deux triangles ADE et ABC ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues proportionnels.

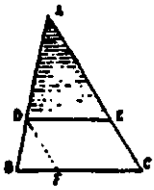


Fig. 164.

1° L'angle A est commun ; les angles D et B sont égaux comme correspondants, ainsi que E et C.

2° Menons DF parallèle à AC. La figure DECF est un parallélogramme, et ainsi DE = FC (n° 100). A cause des parallèles DE et BC on a (n° 213) : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

Les parallèles DF et AC donnent également :

$\frac{AD}{AB}=\frac{FC \text{ ou } DE}{BC}$ **d'où** $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ **Donc...**

Document 14
Cours par F.J. (vers 1895?) page 96
Mame éditeur

Dans "Exercices de Géomé-trie" par F.G.M., encore chez Mame (4[ème] édition : 1907), on lit d'utiles compléments historiques.

Enfin, la date la plus ancienne , "Cours de géométrie élémentaire", par E. Combette professeur au Lycée Saint-Louis . Alcan éditeur, 1992 Théorème de Thalès : *«On étudie un triangle coupé par une parallèle un des côtés...»*

Exercices par F.G.M (1907)
4ème édition, page 96.
Ce livre comporte beaucoup de notes historiques

§ III. — Similitude et homothétie.

206. *Similitude.* L'étude des *figures semblables* repose principalement sur le *théorème de Thalès*, relatif aux triangles semblables. (G., n° 221.)

Pour résoudre un problème à l'aide de la similitude ou de l'homothétie, on construit une figure semblable à la figure demandée, et on compare une dimension à son homologue donnée. On opère surtout ainsi lorsque le problème proposé, ou le problème plus simple auquel on a pu le ramener, ne dépend que d'une ligne donnée.

206 a. *Note.* Le nom d'*homothétie* est dû à CHASLES, mais l'étude des *figures homothétiques* est de PONCELET.

Actuellement l'étude de l'*homothétie* précède celle de la *similitude*, ou des *figures semblables*.

* THALES, un des sept sages de la Grèce (639 à 548 av. J.-C.), alla s'instruire en Égypte ; il mesura la hauteur des pyramides par le moyen de leur ombre ; aussi lui attribue-t-on les théorèmes relatifs aux triangles semblables. THALES s'établit ensuite à Milet, et y fonda l'École ionienne. Il eut la gloire de compter PYTHAGORE au nombre de ses disciples.

Quelques curiosités et variétés

Barbarin : "Géométrie rationnelle" (ouvrage inspiré de Hilbert) (1911) énonce : *«Théorème fondamental (Thalès). Si deux sécantes coupent des parallèles...»*

Chamman et Rebouis -Classes de 2de et 1ère (édition 1925) (***Document 15**, ci-dessous*)suivent scrupuleusement les programmes officiels et donc n'en parlent pas, mais dans une édition de 1912 de la même collection, Géométrie dans l'espace :

Chamman et Rebouis (1925)

§ 3. — LIGNES PROPORTIONNELLES

264. *Théorème fondamental.* — *Des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.*

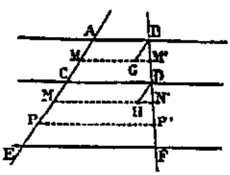
Soient les droites parallèles AB, CD, EF et les sécantes AE et BF ; il faut démontrer que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}.$$

265. REMARQUE. — On peut écrire aussi :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}},$$

266. *Théorème.* — *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux côtés qu'elle rencontre des segments proportionnels.*



«Trois plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments proportionnels en vertu du théorème de Thalès.» Pour la réciproque, ces auteurs évoquent orientation et signe. Donc ici, c'est Thalès dans l'espace...

Même aventure chez Chenevier : 1931 classe de Seconde, il est question de bandes parallèles, il y a une réciproque mais pas de nom propre. Par contre, 1925 : classes de 4ème et 3ème, *«Théorème de Thalès : dans un triangle coupé par une parallèle à un des côtés...»*

Donc, dans les ouvrages où figure un théorème de Thalès, celui-ci apparaît sous des formes différentes, dans des chapitres différents. En gros, deux grandes familles se dessinent quant à la géométrie plane :

- Triangle coupé par une parallèle à un des côtés dans le cadre de figures semblables, sans pour cela toujours reprendre la démonstration par les aires (famille d'Euclide). Nous y avons rencontré F.J. et F.G-M et Combette. Il y a également déjà notés, Vacquant, mais dans l'édition de 1908 et Macé de Lespinay dans l'édition de 1917. Ces deux auteurs citent maintenant Thalès. Et encore Boucheny et Gardinet (1920) Beche (1920) et plus tard Chenevier.
- Bandes parallèles et sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles avec

parfois évocation de projection (famille d'Arnauld ?). Figurent là Barbarin, Brachet et Dumarquet, Maillard, Lebossé et Hemery, Lespinard et Pernet etc… Dans cette famille, Foulon (1937) fait de la propriété un théorème fondamental de Thalès et introduit les rapports algébriques pour unicité et réciproque.

La variété d'énoncés demeurera dans la seconde moitié du XX[e] siècle d'autant que Thalès est maintenant cité dans les programmes. Vers 1990, la famille euclidienne paraît dominer dans les ouvrages scolaires sans que s'éclipse l'autre. On voit même apparaître "figures de Thalès" et "configuration de Thalès" (Terracher), et il y a aussi $k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, mais ceci est une autre histoire…

Et au-delà de "l'Hexagone" ?

Sur le sujet qui nous occupe, encore au milieu du XX[e] siècle, pas de trace de Thalès. Témoins ces livres en anglais ou en allemand. Silence donc sauf, tardivement, dans des ouvrages d'inspiration française.

(Documents 16,17,18).

§ 3. **Teorema lui Thales**

TEOREMA IX.3. **Fie $\mathbf{A}$ un vector în planul Π prevăzut cu o origine O şi vectorul $\mathbf{A}' = \lambda\mathbf{A}$. Fie încă d_1, d_2 două axe care trec prin originea O. În aceste condiţii are loc relaţia :**

$$\mathbf{A}'_1 = \lambda\mathbf{A}_1$$

sau, altfel spus :

$$(\lambda\mathbf{A})_1 = \lambda\mathbf{A}_1.$$

I. Să facem deocamdată ipoteza $\lambda > 0$ (fig. IX, 9).

a) Să presupunem $\lambda = p$ — întreg. În acest caz fie B, C,... puncte pe $\partial(O,A)$, aşa ca $\rho(O,A) = \rho(A,B) = \rho(B,C) = \dots \rho(L,A')$. După teorema lui Thales sub forma slabă avem :

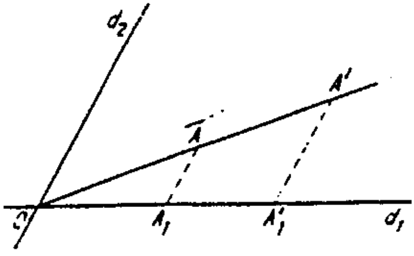


Fig. IX. 9

$$\rho(O,A_1) = \rho(A_1,B_1) = \dots = \rho(L_1,A'_1),$$

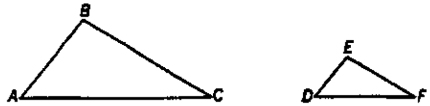
şi deci :

$$\rho(O,A'_1) = p\,\rho(O,A_1),$$

Document 16
Geometrie a planului
Bucuresti (1968)

Ratio in geometry

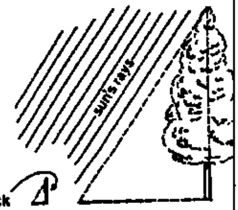
When two triangles (or polygons) are similar, their sides can be paired so that the ratios are equal. In the example below, the two triangles are similar and the ratio of their sides is 2 : 1.



The ratio of $\overline{AB}$ to $\overline{DE}$ is 2 : 1.
The ratio of $\overline{BC}$ to $\overline{EF}$ is 2 : 1.
The ratio of $\overline{AC}$ to $\overline{DF}$ is 2 : 1.

EXERCISES —

The two triangles shown by the dotted lines are similar. If the shadow of the yardstick is 2 feet and the shadow of the tree is 16 feet, how tall is the tree?



ahlensatz

Document 17
Elementary School
Mathematics (6)
EICHOLZ
Addison-Wesley London
1964

25. Der Strahlensatz

1. Trägt man auf dem Schenkel a eines Winkels (Fig. 210) **gleich lange Strecken** $SA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ auf und zieht man durch die Endpunkte dieser Strecken parallele Gerade, so sind auch die auf dem zweiten Schenkel b durch die parallelen Geraden ausgeschnittenen Strecken SB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... gleich lang.

Verschieben wir nämlich irgendeine der Teilstrecken auf dem Schenkel b, etwa B_1B_2, in Richtung des Schenkels a nach $B_1'B_2'$ und dann diese Strecke in Richtung der Parallelen nach B_3B_4, so ist $B_1B_2 = B_1'B_2'$, $B_1'B_2' = B_3B_4$, also auch $B_1B_2 = B_3B_4$.

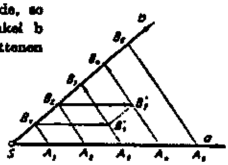


Fig. 210

2. a) Wir tragen nun auf dem Schenkel a des Winkels **zwei verschieden lange** Strecken SA_1 und A_1A_2 auf (Fig. 211) und ziehen wieder durch deren Endpunkte parallele Gerade, die auf dem zweiten Schenkel b die Strecken SB_1 und B_1B_2 ausschneiden.

Haben nun die Strecken SA_1 und A_1A_2 das gemeinsame Maß e, so gilt:

$$\begin{array}{r} SA_1 = p \cdot e \\ A_1A_2 = q \cdot e \\ \hline SA_1 : A_1A_2 = p : q \end{array}$$

Dabei sind p und q ganze Zahlen (in Fig. 211 ist p = 4, q = 7).

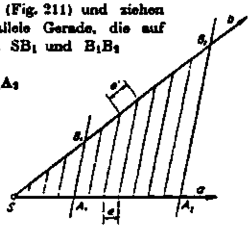


Fig. 211

Document 18
Lehrbuch der Mathematik für
die 3 und 4 Klasse der
Mittelschulen
LAUB - Wien 1966

Tragen wir nun das gemeinsame Maß e auf der Strecke SA_1 p-mal, auf der Strecke A_1A_2 q-mal auf, und ziehen wir auch durch die Teilungspunkte parallele Gerade zu den gegebenen Parallelen, so wird nach Absatz 1 die Strecke SB_1 in p, die Strecke B_1B_2 in q gleiche Teile e' geteilt. Daher gilt:

$$\begin{array}{r} SB_1 = p \cdot e \\ B_1B_2 = q \cdot e' \\ \hline SB_1 : B_1B_2 = p : q \end{array}$$

Aus den beiden Proportionen folgt:

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

Mais alors ?

C. Boyer dans "A history of mathematics" écrit : *«Au contraire des Egyptiens, les anciens Babyloniens étaient familiers avec le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit, proposition généralement connue comme étant le théorème de Thalès»...* Et voilà! Autres témoins outre-Manche, outre-Rhin, le disciple énonce : *«Théorème de Thalès : un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.»* ***Documents 19-20.***

Theorem of Thales—

an angle inscribed in a semi-circle is a right angle

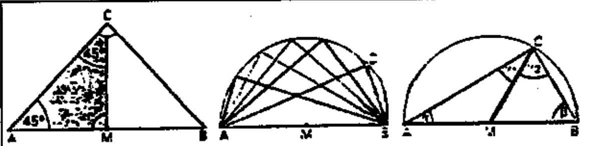
Et, au Brésil...

• O ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig.
Satz des Thales

Document 19
Gamma 7
Mathematik Gymnasium

Der Satz des Thales



Satz: a) Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C auf dem Halbkreis über AB liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
b) Wenn ein Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, dann liegt C auf dem Halbkreis über AB.
Kurz: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter

Document 20
Mambacker
Schweitzer
(1983 - Stuttgart)

Un collègue d'Helvétie questionné sur cette alternative associait, lui, le nom de l'homme de Milet à la propriété de la hauteur du triangle rectangle qui partage l'hypoténuse en deux segments qui...

L'Europe de l'enseignement aura à se pencher sur cet excès de théorèmes de Thalès, sinon *«Vérité en deça des Pyrénées, erreur au-delà».*

Enfin, pourquoi un nom en France, vers à la fin du XIX[e] siècle.

Une hypothèse peut être avancée. Vers les débuts de la Troisième République, le programme de l'agrégation de mathématiques stipulait que les candidats devaient faire montre de connaissances en histoire de la discipline. On peut alors penser que, devenus maîtres, ceux-ci eurent à cœur d'user de leurs acquis en la matière et d'introduire des noms propres dans leurs cours. En effet, nombre de propriétés figurant dans des ouvrages antérieurs n'y avaient pas le parrainage de Pythagore, Euler ou Pascal comme cela va devenir fréquent par la suite.

Les programmes français de la fin du XX[e] siècle, en évoquant la "dimension historique" sont dans la ligne de ces efforts de montrer que, derrière les mathématiques, il y a des hommes. Ce petit travail a voulu y contribuer.

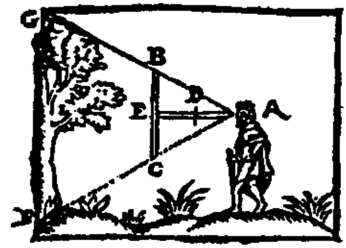
ANNEXE

Variæ

Dans "*Récréations mathématiques*" sans nom d'auteur - Rouen 1629).
- maçons et charpentiers useront longtemps encore du procédé -

des Recrea. Mathe. vij

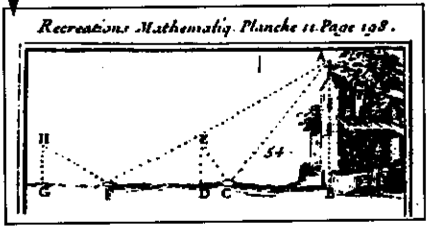
PROBLEME 12.



Mesurer la hauteur d'une Tour ou d'un Arbre, par le moyen de deux petits bastons ou de deux pailles, sans autre formalité.

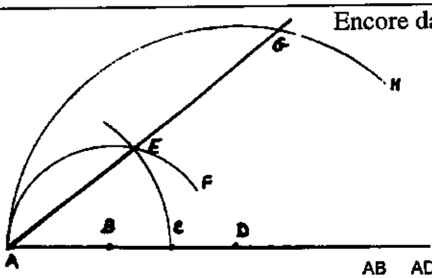
FAut auoir deux bastons tellement propor-tionnez, que EB. soit esgal de DE. & DE. de DA. alors posant le poinct A. proche de l'angle de l'œil, & fermant l'autre, faut se reculer ou s'a-uancer iusques à ce que les rayons visuels d'es-couurent le poinct de hauteur G. & de profon-deur ou de racine si c'est vn arbre F. Alors mesurez la distance qu'il y a de vostre pied aupres de l'arbre, & vous aurez la hauteur d'i-celuy: ce qui est requis.

Dans "*Récréations mathématiques*" d'OZANAM (1694)



- On peut aller à la base B, on place un miroir en C et de E, on vise le reflet de A.
- On ne peut aller en B, on fait une seconde visée avec miroir en F et du haut du même balcon (HG = ED) déplacé en H.

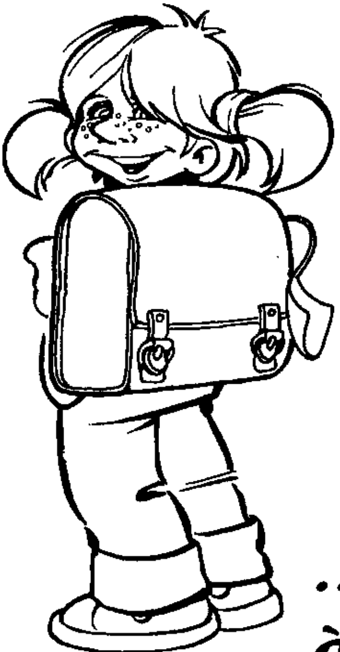
Encore dans le même ouvrage d'OZANAM



Trouver à trois lignes données une quatriéme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, décrivez des deux extremitez B, D, de la premiere & de la troisiéme ligne donnée, par l'extremité commune A, les deux arcs de Cercle AEF, AGH, & ayant ap-pliqué sur le premier AEF la ligne AE égale à la se-conde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G, & toute la ligne AG sera la quatriéme proportionnelle qu'on cherche.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AG}$ sans qu'apparaisse le mot paral-lèle...



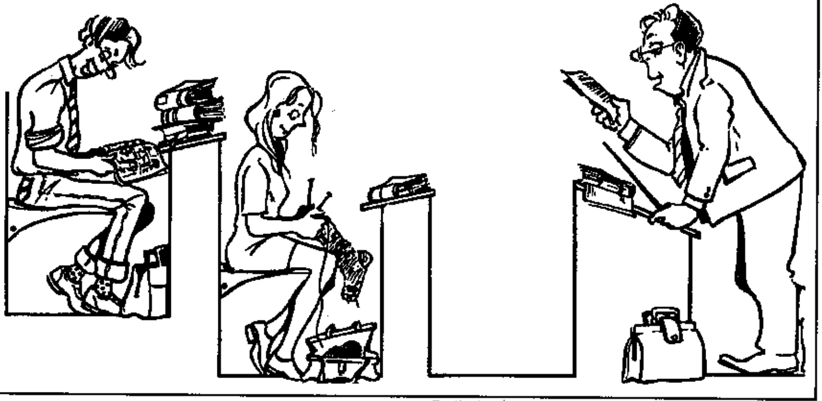
Thalès...

de la Maternelle

...

...

à l'Université



Bulletin Inter-IREM Commission Premier Cycle

Promenade avec Thalès, entre la Maternelle et l'Université.

par Guy BROUSSEAU

1. Les présentations du théorème de Thalès au Collège et difficultés

1.1. Trois points de vue principaux

Une très précieuse enquête de l'APMEP[1] identifie diverses présentations du Théorème de Thalès proposées dans les programmes français de la deuxième moitié du XXᵉ siècle. Elle relève trois points de vue principaux, relatifs au cas de deux triangles dans la position classique et qui se succèdent, disparaissent et reviennent au gré des réformes.

Les deux premières expriment que "des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments correspondants proportionnels" et se différencient suivant les correspondances choisies. La troisième prend appui sur la correspondance du troisième côté.

1.1.1. la conservation des abscisses (sur les sécantes)

Ce point de vue (fig. 1) exprime que les rapports entre les vecteurs portés par une même sécante ne dépendent pas de cette sécante, mais seulement des parallèles considérées :

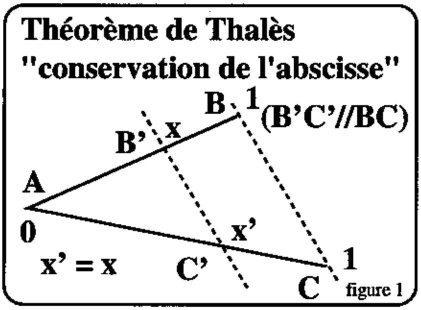
$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC'}}$$

1 Enquête APMEP *Evaluation du programme de maths* 3° 1990 et 2de 1991

que l'on présente parfois sous la forme :

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AB'} \text{ alors } \overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AC'}$$

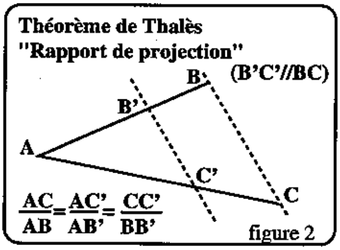
pour éviter d'habituer les élèves à écrire des rapports de vecteurs (qui n'ont pas de sens en général).

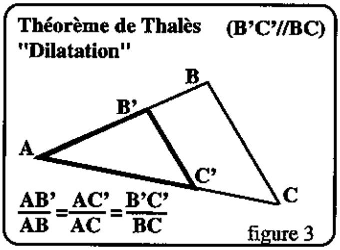


1.1.2. la conservation du rapport de projection (de AC sur AB)

Ce point de vue (fig. 2) exprime l'égalité des rapports entre les mesures algébriques de segments correspondants déterminés sur deux sécantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$$





1.1.3. la dilatation

Ce que l'enquête de l'APMEP appelle le point de vue "**dilatation**" (fig.3) exprime la similitude des vecteurs portés par les parallèles dans une homothétie ayant pour centre l'intersection des sécantes :

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} \text{ ou encore Si } \overrightarrow{B'C'} = \alpha.\overrightarrow{BC} \text{ alors } \overrightarrow{AB'} = \alpha.\overrightarrow{AB}$$

Les auteurs remarquent que les nouveaux programmes présentent le point de vue dilatation comme le faisaient déjà les programmes de 1947, dans le cadre de la similitude (p.31).

1.2. Résultats et difficultés

Pour orienter notre promenade, suivons le chemin des difficultés rencontrées par les élèves ? Quelles sont-elles ? Les exercices de l'enquête permettent-ils de choisir entre ces trois points de vue ?

1.2.1 Dispositions simples.

Les taux de réussites varient beaucoup, peut-on dire sous l'effet de quelles variables ?

Dans une configuration "reconnaissable" par 75 % des élèves, en troisième,

- avec des renseignements et des questions du type "*rapport de projection*" (dans $\mathbb{R}^2$, Q E 21-22) , 69% des élèves calculent correctement le quatrième segment (il est le plus grand dans le rapport conservé). Ce résultat se maintient en seconde, mais tombe à 45% dans un questionnaire à choix multiple alors qu'il est de 74% au Japon.
- avec des renseignements du type *dilatation,* dans $\mathbb{R}^2$, (Q B31-32), 63% réussissent dans un calcul où le côté demandé est plus petit que son correspondant et 65% interprètent correctement Thalès dans le cas d'une homothétie de $\mathbb{R}^3$ (Q P 14-15).

1.2.2. quelques modifications

Le plongement de la configuration dans une figure légèrement plus complexe (et avec un rapetissement au lieu d'un agrandissement) conduit à 51% de réussite dans le cas "*rapport de projection*" correspondant à (Q E 21-22), et à 41% seulement dans celui d'une *dilatation,* correspondant à (Q B31-32). La même combinaison avec le point d'intersection entre les parallèles fait tomber la réussite à moins de 20 % (Q N 25-26).

1.2.3. réciproque et calculs

La réciproque du théorème de Thalès est maîtrisée par 51% des élèves lorsque les segments caractéristiques sont dans la configuration habituelle (Q C 18-19), et à 23% sinon (Q M 4-5).

En seconde, lorsque le rapport de projection est donné sous forme décimale, l'application directe est réussie par 56% des élèves dont 24% seulement font référence au théorème.

L'utilisation du théorème, non plus dans un calcul mais dans une démonstration, n'est réalisée que par 24% des élèves en troisième (Q F 18-19), 10% (Q A 30-32) à 33% (Q D 25-27) des élèves de seconde mais le placement d'un point est correct pour plus de 90% des copies.

1.2.4. Commentaires

Le point de vue semble agir assez peu par rapport aux variables de configuration, au théorème (direct ou réciproque), au rapport d'homothétie (supérieur ou inférieur à un, naturel, quantième ou décimal etc.) et surtout à la forme de question (QCM ou question classique).

Les écarts entre le pourcentage des démarches correctes et celui des réponses exactes sont particulièrement faibles lorsqu'il s'agit de calculs et plus grands lorsqu'il s'agit des démonstrations. Ils sont de l'ordre de ceux que l'on observe sur les questions ayant fait l'objet d'un entraînement.

Le choix des variables qui différencient les divers exercices et les commentaires des auteurs montrent qu'ils considèrent la *reconnaissance des figures* comme un facteur décisif et parmi les conditions d'utilisation du théorème, la disposition et la complexité des figures leur paraît la principale source d'erreurs. Faisons une petite incursion de ce côté.

1.3. Recherches sur les facteurs de difficultés

1.3.1. Une recherche sur les configurations typiques

Récemment, deux chercheurs[2] se sont intéressés à l'effet de diverses variables sur la *reconnaissance des conditions scolaires d'application du théorème de Thalès*. Ils commencent par rafraîchir la mémoire des 40 élèves de seconde interrogés en leur rappelant l'énoncé suivant :

"Soient deux droites (D) et (D') et trois points a, b et c sur (D). On projette (D) sur (D') suivant une direction donnée. a, b, et c se projettent en a', b' et c' sur la droite (D').

Dans ces conditions on a : $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}}$

Cet énoncé correspond au cas de la "conservation de l'abscisse", mais remarquons que la formulation fait référence à la projection suivant une

2 F. et J. Cordier. *"L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs"*. Recherches en didactique des mathématiques, Vol.11 1 La pensée sauvage. Grenoble.

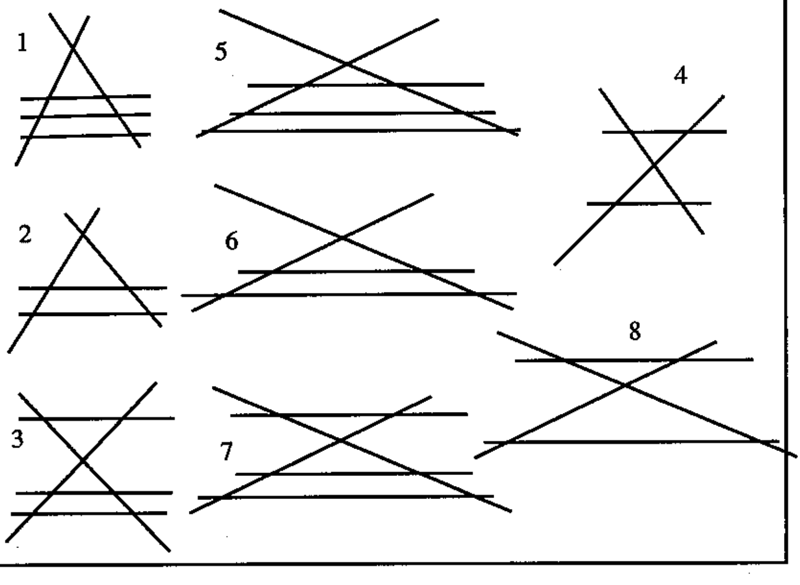
direction et gomme ainsi beaucoup le rôle des droites parallèles (le mot n'est pas prononcé).

Leur première expérience consiste à demander aux élèves de faire autant de figures différentes que possibles "caractéristiques de l'application du théorème".Elle montre que certaines dispositions appelées *typiques* sont plus familières, d'autres plus rares et d'autres absentes. Les variables observées sont essentiellement l'*angle des deux droites* (D) et (D') (aigu ou obtus), la *disposition des parallèles* (d'un côté ou de part et d'autres du point d'intersection) et le *nombre de parallèles envisagées* (2 ou 3).

Dans une deuxième expérience il s'agissait pour les élèves de disposer les points a, b, c et a', b', c', conformément à l'énoncé du théorème, sur diverses figures (fig. 4). Cette expérience montre que les élèves font moins d'erreurs d'application du théorème aux figures typiques. Plus précisément la valeur de l'angle n'influence pas le nombre d'erreurs à l'encontre du nombre de parallèles et plus encore de leur disposition.

Une troisième expérience montre que le temps mis par les élèves à répondre dépend lui aussi des trois variables et en particulier que le caractère obtus de l'angle allonge le temps de réponse.

Figure 4- Matériel des expériences 2 et 3. Les n° 1-8 sont communs aux deux expériences.



Ces résultats confirment les observations des enquêteurs de l'APMEP, mais ne prennent pas en compte toutes les variables.

1.3.2. Les variables des situations didactiques

Cette sorte de recherches pourrait être étendue à toutes les variantes possibles de la présentation **SCOLAIRE** du théorème de Thalès. Ces variantes pourraient être obtenues par le jeu de différents paramètres, ceux évoqués ci-dessus, et tous ceux que suggère une théorie des situations didactiques. Nous en donnons quelques exemples dans le tableau 1. On peut alors rechercher l'influence de ces paramètres par des méthodes du même genre.

Tableau 1.
Quelques variables des situations d'introduction du théorème de Thalès

Variables des figures (milieu proposé)	Valeurs des variables	
Dimension de l'espace	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
Nombre de parallèles (droites ou plans)	2	3
Disposition	même côté	de part et d'autre
Nombre de sécantes	2	3 ou plus
Sécantes toutes concourantes	oui	non
Différence de taille image-objet	petite	grande
Figure typique	oui	non
Milieu	figure effective	figure fictive
Complexité	seuls figures les éléments utiles	la figure est plongée dans une configuration plus complexe

Variables de la situation a-didactique[3] autres que celles de la figure	Valeurs des variables
Définition utilisée	"Conservation des abscisses" "Conservation du rapport de projection" "Dilatation"

3 situation a-didactique : situation que l'élève essaie de résoudre sans chercher à utiliser sa connaissance des intentions didactique du professeur.

Nature du rapport	naturel rationnel	décimal réel
Type de question	tracé calcul	énoncé démonstration
Rapport entre l'objet donné et l'objet correspondant cherché	du petit au grand	du grand au petit
Théorème	direct	réciproque
Manifestation nécessaire et fonction	connaissance, moyen de résoudre formulation moyen de démonstration explicite implicite	

Variables de la situation didactique	Valeurs des variables	
Forme	exposé	problème
Situation didactique pour l'élève	situation d'institutionnalisation situation d'apprentissage a-didactique	
Fonction didactique	cours, information	exposé problème introductif effectif problème exposé
	exercice	entraînement contrôle
	problème d'application	

1.4. Conclusions

Il existe de nombreux travaux de ce type. Nous pourrions continuer notre promenade en examinant de même les pratiques et leurs résultats aux différents niveaux scolaires. Ces recherches de type psychologique sont très utiles, mais elles ont l'inconvénient de n'être pas indépendantes des enseignements pratiqués et de ne pas fournir d'informations directement exploitables par les enseignants. Aussi bonnes soient-elles, elles ne laissent à l'enseignant que des faits "dont il devrait tenir compte", ici, pour "interpréter les erreurs des élèves". Elles ne peuvent cerner aucun des problèmes de décision posés ni aucun des phénomènes didactiques observables. La didactique le peut-elle ?

Laissons donc nos pas s'égarer un peu au gré de quelques réflexions théoriques dans ce domaine. Ils nous éloignent en apparence de notre but, mais peut être y glanerons-nous quelques outils pour continuer le voyage.

2. Conceptions et reconnaissance ; conséquences didactiques

2.1. Connaissance conceptuelle et connaissance "prototypique"

2.1.1. Deux formes de connaissances ?

F. et J. Cordier attirent l'attention des lecteurs sur une intéressante conséquence de leur travail. Celui-ci tendrait à confirmer que l'utilisation du théorème par les élèves relève de deux modes distincts de connaissance :
- une connaissance **conceptuelle** basée sur une analyse des caractères de la figure ;
- et une connaissance plus "**perceptive**", basée sur le rapprochement de la figure observée avec des figures **typiques** bien connues.

Selon les élèves et les cas, il est fait recours à l'un ou l'autre ou même aux deux de ces deux modes de traitements. Toute figure proposée à l'élève pourrait ainsi être l'occasion de sa part d'une recherche intuitive de rapprochement avec diverses figures typiques de divers théorèmes : représentation de figures, de projections etc.

Ces observations sont une bonne introduction à l'étude des problèmes d'enseignement du théorème de Thalès. Les auteurs observent qu'on ne saurait ni se résoudre à renoncer à la connaissance conceptuelle et à son "apprentissage abstractif", ni empêcher l'apparition et le fonctionnement "naturels" de la connaissance prototypique. Ils suggèrent néanmoins qu'il "pourrait être très important de diversifier très tôt les figures géométriques" mais ne peuvent guère indiquer les motifs, les limites et les conséquences de cette suggestion. Il convient pour cela de préciser un peu la nature et le rôle de ces deux formes de connaissances.

2.1.2. Connaissances conceptuelles

Remarquons tout d'abord qu'elles sont parfaitement identifiables et qu'il en existe plusieurs modèles.

La connaissance **conceptuelle** détermine un objet ou une classe d'objets par la conjonction logique de leurs propriétés communes. Ici, elle consiste à contrôler **indépendamment, toutes** les conditions d'application d'un théorème, c'est-à-dire ses hypothèses et à identifier les éléments de sa conclusion. Elle suppose que chacune des conditions peut donc être traitée comme un prédicat par le sujet identifiée, énoncée et traitée logiquement comme une propriété, conjuguée avec d'autres etc. Cette forme de connaissance correspond à une organisation du savoir acceptée depuis Aristote.

2.1.3. Connaissance prototypique

La reconnaissance par des **objets typiques** détermine une classe par un objet "réel" particulier. Cet objet doit posséder naturellement les propriétés communes à tous les objets de sa classe comme l'objet conceptuel. Mais aucun objet "réel" ne peut être réduit à celles-ci. Par exemple la voiture "conceptuelle" d'une série de voitures identiques, mais peintes de couleurs différentes, ne pourrait pas avoir de couleur. Mais il n'existe pas de voiture sans couleur, la voiture type de cette série adoptera donc la couleur la plus fréquente.

Il est clair alors que, lors de la présentation d'un objet typique, il n'est pas possible de savoir immédiatement quelles sont les propriétés communes, déterminantes, et quelles sont les propriétés sans signification.

Cette forme de reconnaissance a fait l'objet de nombreux travaux théoriques pour imaginer des modèles (H. Wermus, M. Pavel par exemple), ou expérimentaux pour établir ses règles. La reconnaissance d'un objet géométrique quelconque peut être envisagée comme la composée de l'identification d'une **configuration** composée de figures élémentaires typiques suivie d'une certaine déformation. La reconnaissance de structures par des grammaires de configurations et de déformations a des applications de toutes sortes.

Selon Piaget et Wermus, la reconnaissance d'objets s'effectue par le traitement **global** (sous forme de prédicats amalgamés) de paquets de propriétés (composantes contextuelles) dont chacune échappe individuellement à la connaissance conceptuelle du sujet. L'objet n'est reconnu que lorsque ces composantes prennent certaines valeurs. Par exemple, un rectangle n'est reconnu par un jeune enfant que s'il est dessiné, s'il est très proche d'un rectangle, s'il n'est pas très proche d'un carré, s'il n'est pas trop allongé, si ses côtés sont parallèles au bord de la feuille, s'il n'est pas trop petit ni trop grand. La reconnaissance de l'objet s'affine par la "centration" sur les composantes puis par la "décantation" qui les transforme à leur tour en prédicats et permet alors la connaissance conceptuelle.

2.2. Ergonomie didactique de la reconnaissance des structures

2.2.1. Connaissances obstacles

L'étude des conditions qui justifient, par des raisons ergonomiques, le recours à l'un ou à l'autre de ces deux modes de connaissance, sort du cadre de cet article mais il est possible d'imaginer des situations qui rendent de façon décisive, plus efficace l'un ou l'autre des deux procédés (la situation dite "des trésors" qui sera évoquée plus loin montre un exemple d'utilisation didactique de ces principes pour développer la pensée logique et le raisonnement à l'école maternelle ; ce genre de travail entre dans le cadre de la théorie des situations).

Or ces deux modes de connaissance, sans être contradictoires, sont souvent incompatibles en tant que moyens de gestion des informations utiles au cours d'une action. Ils seront donc concurrents sur toutes les situations qui n'avantagent ni l'un ni l'autre ou qui, pire, appellent à les conjuguer. Dans ce cas, l'apprentissage de l'un sera contrarié par l'usage de l'autre. Nous avons un cas typique de **couple de connaissances obstacles**.

On voit comment le choix et la structuration des situations qui servent de base aux apprentissages, s'il ne peut pas changer ces phénomènes, peut en modifier profondément le résultat et les conditions. Le temps passé à "étudier" les divers cas générés par des variables logiquement non pertinentes mais favorables à la reconnaissance prototypique n'est pas passé à l'étude des cas générés par les variables pertinentes : autres définitions, lemmes, corollaires, objets "voisins", etc.

2.2.2. Conjonction de connaissances et de savoirs

Il est vraisemblable que le raisonnement mathématique ne s'effectue réellement que par la conjonction de procédés divers dont une partie seulement coïncide avec les méthodes standard de communication des connaissances mathématiques : définitions, théorèmes, démonstrations. Ces dernières sont les seules à bénéficier d'un statut culturel qui leur permet de figurer comme des objectifs d'enseignement. Les professeurs ne disposent pas de moyens de gestion (le droit et les techniques d'enseignement) des autres connaissances qui néanmoins seraient indispensables à leurs élèves. Elles se développent donc plus ou moins mais spontanément et interviennent sans cesse de façon incontrôlée dans les choix didactiques des enseignants qui, tour à tour, sur ou sous évaluent leur action.

Plusieurs recherches récentes et d'autres encore en cours étudient le rôle joué par les différentes sortes de situations et de milieux utilisés dans l'enseignement de la géométrie (interactions spatiales, manipulations, figures, communications, débats etc.).

2.2.3. Ergonomie didactique locale.

Il est certainement avantageux pour un professeur, à un instant donné, de gagner du temps dans la mobilisation des conditions qu'il veut étudier du point de vue mathématique en ayant recours à des formes typiques. Si, lorsqu'il veut étudier une propriété quelconque dans le triangle, il choisit comme illustration une figure du type scalène, il économise ainsi (pour toutes sortes de raisons) du temps et des erreurs dans la détermination et le repérage des différents éléments en présence (hauteurs, médiatrices, etc.) sans rien perdre de la généralité de son propos (si les élèves sont capables de convertir les informations recueillies par reconnaissance prototypique en informations conceptuelles). Le choix réitéré des conditions localement favorables contribue donc fortement à créer les figures types. Ce procédé crée des difficultés mais n'est pas du tout un insuccès total. Au contraire. La rapidité avec laquelle les élèves peuvent traiter les figures types est avantageuse. Elle provient de notre puissante faculté naturelle à analyser des messages iconiques, même complexes. Mais cette puissance repose sur des systèmes de classification qui vont à l'encontre des catégories d'objets géométriques[4]. Alors que le professeur obtient des succès avec ses figures prototypiques, les configurations complexes résistent : l'élève “ne voit pas” les deux triangles en position de Thalès “cachés” dans la figure étudiée.

2.2.4. Conséquences : les procédés “ostensifs” et leurs résultats

Les professeurs sont tout de même conduits à penser de façon optimiste que très souvent, la catégorie logique est visible à travers son objet prototypique.

Cette opinion (elle appartient à l'épistémologie des professeurs en ce sens qu'elle naît et se fortifie dans l'interaction didactique) tend à justifier les **procédés “ostensifs”**[5] d'introduction des objets mathématiques. Le professeur “montre” une représentation typique d'un objet mathématique et pense

4 Voir les différentes interprétations données à des trapèzes par les élèves dans la Thèse Berthelot et Salin *"L'enseignement de l'epace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire"* U. Bordeaux 1, 1992, LADIST.

5 J'ai entrepris l'étude des procédés "ostensifs" en 1976 avec H. Ratsimbah Rajohn : *Etude de l'introduction ostensive des objets mathématiques* (DEA U. Bordeaux 1, 1977). Il en a poursuivi l'étude dans sa deuxième thèse : *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative : application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction"* U. Rennes, 1992

avoir ainsi défini sa classe logique. Il exige ensuite "la perception" ou même la "déduction" de ses propriétés[6] (exemple : "un vecteur est un segment de droite orienté").

S'il est conscient des limites de ce procédé, il pense qu'il suffit d'enrichir "la vision" du "prototype" par des exemples variés (un vecteur "achat" dans un commerce de tissus).

Ce raisonnement est discutable. La multiplication des exemples "perceptivement" différents les uns des autres tend à détruire la valeur informationnelle du "prototype". Si les "déformations" nécessaires à la reconnaissance de l'objet à l'aide du "prototype" sont trop importantes ou n'appartiennent pas à la grammaire spontanément développée par le sujet, il va plutôt créer plusieurs "prototype"s, reliés par une entité "théorique". Ceci aura l'avantage de rendre plus familier l'objet théorique. Mais le bilan de l'opération n'est pas nécessairement, à terme, très avantageux même du point de vue informationnel et les temps d'apprentissages de reconnaissance de configurations peut devenir très vite prohibitif. N'importe, les premiers succès entretiennent l'idée que la reconnaissance des objets doit accompagner leur connaissance conceptuelle.

2.3. Approche Didactique des problèmes d'enseignement

Nous avons suivi jusqu'ici dans notre promenade la pente "naturelle" de ce qu'il est habituel de considérer comme des recherches expérimentales en didactique : sujet scolaire, organisation, repérage des difficultés, étude systématique des facteurs de ces difficultés. Ces recherches semblent en effet traiter des conditions *effectives* qui président aux difficultés *réelles* des professeurs et des élèves avec le théorème de Thalès.

2.3.1. Problématique

Mais la place que nous leur avons donnée paraîtra excessive à tous ceux qui refusent de ne voir dans le théorème de Thalès que ces quelques exercices de reconnaissance d'occasions d'appliquer une formule pour faire un calcul élémentaire. Comme beaucoup d'études semblables, elles sont, en fait, enfermées dans des questions immédiates, posées dans le cadre d'une conception très étroite des recherches sur l'enseignement et de l'enseigne-

6 Un exemple donné par Y. Chevallard et J. Tonnelle dans *"Le monde clos de la factorisation au premier cycle"* (DEA Marseille 2 - Bordeaux 1), 1979. On définit les polynômes comme somme de monômes, eux-mêmes décrits comme produits de constantes et de variables, au lieu de donner la liste des propriétés caractéristiques d'un anneau de polynômes.

ment lui-même. La connaissance et l'usage de cette connaissance ne seraient-ils que le résultat d'une assez grande familiarité avec des configurations typiques ?

Dans quelle mesure une meilleure connaissance du théorème de Thalès dépend-elle d'une compréhension plus large de sa signification et de son rôle ?

Que pourraient avoir appris d'utile à son sujet les élèves avant la troisième, que peuvent-ils entrevoir alors des problèmes que ce théorème résout, et d'autres, aussi intéressants, qu'il permet de poser ? Autrement dit, quelles sont les connaissances actuellement associées comme composantes à la connaissance du théorème et quelles sont celles qui pourraient en être dissociées ou qui pourraient être associées différemment ?

Ces connaissances antérieures et cette insertion problématique jouent-elles un rôle dans la qualité des résultats de l'apprentissage ? Comment les modifier ? Que peut-on espérer de leur amélioration ?

Telles sont quelques unes des questions que se posent les professeurs. La didactique peut-elle contribuer à répondre à ces questions ?

2.3.2. Méthode d'étude : les situations fondamentales.

a) Méthode

Il s'agit, dans un premier temps, d'identifier le théorème dans son environnement mathématique actuel, les connaissances qui interviennent dans son énoncé, et ses différentes formes.

En première approche, certains didacticiens construisent directement - souvent par compilation et classification naïve d'exercices classiques.- les exercices et les problèmes d'évaluation qui "opérationnalisent" les objectifs de l'enseignement. Mais ces problèmes d'évaluation sont la trace, fort travaillée, de situations d'acquisition, et, d'ailleurs, si nous ne voulons pas nous enfermer a priori dans un projet didactique particulier il vaut mieux commencer par la construction de *situations caractéristiques d'une notion.* En effet, pour étudier la dépendance entre les acquisitions du théorème et celles de l'une et l'autre de ses composantes, il faut d'abord produire les situations où elles se manifestent.

Cette construction est l'occasion d'un examen critique original dont nous allons essayer de donner un exemple ci-après. Il aboutit - parfois - à la conception de situations fondamentales, en petit nombre.

b) Définition d'une situation fondamentale

L'étude consiste à fabriquer des situations fondamentales (au sens de la théorie des situations), c'est-à-dire des problèmes

- *spécifiques* : qui réclament la connaissance du théorème comme moyen de "contrôle ou de résolution" (Cette connaissance du théorème, sous ses différents points de vue, peut se présenter sous les différentes formes déterminées par les types de situations : moyen d'action, de formulation ou de preuve),
- *génériques* : qui peuvent générer la totalité des problèmes qui utilisent ce théorème, par le jeux des variables cognitives et didactiques.
- *non-didactiques*, c'est à dire dont l'énoncé peut se comprendre sans que le théorème soit déjà connu, et qui peuvent se résoudre à l'aide du théorème si on le connaît, sans intervention extérieure didactique,
- et si possible *génétiques*, c'est-à-dire qui engendrent un processus de recherche, de questions et de découvertes aboutissant à l'élucidation des différents aspects du théorème et de sa position dans une théorie mathématique.

Une suite de situations détermine un processus et constitue son sens. La première difficulté vient de ce que la signification d'une situation et son déroulement dépendent du processus et réciproquement. L'analyse finale devra donc conjuguer les deux approches.

2.3.3. Analyse et utilisation

a) Situations

Les situations que *l'ingénierie didactique* a ainsi produit peuvent d'abord être confrontées à celles qui sont proposées effectivement aux élèves. Cette confrontation permet alors d'identifier les processus d'enseignement utilisés, puis d'évaluer les effets du contrat didactique (leur caractère plus ou moins a-didactique par exemple) et de la transposition didactique. Le but principal est de les expliquer. Il n'est pas indiqué de tirer des conclusions hâtives lors de la constatation d'un écart entre une pratique scolaire et sa référence "savante".

Elles peuvent bien sûr, aussi, être étudiées expérimentalement, puis, peut-être mises en expérimentation et en études de développement, afin de préparer des réformes et des "innovations".

Les situations d'acquisition, qu'elles soient d'enseignement ou d'apprentissage, et qu'elles soient a-didactiques ou non, sont les moyens utilisés par les professeurs pour transformer l'apparition des connaissances en événements historiques dans la vie de leurs élèves, puis pour transformer une partie de ces événements en histoires, en culture et en savoirs.

Il s'agit donc de déterminer (et/ou d'observer) un ensemble optimal de situations qui forme une trame d'aventures aboutissant à la connaissance de Thalès et de son environnement.

On peut approcher ces situations,

- en les inventant ou réinventant de toute pièce, à partir du savoir actuel, mathématique, didactique et psychologique, par un agencement raisonné de conditions montrées nécessaires (ingénierie didactique,)
- en modélisant celles dont la pratique des mathématiques et la culture a montré l'utilité
- en répertoriant de façon presque naturaliste celles que l'enseignement a fait surgir.

b) Organisation en processus

Il s'agit alors de les articuler suivant un ordre ou de reconnaître dans leur agencement, si on se contente d'observer un processus, un ordre qui réponde à des critères épistémologiques et didactiques justifiés.

Par exemple :

- chaque étape doit rendre possible le déroulement optimal des suivantes (en leur fournissant les connaissances de base nécessaires et les motivations utiles),
- le sens créé doit être conforme aux usages mathématiques, scolaires, et culturels (?!)
- etc.

Ce n'est pas le lieu de discuter les fondements théoriques de ces critères, mais on peut au moins s'attendre à devoir justifier localement ou globalement, un des ordres habituels de la genèse des connaissances :

L'ordre ascendant : ce moyen est d'abord un instrument cognitif permettant de gérer des situations d'actions ou des raisonnements, avant d'être luimême identifié et de devenir un objet d'études. Les raisons de ce changement de statut, d'outil à objet d'étude, restent, bien sûr, à déterminer.

L'ordre descendant : la conception se construit par l'action de catégories plus générales déjà là et la reconnaissance par l'application de structures antérieures.

En fait, toute genèse d'une connaissance naît d'une dialectique appropriée entre ces deux ordres, déterminée localement par les propriétés ergonomiques des situations rencontrées[7].

[7] On en trouve de bons exemples en particulier dans l'ouvrage d'Annie Berté : *"Mathématiques Dynamiques"* (Nathan).

3. Transpositions didactiques du théorème de Thalès

Le détour que nous venons de faire nous a montré un itinéraire, il commence par une incursion dans les mathématiques. Nous allons donc immédiatement étudier et soumettre à la critique les composantes du théorème de Thalès, telles qu'elles apparaissent dans la culture scolaire.

3.1. L'environnement mathématique du théorème de Thalès

3.1.1. Concepts fondamentaux

La première notion, composante incontournable, est celle de **rapport** dont nous irons chercher les racines très profondément dans les mathématiques de l'école primaire.

Comme il faudra souvent non seulement utiliser des rapports égaux mais aussi les considérer ou décrire leurs transformations, le simple usage développé au niveau élémentaire ne suffira pas. Il faudra un langage spécifique, ou plutôt un "métalangage"[8]. Celui des **proportions** créé dans ce but est utile, mais l'algèbre peut le remplacer.

La deuxième notion incontournable est celle de **parallèles** (droites ou plans) pour déterminer ces rapports égaux. Celle-ci semble introduite de façon plus "primitive", tardive et mystérieuse. Le parallélisme ne parait lié à aucune nécessité évidente à l'école. il est là, seulement déjà présent et il faut le connaître.

Une troisième notion un peu plus discrète dans l'enseignement est celle de **projection**.

Enfin on rencontre toujours au collège, avec ces composantes de base, les notions de **conservation de rapports**, et par ce biais, de **similitude**, et d'**homothétie**.

Il s'agit maintenant de savoir quels rapports mathématiques entretiennent ces notions rassemblées par la tradition dans le concept que nous appelons aujourd'hui le théorème de Thalès. Lesquelles sont fondamentales ? Lesquelles sont des conséquences logiques des premières ? Quelles notions se trouvent seulement associées aux autres pour des raisons pratiques, historiques ou didactiques par exemple.

3.1.2. Triangles et faisceau de parallèles

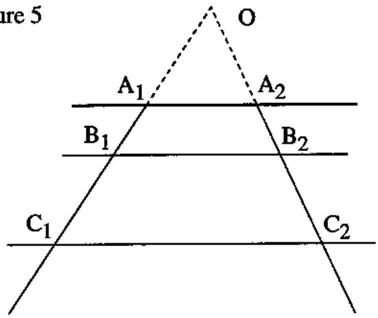
Des trois énoncés rappelés plus haut, le premier est le plus fréquemment

8 un langage pour décrire un langage

avancé en premier lieu. Dans Euclide (6ème élément, proposition 2) on trouve : "La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles (et réciproquement)". Le second, qui lui est immédiatement équivalent par le calcul ne figure pas, ni le troisième sinon par l'intermédiaire de la similitude des triangles. L'homothétie n'est pas un objet mathématisé à cette époque. Ce premier énoncé ne cesse d'être repris. Plus tard le deuxième énoncé apparaît, à peu près dégagé du triangle : "Si deux droites sont coupées par une série de droites parallèles A_1A_2, B_1 B_2, etc. leurs parties déterminées sur l'une seront proportionnelles aux parties déterminées sur l'autre.

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} \text{ etc.}$$

Figure 5



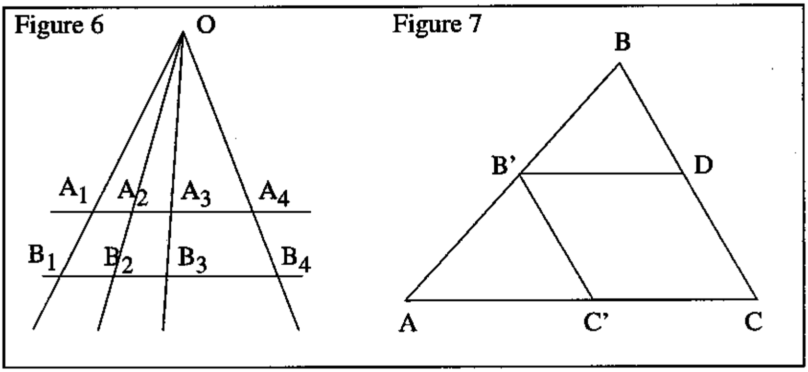
Il faut remarquer toutefois que dans ce cas, si on ignore le point O d'intersection des deux droites, l'égalité des rapports entre les segments correspondants n'entraîne pas le parallélisme : la réciproque n'est vraie que si tous ces rapports sont tous égaux à $\frac{OA_1}{OA_2}$.

A diverses époques, on a fondé la démonstration de cet énoncé sur le théorème des milieux, ce qui obligeait à reconstruire la structure numérique de la droite avec les rapports naturels puis rationnels. L'usage essentiel de ces théorèmes est alors de permettre la construction de lignes proportionnelles (troisième, quatrième, moyenne...).

3.1.3. La dilatation ou l'homothétie dans R^2

Comme la conservation des différences détermine les translations arithmétiques et géométriques, celle des rapports conduit à la **linéarité** et aux **homothéties** numériques et géométriques. L'étude des fonctions et transformations qui conservent les rapports (arithmétiques mais surtout géométriques) est mise en avant au point que le "théorème de Thalès" n'apparaît plus parfois que comme l'instrument visible d'une modélisation : la mise en relation d'un objet et de son image réduite. Les projections et les faisceaux de parallèles peuvent n'être plus que des moyens particuliers, parmi d'autres, de conserver les rapports.

Ce point de vue s'exprime pleinement par le troisième énoncé qui centre l'attention sur le rapport d'homothétie. La forme la plus parlante est celle où on considère un ensemble de points sur une droite et leurs homothétiques (une droite est projetée sur une droite parallèle par un faisceau de droites issues d'un même point O).



Il est clair que dans $\mathbb{R}^2$ les trois énoncés tels que nous les avons donnés sont mathématiquement équivalents : le premier implique le second et réciproquement, le premier et sa réciproque impliquent le troisième (il suffit de considérer (B'D), parallèle à (AC), alors

$$\frac{BA}{B'A} = \frac{BC}{DC} \text{ et comme } B'C' = DC,\ \frac{BA}{B'A} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Enfin, le troisième implique le premier (en remontant la démonstration précédente, à condition que (B'C') soit différent de (BC)). Aussi ne faut-il pas être surpris de voir à quel point le théorème de Thalès est lié et parfois même confondu - avec la notion de similitude et d'homothétie.

3.1.4. Les dilatations dans R^3

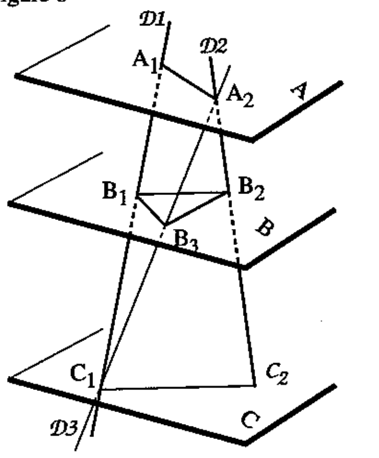
Considérons deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartiennent pas à un même plan, et trois plans parallèles A, B, et C qui coupent les deux droites respectivement en A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2. La droite $\mathcal{D}_3$ déterminée par $A_2\,C_1$ coupe le plan B en B_3, distinct de B_1 et de B_2 . L'application du théorème de Thalès (sous n'importe quelle forme) dans les deux plans déterminés par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ d'une part et $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'autre part permet d'établir que $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2}$, ce qui correspond au premier énoncé, et donc que

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$,ce qui correspond au second.

Plus généralement toute droite non parallèle au plan A est partagée par les trois plans dans le même rapport.

Mais il n'existe aucune relation du type dilatation entre les éléments qui se trouvent dans des plans parallèles différents puisque ce qui est un triangle dans l'un correspond à un segment dans un autre et pourrait correspondre à un seul point dans un autre cas. Pour Marcel Berger, le théorème de Thalès déclare pour l'essentiel, que, dans un espace affine, des (hyper)plans parallèles (distincts) déterminent sur des droites sécantes des "vecteurs" tels que les rapports (scalaires) de leurs modules sont indépendants de ces droites (fig 8)[9].

Figure 8



[9] Explicitement

Soient H, H', H" trois hyperplans parallèles et distincts d'un espace affine X et $(D_i)_{i \in I}$ une famille de droites de X, dont aucune n'est faiblement parallèle à H. Alors les points $d_i = H \cap D_i$, $d'_i = H' \cap D_i$, $d''_i = H'' \cap D_i$ vérifient l'énoncé : le scalaire $\frac{\overrightarrow{d_i d''_i}}{\overrightarrow{d_i d'_i}}$ est indépendant de i e I. (Il ne dépend que de H, H' et H").

La réciproque

Sa réciproque dit que si un point sur une sécante détermine le bon rapport il se trouve à son intersection avec l'hyperplan considéré.

i.e. Si pour un i on a $d''' \in \langle d_i, d'_i \rangle$ et si $\frac{\overrightarrow{d_i d''_i}}{\overrightarrow{d_j d'_j}}$ est égal à cette valeur commune,

alors $d'''_i = d''_i = H'' \cap D_i$

On peut en déduire la réciproque formelle : "si des ensembles de points déterminent sur toute droite sécante des segments en rapports égaux, si l'un est un plan, les autres le sont aussi et lui sont parallèles".

Nous avons le choix entre attacher le nom de Thalès à l'un ou l'autre des énoncés, mais ils ne sont pas équivalents en général (explicitement dans $\mathbb{R}^n$ pour $n > 2$). Nous reviendrons plus loin sur cette alternative. Remarquons que les énoncés choisis par M. Berger éliminent toute référence à des correspondances et à des conservations quelconques entre les structures déterminées par les points d'intersections des sécantes avec les plans parallèles.

Pour qu'une homothétie apparaissent, il faut que **les droites soient concourantes**. (ou réciproquement que des triangles - ou des polygones plans - semblables aient leurs côtés parallèles, ce qui, d'après le théorème de Desargues, est équivalent). Ce n'est pas le cas en général ! Il est intéressant de souligner comment le plongement dans un espace de dimension supérieure permet de séparer des propriétés qui paraissent liées.

3.2. Transpositions didactiques du théorème de Thalès

3.2.1. Alternatives

Les programmes des cinquante dernières années ont exploré plusieurs des possibilités de présentation du Théorème de Thalès avec des succès et des difficultés divers. Mais tous ont été contraints d'introduire le théorème dans $\mathbb{R}^3$. Alors les sécantes sont dans un même plan et sont concourantes deux à deux, les hyperplans sont des droites, les structures déterminées par les points d'intersections sont toutes des segments ou des points et elles sont nécessairement homothétiques. Ces propriétés singulières, jointes à un intérêt forcené pour les triangles mettent donc en scène ce que les enquêteurs de l'APMEP ont appelé le point de vue "dilatation" une nouvelle correspondance entre les structures déterminées sur les parallèles.

Ce "mélange" avec une propriété étrangère est une conséquence d'une transposition didactique dont on peut remarquer qu'elle est assez ancienne. Est elle légitime ? Est elle efficace ? Peut on faire autrement ? Faut-il introduire les notions suivant un ordre axiomatique rigoureux ? Jusqu'où une introduction dans un cadre riche permet elle des démonstrations correctes ?

Remarquons que nous sommes dans le cas de ce que nous appelons parfois une **présentation "ostensive" du théorème de Thalès** : on en a retenu un cas particulier représentatif et on voudrait en extraire les propriétés essentielles. On peut aussi observer avec quelle force les propriétés parasites "collent" au prototype.

---

9 (suite) La notion sous-jacente à ce texte est celle de **projection** canonique. Elle n'apparaît pas explicitement dans le texte mais M. Berger l'utilise immédiatement pour le résumer.

3.2.2. Propositions

Première proposition : toute situation fondamentale du Théorème de Thalès tel qu'on l'entend aujourd'hui dans la communauté des mathématiciens devra exclure l'homothétie et donc, ou bien mettre en scène $\mathbb{R}^3$, ou bien éliminer le point d'intersection des sécantes, soit en le cachant, soit en mettant trois sécantes et en multipliant les parallèles...

Deuxième proposition : avant de blâmer et surtout de réformer les décisions didactiques non conformes à l'axiomatique mathématique, commençons par chercher à comprendre le tissu de leurs implications. Ce n'est sans doute pas sans raisons profondes que des générations de mathématiciens enseignants ont adopté ou accepté cette introduction hétérogène, et les conséquences de ce choix ne s'effaceront pas d'un trait de plume, même si c'est celle d'un ministre...

Il est temps de prolonger notre promenade en direction de l'étude des situations qui président à l'emploi de ce théorème, celles qui sont indépendantes de l'homothétie comme celles qui lui sont liées. Le but de ces études est de savoir si on peut ou non introduire pratiquement le théorème sans recours à l'homothétie, quelle place prendrait-il dans ce cas et quelles pourraient être les raisons didactiques de la co-présence constante de l'homothétie. Il faut connaître les conditions d'emploi des énoncés mathématiques pour dresser ce que Y. Chevallard appelle leur "niche écologique" si on veut prévoir les modalités, les difficultés et les conséquences d'une modification de leur position.

Nous renvoyons à une dernière partie la recherche des significations possibles et des processus d'ensemble susceptibles de modifier sensiblement la position didactique du théorème pour l'ajuster au mieux aux élèves, à sa position mathématique et à sa position culturelle.

4. L'ingénierie didactique du théorème de Thalès

4.1. Sans l'homothétie.

Existe-t-il une ingénierie propre au théorème, c'est-à-dire réalisant les conditions énoncées ci-dessus et indépendante de l'homothétie ? Nous laisserons volontairement de côté dans cet article l'étude des exercices et des problèmes auxquels ce théorème peut s'appliquer. Il existe sur ce point une abondante littérature (et je n'ai pas grand chose d'intéressant à dire, aujourd'hui, sur ce sujet). D'autre part au risque de décevoir les lecteurs, nous ne ferons qu'esquisser les conditions d'une solution. Ce problème est l'un des plus importants et des plus difficiles abordés dans cette brochure.

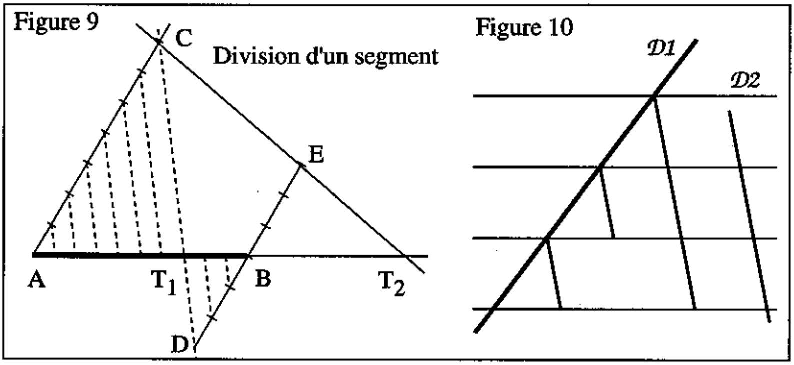
4.1.1. Une forme élémentaire de Thalès. Projections

L'environnement moderne place auprès des enfants des faisceaux de **parallèles équidistantes** : lames de parquet, rayures du cahier etc. Voilà une bonne occasion d'utiliser un cas particulier du Théorème de Thalès pour partager un bâton ou un segment en parties égales, ou pour faire un abaque servant à diviser des nombres (représentés par une longueur exprimée en millimètres par un naturel) par un nombre entier simple.

Les éléments sont dans $\mathbb{R}^2$ mais les sécantes sont nombreuses et non toutes concourantes.

Il s'agit aussi bien de transporter, de projeter une graduation d'une droite sur une autre avec un transparent réglé.

Les enfants du CM peuvent très bien apprendre la méthode, la vérifier et finir par la trouver évidente mais je ne les crois pas capables de comprendre spontanément ni d'inventer directement que l'égalité des segments ainsi déterminés sur des sécantes, ne dépend pas de leur orientation.



Le problème ne peut donc pas être utilisé tel quel comme situation d'apprentissage a-didactique dans une pédagogie "constructiviste". En revanche, il peut être utilisé dans une didactique de type formellement "dogmatique" (le professeur présente le savoir, l'élève l'apprend, puis l'applique) ou maïeutique (le professeur prend à sa charge toutes les questions qui feront surgir le savoir comme réponse, et surtout leur articulation, quelles que soient les connaissances des élèves). Ce n'est pas un argument suffisant pour s'interdire de l'enseigner et de l'utiliser dès l'école primaire. Il permet peut être d'établir le théorème relatif à des rapports quelconques.

Bien sûr, il faut que la situation permette une justification, au moins implicite, du théorème. Serait-il possible ensuite de faire chercher et trouver la démonstration aux élèves de ce niveau (entre CM et 5ème) en profitant de l'étonnement que la propriété pourrait provoquer ?

L'étude d'ingénierie a-didactique est pour moi un problème ouvert, mais je ne le crois pas insurmontable. Il est nécessaire sans doute que les élèves disposent d'une bonne connaissance du parallélogramme. Il leur suffit alors d'envisager (implicitement) les translations convenables pour imaginer/ comprendre/ et peut être expliquer pourquoi le réseau de parallèles équidistantes partage une sécante quelconque en segments égaux (fig 10).

Ce mode d'introduction a été utilisé dans le passé avec le style didactique classique, et il a été abandonné on ne sait trop pourquoi.

4.1.2. Le parallélisme

Comment développer un bonne connaissance du parallélogramme et justifier son introduction ?

Nous avons utilisé des situations a-didactiques de communication, qui favorisent la création des connaissances nécessaires à la description et à la construction des figures par les élèves en vue de leur reproduction (études dans Berthelot et Salin puis D. Fregona).

Parmi les formes que les élèves doivent reproduire dans ces situations, les quadrilatères leur posent des difficultés intéressantes. Par contre, il ne reconnaissent les propriétés caractéristiques des parallélogrammes que grâce à la culture. Cette introduction des parallélogrammes n'est donc qu'une ostension améliorée.

L'introduction des droites parallèles par une situation non ostensive est un tout autre problème. En fait, la triangulation et le mesurage des longueurs suffisent à la résolution de tous les problèmes concrets de mesure directe de la terre, la γεομετρια au sens primitif, ceux dont on doit s'occuper à l'école primaire. La notion de parallèles paraît étrangère à ce champ de connaissances.

J'avancerai l'hypothèse que les parallèles sont des objets appartenant à la conception micro-spatiale. Leur utilité essentielle pourrait être de simplifier la représentation du macro-espace dans le micro-espace. C'est donc probablement dans des situations où les symétries ou les translations de droites interviennent qu'il faut chercher une situation d'apprentissage a-didactique des parallèles. Dilma Fregona a proposé dans sa thèse[10] une excellente situation basée sur la nécessité de prévoir la position d'éléments de pavage du plan.

Je me souviens avoir été soudain choqué, en préparant mon baccalauréat, par les définitions naturalistes des objets géométriques qu'on m'avait enseignées dans mon enfance, ces points infiniment petits, ces lignes infiniment minces, cachaient finalement un univers de questions et d'axiomes fort complexe. Et plus que toutes, la définition des parallèles comme droites ne se coupant jamais, sinon à l'infini, me paraissait une complication inutilement philosophique. Pourquoi ne pas les présenter de façon constructive, comme des droites perpendiculaires à une même troisième, (ou formant avec elle un même angle quelconque) ?

Un telle définition pourrait former avec Thalès, avec l'étude des rapports et avec la construction des rationnels un environnement (un milieu) assez homogène.

4.2. La genèse scolaire du théorème de Thalès, avec l'homothétie

Pour décrire une genèse, il faut descendre le cours du temps, mais pour en comprendre la nécessité, il faut le remonter. Il s'agit de montrer ce qui détermine les choix didactiques : profiter d'une notion bien connue, renforcer un apprentissage en cours ou en préparer un futur.

A chaque étape, ces choix modifient la position des savoirs et leur rôle. Nous allons essayer de comprendre comment, tout au long de la scolarité obligatoire, l'importance de la notion de représentation et surtout celle de représentation d'un objet grand par un petit objet plus ou moins analogue, pousse les enseignants à joindre la similitude et l'homothétie à l'énoncé du théorème de Thalès.

4.2.1. De Thalès, à l'homothétie

L'introduction par la "dilatation" suppose connue la similitude. Les activités associées sont plutôt du type "agrandissement et réduction de figures et "préparent l'introduction ultérieure de l'homothétie" disent les auteurs de l'enquête APMEP (p. 31). Ne pourrait-on pas dire que l'interprétation de "dilatation" de Thalès est là POUR l'introduction future de l'homothétie ? Quels seraient les arguments pour et contre cette hypothèse ?

D'autre part, l'étude de la similitude, surtout des triangles tient une place si importante à ce moment des études que la plupart des problèmes la mettent

[10] Dilma FREGONA *"Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques"* Thèse de l'U. Bordeaux 1. 1995 (LADIST)

en œuvre. On rencontre rarement des problèmes excluant l'intersection des sécantes (car ils ne sont plus au programme). Les énoncés de la forme Thalès-projections ou Thalès-conservation trouvent donc très peu d'applications directes et devraient être interprétés dans tous les cas de "dilatations". Il est donc "rentable" pour faciliter la résolution des problèmes traditionnels d'introduire directement la troisième forme et de la lier étroitement aux deux premières, quitte à laisser entendre qu'elles sont équivalentes. Lorsqu'on abordera $\mathbb{R}^3$, une courte remarque corrective pourra paraître suffisante. Le sera-t-elle ? La collusion avec l'homothétie correspond à un équilibre didactique qui paraît difficile à rompre.

Ces observations ne doivent pas être prises comme établies, elles appellent des vérifications systématiques qui font l'objet des tâches ingrates mais nécessaires de la didactique scientifique réelle[11] .

4.2.2. De la similitude à Thalès

D'après notre étude précédente, le passage a-didactique de la similitude au théorème de Thalès devrait être le point faible de la chaîne. Comment le justifier ?

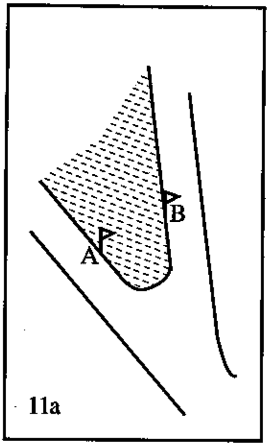
C'est probablement l'importance de la similitude, elle-même due à celle de la linéarité, qui conduit les enseignant à la faire intervenir. Il est toujours intéressant d'activer une connaissance importante en l'utilisant dans des applications et de profiter de la familiarité d'une notion pour y adjoindre un savoir nouveau.

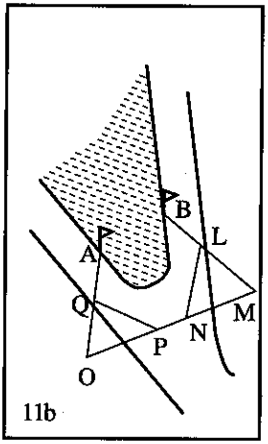
Considérons la situation suivante qui illustre la proximité culturelle des deux problèmes. Elle ressemble à celle de la légende de Thalès : Il s'agit de connaître la distance entre deux fanions plantés dans un jardin sans passer aucun objet entre eux ni au-dessus d'un territoire interdit au bord duquel ils se trouvent (fig. 11a). Dans ce problème[12], proposé à des élèves de CM2, la représentation à l'échelle n'était pas explicitement proposée mais elle était nécessaire à la résolution.

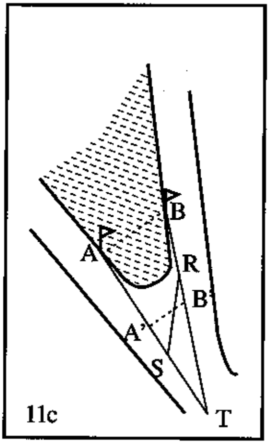
La solution requiert la construction d'une configuration **solide** (cette condition n'est pas évidente pour les élèves) de segments extérieurs à la zone

11 qui se nourrit peut être d'environ 30 % d'observations, d'expériences, et de tâches matérielles, 20 % de sueurs rédactionnelles, 10 % d'expériences d'enseignement, 10 % de lectures scientifiques et de compilation, 10 % d'organisation méthodoque, 10 % d'activités administratives, de 5 % d'interactions scientifiques, 4 % de réflexion et 1 % d'idées originales !!

12 Extrait de *"Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire"* de N. et G. Brousseau 1987, IREM de Bordeaux







interdite et incluant les deux fanions (fig. 11b), la plus simple sera la meilleure (fig. 11c).

Une solution simple consiste à reproduire cette configuration à l'identique (échelle 1/1) dans un espace libre à côté du jardin.

Une représentation à l'échelle sera bien plus maniable et ergonomique qu'un simple déplacement. Les élèves mesurent et reproduisent à une échelle quelconque AT, BT, ST, RT, et SR puis mesurent AB sur le plan et calculent la distance réelle (avant de vérifier leur prévision).

La solution de ce problème n'est pas une simple application des cours habituels, et sa mise en scène procure aux enfants une bonne émotion, un réel sentiment du pouvoir que donne un modèle correct sur une réalité complexe.

Le théorème de Thalès semble tout proche, il suffirait de peu de chose pour que le segment SR qui détermine la valeur de l'angle prenne la position A'B' (parallèle à AB) (fig. 11c) et que le triangle A'B'T soit **sur le terrain lui même** la représentation à l'échelle du triangle ABT.

L'orientation du plan pourrait en donner cette idée qui diminue grandement le nombre des mesures et des calculs : il suffit de mesurer A'T, AT, BT, calculer B'T et le réaliser pour placer B', puis mesurer A'B' et calculer AB. Il me semble que cette idée n'a aucune chance d'être comprise et encore moins inventée à ce moment là.

La situation fondamentale qui pourrait assurer ce passage devrait répondre à la question suivante :

(1) Imaginons par exemple deux figures semblables, triangles ou même segments, libres de tourner autour de deux points correspondants. Qu'est-ce qui change, tout à coup, lorsqu'elles passent par la position qui les rend homothétiques ? Quel problème pourrait bien se trouver résolu à ce moment là ?

4.2.3. Des rapports à la similitude

Dans le même ouvrage, les nombres rationnels non entiers sont introduits comme application linéaire implicite dans une situation bien connue : l'agrandissement du puzzle.

Il s'agit pour les élèves de trouver les dimensions des pièces d'un puzzle agrandi. Les enfants connaissent l'image d'un seul des côtés des formes qui composent le puzzle. Il ne s'agit pour eux que de trouver les images d'une application linéaire (homothétie numérique rationnelle) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais le plongement dans $\mathbb{R}^2$ (similitudes) fournit les éléments de contrôle du résultat, indispensables pour obtenir les autocorrections caractéristiques des situations d'acquisition a-didactiques.

Les observations et les recherches effectuées sur cette situation montrent à quel point la reconnaissance de formes typiques joue un rôle important dans l'identification et la dénomination des figures. Mais elle montre aussi que le répertoire des formes utilisées spontanément pas les élèves est beaucoup plus fin et ne coïncide pas avec la classification mathématique : un trapèze peut être une bassine, une assiette ou une chaussure suivant le cas, et sa base peut être le fond ou la semelle. L'usage des figures de sens et principalement des métaphores et des métonymies non mathématiques (il en existe dans la culture mathématique aussi) ne peut généralement pas être retenu comme un moyen légitime de mobilisation du sens, et d'ailleurs la plupart sont totalement inefficaces ou même désastreuses pour les raisonnements.

Dans cette situation, la similitude n'est pas basée sur une appréciation perceptive des formes semblables mais sur sa propriété fonctionnelle fondamentale d'additivité des images.

4.2.4. Des proportions à la similitude

La notion de "rapport" pourrait aussi être introduite directement, dans la configuration indiquée plus haut (Thalès sans l'homothétie), par exemple pour caractériser les distances entre des droites ou des plans (forme conservation des abscisses) ou pour caractériser les pentes des sécantes (forme rapport de projection).

La figure 9 montre comment déterminer 7/10 de AB. On récupère ainsi, non seulement les rapports rationnels, mais aussi les algébriques, et sous certaines conditions les réels eux-mêmes. Peut être R.Thom pensait-t-il à ce genre d'introduction ?

Peut être qu'une des difficultés de la forme “conservation des abscisses” provient justement d'une confusion entre deux points de vue ? La conservation des abscisses permet le transport des graduations d'une droite sur une autre. Alors, dans l'espace métrique usuel, suivant les droites, les mêmes graduations ne correspondent plus aux mêmes distances. A chaque point, se trouvent associés plusieurs nombres. La décision de bien séparer les propriétés des espaces affines et métriques conduit les élèves à confondre les distances et leurs rapports, et complique leur tâche.

4.2.5. Des rapports, aux proportions

Nous n'évoquerons ici aucune des nombreuses situations qui jalonnent, dans la scolarité primaire, l'acquisition de ces notions. Quoiqu'il en soit, la similitude hérite de l'importance, légitime sans doute, donnée dans l'enseignement primaire à la fonction linéaire et à la **proportionnalité**. La plupart des manuels mettent bien en évidence, aujourd'hui, une correspondance entre deux univers - numériques le plus souvent - et bien distincts, correspondance qui conserve certaines relations. Une correspondance entre deux “espaces” est formellement plus facile à traiter qu'une transformation, même concrète dans un même espace. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles, traditionnellement, l'étude des représentations à l'échelle se réduit à des calculs.

Lorsque ces isomorphismes sont identifiés, il sont immédiatement assimilés à celui dont l'usage est majoritaire : la multiplication par un coefficient, au point que très vite, les deux notions se confondent : toute correspondance doit exprimer une fonction linéaire et représenter un coefficient de proportionnalité.

Ce phénomène est de même nature que celui qui fait fondre le théorème de Thalès et l'homothétie. Nous pourrions appeler “**captation de sens**” le phénomène didactique qui conduit ainsi une notion ou une présentation particulière d'une notion, à absorber le sens véritable, plus général, par l'effet de la fréquence relative d'emploi du cas particulier dans les problèmes et application.

Une certaine manière de comprendre la multiplication par un nombre (naturel) peut faire de ce dernier une sorte de coefficient d'agrandissement. Mais curieusement, les coefficients qui accompagnent une équation aux dimensions sont parfois plus faciles à comprendre que les scalaires dans un même espace.

La notion de "rapport géométrique" multiple (naturel) apparaît dès le cours préparatoire lorsque le nombre naturel comme scalaire (nombre de fois) se substitue au naturel mesure. Il apparaît comme plus puissant que le "rapport arithmétique", trop évident (?) et peu théâtral et absorbe le mot rapport.

Mais l'idée d'établir une relation de représentation entre un objet et un modèle à l'aide d'une analogie prend ses racines didactiques encore plus profondément.

4.2.6. De l'analogie aux rapports et proportions

Tout acte d'enseignement repose sur l'affirmation de certaines similitudes modulo la taille : le maître dessine en grand, au tableau, ce que l'élève doit reconnaître comme la même chose dans son livre ou sur son cahier. Mais entre cette compétence "naturelle" exigée de chaque élève et la connaissance effective des caractères qui soutiennent ces analogies et ces représentations, il y plus que l'épaisseur d'une hypothèse empiriste.

La représentation d'un rapport correct, par exemple celle d'un rectangle par un rectangle "allongé pareil" suppose un long processus de centration et de décantation des composantes contextuelles dont nous avons parlé plus haut. Ce processus s'effectue, avec ou sans le professeur, mais la maîtrise scolaire de cette connaissance passe - et combien lourdement - par le numérique.

4.2.7. De la symbolisation à l'analogie

Les notions de correspondance, de caractère commun et de représentation d'un objet par un dessin commencent à l'école maternelle. Il n'est pas indifférent pour notre propos de savoir comment se forge l'idée de représenter un grand objet par un petit.

Un enfant qui dessine une maison représente-t-il une maison ou accomplit-il une activité rituelle dont les éléments symboliques lui sont fournis par son milieu ?

Dans le premier cas, il prend effectivement en charge certaines relations entre son modèle et le dessin : par exemple il fait deux portes parce que sa maison a effectivement deux portes. Dans le second, il ne travaille qu'au niveau symbolique : une maison-icône ou métaphore a toujours une seule porte, deux fenêtres placées symétriquement et une cheminée... quatre fenêtres et c'est un château.

Type de représentation / Objet représenté	Bulldozer	Indien	Bille en porcelaine	Bille dite "triple"	Grenouille
Trace					modèle trop grand : trace impossible
Trace enrichie de caractères distinctifs					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" iconique					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" non iconique					

TABLEAU 1

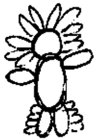
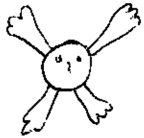
Objet représenté / Type de représentation	Bulldozer	Indien	Bille en porcelaine	Bille dite "triple"	Grenouille
Représentation figurative					
Représentation figurative réduite					
Représentation "analogique"					
Autres : métaphores, métonymies etc.					

TABLEAU 2

Nous avons étudié la création effective des divers codes [13] en proposant aux enfants de 5 ans l'activité des "trésors", une situation où ils devaient se souvenir des objets placés dans une boîte, le matin, devant eux. Ces petits objets étaient choisis parmi un ensemble assez important et étaient eux-mêmes assez nombreux pour que les élèves doivent en faire la liste. Et comme ils ne savaient pas écrire, ils devaient les représenter par des dessins. Les objets étaient choisis de manière appropriée pour nécessiter ou favoriser toutes sortes de modes d'identification et de représentations et nous avons pu en observer la mise en oeuvre.

Le premier procédé qui apparaît est la trace. Les enfants décalquent le contour de l'objet à représenter, ensuite ils enrichissent le dessin de caractères oppositifs ou de détails distinctifs (tableau 2. p. 30-31).

La grenouille, beaucoup plus grande que la feuille de dessin leur pose un réel problème.

L'idée d'inventer un dessin petit qui ressemble (qui présente quelques traits) à son grand modèle ne vient pas immédiatement. Mais lorsqu'un enfant résout le problème, la plupart des autres l'imitent et tous envisagent cette "découverte" comme une conquête précieuse.

4.2.8. Légitimité de cette transposition didactique

En appuyant aussi lourdement dans les paragraphes précédents, sur les situations, même les plus primitives, qui contribuent à faire pénétrer chez les élèves, la similitude dans l'environnement sémantique du théorème de Thalès, j'ai voulu esquisser une fresque des dépendances très complexes qui s'établissent dans un curriculum.

Les efforts didactiques des professeurs tendent à faire que chaque étape suive sans heurt les précédentes, les justifie, les rentabilise. Ainsi, chaque jour ressemble le plus possible au précédent et reproduit ses acquisitions, ses rites, et... ses erreurs. Ces liaisons doivent respecter bien d'autres contraintes que les contraintes mathématiques, et il arrive constamment qu'elles soient plus ou moins violées dans la transposition. Dans la culture scolaire, le théorème de Thalès est proche de la notion de similitude et contribue à l'étude de l'homothétie pour des raisons didactiques.

---

13 avec J.M. Digneau en 1980: *"Création d'un code à l'école maternelle"* DEA U. Bordeaux 1 , puis plus précisément avec J. Peres *Construction et Utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle* (1984) Thèse. U. Bordeaux 2

5. Les significations du théorème de Thalès

L'étude des situations fondamentales succinctement présentée ci-dessus nous a donné de bonnes indications sur les moyens de constituer des sens acceptables pour le théorème de Thalès, mais elle laisse soupçonner que le sens et la position mathématique devraient s'effacer à l'école devant un autre. Mais pourquoi alors le théorème de Thalès, si bien enraciné et entouré, rencontre-t-il encore des difficultés ?

Faut-il renoncer à améliorer l'enseignement pour cause de respect des traditions ou de complexité de la tâche ? Ces raisons générales et plutôt vagues ne sont pas convaincantes. Dans ces "raisons didactiques" le sens de la notion se perd à nouveau.

Alors Thalès est mal compris et mal appris, et c'est bien fait ! Est-ce irrémédiable docteur ? Comment cette transposition didactique peut-elle exister ? Quel sens donne-t-elle à la notion ? Elle donne plus d'importance à ce théorème qu'il n'en a en mathématiques : c'est la culture et la noosphère qui gèrent cet écart. Lequel des deux sens est compatible avec l'histoire.

5.1. La dimension émotionnelle des connaissances

La clé de l'acquisition des connaissances se trouve sans doute dans la dimension émotionnelle des situations où elle se produit. Celles que nous avons évoquées ci-dessus ont pour objet de montrer quelle succession de découvertes, d'aventures et de victoires exaltantes peuvent conduire un élève à connaître, à comprendre, à appliquer, à savoir discuter et à utiliser le théorème de Thalès. Mais ces découvertes doivent s'organiser, localement d'abord, puis finalement se réorganiser en une histoire intelligible appuyée sur des sentiments à la mesure de la place qu'elles tiennent dans les mathématiques, dans l'industrie et dans la culture.

Il y aurait donc deux sens, l'un donné par l'histoire des mathématiques, l'autre donné par la noosphère et la didactique ?

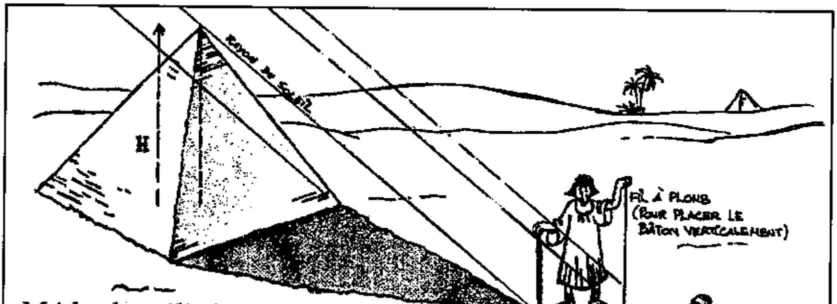
Pour reproduire ou simuler, en situation didactique, l'émotion associée à la "découverte" du théorème de Thalès il est donc nécessaire d'examiner les raisons pour lesquelles l'humanité lui a donné la résonance que nous savons. La vérité historique nous intéresse moins pour l'instant que la dimension mythique ou symbolique. Pourquoi l'humanité fait-elle si grand cas de ce résultat en apparence si dérisoire...?

5.2. La légende de la hauteur de la grande Pyramide.

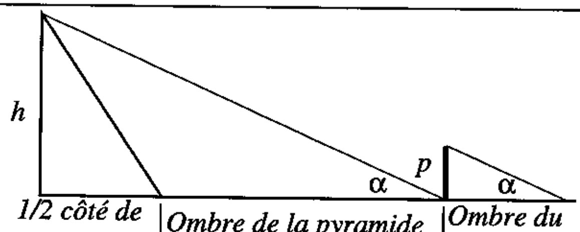
Tout d'abord, le théorème a bien été découvert à cette époque puisque deux siècles plus tard il est dans les éléments d'Euclide (et n'y est attribué à personne naturellement), sous ses deux formes, chacune à sa place correcte, la première (§ 3.1.2.) dans la partie 6 consacrée à la géométrie plane, la seconde dans l'élément 11 consacré aux relations dans l'espace, et il est présenté bien sûr sans aucun rapport avec l'homothétie.

C'est la légende qui nous intéresse. Pourquoi cette histoire de bâton planté dans le sol pour mesurer la hauteur de la pyramide a-t-elle eu ce retentissement ?

Examinons tout d'abord les méthodes que l'on prête à Thalès. Celle rapportée sur la figure 12 ci-contre est typique[14] : il s'agit toujours d'inscrire la hauteur de la pyramide et le bâton dans deux triangles placés dans un plan vertical , en position homothétique ou presque comme ici (à une translation évidente près) afin de se rapprocher de l'illustration scolaire.



Méthode utilisée par Thalès de Millet (VI^e^ siècel av. J.C.)

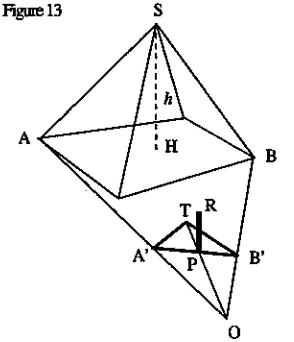


14 Cette illustration est classique, je la traduis de Lancelot Hogben : *"Mathematics for the Million"*. (W. W. Norton). Le dessin du haut est emprunté à R. Delord, G. Vinrich et P.-H. Terracher *"Mathématiques"* de 3^e^ chez Hachette.

Pourtant, la disposition des objets évoqués ne correspond pas bien à la configuration scolaire: il est aussi impossible de mesurer effectivement la longueur de l'ombre de la hauteur de la pyramide que sa hauteur elle-même, puisque leur extrémité commune est totalement inaccessible.

Le procédé évoqué ici est manifestement inefficace : il faut planter le bâton au moment exact où l'ombre forme un triangle isocèle (comment le déterminer ?), mesurer le coté de la base, et le diviser par deux, déterminer le milieu du coté de la base de la pyramide la plus près du bâton, mesurer la distance du pied du bâton à ce point, le long d'une droite assez difficile à repérer effectivement, mesurer la hauteur du bâton et celle de son ombre ! Trois grandes mesures et deux petites.

Figure 13



Existe-t-il des méthodes plus pratiques, ou plutôt plus ergonomiques ? Certainement ! Il faut ne mesurer que le moins possible de grandes distances horizontales, se servir du soleil à un moment quelconque... et du sable. En voici une qui consiste à faire coïncider l'ombre du sommet R d'un bâton planté verticalement avec l'ombre 0 du sommet S de la pyramide (fig. 13). On peut alors tracer dans le sable des segments assez longs portés par OA et OB qui joignent O au pied des arêtes **opposées** de la pyramide qui limitent son ombre.

Il faut alors obtenir l'image A'B' de la diagonale AB de la base de la pyramide dans l'homothétie de centre O qui applique S sur R. Pour cela il suffit de prendre le symétrique T de O par rapport au pied P du bâton puis de tracer le parallélogramme de diagonale TO et de côtés OA' et OB' portés respectivement par OA et OB et tels que PA' = PB'. Il suffit de tracer les parallèles à OA et OB issues de T. Comme la solution est visiblement unique, il est clair que A'B' est parallèle à AB et que P est l'homothétique de H.

Il ne reste alors à mesurer que la longueur d'un grand segment, OB par exemple, et celle de deux petits : PR et OB'.

Alors $$\frac{\text{hauteur SH de la pyramide}}{\text{longueur de PR}} = \frac{\text{longueur de OB}}{\text{longueur de OB'}}$$

Il n'y a à mesurer qu'une seule grande distance, le long d'une droite plus facile à déterminer, mais les droites correspondantes ne sont plus dans un même plan. Et s'il y a bien une homothétie, elle n'est plus très évidente. On pourrait utiliser bien d'autres méthodes. Il ne fait pas de doute que les méthodes attribuées sont arrangées pour un enseignement, lequel ? Il y a donc à la même époque un théorème pour les mathématiciens et un autre dans la légende pour la noosphère.

D'autre part, le soleil n'est absolument pas indispensable, les Egyptiens savaient viser des points. Il est vrai qu'en Egypte l'absence de soleil est plutôt rare en plein jour. Il est là pour d'autres raisons.

Il me paraît en outre certain que l'on savait construire des reproductions réduites "à l'échelle" des constructions projetées, bien avant Thalès. De sorte qu'historiquement la leçon "philosophique" relative à la maîtrise d'un monde inaccessible par des modèles mathématiques plus petits n'est pas très spécifique. L'apport étonnant de l'expérience prêtée à Thalès n'est pas la similitude.

C'est vraisemblablement l'homothétie, mais il aurait été plus simple et plus "démonstratif" de mesurer la hauteur d'un grand obélisque. Pourquoi fallait-il que le modèle soit un segment inaccessible à l'intérieur d'un volume ? pour accentuer le caractère théâtral et difficile du défi ? pour dissimuler une certaine simplicité et une certaine évidence ? Mais alors pourquoi vouloir trouver merveilleux, ce résultat ?

5.3. L'homogénéisation de l'espace

Le passage de la similitude à l'homothétie permet de montrer d'un coup, l'homogénéité de l'espace. Avant, les petits objets et les grands appartiennent à des mondes différents, juxtaposés mais disjoints. L'un peut représenter l'autre, mais la correspondance est un apport de l'esprit humain, elle n'est pas un objet d'étude.

La visée est une homothétie trop fugitive et personnelle pour établir le lien nécessaire entre, d'une part, le micro-espace des manipulations et des représentations primitives des formes, et d'autre part, le méso-espace dans lequel on se meut entre des objets fixes (voir plus bas).

Le soleil est indispensable comme sommet du faisceau de parallèles (pas visible car le parallélisme des rayons n'a rien d'un modèle spontané) qui objective le plongement dans un même espace du petit et du grand. L'instrument mathématique principal du théorème reste étrangement l'élément le plus caché : le parallélisme de ces plans et de ces droites ou de ces rayons n'est même pas évoqué.

Ainsi le mythe de Thalès ménage bien deux significations : l'une, la géométrique est difficile à distinguer, elle est dissimulée par des complexifications inutiles, des omissions et des ambiguïtés, de façon à bien dégager l'autre et la laisser accessible à tous : les petits objets et les grands sont des objets d'un même espace élargi au cosmos puisqu'il contient le soleil lui-même.
L'intérêt direct de ce mythe apparaît nul aujourd'hui : il ne retient pas vraiment les faits essentiels et ce qu'il présente n'a plus rien d'étonnant aujourd'hui, même pour des enfants.
Il n'a de place qu'au cours de l'apprentissage, et seulement, semble-t-il, comme commentaire "culturel" et folklorique.
Il nous a permis toutefois de comprendre un peu ce que l'invention de Thalès pourrait signifier si nous arrivions à lui trouver un équivalent actuel pertinent pour un enfant de 10 ans.

6. Non Conclusion?

Peut-être la réponse pourrait elle être cherchée dans la direction indiquée par M.H. Salin et R. Berthelot (ouvrage cité) ?

Ils se demandent comment se crée la conception de l'espace en tant que modèle implicite d'action. Ils observent que cet apprentissage est laissé entièrement à la discrétion et à l'aventure personnelle des élèves. La connaissance de l'espace n'est pas considérée comme un objet d'enseignement ni même comme un objet d'apprentissages scolaires dignes de l'intervention des professeurs. Elle est au contraire exigée comme une compétence ou même une connaissance "spontanée" ou même naturelle.

Il semble que la conception des objets, de leurs positions relatives et de leurs mouvements réciproques soit acquise dans des rapports avec des petits objets que l'on peut toucher et déplacer devant soi. Le modèle mental qui régit ces rapports a été qualifié de micro-espace. Un sujet acquiert la connaissance de ses mouvements par rapport à son environnement dans des interactions qui s'effectuent sous le contrôle de la vue. De ce fait, elles forment une conception méso-spatiale. Les rapports avec des espaces plus vastes (comme la ville, la campagne ou la mer) exigent d'autres conceptions spécifiques dites macro-spatiales.

L'homogénéisation de ces conceptions est un travail épistémologique et psychologique important qui pourrait, bien mis en scène, susciter pour les élèves des aventures intellectuelles assez réjouissantes et rendre à l'homothétie et au théorème de Thalès un peu de jeunesse. Il faudrait pour cela abandonner un peu les deux petits triangles de dimensions voisines "en position de Thalès". Je ne crois pas aux vertus du tout intuitif - l'empirisme-sensualisme fait commettre assez d'erreurs, jusque dans les nouveaux programmes - ni au tout axiomatique ou au tout calcul, mais pas davantage au tout problèmes, et pas plus à l'éclectisme qu'au systématisme.

Mais alors comment fabriquer un environnement propice à l'introduction et à la vie de "Thalès sous sa forme générale ?

Il est bien naturel qu'une promenade revienne à son point de départ après avoir laissé dans le paysage beaucoup de points inexplorés. Peut-être celle-ci donnera-t-elle à certains le désir de s'y aventurer à leur tour ?[15]

Remarques et notes personnelles ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

15 Je remercie vivement M.J. PERRIN et J.C. DUPERREY pour leurs observations nombreuses, précises et pertinentes, qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

Pour un Thalès dynamique

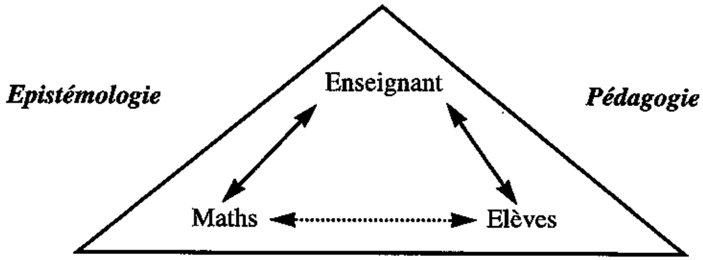
Jean Claude Duperret
IREM de Reims

La plupart des enseignants (de mathématiques ou d'autres disciplines) vont commencer leur carrière fortement imprégnés de leur propre apprentissage et, au fil des années, vont amplifier ou corriger, atténuer ou remettre en cause leur conception de l'enseignement, leur ligne de conduite directrice étant la recherche constante d'un équilibre entre le sens profond qu'ils donnent à leur matière et la communication qu'ils vont en faire. Deux facteurs marquent particulièrement cette évolution : la variation du public auquel ils s'adresseront et les changements de programmes successifs qu'ils rencontreront.

Si certains changements de programmes ne sont que des modifications légères de contenus n'entraînant chez l'enseignant qu'un soupir devant certaines préparations à réactualiser, d'autres, au contraire, sont des changements de fond remettant en cause tout à la fois les objectifs, les structures et les démarches d'apprentissage. Ces derniers entraînent en général une fracture chez les enseignants et dans chaque enseignant, fracture qui se bipolarise entre deux extrêmes : les tenants du nouveau, apôtres de la réforme, illustrant tous les aspects positifs ; les tenants de l'ancien (généralement les plus nombreux), critiques des premiers, mettant en évidence le sens perdu ! Et si ce changement de programme s'appuie sur la prise en compte d'un changement de public, tous les épiphénomènes décrits ci-dessus s'en trouveront amplifiés.

Mon propos actuel n'est plus de dire si ces programmes sont bons ou mauvais, question qui n'a de sens que dans la passion de la première année d'application, mais d'énoncer un protocole minimal d'observation qui aurait permis d'en corriger certains effets pervers. Cette observation pourrait être constituée par trois pôles de réflexion.

1 - La mesure de la fracture



Epistémologie de l'enseignant	Institution ; pression sociale
Rapport au savoir	Rapport à la réussite
Rigueur	Communication
Logique interne	Résonance externe

Le schéma très caricatural ci-dessus a pour objectif d'illustrer quatre endroits de déséquilibre possibles lors d'un changement.

- Si l'enseignant a un rôle social qui lui est dévolu pare l'institution, il ne peut cependant l'effectuer à l'encontre de ses conceptions personnelles.
- Si l'objectif essentiel du système est la réussite de ses utilisateurs (ici, les élèves), cette réussite ne peut avoir de sens que dans un rapport du savoir clairement défini.
- Si la question fondamentale de l'enseignement (des mathématiques) n'est pas de choisir entre rigueur et compréhension (la compréhension est première, sinon, à quoi bon enseigner !), un certain « excès pédagogique », souvent lié à des choix sociaux, peut masquer un déficit d'analyse.
- Si la résonance « externe » des concepts qui sont construits doit être un souci constant, elle ne peut se faire au détriment d'une logique interne qui en justifie la construction.

2 - La réduction de la fracture et le rôle de la formation continue

Les nouveaux programmes de collège ont, je crois, particulièrement « déséquilibré » le triangle ci-dessus, obligeant les enseignants à retrouver rapidement de nouvelles marques. Un tel déséquilibre nécessite la mise en place de rencontres entre enseignants avec deux objectifs :

- formation, c'est-à-dire proposition d'activités et de démarches illustrant les nouveautés,
- débat pour que l'ancien et le nouveau puissent se réguler.

L'objectif essentiel est que l'enseignant donne ou redonne très rapidement du sens au nouveau :
- le sens donnera des savoirs dynamiques qui déboucheront sur un enseignement de type « expertise » chez l'élève,
- l'absence de sens entraînera des savoirs statiques qui déboucheront sur un enseignement de type « recettes ».

3 - L'analyse à long terme

Cette analyse peut être de deux ordres, que je vais essayer d'illustrer dans mon article :
- L'évolution d'un élève au cours de sa scolarité : j'ai choisi d'en mesurer certains effets en analysant une activité auprès de stagiaires P.L.C.2, c'est-à-dire d'étudiants qui, après une licence, ont réussi le concours de recrutement d'enseignants de mathématiques.
- L'évolution de l'enseignement d'un concept ; j'ai choisi « Thalès ». Pourquoi ? Thalès a toujours été un moment redoutable d'enseignement. D'axiome en résultat, de propriété en théorème, déformé, dénaturé, il est cependant toujours resté comme un passage obligé dans tous les programmes. A la fois liaison entre le géométrique et le numérique, et ouverture sur le vectoriel, la barycentrisation et l'homothétie, il apparaît comme une dernière organisation en premier cycle et une première organisation en second cycle. A chaque changement de programme, il se retrouve donc au cœur des réflexions et des débats.

Les nouveaux programmes me semblent marqués par deux choix dictés de toute évidence par un grand souci pédagogique de rendre Thalès accessible à la plupart des élèves :
- sa restriction à une configuration triangulaire,
- sa confusion entre les aspects « projection » et « homothétie ».

Je me propose d'analyser quelques effets pervers de ces choix.

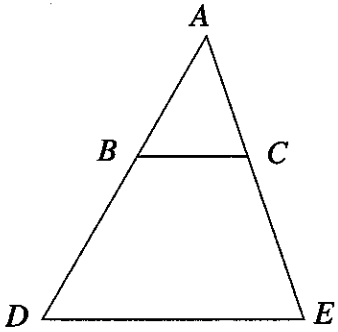
I - Le "Thalès du collège"

Les nouveaux programmes de collège ont fortement mis en avant la notion de « configuration-clé », dont une appellation didactique est « figure prototypique ».

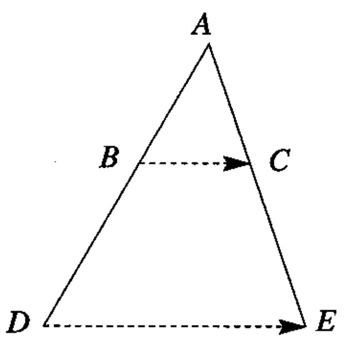
Si cette notion a permis à beaucoup d'élèves de déclencher des réflexes de « reconnaissance » (C'est Pythagore ! C'est Thalès ! C'est une symétrie centrale !...), elle n'a pas permis de rendre dynamique cette reconnaissance et d'en faire une connaissance opérationnelle, conduisant à une "expertise" du problème. Et c'est cette expertise qui me paraît être un véritable objectif d'apprentissage.

A - Les deux dynamiques de Thalès

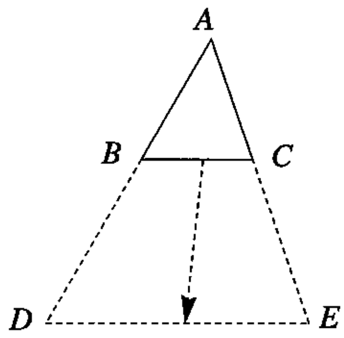
Thalès apparaît trop rapidement pour les élèves comme une configuration statique



qui cache les deux dynamiques qui ont pu le faire naître.



aspect «projection»



aspect «homothétie»

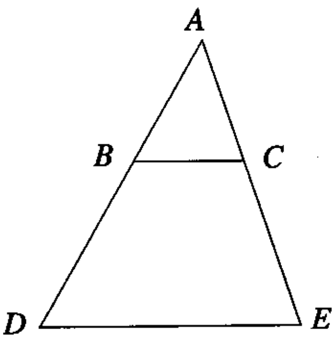
Si l'aspect «projection» va mettre en évidence le passage de la droite (*AB*)) la droite (*AC*), l'aspect «homothétie» va privilégier le passage du triangle (*ABC*) au triangle (*ADE*).

L'un des deux aspects est-il plus naturel chez l'élève ? Il est bien difficile d'en décider. En effet, dès la classe de sixième (et même avant), l'élève est capable de réaliser des réductions ou des agrandissements. Cependant, demandez-lui de trouver le milieu de deux points d'un quadrillage et il utilisera la projection des milieux.

- Y a-t-il un ordre privilégié dans l'apprentissage ? D'un point de vue mathématique, je pense que « OUI » et je développerai cette idée.
- Faut-il privilégier l'une des approches, occulter l'autre ? Je pense que non, car cela conduit rapidement à des impasses pédagogiques, telles celle des "petits bouts" que j'exposerai un peu plus loin.
- Faut-il que leur enseignement soit proche ou au contraire laisser du temps entre les deux approches ? Là, je ne sais pas. Je pense simplement qu'il faut que les deux aient le temps de s'installer, de se confronter et de se réorganiser en fonction de l'autre.

B - Deux dynamiques, donc deux rapports

Le schéma ci-dessous met en évidence les deux rapports spécifiques à chacun des deux aspects et l'égalité commune à ces deux aspects est justement celle donnée par Thalès.



$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

Thalès

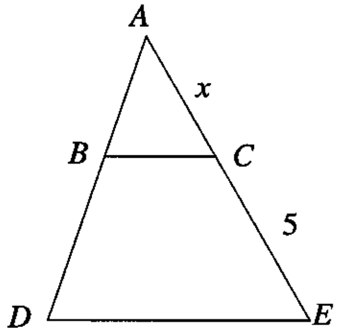
k_p, *rapport de projection* de (AB) sur (AC)	k_h, *rapport d'homothétie* de (ABC) à (ADE)
$k_p=\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{CE}{BD}$	$k_h=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

- Le rapport de projection k_p débouchera sur la notion de « cosinus »
- Le rapport d'homothétie k_h débouchera sur les notions de « sinus » de « tangente » et d'« application linéaire ».

C - Une nouvelle impasse pédagogique : «Les petits bouts»

Qu'appelle-t-on les «petits bouts» ? Dans la figure précédente, il s'agit des segments [BD] et [CE]. Pourquoi une appellation contrôlée ? Parce que les «petits bouts» donnent lieu à des débats passionnés dans les salles de professeurs de collège ou lors de la correction du Brevet.

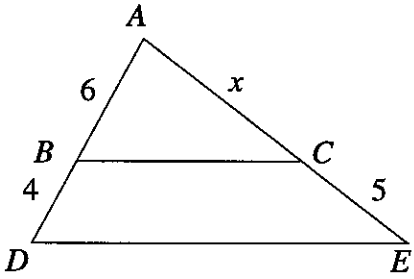
Précisons le problème.



Devant une telle configuration, l'élève se verra souvent sanctionner sans pitié le rapport $\frac{x}{5}$. On attend de lui qu'il fasse apparaître $\frac{x}{x+5}$ (soit $\frac{AC}{AE}$).

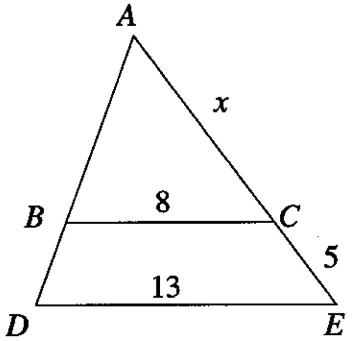
Cela a-t-il du sens ? Aucun dans l'absolu.

Si le problème proposé à l'élève est



lui interdire d'écrire $\frac{x}{5} = \frac{6}{4}$, c'est lui interdire d'utiliser une propriété de linéarité à un endroit où le seul objectif n'est pas de compléter un tableau de façon astucieuse.

Si, au contraire, le problème proposé est :



lui interdire $\frac{x}{5}$ part d'une volonté pédagogique de l'empêcher de se tromper, mais la conséquence est qu'on l'empêche de réfléchir !

D - Pour une expertise des situations

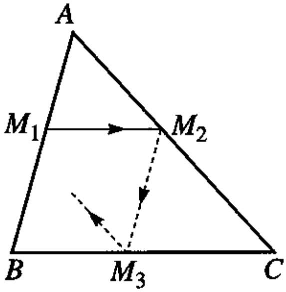
Ce problème des « petits bouts » met bien en évidence qu'un regard statique de la figure et des rapports associés conduit trop souvent l'élève dans l'impasse. Il faut donc créer une expertise, c'est-à-dire une prise de décision dynamique, en fonction du problème rencontré. Il convient pour cela de multiplier les situations à logique différente.

En voici deux, typiques et classiques :

Situation 1

Je projette M_1 en M_2 sur (AC) parallèlement à (BC), puis M_2 en M_3 sur (BC) parallèlement à (AB), puis...

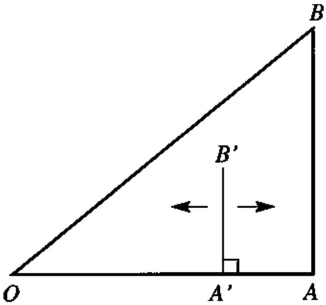
Que se passe-t-il « au bout d'un moment » ?



Situation 2

$OA = 12$; $AB = 5$; $A'B' = 3$.

Où faut-il placer A' pour que O, B' et B soient alignés ?



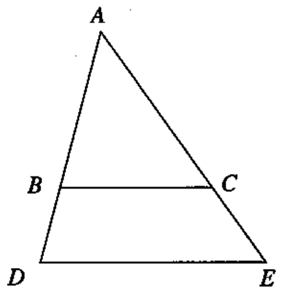
Développer l'expertise chez l'élève, c'est l'amener à prendre des décisions :

Dans la situation 1, je privilégie l'aspect « projection »
Dans la situation 2, je privilégie l'aspect « homothétie ».

E - Un moyen d'expertise : les invariants et l'«élargissement» de la figure

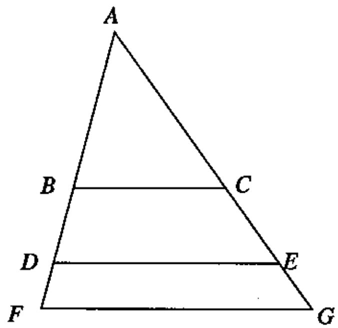
Une projection est caractérisée par une direction ; un rapport de projection est alors défini par la donnée de deux droites (l'une étant le « départ », l'autre l'« arrivée »).

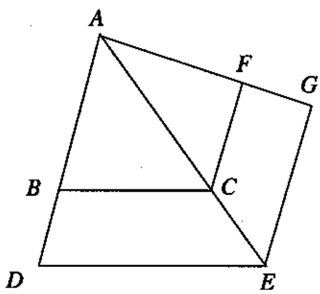
Une homothétie est caractérisée par son centre et la donnée d'un point et de son image qui définissent alors le rapport d'homothétie. En jouant dans un premier temps sur une seule variable à la fois, on peut amener l'élève à voir ce qu'il a le droit d'écrire (invariant) et ce qu'il ne peut pas écrire (variant) dans une modification de la « figure-clé »



Situation-mère

Situation A ***Situation B***





Situations-« filles » engendrées par modification d'une variable

Dans **la situation A**, l'invariant est l'aspect «projection» (même direction, mêmes droites de départ et d'arrivée), le variant est l'aspect «homothétie» (l'homothétie qui envoie (ABC) en (ADE) n'est pas la même que celle qui envoie (ABC) en (AFG).

On peut donc écrire sans risque (aspect «projection»):

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{AG}{AF} \text{ (1) ou } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \text{ et } \frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AG} \text{ (2)}$$

Mais aucune conclusion possible entre $\frac{BC}{DE}$ et $\frac{DE}{FG}$.

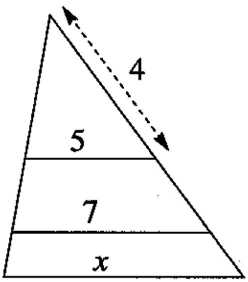
Dans **la situation B**, l'invariant est l'aspect «homothétie» et le variant l'aspect «projection».

On peut donc écrire sans risque (aspect «homothétie»):

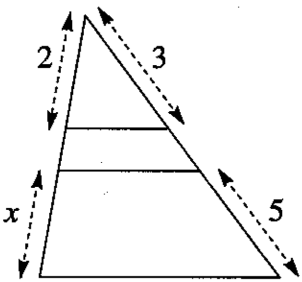
$$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}=\frac{CF}{EG} \text{ (1) ou } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{AF}{AG} \text{ (2)}$$

Mais aucune conclusion possible entre $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$.

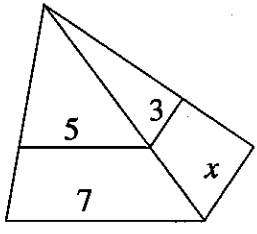
On peut alors proposer différentes configurations en demandant si l'on peut calculer x avec les «données géométriques» proposées :



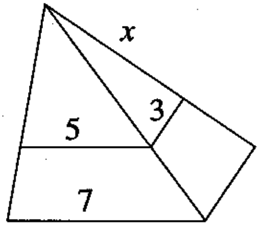
je ne peux pas calculer x



je peux calculer x



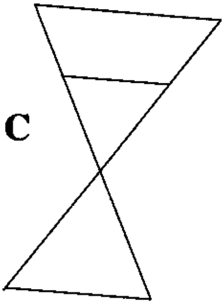
Je peux calculer x



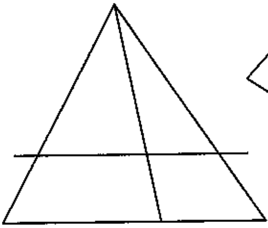
Je ne peux pas calculer x

Beaucoup d'autres «filles» peuvent naître

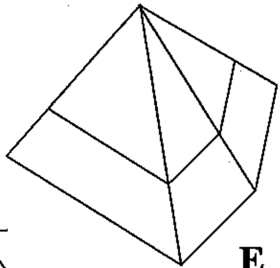
C



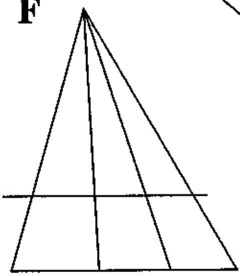
D



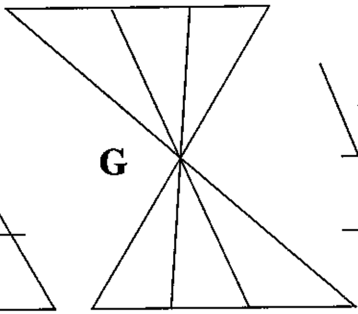
E



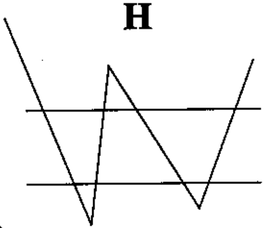
F



G



H



Les égalités (2) ci-dessus mettent en évidence que le véritable invariant de toutes ces situations est le « vrai Thalès », c'est-à-dire celui que ne s'occupe pas du troisième côté. On n'est alors pas loin de l'énoncé en « langue française » qu'on peut par exemple trouver dans le Millet [1] (1945), p. 137 :

> « Plusieurs droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments proportionnels .» (Théorème de Thalès).

Et vous pouvez retrouver dans ce même manuel scolaire p. 150, fig. 306, les figures F et G ci-dessus qui illustrent le théorème :

> « Des droites concourantes découpent sur deux droites parallèles des segments proportionnels ».

N'allez pas voir dans mon propos une quelconque nostalgie de l'enseignement des années 45, mais un point d'ancrage de ma réflexion : comme je

1. Ce Millet, contrairement à ce que pourrait laisser croire le sujet, n'a rien à voir avec le Thalès de Milet.

le disais dans mon introduction, Thalès a souffert d'une trop grande générosité de communication. Dans l'espoir de permettre à un maximum d'élèves de le rencontrer, on l'a coupé de deux grandes branches : dépasser la configuration triangulaire de base (objet principal de ce paragraphe) ; faire se confronter les deux logiques dynamiques qui le font vivre. Je plaide donc pour une «géométrie en mouvement».

II - L'« après Thalès »

A- En second cycle

Curieusement, Thalès, si présent dans nos programmes de troisième, disparaît assez rapidement en tant que tel dans les programmes de second cycle, ce qui pourrait conduire quelques élèves nostalgiques à écrire sur leur cahier de Maths : *«Thalès, né en Troisième, mort en Seconde»* et le plus grand nombre à dire : *«Chut! Thalès s'endort!»*. Mais, s'il disparaît sous sa forme « collège », il se transforme et s'enrichit avec le vectoriel ; il accompagne la naissance d'un nouveau concept : le produit d'un réel par un vecteur. La tentation est donc grande d'attendre l'arrivée du calcul vectoriel pour introduire un « Thalès sans risque ».

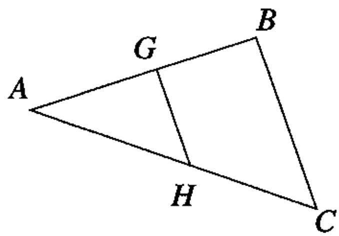
On peut, en second cycle, schématiser (donc caricaturer) deux grands courants d'utilisation indirecte de Thalès :

Le problème de barycentration

Si G est le barycentre de $A(a)$, $B(b)$, alors H est le barycentre de $A(a)$, $C(b)$.

On traduit alors Thalès vectoriellement :

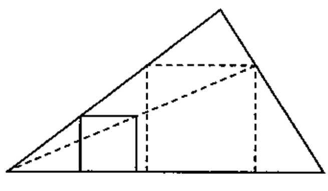
Si $\overrightarrow{AG} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$.



Une telle utilisation met en évidence l'aspect «projection».

Les problèmes d'homothétie

Comment faire « entrer » un carré dans un triangle ? Une telle utilisation s'appuie sur l'aspect « homothétie ».



Pour que des élèves de seconde puissent expertiser de telles situations, il n'est évidemment pas suffisant d'avoir introduit en seconde le produit d'un vecteur par un réel et l'homothétie. Une telle expertise repose sur toute la sensibilisation de ces deux dynamiques qu'on aura faite en collège.

De manière plus précise, une présentation purement vectorielle du théorème de Thalès lui fait perdre son sens. Si le calcul vectoriel est puissant, il occulte, pour le débutant, les aspects géométriques, la rencontre avec les «cas de figures». En outre, une présentation purement vectorielle du théorème de Thalès laisse de côté la façon dont s'est construit le calcul vectoriel.

La classique relation de distributivité $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$ n'en est-elle pas une conséquence ?

Ici, le souci pédagogique rejoint le problème mathématique en jeu (la signification du théorème de Thalès) pour sauver «Thalès de premier cycle» : accepter l'imperfection momentanée d'un concept, les concessions à la rigueur de la construction, préparer les images mentales, laisser les questions sans réponses, n'est-ce pas là contribuer à donner du sens aux mathématiques, lorsqu'elles seront à même de polir cet objet d'étude !

B - Beaucoup plus tard

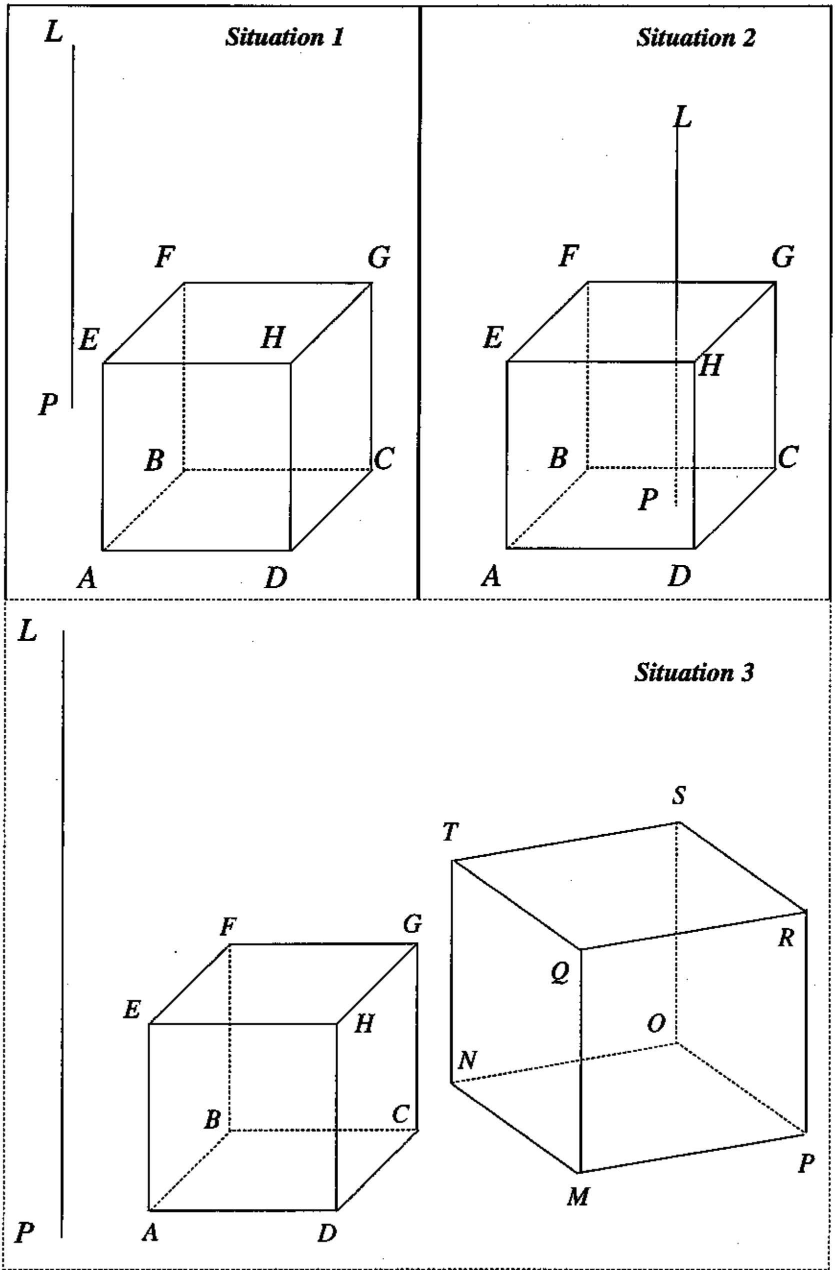
Intervenant au centre de Troyes de l'I.U.F.M. de Reims auprès des stagiaires P.L.C.2, je leur ai récemment proposé une séquence intitulée *«Observation de l'espace»* dont les sous-titres étaient : *«Pour une vision plane des objets de l'espace !»*, et *«De la démonstration à la figure !»*. Je m'appuyais, entre autres, sur une remarquable activité de l'IREM de Lille : *«Jeux d'ombres»*. Cette activité, tout à fait adaptée à un élève de seconde, a pour objet essentiel de travailler sur les axiomes d'incidence et de mettre en évidence qu'en représentation plane d'un objet de l'espace, la démonstration précède la construction. J'avais ajouté une consigne : «Vous n'avez le droit d'utiliser qu'une règle (pas de traceur de parallèles !), c'est-à-dire de ne construire des points que par intersection de droites. Le parallélisme ne doit être que la conséquence du tracé».

Présentation de l'activité

Une lampe est située en L. Π est le plan déterminé par *A, B, C* et *D*. *P* est le projeté orthogonal de *L* sur Π.

Dans chacun des cas suivants, dessiner l'ombre du cube *ABCDEFGH* sur le plan Π.

Les figures représentant ces situations sont situées sur la page suivannte.


Situation 1
L
P
F
G
E
H
B
C
A
D
Situation 2
L
F
G
E
H
B
C
P
A
D
Situation 3
L
P
T
S
R
Q
O
N
M
P
F
G
E
H
B
C
A
D

Analyse de l'activité

Il est d'abord à noter que cette activité fut loin d'être évidente pour nos jeunes collègues (comme elle est loin d'être évidente pour beaucoup d'entre nous la première fois !). Si les situations 1 et 2 finissent par déboucher et si elles ont mis en évidence un «Thalès» omniprésent, comme vous pouvez vous-mêmes en juger (figures 1 et 2), la situation 3 bloque beaucoup plus longtemps.

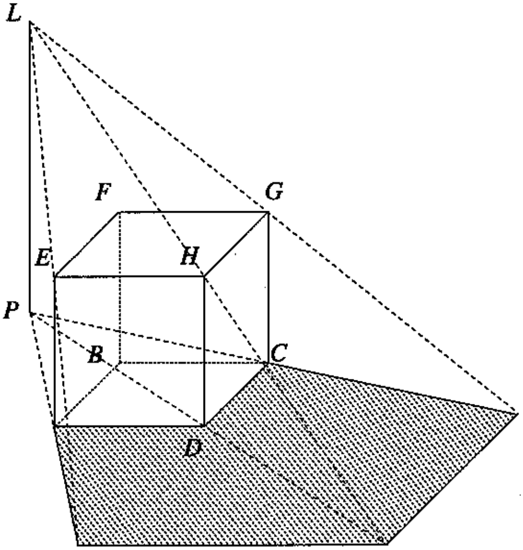


Figure 1

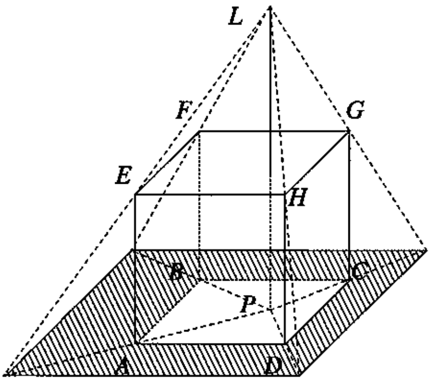


Figure 2

Trois questions firent l'objet d'une longue réflexion et d'un débat parfois animé :

- Quelle est la forme de l'ombre du premier cube sur le second ?
- Comment récupérer le sommet *X* de ce triangle (figure 3) ?
- Peut-on y arriver sans tracer une parallèle à (*GC*) ou à (*PL*) ?

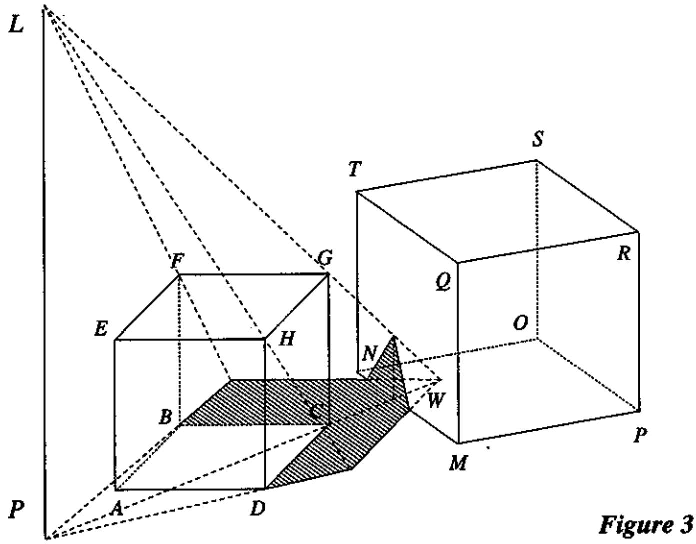
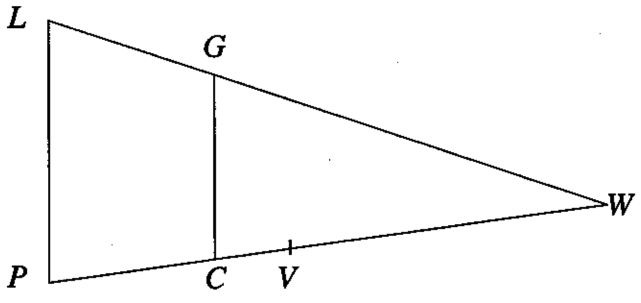
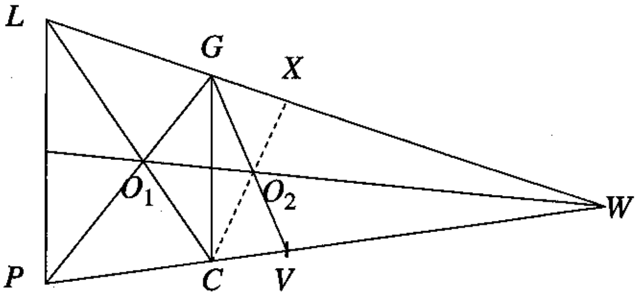


Figure 3

La troisième question a offert une grande résistance et, pour en débattre, j'ai proposé de «sortir» le problème :



Peut-on tracer, uniquement à la règle, la parallèle à (*GC*) passant par *V* ? De multiples essais, certainement aussi de vieilles images mentales, conduisent a une solution du type :



Se posa alors le problème de la validation de cette construction. Et, là encore, ce fut un moment de grand flottement parmi nos jeunes collègues.

L'un d'entre eux proposa une solution reposant sur la configuration du trapèze et les propriétés de ses diagonales. J'avais, pour ma part, une argumentation utilisant la composition des homothéties et l'alignement des centres. Un autre mit en avant une démonstration s'appuyant sur les barycentres et la projection. Et c'est bien là la richesse d'une telle activité et la raison pour laquelle j'ai choisi de l'intégrer à mon article. En effet, même si la situation vécue paraît bien loin du collège, elle illustra parfaitement les deux axes de ma réflexion :

- C'est en mouvement qu'on reconnaît la maîtrise de Thalès (ici, les tracés) ;
- si on a à sa disposition le Thalès configuration, le Thalès projection, le Thalès homothétie, on peut procéder à trois expertises du même problème et ces trois expertises, a priori différentes, se mêlent pour une meilleure appréhension du problème.

III - Thalès et les programmes

Comme je l'ai dit dans mon introduction, la difficulté d'enseigner dans certaines classes (hélas de plus en plus nombreuses dans certains secteurs) conduit nombre d'enseignants, pour des raisons pédagogiques évidentes, à faire des choix sur les priorités qu'ils vont donner à leur contenu.

Dans une période où se pose la question d'une refonte des programmes de collège, Thalès peut se retrouver rapidement en ligne de mire.

- Faut-il enseigner Thalès en premier cycle ?
- Si oui, faut-il enseigner les deux aspects («projection» et «homothétie») ?
- Si oui, faut-il les mêler, les séparer, respecter un ordre entre ces deux aspects ?

Thalès étant un moment difficile de l'enseignement, grande peut être la tentation, dans le cadre d'un allégement de programme, de le renvoyer en seconde. Ce serait, je crois, une erreur: Thalès est la mise en forme mathématique des règles liant les figures et les proportions. On pourrait le résumer en disant: «donnez-moi trois points non alignés et je tiens votre plan!». Il est important que cette théorisation des liaisons entre numérique et géométrique, entre proportionnalité et parallélisme, soit faite pour tous les élèves, c'est-à-dire en premier cycle. En le supprimant, c'est en fait le sens même de la géométrie qui disparaît dans la mesure où la géométrie élémentaire est liée à la notion de figures semblables: que la notion vague de «même forme» conduise à des relations de proportionnalité est un des points fondamentaux de l'enseignement de la géométrie au collège; qu'à son sujet, on amène les élèves à comprendre comment on fabrique des instruments intellectuels permettant d'une part de préciser la notion, d'autre part de l'utiliser pour résoudre un certain nombre de problèmes est l'illustration de l'enseignement scientifique.

Si Thalès est donc un incontournable du premier cycle, il existe des enseignants, de plus en plus nombreux, qui, toujours pour des raisons pédagogiques, proposent qu'on ne développe qu'un seul aspect de Thalès, le plus riche, l'homothétie (agrandissement- réduction, en l'état actuel). cette idée est séduisante, reposant sur la conviction qu'en ne présentant qu'un aspect, Thalès sera plus facilement et plus rapidement accessible à la majorité des élèves. Pour ma part, je pense que le gain immédiat en termes d'efficacité n'évitera pas à l'élève les impasses dans lesquelles le conduiront certaines situations, comme j'ai essayé de le montrer précédemment.

Si les programmes actuels de collège proposent effectivement ces deux aspects, ils le font de façon trop mêlée pour que les élèves puissent comprendre la spécificité des apports de chacun d'eux. Plus grave, la progression proposée entre la quatrième et la troisième (théorème des milieux, cosinus, application linéaire, puis Thalès, trigonométrie en troisième,...) ne compense pas un manque de logique mathématique interne par des choix pédagogiques justifiés.

Comme il est bien facile de critiquer, je vais aller jusqu'à faire des propositions pour améliorer (peut-être) cet état des choses :

D'un point de vue de la forme

Actuellement, une mode veut que l'on introduise Thalès avec un certain nombre de pseudo-situations (en particulier celle de la fameuse pyramide, récusée par les historiens, et dont tout enseignant honnête sait qu'elle conduit à une impasse). Je crois qu'il faut, au contraire, épurer les situations d'introduction, réduire à de strictes «figures mathématiques» l'approche de Thalès.

Les situations plus complexes viendront enrichir la vision des élèves après !

Epurer ces figures, c'est évidemment, dans un premier temps, revenir à cette fameuse configuration triangulaire. C'est un passage qui permet, sur une figure simple, de donner vie à Thalès. Mais, comme je le proposais précédemment, il ne faut pas hésiter à faire varier cette figure, la casser pour mieux la recomposer. Cette partie relève justement de la pédagogie de l'enseignant et des choix qu'il peut faire en fonction de ses élèves.

Si les deux dynamiques de Thalès doivent faire partie de notre enseignement, tant qu'à faire que de construire dans le temps ces deux approches, autant privilégier un ordre qui permette aux mathématiques de valider les différentes étapes de la progression.

D'un point de vue de la progression

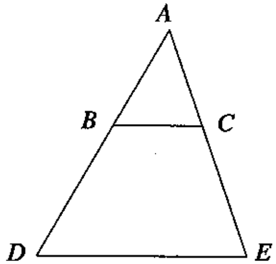
Prenant en compte toutes ces considérations, j'ai envie de proposer une progression possible :

- **En quatrième, on ne travaille que sur l'aspect «projection»**

Premier point : Le théorème de Thalès réduit à deux côtés

Un avantage indéniable avec les programmes actuels est qu'on peut parfaitement établir ce théorème avec des aires et ceci dès le début de quatrième.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$



Deuxième point : La projection, le rapport de projection

Sur la figure précédente, le rapport de projection de (AB) sur (AE), parallèlement à (BC) sera $k=\frac{AC}{AB}$, car on aura pu établir avec Thalès : $\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}$; on aura par linéarité $\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{CE}{BD}$.

Troisième point : Le cosinus comme cas particulier du rapport de projection

L'absence de mesures algébriques n'est pas un handicap car on ne travaille qu'avec des angles aigus.

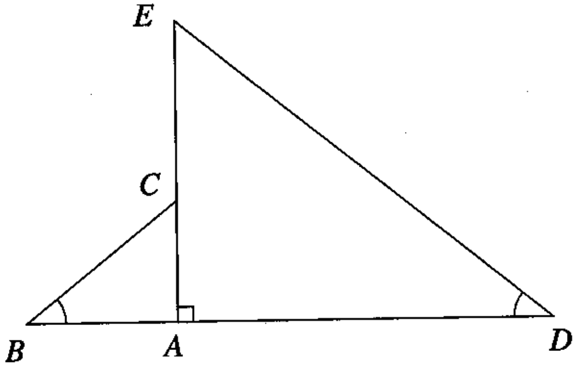
Quatrième point : Le théorème des milieux

Par contre, il vaut mieux renvoyer tout ce qui concerne l'application linéaire et l'équation $y = kx$ d'une droite en troisième.

- En troisième : On complète avec l'aspect «homothétie».

Les programmes actuels parlent d'agrandissement-réduction. Si ces mots ont l'avantage d'avoir déjà un sens auprès des élèves, en particulier après les problèmes d'échelle qu'ils ont rencontrés en cinquième, ils me paraissent d'une trop grande imprécision mathématique en troisième, car ils recouvrent de façon informe les notions d'homothétie et de similitude.

Par exemple, sur la figure ci-contre :



Le triangle (*ADE*) est-il un agrandissement du triangle (*ABC*)?

Si la notion de triangles semblables, liée à l'égalité des angles, peut être intéressante, il me semble préférable de la dégager dans un premier temps de Thalès.

C'est pourquoi je verrais volontiers employer en troisième le terme «homothétie». (On n'a pas hésité à parler de «rotation» en quatrième !).

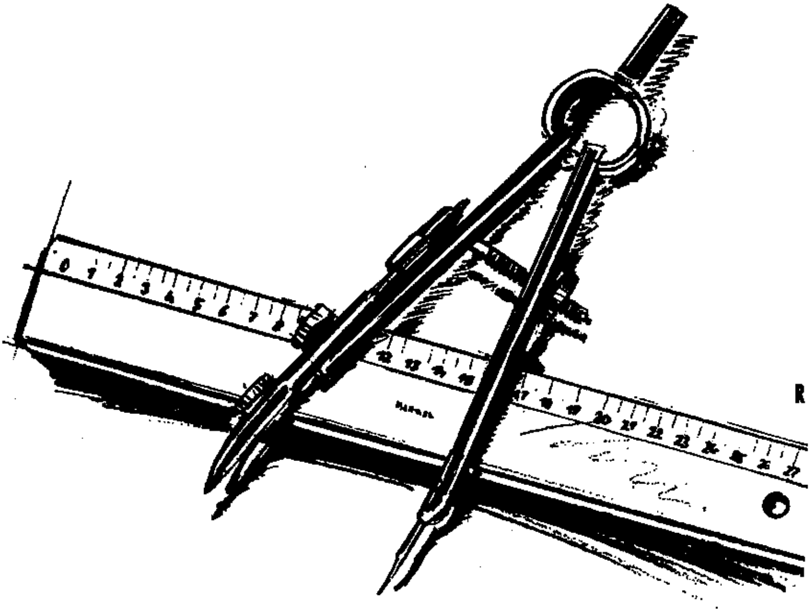
Premier point : Le théorème de Thalès aspect «homothétie» ou la mise en place du rapport des troisièmes côtés.

Il est bien évident qu'alors le champ des problèmes proposés se différencie notablement de celui de quatrième.

Deuxième point : Le sinus et la tangente

Troisième point : L'application linéaire et l'équation de droite $y = kx$

Depuis longtemps, les élèves savent associer à la notion de proportionnalité la notion de points alignés à l'origine. Ce qu'on fait actuellement en quatrième n'est que de répéter cette chose. Attendre la troisième et le Thalès homothétie, c'est donner une justification mathématique à cet alignement, donner un sens au coefficient k, et permettre, sans le dire aux élèves, bien entendu) le passage du discret au continu.



Pour apprendre à raisonner... Le milieu d'un segment

Un thème de quatrième
pour apprendre à raisonner

Milieu d'un segment

Marie-José BACH - Madeleine MAROT
IREM de Poitiers

Depuis l'expérimentation et l'introduction des nouveaux programmes de quatrième au collège, nous nous interrogeons sur la manière de rattacher la phrase "savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment" aux autres parties du programme sans avoir à parachuter une connaissance nouvelle mais en la reliant au travail réalisé par ailleurs en géométrie plane dans nos classes.

C'est ainsi qu'est née l'idée de faire du "milieu" un thème "fédérateur" permettant de greffer d'autres travaux de géométrie. Dans cet article, nous essayons de présenter notre travail autour du thème «Milieu d'un segment» en précisant les raisons qui nous ont amenées à travailler ainsi, les parties du programme introduites ou réinvesties dans ce thème, les exercices proposés, les apprentissages visés en relation avec la mise en place de la démonstration en quatrième et les outils utilisés pour résoudre les problèmes proposés.

Les intérêts d'un travail sur le milieu

Pour structurer le travail au collège, chaque année il est possible de découper le programme en thèmes importants appelés dominantes ou thèmes "fédérateurs" (*voir brochures 4ème-3ème IREM de Poitiers*) permettant de traiter plusieurs points du programme et d'organiser la gestion des notions sur l'ensemble de l'année.

Ainsi le thème "milieu" permet :

* de travailler sur les **quadrilatères particuliers** et sur les **droites particulières** dans un triangle (médianes, médiatrices, ...).

* de réactiver les connaissances des élèves sur le **repérage** dans le plan, la **symétrie centrale** et ses propriétés, la **résolution d'équations** simples, les **règles de calcul** sur les fractions et les nombres relatifs (addition, multiplication) et de les faire fonctionner dans le seul contexte où l'on utilise les nombres relatifs en quatrième (coordonnées).
* de travailler en **géométrie métrique,** de généraliser **des propriétés établies** en cinquième et d'avancer vers l'abstraction.
* d'intégrer les **méthodes de démonstration** appliquées dans un repère à l'ensemble des méthodes de démonstration et ainsi de ne pas donner à l'élève l'impression que c'est un monde à part : on peut faire fonctionner dans un repère des méthodes purement géométriques ou mieux, combiner des méthodes géométriques et des méthodes algébriques.
* d'apprendre aux élèves à élaborer des **stratégies de recherche** en les poussant à se questionner et à verbaliser les différentes étapes de leur recherche: "Qu'ai-je à faire ? Comment le faire ? Que me faut-il ? Quelle connaissance puis-je utiliser ?" C'est le moment de reclasser les connaissances selon un critère d'utilité (à quoi peut servir tel théorème ?), de distinguer un énoncé et sa réciproque et de constituer des fiches méthodes ou de comprendre le bien-fondé d'une fiche méthode toute prête. En effet, les élèves travaillent avec le fichier MÉTHODES qui a été mis au point à l'IREM de Poitiers.

Contenus du programme de 4ème visés dans cet apprentissage

Il s'agit avant tout de contenus géométriques:

> *"Savoir utiliser dans une situation donnée:*
> *- la propriété de conservation du milieu par projection,*
> *- les propriétés du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.*
> *Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.*
> *Savoir tracer les médiatrices, les hauteurs, les médianes d'un triangle et savoir qu'elles sont concourantes".*

et aussi de satisfaire aux objectifs généraux décrits dans le bandeau activités géométriques:

> *"La description et la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux.*
> *Dans le plan, les travaux font appel aux figures usuelles... Les propriétés caractéristiques usuelles du losange, du rectangle, du carré et*

du parallélogramme sont exigibles. De nouveaux outils notamment les projections, le théorème de Pythagore, les translations viennent s'ajouter aux outils des classes antérieures ; à ces enrichissements correspond un développement des capacités de découverte et de démonstration".

TRAVAIL PROPOSÉ DANS LA CLASSE

PREMIÈRE PARTIE

Cette première partie va permettre d'introduire et de faire fonctionner les propriétés de la **droite des milieux** dans un triangle.

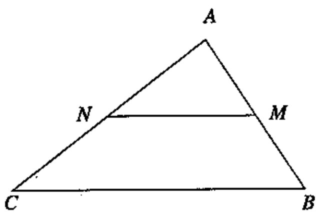
Elle débute par une activité (situation problème) dans laquelle l'élève sera plongé dans la problématique de la preuve. De cette activité, se dégageront les propriétés de la droite des milieux dans un triangle, théorème qui sera ensuite institutionnalisé.

Le choix des exercices proposés a été guidé par un souci de faire fonctionner la propriété découverte et de favoriser l'acquisition de méthodes permettant de prouver des propriétés de figures.

Au début de l'activité (le mot "activité" est entendu avec le sens défini par l'équipe de Poitiers dans Repère n° 8), l'élève se forge une idée de la réponse et se persuade du résultat, ensuite il cherche des arguments pour justifier sa réponse (En es-tu sûr ?), et convaincre les autres de la justesse de son résultat .

L'**activité** proposée est la suivante :

ABC est un triangle
M est le milieu de [AB]
N est le milieu de [AC]
Quelle fraction de l'aire de ABC représente l'aire du triangle AMN ?
En es-tu sûr ?



Suivant les classes, deux présentations sont possibles :
- soit la consigne et la figure sont données sur une feuille aux élèves,
- soit la consigne est donnée oralement, les élèves construisent alors la figure de leur choix.

Cette deuxième présentation semble plus riche, en effet, la figure n'étant pas imposée à l'élève, les constructions diffèrent et le passage à la justification s'avère nécessaire pour généraliser la propriété découverte (ce qui est vrai sur une construction l'est-il sur l'autre ?) .

La consigne est simple et la question posée est vite comprise par les élèves. L'aire et la fraction - partage sont des notions maîtrisées en quatrième.

Chaque élève peut s'engager dans la recherche, en effet, le problème de la preuve se situe dans le deuxième temps de l'activité et c'est sur ce point que portera l'institutionnalisation faite par le professeur (si l'élève "sèche" sur la preuve, il n'aura pas eu l'impression de "sécher" devant tout le problème).

Les procédures qui peuvent être utilisées par les élèves sont :
- l'utilisation du calque du triangle *AMN* afin de voir combien de fois on peut le placer dans *MNBC* (méthode qui conduit à la procédure suivante),
- le découpage de la figure en 4 triangles identiques en utilisant le troisième milieu,
- le tracé des hauteurs puis mesure des dimensions nécessaires et calculs des aires puis de la fraction. (Les résultats légèrement différents d'une figure à l'autre permettent d'installer un léger doute).

Remarque : La situation permet de combattre l'idée fausse que la fraction de l'aire est la même que la fraction de périmètre.

Les élèves sont vite persuadés et convaincus que l'aire du triangle *AMN* représente le quart de l'aire du triangle *ABC* .

Le nouveau problème est alors "Comment en être sûr ? Comment le prouver ?"

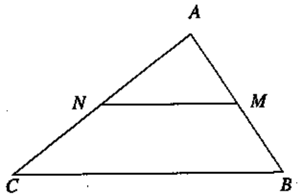
On retiendra principalement les deux stratégies suivantes proposées par les élèves :
1 - Pour ceux qui ont proposé le découpage de la figure, il faut être sûr que les 4 triangles ont la même aire, en fait ici il faut être sûr que les 4 triangles sont identiques :
➨ ont-ils les mêmes côtés ? (Les élèves savent que lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, il est parfaitement déterminé et unique, à une isométrie près !). En appelant *P* le milieu de [*BC*] , cela revient à se demander

si $MN = BP = PC$ si $MP = AN = NC$ si $NP = AM = MB$

et pourquoi il en est ainsi.
. d'autres procédures peuvent s'engager avec les angles : un angle entre deux

côtés ... Ce qui revient à dire que si on savait que $(MN)//(BC)$ alors les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{MBP}$ seraient égaux (car correspondants).

2 - Pour ceux qui sont engagés dans le calcul d'aires, plusieurs questions se posent :
- la longueur AK est-elle la moitié de AH ?
- la longueur MN est-elle la moitié de BC ?
- les hauteurs (AH) et (AK) sont-elles portées par la même droite ? (question posée par le professeur).



L'enseignant peut proposer la synthèse suivante : "Si on arrive à prouver que $(MN)//(BC)$ et que $MN = \frac{1}{2}BC$ alors le problème sera résolu pour tous".

Le professeur a le choix de donner le théorème à ce moment-là ou de pousser plus loin la recherche de preuve.

Voici plusieurs possibilités de preuves :

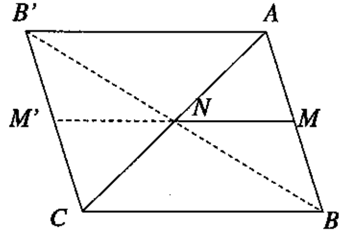
1 - Une preuve, trouvée par des élèves, parait tout à fait acceptable et peut être acceptée selon le niveau de la classe : le triangle AMN est une réduction du triangle ABC à l'échelle $\frac{1}{2}$ puisque $AM = \frac{1}{2}AB$, $AN = \frac{1}{2}AC$, et que l'angle A est le même, par conséquent $MN = \frac{1}{2}BC$ et les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$, les droites (MN) et (BC) sont obligatoirement parallèles.

2 - On peut proposer aux élèves de prouver le parallélisme entre (MN) et (BC) en prenant comme donnée le fait que $MN = \frac{1}{2}BC$.

3 - On peut aussi proposer le problème de la démonstration en faisant intervenir le symétrique de M par rapport à N (*voir brochure de 4ème de l'IREM de Poitiers*). Cette démonstration ne sera intéressante que si on arrive à montrer comment l'idée de faire intervenir ce nouveau point (le symétrique) peut s'expliquer. Comment pouvait-on penser à faire cette construction ? à rajouter un point sur la figure ?

4 - On peut aussi faire le symétrique de toute la figure par rapport à N et uti-

liser les propriétés de la symétrie centrale pour prouver que $ABCB'$ et $AB'M'M$ sont des parallélogrammes et ensuite en déduire que $(MN) // (BC)$.

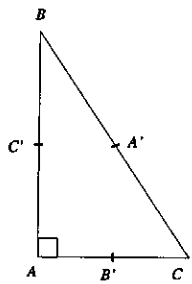


Les **exercices** ont pour objectifs de faire fonctionner les deux propriétés institutionnalisées à la fin de l'activité et aussi de prouver des propriétés de figures au travers des situations proposées, de dépasser les simples constatations à partir de la figure et d'amener l'élève à argumenter. Cela nécessite un questionnement de l'élève, la recherche d'une démarche de résolution, la familiarisation avec le fichier MÉTHODES, la validation et l'institutionnalisation des propriétés rencontrées pour qu'elles deviennent des outils de démonstration.

Les exercices sont choisis pour que la recherche soit riche, afin de favoriser la confrontation des différentes démarches, pour inciter les élèves à expliciter leur choix et clarifier leurs explications.

Dans les exercices 1 à 5, les figures sont données afin de faciliter la lecture du document.

Exercice 1



ABC est un triangle rectangle en A.
A', B', C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Quelle est la particularité du quadrilatère $AB'A'C'$?
Prouve-le.

Méthodes possibles :

"Comment prouver qu'un quadrilatère est un rectangle ?"

- 3 angles droits

ou

- parallélogramme avec un angle droit

ou

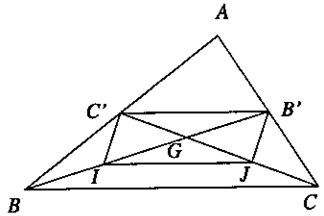
- parallélogramme avec des diagonales de même mesure.

Connaissances manipulées selon les démarches :

- la droite des milieux

- deux droites perpendiculaires à une même troisième
- la médiane dans un triangle rectangle.

Exercice 2



ABC est un triangle quelconque.[BB'] et [CC'] sont deux médianes.
Elles se coupent en G.
On désigne par I le milieu de [BG] et J celui de [CG].
Que dire du quadrilatère $B'C'IJ$? Prouve-le.
Que peut-on dire pour le point G sur chacune des médianes [BB'] et [CC'] ?

Méthodes possibles :

"Comment prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?"

- côtés opposés parallèles

ou

- deux côtés à la fois parallèles et de même mesure.

Connaissances manipulées :

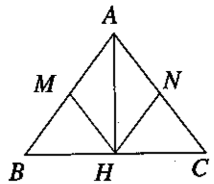
- la droite des milieux
- le segment des milieux
- la transitivité du parallélisme.

La synthèse permet de dégager la propriété :

"Les médianes dans un triangle sont concourantes en un point G situé aux $\frac{2}{3}$ *à partir de chaque sommet"*

et de l'institutionnaliser.

Exercice 3



ABC est un triangle isocèle en A.
[AH] est la hauteur, M et N sont les milieux de [AB] et de [AC].
Que dire du quadrilatère $AMHN$? Prouve-le.

Méthodes possibles :

"Comment prouver qu'un quadrilatère est un losange ?"

- les quatre côtés de même mesure
- parallélogramme qui a les diagonales perpendiculaires .

Connaissances manipulées :

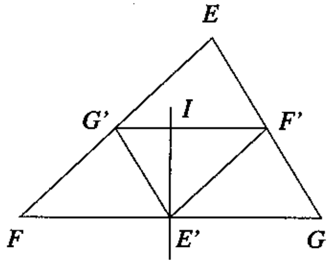
- droite et segment des milieux

- hauteur dans un triangle isocèle
- médiane dans un triangle rectangle .

Remarque :Pour des élèves ayant des difficultés, on peut faciliter le travail en donnant des longueurs, par exemple : $AB = 7$ et $BC = 5$.
Ceci favorise les stratégies utilisant les calculs de longueurs (médianes dans un triangle rectangle, segment des milieux, côtés de même mesure) .

Exercice 4

EFG est un triangle .
E', F', G' sont les milieux respectifs de [*FG*] , [*EG*] et [*FE*] .
La médiatrice de [*FG*] coupe la droite (*G'F'*) en *I* .
Que représente [*E'I*] pour le triangle *E'F'G'* ? Prouve-le .



Méthode :

"Comment prouver que deux droites sont perpendiculaires ?"

- deux droites parallèles, une perpendiculaire à l'une l'est aussi à l'autre .

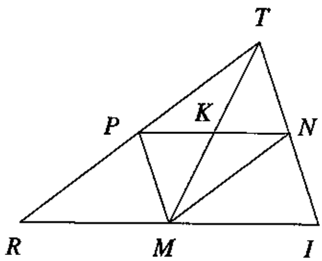
Connaissances manipulées :

- droite des milieux
- médiatrice d'un segment
- hauteur dans un triangle.

Remarque: Un prolongement possible permet de montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Un exemple est donné dans la *revue Repère n°8 : "Activité pour le collège" par D.Berghe, B.Poulain, J.Borreani - Irem de Rouen .*

Exercice 5

TRI est un triangle quelconque. Construis la médiane [*TM*] . Place *P* milieu de [*TR*] et *N* milieu de [*TI*] . *K* est le point d'intersection de (*TM*) et de (*PN*) .
Est-il vrai que (*MK*) est une médiane du triangle *MPN* ? Justifie ta réponse .



Méthodes possibles :

"Comment montrer qu'un point est le milieu d'un segment ?"

- diagonales d'un parallélogramme .

"Comment montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?"

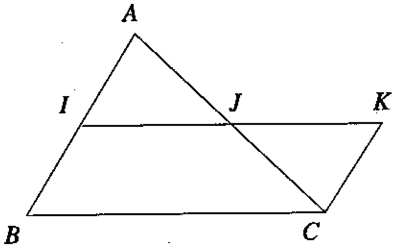
- côtés opposés parallèles
- 2 côtés à la fois parallèles et de même mesure .

Connaissances manipulées :

- droite des milieux
- médianes dans un triangle.

Exercice 6

ABC est un triangle .
I est le milieu de [*AB*] .
La parallèle à (*BC*) passant par *I* et la parallèle à (*AB*) passant par *C* se coupent en *K* . La droite (*IK*) coupe (*AC*) en *J* .
Est-il vrai que *J* est le milieu de [*AC*] ? Prouve ta réponse .



Méthodes possibles :

"Comment prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?"

- côtés opposés parallèles (*IKCB*)
- 2 côtés parallèles et de même mesure (*AKCI*).

"Comment prouver qu'un point est le milieu d'un segment ?"

- diagonales d'un parallélogramme (comme dans l'exercice précédent) .

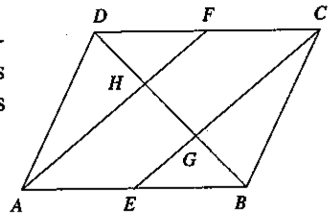
La synthèse permet de valider la réciproque de l'énoncé des milieux:

$$\left.\begin{array}{r}\text{I milieu de [AB]}\\ (IJ)//(BC)\end{array}\right\}\ \text{donc } J \text{ milieu de } [AC]$$

Cette réciproque sera institutionnalisée dans la classe .

Exercice 7

Un vieux problème : (livre III Euclide)
"Les droites qui joignent deux sommets opposés d'un parallélogamme au milieu des côtés opposés divisent la diagonale qui joint les deux autres sommets en trois parties égales" .



Méthodes :

"Comment comparer des longueurs ? "
"Comment montrer qu'un point est le milieu d'un segment ? "

Bulletin Inter-IREM - Commission Premier cycle.

Connaissances manipulées :

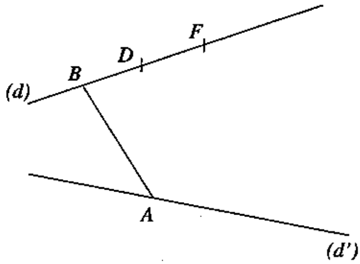
- parallélogramme pour déduire des propriétés
- propriétés pour prouver un parallélogramme
- réciproque de la droite des milieux

L'objectif de cet exercice est double :

- faire travailler sur le parallélogramme dans les deux sens
- faire analyser la figure et les conditions d'utilisation d'un énoncé, choisir les triangles dans lesquels on se place .

Exercice 8

Sur une droite (d), on considère trois points B, D, F tels que D soit le milieu de $[BF]$; sur une droite (d') on considère un point A. C est le projeté de D sur (d') parallèlement à (BA), E est le projeté de F sur (d') parallèlement à (BA).
Que dire de C ? Prouve-le.



Méthode :

"Comment montrer qu'un point est le milieu d'un segment ?"

- conservation du milieu par projection.

Connaissance manipulée :

- réciproque de la droite des milieux.

Pour résoudre cet exercice, il est nécessaire de se ramener à ce que l'on connaît et donc d'ajouter le segment $[BE]$ ou le segment $[AF]$ pour faire apparaître deux triangles. La synthèse porte sur la conservation du milieu dans une projection, connaissance qui sera institutionnalisée et qui pourra ensuite être utilisée.

DEUXIÈME PARTIE

Cette deuxième partie a pour but de faire dégager la formule des coordonnées du milieu d'un segment dans un repère puis de l'utiliser pour prouver des propriétés de figures.

L'activité proposée permet d'émettre des conjectures sur la formule à trouver à partir d'une figure réalisée dans un repère. La figure est complexe, la recherche de la particularité permet de réinvestir la symétrie centrale étudiée en cinquième. Il est nécessaire de trouver les coordonnées du milieu commun des segments [*AE*], [*BF*], [*CG*], [*DH*].

Les coordonnées des points de la figure ne sont pas données au hasard mais elles sont choisies pour que le centre de symétrie soit sur l'axe des ordonnées. Cela conduit les élèves à remarquer que l'ordonnée du milieu est 0 lorsque les ordonnées des deux points sont des nombres opposés et faciliter l'énoncé de conjectures ; pour calculer l'autre coordonnée beaucoup d'élèves proposent la somme des abscisses, ce qui est mis en défaut et nécessite une recherche plus approfondie.

*Le problème est alors :**"Comment calculer les coordonnées du milieu d' un segment ?"***

Très vite, les élèves proposent la demi-somme des abscisses puis la demi-somme des coordonnées des extrémités.

L'**activité** est la suivante :

Dans un repère orthonormal, on donne les points :

$A(6\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ -1)$, $C(\frac{3}{2}\ ;\ 0)$, $D(-\frac{7}{2}\ ;\ -1)$, $E(-6\ ;\ 0)$, $F(-4\ ;\ 4)$, $G(-\frac{3}{2}\ ;3)$, $H(\frac{7}{2}\ ;4)$.

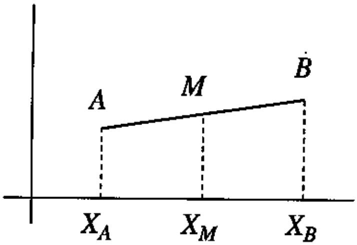
Le polygone *ABCDEFGH* présente une particularité. Laquelle ? Comment le prouver ?

Dans les classes, les élèves ne travaillent pas tous au même rythme, voici un prolongement possible pour que les élèves rapides continuent à travailler : d'autres parallélogrammes non liés à la symétrie déjà étudiée apparaissent dans cette figure, comment les prouver ?

Ceci permet de faire fonctionner et de valider la formule proposée par les élèves, de contrôler les réponses à l'aide du dessin, de proposer une utilisation performante de la symétrie centrale et de ses propriétés et pour le professeur, de gérer l'hétérogénéité de sa classe.

L'institutionnalisation porte sur la formule permettant de calculer les coordonnées du milieu d'un segment et la fiche : *"Comment montrer qu'un point est le milieu d'un segment ?"*.

Cette formule peut, selon le niveau de la classe, être démontrée avec la projection du milieu, démonstration qui est assez simple dans le premier quadrant :



$$x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2}$$

$$x_M = \frac{x_A}{2} + \frac{x_B}{2}$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Les **exercices** proposés ont pour objectifs de :

- faire fonctionner ce qui vient d'être institutionnalisé
- travailler sur les équations simples
- démontrer des propriétés de figures.

Ils ont été choisis pour que les élèves puissent mettre en jeu plusieurs stratégies, utilisent leur fichier MÉTHODES pour parfaire leur recherche, justifient leurs affirmations et organisent leurs démonstrations.

Exercice 1

Dans un repère orthonormal, place les points :
$A(2\,;1)$, $B(6\,;4)$, $C(5\,;0)$, $D(-8\,;-1)$, $E(-4\,;2)$, $S(1\,;-3)$
On désigne par I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [EB]; [BS]; [SD] et [ED].

a) $ABCS$ est-il un parallélogramme ? Prouve ta réponse.
b) $IJKL$ est-il un parallélogramme ? Justifie.
c) Peut-on calculer les coordonnées de F pour que $BAEF$ soit un parallélogramme ?
d) Prouve que [EF] et [SC] ont la même longueur.
e) Prouve que D, E, F sont alignés.

Méthodes :

"Comment prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?"

- diagonales de même milieu.

"Comment montrer que deux segments ont la même longueur ?"

- propriétés du parallélogramme.

" Comment démontrer que des points sont alignés ?"

Connaissances manipulées :

- calcul des coordonnées du milieu d'un segment
- droite des milieux
- résolution d'équations.

Exercice 2

Dans un repère orthonormal, place les points :
$A(1\,;1)$, $B(2\,;3{,}5)$, $C(3\,;6)$, $D(4{,}5\,;2)$, $E(8\,;3)$
Prouve que (BD) est parallèle à (CE).

Connaissances réinvesties :

- droite des milieux
- coordonnées du milieu.

Remarque : Il est nécessaire de prouver d'abord que B et D sont les milieux de $[AC]$ et de $[AF]$. Les élèves n'y pensent pas forcément. Cet exercice est choisi pour montrer que l'on peut utiliser des méthodes géométriques dans un contexte analytique (les élèves de quatrième ne savent pas montrer de manière analytique le parallélisme de deux droites).

Exercice 3

Dans un repère orthonormal, on donne : $A(-2\,;3)$, $B(2\,;6)$, $E(2\,;-2)$.
I est le milieu de $[BE]$, $EABT$ est un parallélogramme.
a) Place T et calcule ses coordonnées.
b) On trace la parallèle à (AB) passant par I, elle coupe (AE) en L.
Calcule les coordonnées de L.

Connaissances réinvesties :

- propriétés du parallélogramme
- réciproque de la droite des milieux dans un triangle.

Exercice 4

Dans un repère orthonormal :

$A(-3; 2)$, $B(-1\,;-3)$, $C\left(\frac{2}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$, $D\left(\frac{8}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$
E est le symétrique de D par rapport à I
F est le symétrique de D par rapport à J
Cette figure présente des particularités, lesquelles ? Cherche des preuves à tes affirmations.

Ici, un problème apparait "Comment placer des points dont les coordonnées ne sont ni entières ni décimales ?" C'est l'occasion de travailler les différentes écritures d'un nombre, par exemple :

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{3}$, ce qui permet de placer $\frac{8}{3}$ sur la droite graduée.

Connaissances mobilisées :

- propriétés du parallélogramme
- droite des milieux
- points alignés
- coordonnées du milieu
- milieu d'un segment
- symétrie centrale (construction, lien avec le milieu)
- calcul sur les fractions de même dénominateur et sur la moitié d'une fraction (retour au sens des opérations ou réinvestissement de "diviser par x signifie multiplier par $\frac{1}{x}$ ".

CONCLUSION

Ce travail qui s'est échelonné sur un temps assez long a été très fructueux et ceci pour plusieurs raisons :

- Les élèves ont manipulé de nombreuses connaissances spécifiques à la classe de quatrième.
- Ils ont travaillé les méthodes de recherche (conjectures, preuves, justification) et se sont familiarisés avec leur fichier MÉTHODES.
- Ils ont réutilisé des notions anciennes sur des situations nouvelles (symétrie centrale, calcul avec des nombres relatifs, fractions, repérage, quadrilatères, ...).

Toutes ces raisons nous autorisent à penser que le thème "milieu d'un segment" permettant de travailler les grands objectifs de la classe de quatrième et de la discipline est un bon thème "fédérateur" pour ce niveau.

ÉVALUATION

Nous proposons trois devoirs donnés dans trois classes différentes et dans des collèges différents à la suite de cette étude :

4°4 Devoir sur feuille (à la maison)

(S'évaluer sur le milieu et la démonstration)

1. **a)** Place dans un repère d'origine O les points suivants :

$R(1;7)$, $S(-2;3)$, $T(-1;-2)$, $U(2;2)$.

b) Démontre que *RSTU* est un parallélogramme.

c) Place le point *M* symétrique de *S* par rapport à *U*, et calcule ses coordonnées.

d) La droite (*RU*) coupe la droite (*TM*) en *N*. Place *N* et calcule ses coordonnées.

e) Démontre que $UN = \frac{1}{2} RU$.

2. a) Trace un cercle (*C*) de centre *O*, et un diamètre quelconque [*AB*] de ce cercle. Place un point *M*, n'importe où sur le cercle (*C*). Fais une figure et écris la liste des données.

b) Trace la droite passant par *B* et parallèle à la droite (*OM*) : elle coupe la droite (*AM*) en un point appelé *S*. Complète la figure et la liste des données, puis démontre que *M* est le milieu de [*AS*].

c) Place sur la figure le point *T* symétrique de *B* par rapport à *M*, puis démontre que (*OM*) est parallèle à (*AT*).

d) Démontre que *BATS* est un losange.

Pour réviser (facultatif)

e) Calcule l'aire et le périmètre de *BATS* en supposant que le rayon du cercle (*C*) mesure 3 cm, et que l'angle $\widehat{BAM}$ mesure 50°.

4 A Devoir en classe

Exercice 1) *ABC* est un triangle. *I* est un point de [*BC*] .

On appelle :

S le milieu de [*BI*]
T le milieu de [*IC*]
M le milieu de [*AB*]
N le milieu de [*AC*].

a) Montre que (*NT*) est parallèle à (*AI*).

b) Montre que *MNTS* est un parallélogramme.

Exercice 2) Dans un repère orthonormal, on donne les points :

$$P(-1\,;-3)\,,\,L(2\,;2)\,,\,U(7\,;0)\,,\,S(4;-5)$$

a) Que peut-on dire de *PLUS* ? Prouve-le.

b) On appelle *R* le symétrique de *S* par rapport à *U*. Calcule les coordonnées de *R*.

Exercice 3) *ABCD* est un parallélogramme tel que $DC = 8{,}4$ et $BC = 4$.

D' est le point tel que *A* soit le milieu de [*DD'*].

E est le point du segment [*AB*] tel que $AE = 2{,}8$.

La droite $(D'E)$ coupe la droite (DC) en F.
a) Montre E est le milieu de $[D'F]$.

b) Déduis-en DF et montre que $FC = \frac{1}{3} \times DC$.

4 B Devoir en classe

Exercice 1)

1 - Placer dans un repère les points suivants :
$A(2\,;3)$, $B(-1\,;0)$, $K(3\,;-2)$, $P(0\,;-5)$ et T le milieu de $[AP]$.
2 - Calculer les coordonnées de T.
3 - Le quadrilatère $ABPK$ est-il un parallélogramme ? Prouve-le.
4 - Placer le point $R(-5\,;2)$.
a) Est-il vrai que R et K sont symétriques par rapport à B ? Justifie.
b) Soit I le milieu de $[RB]$, prouve que B est aussi le milieu de $[IT]$.
5 - Que représente la droite (RT) pour le triangle RAP ? Pourquoi ?

Exercice 2)

1 - Construire un triangle BAO rectangle en A avec $AB = 3$ cm et $AO = 4$ cm. Soit C le symétrique de A par rapport à O. Sur la demi-droite $[BO)$ placer le point D tel que $BD = 8$ cm. Placer les points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
2 - $IJKL$ est-il un losange ? Justifie ta réponse.*(tu peux utiliser le fichier méthodes).*

Si tu as fini :
Ex 1) 5 b - Que représente le point B pour le triangle RAP ?
Justifie ta réponse.

Énoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique

Marie-José BACH - Madeleine MAROT
IREM de Poitiers

Les discussions relatives à l'introduction et à la formulation du théorème de Thalès en troisième de collège sont encore vives, chacun défendant son point de vue : projection ou agrandissement-réduction ...

Si nous nous plaçons dans une démarche d'agrandissement-réduction, nous pouvons déduire immédiatement la proportionnalité entre les longueurs des côtés du "petit triangle" et ceux du "grand triangle" (ou vice versa), le coefficient de proportionnalité représentant l'échelle entre les deux triangles.

Dans cet article, nous nous proposons de montrer que le thème "Thalès dans un triangle", abordé en début d'année de troisième, sous l'aspect évoqué au paragraphe précédent, est un thème riche. En effet, il permet de réactiver les propriétés de figures introduites en cinquième et en quatrième, de faire travailler et d'approfondir les règles du calcul algébrique établies dans les classes antérieures, en particulier la reconnaissance et l'utilisation de la distributivité et la résolution des équations.

Pour la progression suivie et l'analyse sur le thème proprement dit, nous renvoyons les lecteurs aux articles parus à ce sujet dans le Suivi scientifique de troisième et les brochures de troisième de l'IREM de Poitiers.

Lors des premiers travaux simples, donnés après l'introduction du théorème de Thalès, travaux que nous n'exposons pas ici, l'élève a le choix entre :

- le traitement arithmétique de la situation par la recherche de l'échelle ou du coefficient de proportionnalité entre les longueurs des côtés des deux triangles,

et

- le traitement algébrique en posant une équation simple du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Ensuite, il nous semble important de donner aux élèves des situations où la méthode arithmétique s'avère plus difficile à reconnaître, à appliquer, voire même inutilisable, et où il sera nécessaire de traiter algébriquement le problème en posant une équation dont la forme apparaîtra plus complexe à l'élève.

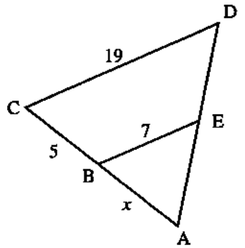
Cela impose pour le professeur un choix dans les situations proposées, un choix dans les longueurs connues et inconnues, un choix sur les nombres donnés (coefficient de proportionnalité fractionnaire).

L'exercice suivant illustre ce propos:

Calculer x sachant que :

(CD) //(BE)

BC = 5 ; CD = 19 ;BE = 7



La propriété de Thalès conduit, selon la démarche utilisée, à $AC = \frac{19}{7}AB$ ou à $\frac{AC}{AB} = \frac{19}{7}$.

Le traitement arithmétique est envisageable par les élèves, le coefficient d'agrandissement étant $\frac{19}{7}$. Mais ne connaissant ni AC, ni AB, le fait d'écrire $AC = \frac{19}{7}AB$ ne conduit pas directement à la solution ce qui rend inefficace cette résolution et impose le passage à l'algèbre.

Deux traductions apparaissent alors :

$$\text{soit } \frac{x+5}{x} = \frac{19}{7} \text{ (1)}, \quad \text{soit } x + 5 = \frac{19}{7}x \text{ (2).}$$

Il est intéressant de faire analyser ces deux équations aux élèves afin qu'ils prennent conscience qu'on passe de l'une à l'autre par une méthode algébrique connue.

L'équation (2) est une équation intéressante car elle peut être résolue de différentes manières, en voici deux :

$$x + 5 = \frac{19}{7}x$$

$$x + 5 - x = \frac{19}{7}x - x$$

$$5 = x \times \left(\frac{19}{7} - 1\right)$$

$$5 = x \times \frac{12}{7}$$

$$x = 5 : \frac{12}{7}$$

$$x = 5 \times \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{35}{12}$$

$$x + 5 = \frac{19}{7}x$$

$$7 \times (x + 5) = 19x$$

$$7x + 35 = 19x$$

$$35 = 12x$$

$$x = \frac{35}{12}$$

Il existe d'autres traitements utilisés par les élèves ; cependant, dans tous les cas, les élèves ont retravaillé la résolution des équations avec des inconnues dans les deux membres, la distributivité (développement ou factorisation), les règles de calcul avec des entiers et des fractions et effectué des révisions de manière non systématique du programme de quatrième, ce qui est conforme à l'esprit des programmes de collège.

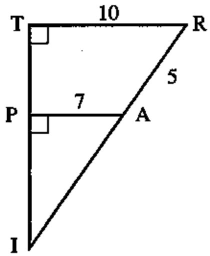
Les quatre problèmes suivants sont des situations de géométrie, ils s'inscrivent soit dans l'apprentissage à la preuve, soit dans la nécessité de réaliser un calcul préalable à une construction, soit dans la recherche de conditions nécessaires à l'obtention de propriétés de figures et présentent tous des applications du théorème de Thalès.

Pour tous, **l'algèbre devient un outil nécessaire ce qui lui donne tout son intérêt.**

Dans les deux premiers problèmes, le support choisi est le trapèze, figure connue des élèves, intéressante car elle possède deux côtés parallèles (condition nécessaire pour utiliser l'énoncé de Thalès), et lorsque l'on prolonge les deux autres côtés, on obtient des configurations-clés de l'énoncé étudiées dans le triangle. D'autre part, les équations écrites ne sont pas des équations simples $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ mais des équations dans lesquelles l'inconnue figure à plusieurs endroits.

TRAP est un trapèze rectangle:	$\widehat{T}=\widehat{P}=90°$
	$TR = 10$
	$RA = 5$
	$PA = 7$

Les droites (TP) et (RA) se coupent en I.
Prouver que les périmètres des triangles IAP et IRT sont des nombres entiers.



Le professeur peut selon les cas :
- soit donner le schéma ci-contre,
- soit ne pas donner de schéma et laisser les élèves construire une figure traduisant les données du texte,
- soit demander la figure en vraie grandeur, c'est déjà un vrai problème...

La recherche du périmètre de *IAP* conduit l'élève à calculer d'abord IA et IP, donc

∗ à poser $IA = x$, à écrire $\frac{IA}{IR}=\frac{AP}{TR}$ ce qui donne $\frac{x}{x+5}=\frac{10}{7}$ et $IA=\frac{35}{3}$.

∗ puis à calculer *IP* par l'utilisation du théorème de Pythagore, ce qui amène

$$IP^2=\left(\frac{35}{3}\right)^2-7^2 \text{ soit } IP=\frac{28}{3}$$

∗ le périmètre de *IAP* : $p=\frac{28}{3}+\frac{35}{3}+7$ qui est un nombre entier.

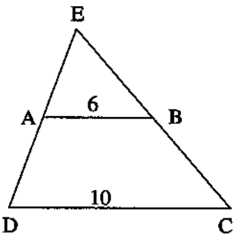
∗ enfin la longueur *TI* et le périmètre de *TIR* qui est aussi un nombre entier.

Si le professeur demande la figure en vraie grandeur, il est probable que l'élève commencera par le calcul de la hauteur du trapèze et trouvera $TP = 4$ puis utilisera le théorème de Thalès une fois pour calculer *IA* et une nouvelle fois pour calculer *IP*, puis déduira les périmètres des triangles.

Ce problème fait réfléchir à la résolution d'équations de la forme $\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}$ ou $\frac{x+a}{c}=\frac{c}{b}$, à la nécessité de calculer avec des valeurs exactes (fractions), et éventuellement au calcul du carré d'une fraction. De plus, il surprend car les longueurs des côtés sont des nombres fractionnaires tandis que les périmètres sont des nombres entiers.

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]. *$AB = 6$, $CD = 10$, $BC = 5$ et $AD = 4$.* *Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.* *Prouver que le triangle DCE est isocèle.*

En général, l'élève commence par traduire le texte par un dessin et le plus souvent n'obtient pas un triangle isocèle, ce qui sème le doute.



Il est alors nécessaire d'analyser la situation : 6 n'étant pas la moitié de 10, les points A et B ne sont pas les milieux de $[DE]$ et de $[CE]$. Pour obtenir un triangle isocèle, il suffit de montrer que $AE = 6$ ou que $DE = 10$ et donc de les calculer. Selon le choix des inconnues, on obtiendra :

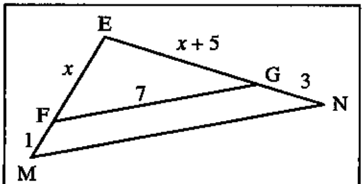
- avec $ED = x$ $\quad \dfrac{x-4}{x} = \dfrac{6}{10}$

- avec $EA = x$ $\quad \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{6}{10}$

et l'on aura des équations du même genre que celles évoquées précédemment.

Le troisième problème proposé est un problème de construction nécessitant un calcul préalable pour déterminer les longueurs inconnues.

L'unité est le centimètre. Sur le dessin ci-dessous. *EFG est un triangle tel que $FG = 7$ et [EG] mesure 5 cm de plus que [EF], on pose $EF = x$.* *Lorsqu'on prolonge [EF] de 1 cm, on obtient M ; lorsqu'on prolonge [EG] de 3 cm, on obtient N et les droites (FG) et (MN) sont parallèles.* *1° Construire la figure en vraie grandeur après avoir justifié toutes les étapes.* *2° Le triangle EFG est-il rectangle ? Pourquoi ?*



Pour réaliser la construction, il est nécessaire de connaître la valeur de x. L'équation obtenue

$\frac{x+1}{x}=\frac{(x+5)+3}{x+5}$ ou $\frac{x+1}{x}=\frac{x+8}{x+5}$ entraîne lors de sa résolution la mise en œuvre de la double distributivité dans un contexte différent des calculs d'aires souvent rencontrés en quatrième.

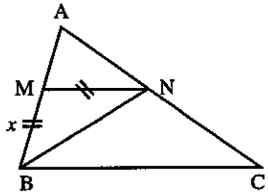
Dans cet exercice, l'élève est amené à travailler la distributivité simple de la forme $x(x + c)$ et la double distributivité sous la forme $(x + a)(x + b)$, il rencontre une équation avec des x^2 qui se ramène ensuite à une équation du premier degré en x.

La réalisation de la figure en vraie grandeur peut laisser croire que le triangle EFG est rectangle en F, les calculs $EF^2 + FG^2 = 55{,}25$ et $EG^2 = 56{,}25$ prouvent qu'il n'en est rien.

Le dernier problème que nous présentons demande une analyse des données, de la figure, de la question posée; il permet de retravailler les propriétés des triangles et des angles vues les années précédentes.

ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 7, BC = 6. *M est un point du segment [AB], il se projette en N sur (AC) parallèlement à (BC).* *1° On pose BM = x. Où faut-il placer M pour que le triangle BMN soit un triangle isocèle en M ?* *2° Dans ce cas, que représente la droite (BN) dans le triangle ABC ? Justifier la réponse.*

Pour un certain nombre d'élèves la difficulté majeure réside d'abord dans la compréhension de la consigne, comprendre que "Où faut-il placer M ?" revient à trouver la valeur de x, puis ensuite dans la compréhension de la situation initiale, voir que BMN isocèle en M est une condition imposée et donc que $BN = MN = x$ (alors qu'ils écrivent souvent $MN = y$ et tombent dans une impasse !).



Une fois le problème posé, l'équation à résoudre $\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$ donne pour solution $x = 2{,}4$.

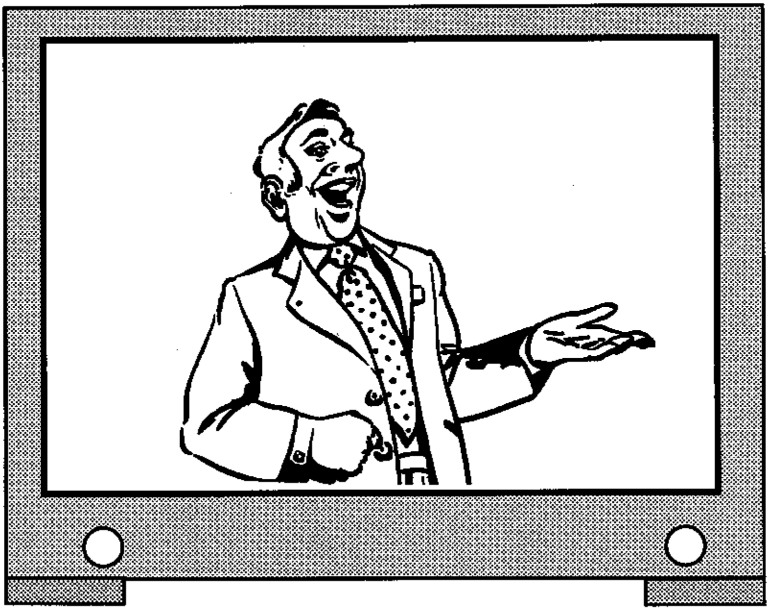
La seconde question est une question de géométrie "pure" sur les angles (alternes-internes, angles du triangle isocèle, bissectrice).

En conclusion, ce thème sur l'énoncé de Thalès dans le triangle, constituant une charnière entre la géométrie et l'algèbre, traité en début d'année fournit l'occasion de faire **fonctionner les règles du calcul algébrique** dans de nouvelles situations, d'**accroître l'intérêt de l'algèbre** tout en lui donnant du **sens**, d'**élargir le domaine des équations**, de **permettre le réinvestissement des connaissances** sur les figures géométriques et ainsi d'**éviter les révisions** systématiques.

Remarques et notes personnelles ....

AGRANDISSEMENT
REDUCTION

••••••



••••••

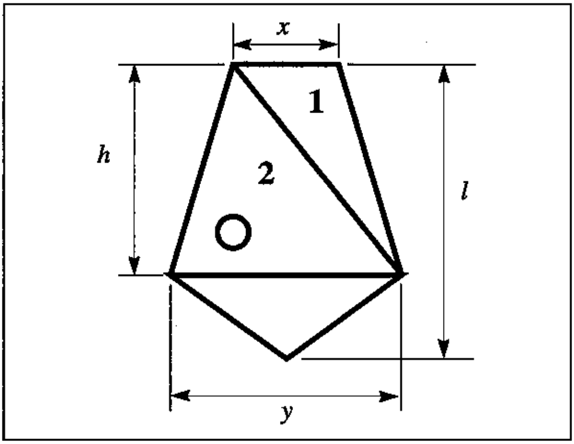
un chemin pour
THALES

Agrandissement-Réduction :

un chemin pour Thalès

Annick et Christian MASSOT
IREM des Pays de la Loire

Introduction



L'activité «Cravate» présentée dans la brochure du suivi scientifique de troisième s'appuyait sur l'observation d'une cravate regardée successivement sur des écrans de télévision de diagonales différentes. Elle utilisait aussi, un pré requis mis en évidence les années précédentes: lorsque deux dessins ont «la même forme», l'un est un agrandissement de l'autre (échelle 1 comprise); les côtés correspondants sont proportionnels et les angles correspondants sont égaux.

Cette activité avait pour objectif principal de faire découvrir que si les longueurs d'un objet géométrique sont multipliées par k, alors les aires correspondantes sont multipliées par k^2 **par des lectures de graphiques seulement**.

En effet, il était demandé aux élèves de dessiner la cravate observée sur un écran donné, à partir du schéma ci-dessus et de ses dimensions sur cet écran.

Ensuite, en fonction de deux autres diagonales d'écrans données, ils devaient dessiner la cravate, calculer les aires des différents morceaux correspondants pour représenter les dimensions ou les aires sur un écran en fonction des dimensions ou des aires respectives sur un autre écran.

La consigne était :

«Observe les graphiques obtenus. Quelles remarques peux-tu faire ?»

Mais les élèves ne manquaient pas de nous rappeler que les angles étaient conservés d'un dessin à l'autre.

Pour gérer beaucoup de valeurs, ils les mettaient assez naturellement dans des tableaux et les coefficients de proportionnalité entre les longueurs ou les aires apparaissaient parfois mieux sur les tableaux que sur les graphiques.

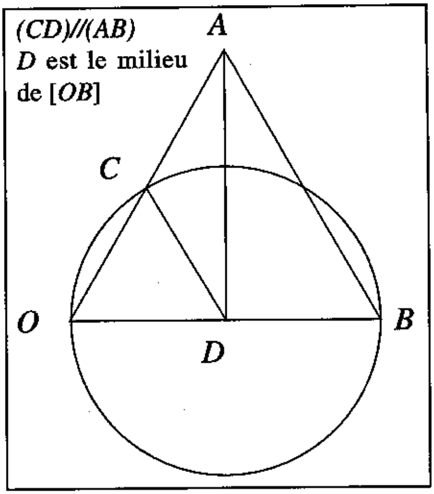
Ainsi, cette activité, assez longue en passation, est très vite apparue plus riche qu'elle ne le paraissait.

Par ailleurs, nous introduisions la propriété directe de Thalès (limitée aux triangles) par les projections. Le passage du rapport de longueur de segments d'une droite à l'égalité du rapport des longueurs correspondantes sur la droite de projection était amené de façon artificielle auprès des élèves, cela ne leur permettait pas de voir les triangles dans leur globalité et la démonstration de la conséquence était difficile.

Ces constats ont entraîné une réflexion à la concertation qui se fait depuis plusieurs années avec nos collègues de mathématiques de notre collège.

En même temps, une recherche-action menée, depuis plusieurs années dans notre collège avec les autres disciplines, nous avait amenés à travailler la notion d'agrandisement-réduction dès la sixième. D'une part, pour ne pas faire de rupture sur ce point avec l'école primaire et, d'autre part, pour préparer la notion d'échelle qui, bien que particulièrement travaillée en classe de cinquième, posait problème.

En continuité, par exemple, des élèves de quatrième, lors de la recherche du problème s'appuyant sur la figure ci-contre, ont dit que le triangle OAB est un agrandissement du triangle OCD.



Ils en déduisent que les côtés correspondants sont proportionnels et que C est le milieu de $[OA]$.

Cela ne faisait pas partie des propriétés institutionnalisées ... nous avons été interpellé!

Les élèves ont donc à leur disposition un nouvel outil qu'ils sont prêts à vouloir manipuler: la notion d'agrandissement-réduction et il est difficile de leur dire : *«On ne peut pas utiliser ce que vous connaissez!»*

Tout était mûr pour une plus grande utilisation de l'activité «Cravate». Non seulement, à la suite de plusieurs expérimentations et de remarques de collègues, elle a été améliorée dans ses consignes et dans son déroulement, mais, en plus de ses objectifs sur agrandissement-réduction, elle nous permet maintenant de préparer:

L'introduction de la propriété directe de Thalès (limitée aux triangles), du sinus et de la tangente.

En effet, comme les élèves remarquent que, lorsqu'il y a agrandissement ou réduction, les angles correspondants sont conservés, la question suivante leur est posée:

> **«Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»**

Les élèves ne trouvant pas de contre-exemple pour les triangles, concluent que la réponse est oui pour ceux-ci et on peut en déduire que les côtés correspondants sont proportionnels (premier cas de similitude permettant de prouver que des triangles «semblables», ont la même forme).

L'activité «La cravate du présentateur» nous paraît ainsi s'inclure davantage dans l'esprit du programme de troisième et mieux mériter le temps nécessaire à sa passation.

LA CRAVATE DU PRÉSENTATEUR

I - Objectifs de l'activité

1) Objectifs principaux :

- Agrandissement, réduction et conséquences sur les angles, les longueurs et les aires (en prenant appui sur les dessins, les tableaux et les graphiques d'une part et le travail en groupes d'autre part).
- Préparation de l'introduction de la propriété directe de Thalès, du sinus et de la tangente.

2) Objectifs secondaires :

- Calcul d'aires, gestion de données.
- Illustration de «en fonction de».
- Fabrication de graphiques.
- Réinvestissement de la fonction linéaire.
- Lecture de graphiques.
- Lecture de coefficients de proportionnalité à partir de tableaux ou de graphiques.
- Calcul littéral.
- Réinvestissement de la notion d'échelle.
- Notion de réciproque.

II - Des choix sur les formes de travail et le déroulement

Par rapport à la brochure du suivi scientifique troisième, le déroulement a été modifié pour être plus efficace :

- Le travail est davantage partagé entre le travail en classe et le travail à la maison (un dessin de la cravate agrandie ou réduite est fait et vérifié en classe, l'autre est fait à la maison, par exemple).
- Les remarques, à la fin de l'activité, ne sont plus à faire seulement à partir des graphiques, mais aussi à partir des tableaux de valeurs et des dessins. Ce qui permet de travailler la notion d'agrandissement à partir de plusieurs entrées ; les élèves font des allers et retours entre les dessins, les tableaux et les graphiques pour vérifier, pour confirmer ou pour infirmer leurs conjectures (même forme sur les dessins, points alignés avec l'origine pour les graphiques, obtention exacte des coefficients de proportionnalité à partir des tableaux, lecture rapide de valeurs à partir de graphiques,...).
- Ces remarques sont à faire en groupe sur transparents pour préparer le débat, qui corrigera les erreurs faites, mettra en évidence les visions que

chacun peut préférer...après que les transparents aient été triés et présentés en fonction d'une progression choisie par l'enseignant.

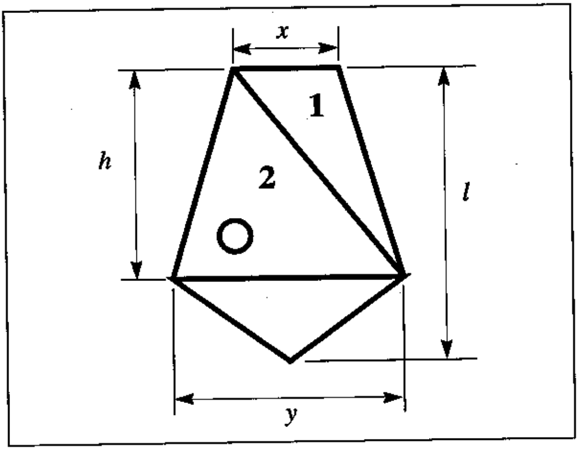
De plus, dans sa première mouture, une première institutionnalisation était plus ou moins faite pendant le bilan de l'activité. Elle est maintenant un temps à part et l'application aux aires de la «propriété k ; k^2» qui était donnée à faire à la maison, est maintenant travaillée en classe pour favoriser l'appropriation.

Ces différentes étapes sont absolument nécessaires aux élèves.

Le prolongement de cette activité pose la conjecture suivante : *« Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ? »* Suite à un travail individuel et à une mise en commun avec leur voisinage, les élèves prennent conscience que l'on peut dire oui pour les triangles. Ce résultat est institutionnalisé et servira à la démonstration de la propriété directe de Thalès : il permettra de déduire que les côtés correspondants de triangles, en configuration de Thalès, sont proportionnels.

III - L'activité : les consignes données aux élèves et le déroulement prévu

Travail maison



Un gros plan est fait sur la cravate d'un présentateur de télévision. Sur l'écran, on ne voit qu'elle, comme sur le schéma ci-contre !

Cette cravate est formée d'un trapèze isocèle et d'un triangle isocèle.

Sur la cravate, il y a un disque (placé où l'on veut dans le triangle **2**) et une rayure qui partage le trapèze isocèle en deux triangles **1** et **2**.

Sur un écran dont la diagonale mesure 50 cm, on a : l = 15 cm ; d = 1 cm (d est le diamètre du disque) ; h = 12,5 cm ; x = 1 cm ; y = 3 cm.

1) Dessine la cravate représentée ci-dessus et seulement la cravate, sur une feuille de papier à dessin.

Tu prendras la feuille dans le sens de la longueur, tu la partageras en trois parties égales, comme sur le schéma ci-contre (pour la suite de l'activité).

maison		maison
1	2	3
	classe	

Tu feras le dessin demandé dans la partie gauche.

2) Calcule l'aire du disque, des triangles 1 et 2, du trapèze, du triangle isocèle et l'aire totale de la cravate.

Travail en classe et/ou à la maison

Première partie

Consigne

A) Travail individuel puis par groupes de deux :

Dessine la cravate sur la feuille de papier à l'emplacement 2, quand la diagonale mesure :

- 60 cm (élève 1)
- 30 cm (élève 2).

(tu feras le dessin non fait en classe, à la maison et à l'emplacement 3).

Auprès du dessin effectué, tu noteras les dimensions obtenues et tu calculeras les mêmes aires que précédemment. Après avoir vérifié tes résultats avec tes voisins, puis auprès du professeur, note les résultats obtenus par ton voisin après qu'il les aient vérifiés puis passe à la question suivante, même si les élèves de ton futur groupe n'ont pas fini.

B) Seul puis par groupes de trois :

1) Représente graphiquement sur du papier millimétré :

a) les dimensions obtenues sur l'écran de :

- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 30 cm (élève 1).
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 2).
- 30 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 3).

b) les aires obtenues sur l'écran de :

- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 30 cm (élève 1).
- 60 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 2).
- 30 cm en fonction des dimensions sur l'écran de 50 cm (élève 3).

(1 cm représente 2 cm^2 sur chacun des axes).

2) Observe les dessins, les tableaux et les graphiques obtenus dans le groupe.

Quelles remarques, quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Notez-les sur transparent pour présenter à la classe.

Déroulement du A

Pour assurer le bon déroulement, le travail de l'enseignant repose sur trois axes :

1) Gestion de la vérification :
- Vérifier les résultats, les arrondis du travail maison.
- Vérifier les dessins du travail maison après le démarrage de l'activité.

2) Gestion de la correction :
- Prévoir sur transparents les dessins et les graphiques pour permettre de voir rapidement les erreurs et éventuellement aux élèves de se corriger, d'analyser leurs erreurs.

3) Gestion du protocole de l'activité :
- Ne donner que la première partie de l'activité (pour ne pas dévoiler l'objectif principal) et la faire lire.
- Présenter le déroulement puis demander ce qu'il y aura à faire dans la partie A (réponse attendue des élèves : beaucoup de calculs répétitifs à gérer par des tableaux).

Sur chacun des dessins, on décide de mettre les dimensions.

Tableau des dimensions
(écrites dans l'ordre des données, pour faciliter les lectures)

écran de	l	d	h	x	y

Tableau des aires
(écrites dans l'ordre des données).

écran de	Aires					
	Disque	Triangle 1	Triangle 2	Trapèze	Tr.Isocèle	Cravate

- *Chaque élève ne fait qu'un dessin et qu'une série de calculs, l'autre dessin se fait à la maison.*

- Les voisins vérifient entre eux leurs résultats et leurs dessins, puis il est fait appel au professeur, s'il y a problème et pour la vérification finale.
- Chacun remplira les tableaux des dimensions et des aires en entier.
- *Ne pas faire de commentaires sur les nombres, sur les dessins pour que, au moment des remarques, calculs, dessins et graphiques puissent être utilisés en aller et retour* (changements de cadre).
- Les élèves qui ont terminé peuvent passer au B.

Aides prévues si nécessaire :

- Sur transparent, le dessin d'un écran de 50 cm de diagonale (diagonale tracée).
- Puis un écran de 30 cm de diagonale pour faire penser à la proportionnalité.
- Puis, s'il y a des problèmes pour les calculs, montrer un écran de 10 cm de diagonale.

<u>Déroulement du B</u>

1) Protocole de travail

Le travail de chacun est différent mais semblable (seules les valeurs changent), ce qui incite au débat dans le groupe et permettra d'avoir un certain nombre de valeurs pour pouvoir conjecturer.

2) Choix des variables

- Les unités à choisir sur les axes ne sont pas précisées pour la première série de graphiques (1 cm pour 1 cm pour chacun des axes), quant à la deuxième série, nous avons fait le choix de donner les unités pour que chaque groupe puisse avancer à son rythme et faciliter la vérification des graphiques (le choix des graduations n'est pas un objectif principal).
- Les diagonales choisies permettent d'avoir d'une part un agrandissement de coefficient 2, ce qui donne un carré facile à repérer (mais cette valeur peut entraîner sur une fausse piste, s'il n'y a pas vérification avec les autres valeurs : 4 est le carré de 2 mais c'est aussi le double de 2) ; puis d'autre part, un agrandissement quelconque et une réduction.

3) Gestion du temps

- S'il y a problème(s), on essaie de le(s) résoudre dans le groupe, sinon on fait appel au professeur.
- Puis les remarques (par rapport au sujet traité) sont élaborées en réfléchissant d'abord seul(e), puis une mise en commun est faite dans le groupe (prévoir un transparent par groupe pour les remarques).

Aide prévue si nécessaire (par élève, par groupe ou en classe entière) :

- Sens de «en fonction de»

- Position dans laquelle on prend le papier millimétré.

Présentation en classe entière des transparents

Chaque groupe présente à la classe son transparent, lentement pour que chacun puisse écouter et prendre des notes sur ce qui lui paraît intéressant (erreurs, bonnes idées,...).

Exploitation

Pendant la phase de mise en commun, penser à deux points :

1 - Un «plus» dans la lecture des graphiques :

- penser qu'on peut utiliser le 10 en abscisse pour trouver le coefficient de proportionnalité : la valeur obtenue peut être plus juste qu'à partir d'une abscisse de 1.

2 - Les résultats essentiels à faire ressortir :

- Les coefficients 2 et 4 obtenus pour les graphiques 60 en fonction de 30 peuvent aider à penser k ; k^2.
- Faire ressortir le(s) tableau(x) des coefficients de proportionnalité des dimensions et des aires pour aider les élèves qui n'auraient pas vu le k ; k^2.
- Faire conjecturer : dans l'agrandissement ou la réduction, d'un objet géométrique, quand les dimensions sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2.
- Penser pour la suite à la conservation des angles.

Deuxième partie

<u>*Consigne*</u>

1 - Prouve le résultat conjecturé pour :

- un carré de côté a
- un rectangle de longueur L et de largeur l
- un disque de rayon r
- un triangle de base b et de hauteur h
- ...

quand ils sont transformés par un agrandissement ou une réduction de coefficient k.

2 - Le résultat obtenu pour des figures particulières étant admis pour toute figure, en déduire la longueur et l'aire totale de la cravate quand la diagonale de l'écran est 45 cm, puis 6,4 cm.

3 - Un dessin technique est à l'échelle 20/1

a) Quelle est l'aire réelle d'une pièce représentée sur le dessin par un rectangle de 3600 mm^2 ?

b) Quelle est l'aire du disque représentant sur le plan une pièce circulaire d'aire réelle 3,5 mm^2 ?

Déroulement

Travail individuel, puis avec le voisin, suivi d'une mise au point en commun.

Question 1 : Généralisation du résultat conjecturé k ; k^2. aux figures de base.

En faisant démontrer le résultat conjecturé pour un carré de côté a, un rectangle de dimensions L et l, un disque de rayon r ... avec un coefficient k (calcul littéral), la généralisation est admise.

Question 2 : Application du résultat à des cravates vues sur d'autres écrans

L'objectif est de faire déduire l'aire et la hauteur de la cravate pour des diagonales données. Cette partie, absolument indispensable, est à faire en classe car les élèves admettent assez facilement le résultat, mais passent difficilement à l'utilisation directe du k^2 pour le calcul d'une aire.

Question 3 : Application du résultat à un problème quelconque : décontextualisation de l'activité.

Nous avons décidé de mettre le mot«échelle» plutôt que le mot coefficient d'agrandissement pour que les élèves puissent faire le lien entre agrandissement-réduction et échelle. Parmi les échelles, nous avons choisi celle d'un agrandissement (les agrandissements sont moins familiers aux élèves que les réductions).

Troisième partie

Consigne

«Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»

Déroulement

- La consigne ci-dessus est donnée à la classe (réflexion individuelle, en petits groupes puis débat).
- On suppose que les élèves ont retrouvé que lorsqu'un dessin A est un agrandissement d'un dessin B, alors les longueurs correspondantes sont proportionnelles et les angles correspondants sont égaux.

IV - Ce qui s'est passé lors de la dernière passation

Première partie

- La fabrication des dessins et des graphiques ne pose problème qu'à quelques élèves.

- Certains élèves ont appliqué le coefficient des longueurs aux aires, mais après discussion dans les groupes, cette solution est évacuée parce qu'elle ne semble pas «marcher» puisque le résultat n'est pas le même en calculant les aires cherchées à partir des dimensions agrandies ou réduites : procédure qui fait l'accord dans les groupes. Le travail de groupe a permis de soulever le problème (d'où la nécessité de faire cette partie en classe). Mais le pourquoi reste à voir.

Quelques remarques provenant d'une classe de 24 élèves. Après l'analyse des transparents d'élèves (voir l'annexe), sur huit groupes :

- Quatre groupes signalent qu'il y a conservation des angles.
- Six groupes parlent de l'alignement de points avec l'origine et l'associent à la proportionnalité entre les longueurs et les a ires considérées.
- Cinq groupes utilisent des tableaux pour leurs explications.
- Quatre groupes trouvent les coefficients exacts pour les longueurs et deux groupes pour les aires.
- Un groupe conclut que le coefficient des aires est le double de celui des longueurs (on passe de deux à quatre).
- Un groupe constate que le graphique des dimensions est plus «abrupte» que celui des aires en faisant remarquer que cela dépend peut-être des graduations.
- Un groupe remarque le k ; k^2.

Un débat s'est alors instauré entre les élèves, à partir de leurs transparents (voir l'annexe) présentés dans un ordre choisi par l'enseignant en fonction des erreurs observées.

Dans le débat, le rôle de l'enseignant a surtout été celui d'arbitre.

Les trois dernières remarques surtout ont été discutées.

La première d'entre elles a été vite contredite. Quant à la suivante, par superposition des transparents, on s'aperçoit que ceci n'est vrai que pour l'écran de 30 en fonction de 50.

Et il a été assez difficile de faire trouver que lorsque k est inférieur à 1, k^2 est inférieur à k.

La classe est arrivée aux conjectures suivantes :

- Dans un agrandissement-réduction, les angles sont conservés, les longueurs et les aires correspondantes sont proportionnelles entre elles. Quand les longueurs sont multipliées par k, les aires correspondantes le sont par k^2.
- Quand k est supérieur à 1, il y a agrandissement et k^2 est supérieur à k.
- Quand k est inférieur à 1, il y a réduction et k^2 est inférieur à k.

Sur le plan méthodologique, **Prudence! Il faut regarder plusieurs cas avant de généraliser une conjecture.**

Deuxième partie

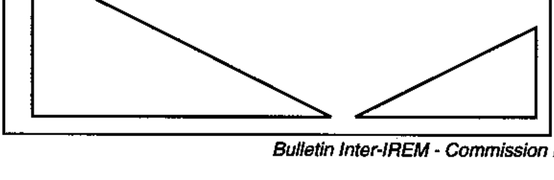
- La démonstration du k ; k^2 pour le carré a été faite en classe et le professeur, voyant qu'elle ne posait pas trop de difficultés, a décidé que la recherche des autres cas (rectangle, triangle, disque,...) se ferait à la maison. La généralisation a ensuite été admise en classe.
- Les application du k ; k^2 posent toujours problème, comme prévu.
- La définition d'une échelle a été rappelée.
- Pour calculer l'aire d'un disque ayant l'aire agrandie et l'échelle, les élèves sont bloqués: «Il leur manque» le rayon. Ils pensent très difficilement à l'utilisation du k ; k^2. La propriété obtenue n'est pas encore opérationnelle. Est-ce dû à la prégnance des formules pour calculer une aire ?

Quant à la question: «Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?», elle a provoqué un débat intéressant, acharné dans les groupes comme en classe entière.

Par exemple, un élève a dit: «En maths, ce n'est pas comme en français. Pour qu'une propriété soit vraie, il faut qu'elle le soit tout le temps».
Le professeur: «Pourquoi dites-vous cela ?»
Des élèves: «On n'est pas d'accord: elle dit que pour les triangles c'est vrai, je sui d'accord avec elle, mais comme pour des rectangles ça peut être faux (dessin à l'appui), donc c'est faux».

Ne trouvant pas de contre exemple pour les triangles, la classe admet que la phrase est vraie pour les triangles, mais qu'en général, A n'est pas un agrandissement ou une réduction de B. La classe est perplexe parce que la démonstration n'est pas faite pour les triangles et peut-être qu'il n'a pas été trouvé de contre-exemple, mais l'enseignant garantit!

Une remarque : nous admettons que deux triangles ayant leurs angles égaux sont tels que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre, même quand il y a eu «retournement», comme dans les triangles ci-dessous...!



Résumé donné à l'issue de l'activité.

AGRANDISSEMENT-RÉDUCTION

I - Reproduction d'un dessin à l'échelle k :

1) **$k > 1$: C'est un agrandissement.**

Exemple : $k = 3$, toutes les longueurs sont multipliées par 3.

2) **$k < 1$: c'est une réduction**

Exemple : $k = \frac{2}{5}$, toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{5}$.

3) **Remarques :**

a) Dans le langage courant, «réduire une figure deux fois» signifie qu'on divise les longueurs par 2 :

$$k = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

b) Dans un agrandissement ou dans une réduction, **les angles sont conservés.**

c) **Deux triangles qui ont leurs angles égaux sont un agrandissement ou une réduction l'un de l'autre.**

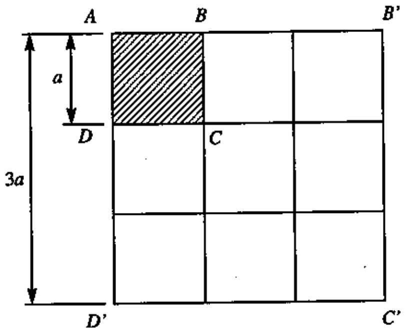
Cette propriété n'est pas forcément vraie pour d'autres figures.

II - Conséquences

1) Sur les aires :

Quand les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2.

Exemple :



	côté	aire
petit carré $ABCD$	a	a^2
gd carré $AB'C'D'$	$3a$	$3a \times 3a = 9a^2$

2) Sur les volumes :

Fiche complétée après l'étude des volumes.

La propriété directe de Thalès

Consigne

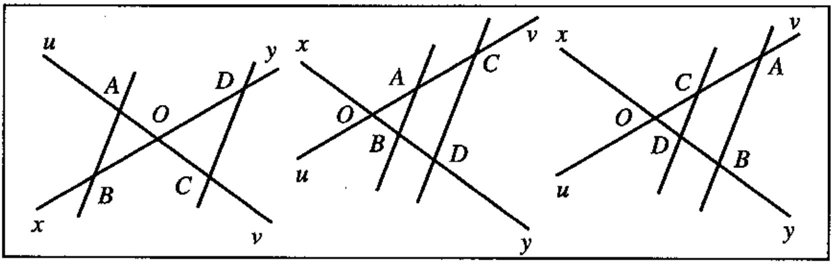
Soit deux droites *(uv)* et *(xy)* qui se coupent en O.
Soit A un point de *(uv)* et B un point de *(xy)*.
Soit *(CD)* une droite parallèle à *(AB)* et telle que C est un point de *(uv)* et D un point de *(xy)*.

- Dessine tous les cas de figures possibles. Compare avec ton voisin.
- Que peux-tu dire des triangles OAB et OCD ?
- Qu'en déduis-tu ?

Déroulement

Après un temps individuel de réflexion, les élèves proposent les trois figures ci-dessous (plus celle du cas particulier où *(CD)* passe par O qui est évacué. Nous ne l'avons pas exclu dans la consigne pour ne pas induire les réponses des élèves).

Se pose alors le problème de ce qu'on entend par « dessine **tous** les cas de figures possibles » qui est confondu avec « **toutes les figures** possibles ».



A la suite de la mise au point faite en classe entière, on note :
Les triangles AOB et COD sont tels que :

- $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (angles opposés par le sommet ou confondus),
- $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$ (angles correspondants ou alternes-internes formés par les parallèles *(AB)* et *(CD)* et la sécante *(AC)*).
- et $\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$ (angles correspondants ou alternes-internes, formés par les parallèles *(AB)* et *(CD)* et la sécante *(BD)*).

Les triangles AOB et COD ont leurs angles égaux, l'un est donc un agrandissement de l'autre, leurs côtés correspondants sont proportionnels, et $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

Il est alors annoncé que ce qui vient d'être démontré est la propriété de Thalès, propriété rédigée ainsi :

Lorsque deux triangles OAB et OCD sont tels que :

$C \in (OA)$,

$D \in (OB)$,

et $(AB)//(CD)$

alors $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$

Remarques :

La propriété de Thalès semble alors apparaître comme une conséquence naturelle de ce qui précède. En particulier, l'erreur classique sur des «petits bouts» ($\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AC}{BD}$) est plus rare.

Par ailleurs, le sinus et la tangente sont introduits comme une application de la propriété de Thalès ou de la propriété sur les côtés de deux triangles rectangles ayant deux angles égaux (après avoir mis en évidence les rapports équivalents obtenus à partir de deux rapports égaux).

Conclusion

Dans les commentaires des programmes, on peut lire sur agrandissement-réduction :

«Dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété : si les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 ; les angles sont conservés».

Au delà de ces compétences exigibles, et pour introduire la propriété de Thalès, il nous a paru important de poser le problème : «Une figure A et une figure B ont leurs angles égaux. La figure A est-elle un agrandissement ou une réduction de la figure B ?»

Ceci permet, dans un premier temps, de mettre en évidence auprès des élèves du collège une réciproque fausse.

Dans un deuxième temps, elle met en avant la spécificité des triangles, où la restriction de la propriété proposée donne une réciproque vraie, et conduit à l'énoncé :

«Quand deux triangles ont leurs angles égaux, l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre».

Une telle propriété admise en cinquième ou au début de la quatrième permettrait d'aborder :

- «La droite des milieux».
- Le conservation du rapport de longueurs de deux côtés d'un triangle dans un agrandissement-réduction.
- L'étude plus particulière des rapports des côtés d'un triangle rectangle : cosinus, sinus et tangente.

Maintenant que nous avons un peu de recul sur les programmes, nous présentons la propriété de Thalès appliquée au triangle comme un cas particulier des différents cas d'agrandissements ou de réductions rencontrés au collège.

Ce choix fait, à la suite des réactions de nos élèves de troisième, s'inscrit dans une continuité qui nous paraît assez naturelle avec ce qui se fait dans les classes précédentes car la proportionnalité, dominante forte du collège, finit par être assez familière à nos élèves.

ANNEXE

Transparents produits par les élèves et présentés dans l'ordre suivant

$\boxed{\text{Tranparent n°1}}$

* - Tous les graphiques sont proportionnels et passent tous par l'origine O.

- la ligne du graphique des aires se rapproche plus de l'ordonnée que de l'abscisse par rapport ~~aux~~ à la ligne du graphique des mêmes dimensions pour un même écran.

- Comme les longueurs sont proportionnelles sur le graphique, elles le sont donc sur le dessin.

* - le coefficient des graphiques pour les dimensions est :

$$\frac{\text{abscisse}}{\text{ordonnée}}$$

- le coefficient des graphiques pour les aires est :

$$\frac{\text{[illegible] totale en abscisse}}{\text{[illegible] totale en ordonnée.}}$$

Transparent n°2

Nous conjecturons, qu'il y a proportionnalité entre les aires et les longueurs puisque sur les graphiques les points sont alignés avec l'origine. Donc il y a agrandissement ou réduction entre les cravates

$\times 0,8$ $\times 1,6$ $\times 2$

écran	50 cm	60 cm	30 cm
I	15 cm	18 cm	9 cm
D	1 cm	1,2 cm	0,6 cm
H	12,5 cm	15 cm	4,5 cm
X	1 cm	1,2 cm	0,6 cm
Y	3 cm	3,6 cm	1,8 cm
Aire disque	0,78 cm²	1,1 cm²	0,28 cm²
Aire triangle 1	6,25 cm²	9 cm²	2,25 cm²
Aire triangle 2	18,75 cm²	24 cm²	6,75 cm²
Aire trapèze	25 cm²	36 cm²	9 cm²
Aire triangle isocèle	3,75 cm²	5,4 cm²	1,35 cm²
Aire totale	28,75 cm²	41,4 cm²	10,35 cm²

lorsqu'il y a agrandissement ou réduction il y a conservation de la mesure des angles

Transparent n°3

Dimensions.

D'après les graphiques, tous les points du graphique, sont sur une même droite et passent par l'origine donc, les dimensions sont proportionnelles entre elles.

D'après le tableau :

L \ G	I	D	H	x	y
50	15	1	12,5	1	3
30	9	0,6	7,5	0,6	1,8
60	18	1,2	15	1,2	3,6

×0,6 ×1,2 ×2

D'une ligne à l'autre, il y a un coefficient de proportionnalité.

D'après les dessins, que ce soit un agrandissement ou une réduction de l'originale, les angles sont conservés.

Aires.

Contrairement aux dimensions les aires ne sont pas proportionnelles entre elles par rapport au tableau, mais par rapport aux graphiques elles sont proportionnelles.

Transparent n°4

. On remarque que : la droite formée par les points

- Sur les graphiques, les points sont alignés et passe par l'origine donc il y a proportionnalité entre les dimensions et également entre les aires.

- Comme il y a proportionnalité, il y a donc agrandissemen et réduction donc la mesure des angles est conservée.

- Le coefficient de proportionnalité entre les aires et les dimensions est différent. Celui des aires (4) est le double de celui des dimensions (2).

Transparent n°5

Tous les points sont alignés et la droite passe par l'origine c'est un point commun de tous les graphiques donc il y a proportionnalité.

Chacune des trois représentations graphiques a un coefficient de proportionnalité différent.

élève 1 :
coefficient × 2
élève 2 :
coefficient × 1,2
élève 3 :
coefficient × 0,6

Pour chaque élève, les coefficients de proportionnalités sont les mêmes pour les dimensions et les aires.

Le graphique des dimensions est plus abrute que celui des aires, mais cela dépend peut-être de la graduation.

Transparent n°6

Nous remarquons que dans tous les graphiques, les points sont aligné. Ce qui veut dire qu'il y a proportionnalité entre les dimension des absisses et les dimension des ordonnés. Il y a aussi proportionnalité entre les aires. En multipliant les dimensions de la première carate par un coefficient de proportionnalité, on trouve les dimension de la 2ème carate et en multipliant les dimensions de la 2ème carate par un 2ème coefficient de proportionnalité on trouve les dimensions de la 3ème carate.

On trouve le coefficient de proportionnalité en divisant la diagonale de l'écran de la 2ème carate par la diagonale du 1er écran

$$\text{ex : } \frac{60}{50} = 1{,}2$$

1,2 est le coefficient de proportionnalité entre la 1ère et la 2ème carate.

$$\text{ex : } \frac{30}{60} = 0{,}5$$

0,5 est le coefficient de proportionnalité entre la 2ème et la 3ème carate.

Comme il y a proportionnalité entre les carats, donc les angles sont égaux.

Transparent n°7

dimensions sur l'écran de 60cm	$\times 2$
" " 30cm	
" " 60cm	$\times 1{,}2$
" " 50 cm	
" " 30 cm	$\times 0{,}6$
" " 50 cm	
aires sur l'écran de 60cm	$\times 4$
" " 30cm	
" " 60cm	$\times 1{,}44$
" " 50cm	
" " 30cm	$\times 0{,}36$
" " 50cm	

Le coefficient de proportionalité entre les dimensions sur l'écran de 60cm et les dimensions sur l'écran de 30cm se vérifie entre les coefficients de proportionalité de 60 et 50 et de 30 et 50 : $\frac{1{,}2}{0{,}6} = 2$

Même chose pour les aires : $\frac{1{,}44}{0{,}36} = 4$.

Les coefficients de proportion des aires sont les carrés des coefficients de proportion des dimensions

$4 = 2^2$

$1{,}44 = 1{,}2^2$

$0{,}36 = 0{,}6^2$

Transparent n°8

Nous remarquons que les dimensions et les aires sont respectivement proportionnelles entre elles car les points sont alignés avec l'origine et il y a un quotient de proportionnalité.

	60 en fonction de 30	60 en fonction de 50	30 en fonction de 50
Dimensions	: 2	: 1,2	: 0,6
Aires	: 4	: 1,44	: 0,36

* les dimensions de 60 divisées par 2 donnent les dimensions de 30.
* les dimensions de 60 divisées par 1,2 donnent les dimensions de 50.
* les dimensions de 30 divisées par 0,6 donnent les dimensions de 50.
* les aires de 60 divisées par 4 donnent les aires de 30.
* les aires de 60 divisées par 1,44 donnent les aires de 50.
* les aires de 30 divisées par 0,36 donnent les aires de 50.

De l'intérêt d'aborder le théorème de Thalès (de 3ème) vu sous son aspect projection dans la continuité du programme de 4ème

Michel Jaffrot
IREM des Pays de la Loire

Introduction

Y a-t-il encore un quelconque intérêt à étudier le théorème de Thalès sous son aspect «projection» ?

Voilà une question difficile. Est-ce un combat d'arrière-garde ?

La mode est-elle passée ?

Une nouvelle mode est-elle arrivée avec le théorème de Thalès vu sous l'aspect agrandissement-réduction ?

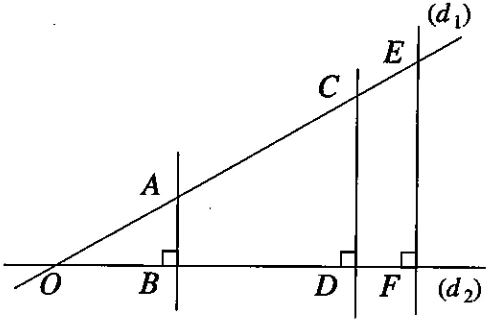
A ces questions, on peut en ajouter une autre : la projection d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) n'est-elle pas une occasion supplémentaire de travailler la proportionnalité ?

C'est dès la quatrième, lors de l'étude de la projection orthogonale et du cosinus, puis, dans la continuité, en troisième avec la projection quelconque.

Certes des difficultés surgissent. Y a-t-il quelque avantage ?

I - De la proportionnalité dans une situation géométrique

En quatrième, l'étude de la projection orthogonale d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) permet de définir le cosinus comme opérateur du tableau de proportionnalité associé.



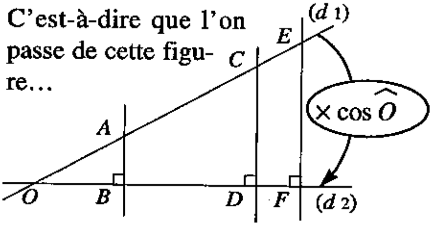
Longueurs sur (d_1)	OA	AC	OC	OE
Longueurs sur (d_2)	OB	BD	OD	OF

Sur la figure, on peut mettre en évidence des triangle rectangles «emboîtés» ayant tous l'angle $\widehat{O}$ en commun.

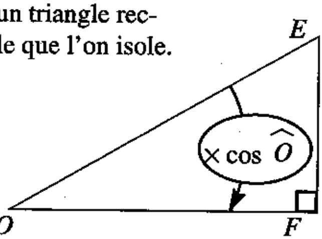
En privilégiant de compléter le tableau de proportionnalité avec exclusivement les côtés des triangles rectangles, le cosinus est défini comme lien entre deux côtés de chacun de ces triangles.

On définit ainsi dans chaque triangle rectangle le cosinus de l'angle $\widehat{O}$.

C'est-à-dire que l'on passe de cette figure...



...à un triangle rectangle que l'on isole.



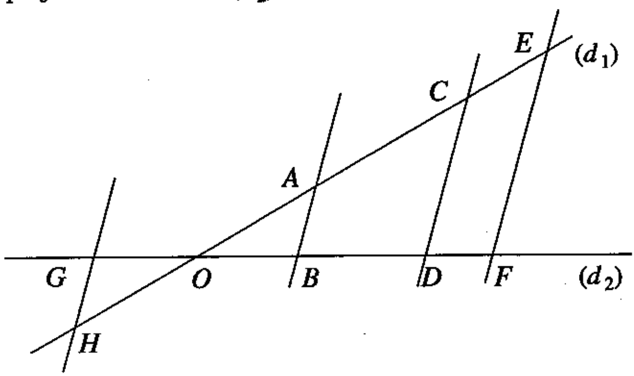
II - Continuité de la quatrième à la troisième

En Troisième, l'étude porte alors sur la projection d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) non nécessairement orthogonale, extension de la projection particulière de quatrième.

Cela, à partir d'une question simple :

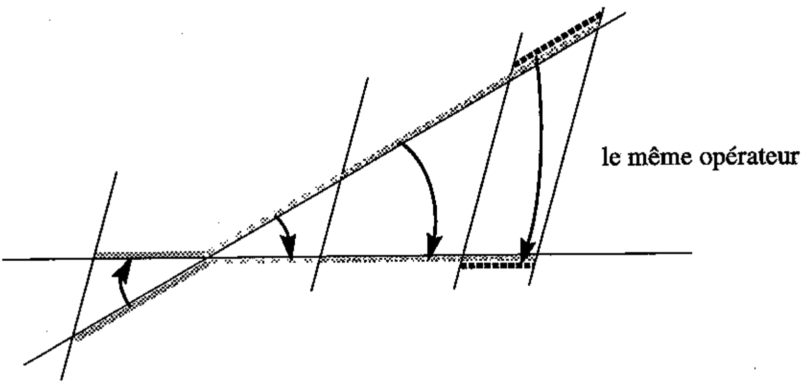
Que se passe-t-il si la direction de la projection de (d_1) sur (d_2) n'est plus orthogonale à (d_2) ?

Comme en quatrième, on obtient un tableau de proportionnalité entre les longueurs des segments portés par la droite (d_1) et les longueurs des segments projetés sur la droite (d_2).



Longueurs sur (d_1)	OA	AC	OC	HE	...
Longueurs sur (d_2)	OB	BD	OD	GF	...

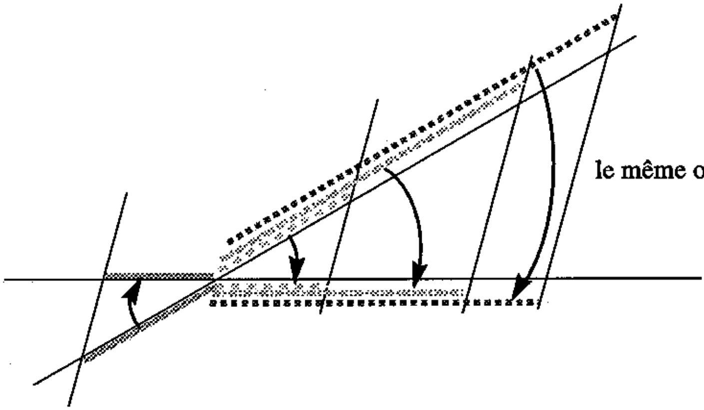
Il y a donc, comme en quatrième, un opérateur-lien entre les longueurs des segments portés par (d_1) et (d_2).



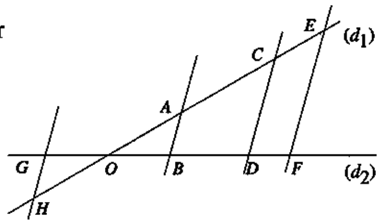
A ce stade, plusieurs pistes sont possibles :

1) Première piste : **en faisant une lecture «projection» de la figure.**
* soit, restreindre la lecture de la figure aux côtés des triangles dits «en situation de Thalès».

Longueurs sur (d_1)	OA	OC	OE	OH	...
Longueurs sur (d_2)	OB	OD	OF	OG	...

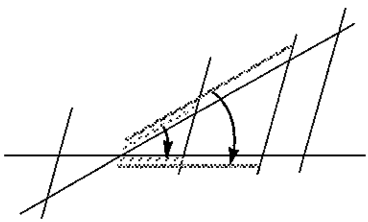


* soit, restreindre encore la figure pour écrire des proportions.



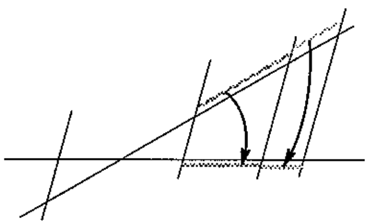
comme par exemple

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$



ou

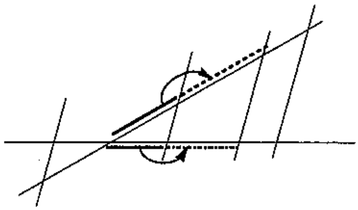
$$\frac{BD}{AC} = \frac{DF}{CE}$$



2) Deuxième piste : **en faisant une lecture «rapport de deux longueurs» sur (d_1) et sur (d_2).**

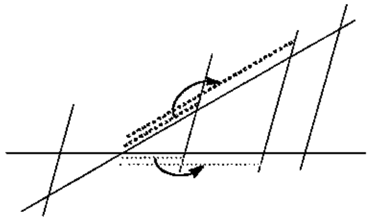
Comme par exemple :

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$



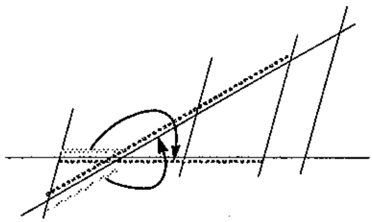
ou

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$



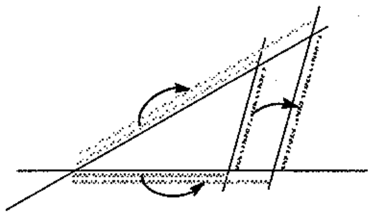
ou

$$\frac{HC}{HO} = \frac{GD}{GO}$$



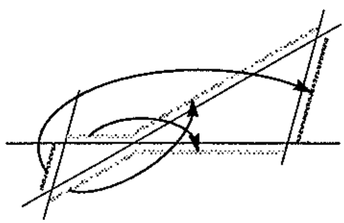
3) Puis, il faudra étendre **dans le cas très particulier de deux triangles «en situation de Thalès»**, la proportion aux longueurs des segments portés par les deux droites parallèles.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$$



ou

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OG} = \frac{CD}{GH}$$



Jusque là, *ce qui est privilégié*, c'est :

- d'une part, la poursuite de *l'étude de la projection* d'une droite (d_1) sur une droite (d_2), de la quatrième à la troisième, du cas particulier au cas général,
- d'autre part, l'étude d'une situation géométrique où des lectures différentes amènent des *situations de proportionnalités* différentes.

III - Mais, faut-il taire les difficultés ?

➞ ***Première difficulté :***

Comment établir cette proportionnalité ?

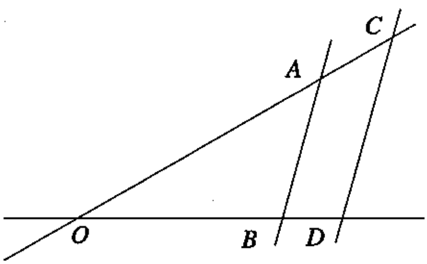
Comment faire admettre que des tableaux élaborés à partir de mesures faites sur des dessins aboutissent à des tableaux de proportionnalité ?

On retrouve ici une difficulté «classique» que l'on rencontre dès que l'on passe d'une lecture sur une figure réelle à la figure idéale.

<table>
<tr><th>figure réelle</th><th>figure idéale</th></tr>
<tr><td>tableau des mesures
<table><tr><td>sur (d_1)</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>sur (d_2)</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>↓ ↓ ↓
écriture des rapports, colonne par colonne
↓ ↓ ↓
les calculs donnent des réponses souvent approchées et différentes</td><td>le tableau est un tableau de proportionnalité
↑
les rapports sont égaux
↑
tous les calculs sont égaux
↑</td></tr>
<tr><td colspan="2">↘ ce passage, il faut l'admettre ↗</td></tr>
</table>

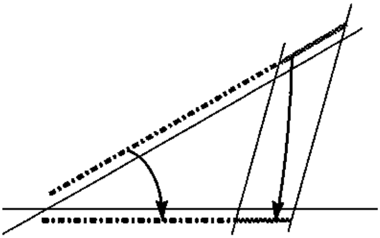
➞ ***Deuxième difficulté***

Gérer les deux types de lecture que les élèves font sur une même figure : lecture «projective» et lecture «rapport de longueurs sur chaque droite» c'est-à-dire, par exemple sur la figure suivante :



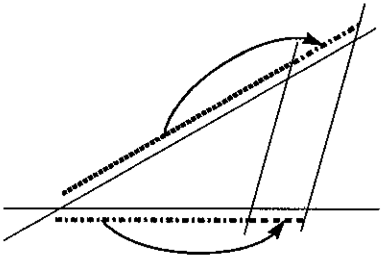
Pour exprimer une relation entre les longueurs *OA*, *AC*, *OB* et *BD*, deux élèves différents peuvent faire des lectures «spontanées» différentes de l'opérateur-lien entre certaines longueurs.

Elève A



$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AC}$$

Elève B



$$\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$

Qu'en est-il du passage d'une proportion à l'autre ?

→ ***Troisième difficulté*** :

Lorsque l'on veut aborder le théorème de Thalès appliqué aux triangles, ce n'est plus le lien entre les longueurs des segments portés par ($d1$) et par ($d2$) qui est visé, mais le lien entre les côtés des deux triangles placés en situation de Thalès.

C'est-à-dire, il faudra passer du tableau de proportionnalité suivant :

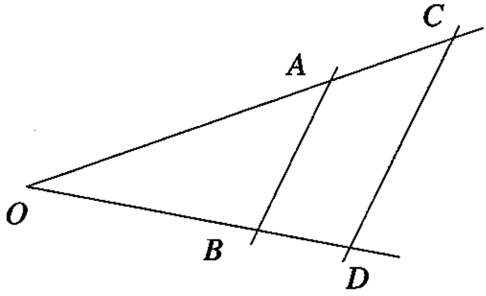
longueurs sur (d_1)	*OA*	*OC*	*AC*	*CE*	*OE*	...
longueurs sur (d_2)	*OB*	*OD*	*BD*	*DF*	*OF*	...

où les longueurs des segments portés par les parallèles n'apparaissent pas, à un nouveau tableau de proportionnalité où ils apparaissent.
Par exemple, pour les deux triangles *OAB* et *OEF* :

côtés du triangle *OAB*	*OA*	*OB*	*AB*
côtés du triangle *OEF*	*OE*	*OF*	*EF*
	côtés portés par la droite (d_1)	côtés portés par la droite (d_2)	côtés portés les deux parallèles

IV - Des avantages ?

1) Lorsque les calculs portent ou utilisent les «petits bouts» (ici BD et AC), les deux lectures sont possibles.

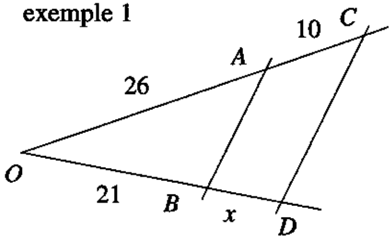


Voici deux exemples :

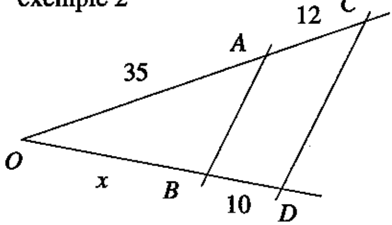
exemple 1
on donne $OA = 26$
$AC = 10$
$OB = 21$
on cherche BD.

exemple 2
on donne $OA = 35$
$AC = 12$
$BD = 10$
on cherche OB.

exemple 1



exemple 2



Dans ces deux cas, le théorème de Thalès appliqué aux triangles oblige à écrire par exemple les équations suivantes :

$$\frac{26}{21} = \frac{36}{21 + x} \qquad\qquad \frac{35}{47} = \frac{x}{x + 10}$$

Quel sens peuvent bien avoir pour l'élève de telles équations ?

Est-ce vraiment nécessaire de poser de telles équations en x ?

La lecture «projection» comme l'autre lecture permettent d'écrire des équations plus simples dont la résolution de nécessite pas de calcul algébrique annexe.

Calcul de BD
avec la lecture «projection»

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{26}{21} = \frac{10}{x}$$

Calcul de OA
avec l'autre lecture

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

$$\frac{35}{12} = \frac{x}{10}$$

Mais le programme actuel ne nous y invite pas... Faut-il continuer à l'interdire ?

2) Lors de l'étude de l'agrandissement-réduction, la même situation géométrique resurgit, ceci dans le cas particulier de deux triangles disposés «en situation de Thalès».

Il y a proportionnalité entre les longueurs des côtés correspondants des deux triangles ainsi disposés.

C'est à nouveau le théorème de Thalès appliqué aux triangles.

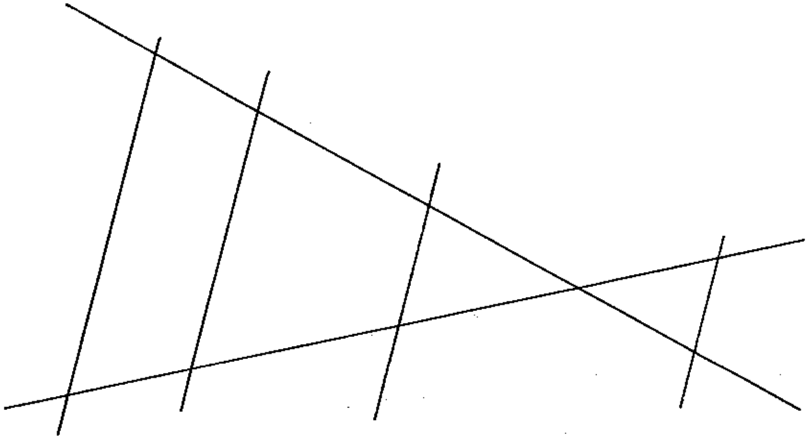
C'est ainsi l'occasion de montrer deux approches différentes de cette situation géométrique particulière, l'approche projective et l'approche agrandissement-réduction, sans en occulter aucune, l'une renforçant l'autre.

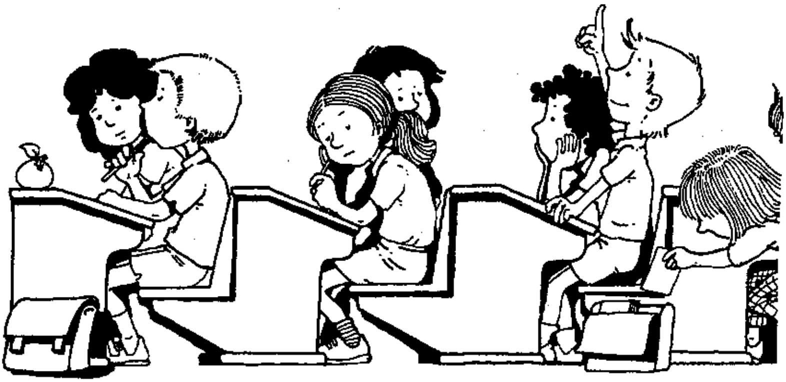
V - Quelques questions pour finir

- Faut-il vraiment abandonner l'aspect projectif du théorème de Thalès ?
- Dans ce cas, est-ce oui ou non un handicap pour les futurs élèves de lycée ?
- Que disent les programmes ? du collège ? du lycée ?
- Faut-il proposer plusieurs théorèmes suivant la situation rencontrée ?

Ce texte, écrit entre novembre 1994 et janvier 1995, est une réflexion encore en chantier sur le Théorème de Thalès actuellement au programme ; elle est certainement incomplète et inachevée.

Merci aux collègues de l'IREM des Pays de la Loire et du collège René Bernier à St Sébastien sur Loire pour leur aide à travers discussions et critiques... En particulier, je remercie Yves Thomas que je vous invite à lire quelques pages plus loin.





A propos de THALES en Troisième

A propos de l'énonce de Thalès en 3ème

Anne-Marie MONFRONT

IREM de PARIS VII

Dans quels champs de connaissance la propriété de Thalès telle qu'elle est énoncée dans les programmes de 3ème peut-elle s'inscrire ?

L'optique «projection» et l'optique «agrandissement» sont toutes deux respectueuses des programmes et des commentaires de la classe de 3ème (voir annexe 1). A la lumière de notre pratique des nouveaux programmes durant plusieurs années, nous vous présentons notre point de vue sur ces deux optiques et sur les raisons qui nous ont conduits, après avoir expérimenté la première, à préférer présenter la deuxième dans nos classes. Nous vous proposons ensuite une série d'activités et d'exercices mettant en oeuvre le point de vue que nous avons choisi.

Deux optiques

Optique 1 : Pratique de la projection

La méthode consiste à dégager la proportionnalité des longueurs des segments d'une droite et de leurs projetés sur une autre droite dans une direction donnée.

Cette pratique est en continuité avec les activités de 4ème (voir annexe 2). La propriété peut être dégagée expérimentalement dans le même esprit qu'en 4ème dans le cas de la projection orthogonale qui conduit à la définition du cosinus (voir figures 1 et 2).

Elle est parfois démontrée à partir de ce cas particulier admis en 4ème (voir figure 3). Ceci ne nous semble pas intéressant d'un point de vue mathématique : pourquoi déduire une propriété affine de notions métriques ? Et, d'un point de vue pédagogique, que la projection soit orthogonale n'influe pas sur l'expérimentation et la compréhension de la conservation du rapport : dans la représentation des élèves, le cas particulier de l'orthogonalité n'est pas un préalable permettant une généralisation.

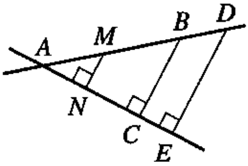


Figure 1

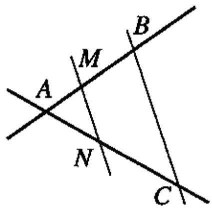


Figure 2

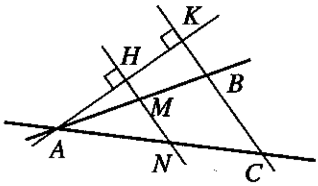


Figure 3

Avec ces projections, on obtient un tableau de proportionnalité.

AM	MB	AB
AN	NC	AC

$\times k$

Le fait que l'on doive privilégier le point d'intersection des deux droites pour se limiter au cas du triangle semble artificiel, les segments MB et NC étant ignorés.

Pour obtenir la première égalité proposée dans le programme, on utilise une propriété de la proportionnalité :

AM	AB
AN	AC

$\times k$ donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Il y a changement de point de vue entre la projection des points A,M,B en A,N,C établie d'abord et la correspondance des points du triangle ABC avec les points correspondants du triangle AMN. La notation dans la colonne de droite des commentaires de 3ème (B' sur (AB), C' sur (AC)) met en lumière le point de vue "triangle", différent du point de vue "projection" proposé en colonne de gauche. Ce changement est absolument nécessaire pour établir la propriété utilisant les troisièmes côtés de ces triangles.

Cette propriété peut être établie expérimentalement ou démontrée à l'aide d'une autre projection, mais dans tous les cas, elle ne peut être directement liée à la projection de points d'une droite sur une autre droite.

L'optique-projection plus proche de la lettre des programmes a été présentée les deux premières années dans nos classes. Mais les inconvénients et les ruptures que nous venons de signaler nous ont incités à envisager un autre point de vue.

Optique 2 : Agrandissement ou Réduction de figures planes

Une présentation en continuité avec les propriétés d'agrandissement-réduction de figures nous semble tout à fait appropriée au contenu de « la propriété de Thalès appliquée au triangle » énoncée dans le programme de troisième.

Des notions sur agrandissement - réduction sont à approfondir en classe de troisième ; elles ont été rencontrées en cinquième avec la notion d'échelle et dès la sixième où les travaux de reproduction portent sur « la réalisation d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin »(voir annexe 3; rappelons que « conforme » signifie « qui conserve les angles »).

De nombreux exercices de reproduction de figures et de calculs de longueurs ont utilisé implicitement les théorèmes de similitude des triangles faisant intervenir un ou deux angles. Les « figures-clés » de Thalès peuvent être considérées comme des cas particuliers intéressants de deux triangles ayant les mêmes angles et donc agrandis l'un de l'autre. La proportionnalité entre les côtés correspondants qui en découle éclaire l'énoncé proposé par le programme.

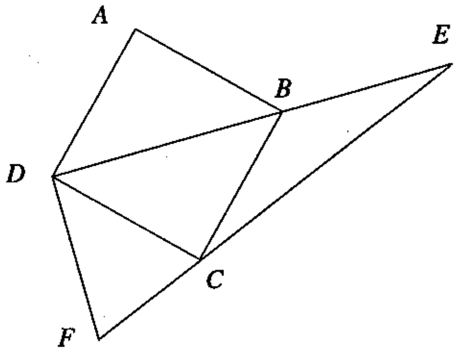
Cette approche nous semble plus près des représentations des élèves ; elle leur permet une appropriation réelle de la propriété et son intégration dans un champ plus vaste de connaissances.

Mise en œuvre d'activités dans l'optique d'agrandissement

Première activité : Pour agrandir ou réduire des triangles

Objectif

Cette activité permet d'utiliser et de préciser des théorèmes-outils mis en actes depuis la cinquième dans l'agrandissement ou la réduction de triangles (voir bilan de la première activité). Ces propriétés seront réinvesties dans les deux activités suivantes : vers l'énoncé de Thalès et vers sa réciproque.



Consigne

ABCD est un carré de 3 cm de côté. Les points *D,B,E* sont alignés dans cet ordre et *BE* = 3 cm. Le point *F* est l'intersection de la perpendiculaire à *(DB)* passant par *D* et de *(CE)*. En utilisant les données, sans faire de mesures supplémentaires :

a) Reproduire cette figure à l'échelle 2 (ou 2/3) .

b) Reproduire uniquement les triangles BEC et DFC à l'échelle 2 (ou 2/3).

Remarques sur le déroulement

La figure complète est agrandie ou réduite sans difficulté en utilisant la conservation de l'orthogonalité et la proportionnalité des mesures correspondantes.

Pour éviter une reproduction des triangles demandés à l'aide de la règle et du compas à partir de la figure complète obtenue, on relève celle-ci dès qu'elle est terminée.

Pour la reproduction des triangles, les élèves remarquent que si les mesures des trois côtés étaient connues, on pourrait calculer les trois nouvelles mesures et construire le triangle demandé. C'est l'impossibilité d'utiliser cette méthode familière qui mène à calculer des angles : d'une part l'angle $\widehat{CBE}$, d'autre part l'angle $\widehat{CDF}$ et l'angle $\widehat{ECB}$ pour obtenir l'angle $\widehat{DCF}$ Après ces calculs, les élèves utilisent des procédures que l'on explicite collectivement (voir bilan). Ces procédures ont pu être rencontrées dans les classes antérieures, comme dans l'exercice proposé en annexe 4.

La validation de la construction des triangles se fait par superposition sur la figure complète à la même échelle.

Bilan

On énonce :

1-Dans un agrandissement ou une réduction, toutes les longueurs de la première figure sont multipliées par un même nombre pour obtenir les longueurs correspondantes de la deuxième figure (les longueurs de l'une sont proportionnelles aux longueurs correspondantes de l'autre) ; les angles sont conservés.

2- Pour agrandir ou réduire un triangle, il suffit d'utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

a) Tracer trois côtés de longueurs proportionnelles à celles des côtés du triangle donné.

b) Tracer un angle égal à l'un des angles du triangle donné et les côtés adjacents de longueurs proportionnelles à celles des côtés correspondants du triangle donné.
(construction du triangle *BCE*).

c) Tracer deux angles égaux à deux angles du triangle donné, en respectant l'échelle choisie pour construire le côté adjacent aux deux angles.
(construction du triangle *DCF*).

Deuxième activité : vers l'énoncé de Thalès

Objectif

Construire les figures-clés de Thalès.

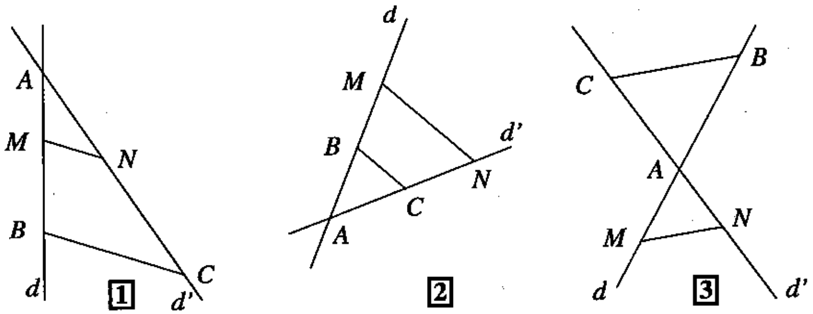
Démontrer que, dans chacun des cas, les deux triangles sont agrandis ou réduits l'un de l'autre.

Cette démonstration est l'occasion d'un réinvestissement des propriétés énoncées dans l'activité précédente et des propriétés relatives aux angles formés par deux droites parallèles et une sécante.

Consigne

Soit deux droites *d* et *d'* sécantes en *A*, placer les points *B* et *M* sur *d*, *C* et *N* sur *d'* tels que les droites *(MN)* et *(BC)* soient parallèles. Faire plusieurs figures en plaçant les points *A, M, B* dans des ordres différents.

Comparer les triangles *AMN* et *ABC*.



Remarques sur le déroulement de l'activité

Contrairement à nos attentes, la figure 3 a été mieux « vue » que les deux autres où les triangles *AMN* et *ABC* sont placés dans la même position mais en inclusion et donc moins séparés et moins visibles pour plusieurs élèves. Des coloriages superposés ont levé en grande partie les obstacles, des découpages et superpositions pourraient aider aussi.

Après cette étape de mise en évidence des triangles *ABC* et *ABM*, la réponse « ils ont la même forme ; ils sont agrandis ou réduits l'un de l'autre » est immédiate. La recherche en groupe permet de trouver les justifications.

Bilan

On retient les trois figures ci-dessus. Sur chacune, on conjecture que le triangle *AMN* est un agrandissement ou une réduction du triangle *ABC*.

La démonstration utilise les angles formés par deux parallèles coupées par une sécante, correspondants dans les cas 1 et 2, alternes-internes dans le cas 3, puis le « théorème en acte » n° 2c énoncé dans la première activité. On en conclut que les longueurs des côtés du triangle *AMN* sont proportionnelles à celles des côtés du triangle *ABC*, d'où l'énoncé des égalités à retenir.

Troisième activité : vers la Réciproque

On donne la consigne suivante : sur les droites *d* et *d'* se coupant en *A*, placer les points *M* et *B* sur *d*, *N* et *C* sur *d'*, de façon que les longueurs *AM* et *AN* soient proportionnelles aux longueurs *AB* et *AC*. Comparer les triangles *AMN* et *ABC*.

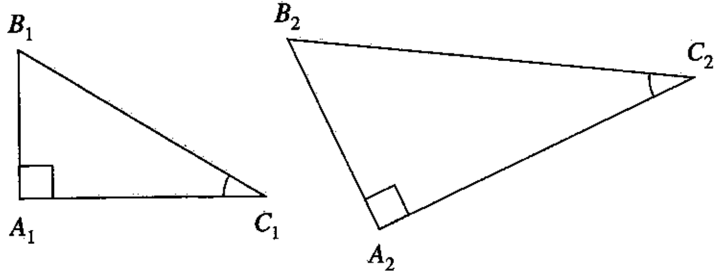
Il y a nécessité de placer les points *A,M,B* et *A,N,C* dans le même ordre pour que les triangles *AMN* et *ABC* aient un angle égal en *A*. On utilise alors le « théorème en acte » n° 2b pour conclure que le triangle *AMN* est un agrandissement ou une réduction du triangle *ABC*. On en conclut que les angles correspondants des triangles sont égaux ce qui permet de déduire le parallélisme des droites *(MN)* et *(BC)*.

Introduction d'autres notions dans la même optique

La première activité sur les agrandissements peut servir de point de départ pour l'étude de l'effet d'un agrandissement sur les longueurs et les aires.

Elle peut aussi permettre l'introduction des fonctions trigonométriques dans le triangle rectangle. Les triangles rectangles ayant un angle égal sont des agrandissements ou des réductions les uns des autres (voir bilan de la première activité n° 2c), ce qui entraîne les trois rapports constants entre les côtés de ces triangles rectangles que l'on nomme cosinus, sinus, tangente de l'angle considéré.

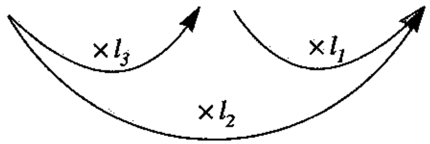
Le fait que ces rapports sont indépendants des triangles considérés peut ainsi être nettement mis en lumière, ce qui est primordial pour une acquisition correcte des notions trigonométriques.



k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction du triangle $A_1B_1C_1$ au triangle $A_2B_2C_2$.

triangle	côté opposé à $\widehat{C}$	côté adjacent à $\widehat{C}$	hypoténuse
$A_1B_1C_1$	A_1B_1	A_1C_1	B_1C_1
$A_2B_2C_2$	A_2B_2	A_2C_2	B_2C_2

$\times k$



$$l_1 = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} = \cos \widehat{C} \qquad l_2 = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \sin \widehat{C}$$

$$l_3 = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \tan \widehat{C}$$

Sur le long terme du collège, la notion d'agrandissement-réduction est une ligne directrice qui permet d'aborder de nombreux contenus dont l'énoncé de Thalès appliqué au triangle et les relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Elle est tout à fait accessible aux élèves du collège et permet de construire des savoirs dans une continuité favorable à leur appropriation.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Programme de troisième

1.a.*Enoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction*

Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque : cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points.

- Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès relatif au triangle :

($\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$, B' est sur la droite *(AB)*, C' est sur la droite *(AC)*).

et la réciproque.

- Connaître et utiliser dans la même situation la propriété :

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

Dans le cadre du programme, le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement.

L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découvertes et de conjecture autant que de démonstration.

ANNEXE 2 : Programme de quatrième

1 - *Dans le plan, projection sur une droite selon une direction.*

- *Conservation du milieu par projection ; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété.*
- *Projection orthogonale ; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale.*

- Quant à la proportionnalité des longueurs entre segments et projetés, elle sera expérimentée dans le seul cas de la projection orthogonale et conduira à la définition du cosinus d'un angle aigu comme coefficient de proportionnalité.

ANNEXE 3 :

Programme de sixième

Les travaux de reproduction porteront sur la réalisation :

- soit d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin.

Programme de cinquième

- Calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin.

Programme de troisième

c- *Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes.*

Les activités, notamment en classe de Cinquième, de dessin et de reproduction à une échelle donnée, ont mis en œuvre le principe de la multiplication des longueurs initiales par un même coefficient.

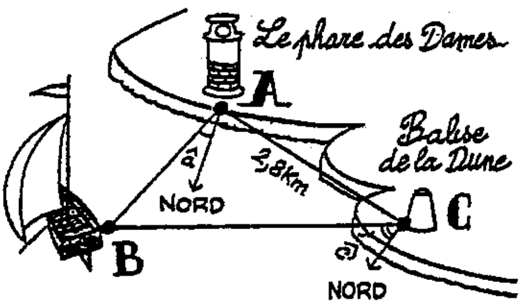
Ces activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.

ANNEXE 4

Pythagore $5^{ème}$ - Hatier.

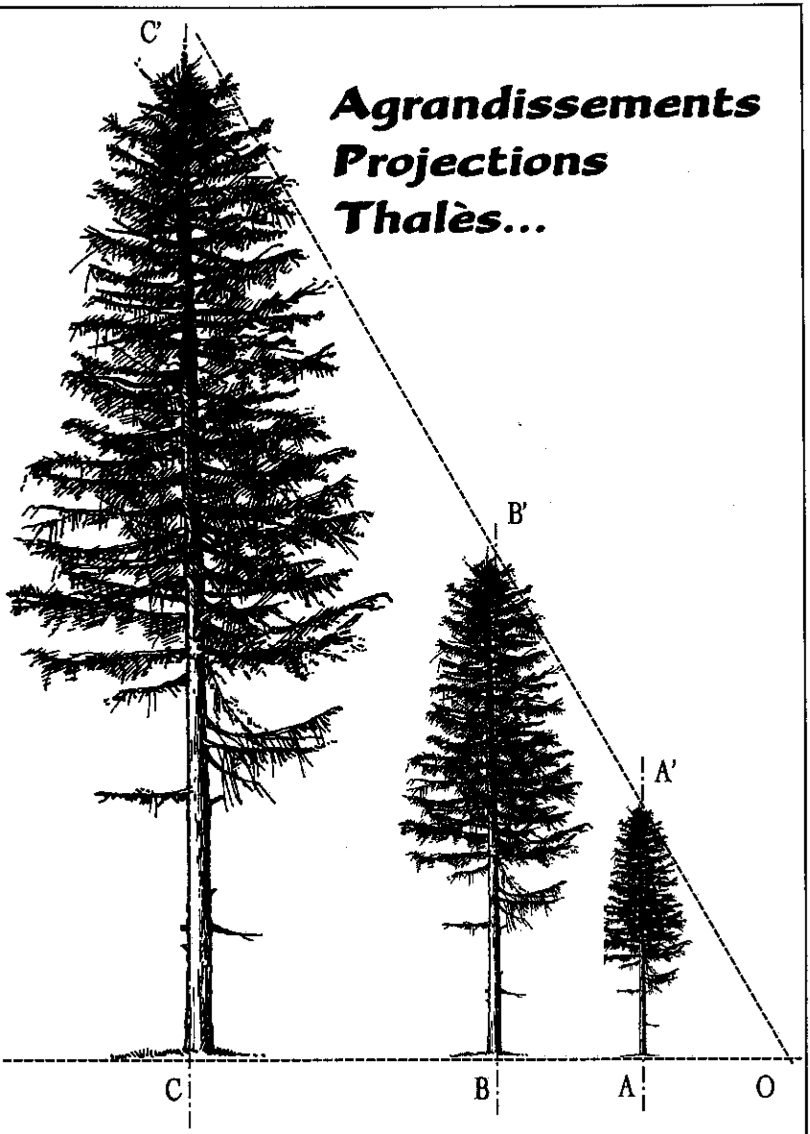
68. *Au large du phare des Dames*

Un bateau B croise au large du phare des Dames situé en A.



Pour connaître sa position le capitaine du bateau mesure les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ (voir dessin) :
mes($\widehat{a}$) = 24° ; mes($\widehat{c}$) = 56°.
La distance entre la Balise C et le phare des Dames A est lue sur la carte marine : 2,8 km ; ainsi que la mesure de l'angle entre (AC) et la direction du Nord : 90°.
Construire un plan précis à l'échelle 1:50 000.
Mesurer et en déduire la distance entre le bateau B et le phare des Dames A.

Agrandissements
Projections
Thalès...



Programme à revoir...

Agrandissements, Projections, Thalès...
Programme à revoir

Serge BETTON
IREM de LYON

Une enquête que j'avais faite, il y a quelques années, pour le groupe «liaison troisième-seconde» de l'IREM de Lyon, m'avait permis de voir que dans une même académie, on trouvait au moins sept versions distinctes de l'énoncé du théorème de Thalès en classe de troisième ou au début de seconde.

Les nouveaux programmes de collège ne permettent plus une telle variété de présentations, le langage vectoriel ou l'utilisation de mesures algébriques ne sont plus possibles. C'est un progrès pour le passage du collège au lycée. Mes élèves de troisième, comme de seconde, utilisent plus facilement ce théorème. Mais il reste des difficultés.

Je ne veux pas parler ici des difficultés dans les démonstrations ou encore de la capacité de l'élève à réinvestir un théorème que l'on vient de «voir» dans un exercice nouveau. Je me place plutôt dans l'histoire de la construction des connaissances au collège. Cette histoire me semble, à travers les programmes actuels, trop complexe. L'améliorer doit aussi aider à résoudre ces difficultés.

Voici donc une proposition d'aménagement qui, me semble-t-il, améliorerait la cohérence et la continuité des apprentissages sans alourdir le programme.

Il s'agit de privilégier le point de vue similitude en introduisant, dès la cinquième, la notion de triangles semblables, ce qui permettrait d'amener le théorème de Thalès (réduit aux configurations «triangles» actuelles) en classe de quatrième. Le théorème des milieux apparaît alors pour ce qu'il est, un simple cas particulier. Ma proposition n'utilise plus la notion de projection. Ceci, en plus d'un allégement de programme, supprime, à mon avis, un obstacle didactique dans l'acquisition des connaissances au collège.

I - Les triangles semblables en cinquième

Je voudrais montrer ici comment l'on peut, par un ajout assez naturel dans cette classe, mieux utiliser le programme de cinquième actuel pour faire évoluer ensuite ceux de quatrième et de troisième.

Partons du programme actuel de cinquième. On y trouve les capacités exigibles suivantes :

Tracer un triangle connaissant :
- Les longueurs des trois côtés ;
- Les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces côtés ;
- La longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.

Sans entrer dans le détail d'une activité en petits groupes avec échange de messages, voici le résumé d'un travail possible avec les élèves pour atteindre les connaissances visées.

Les élèves sont en groupes de 2 ou 3.

La consigne est la suivante :

> *«Dessiner un triangle sur une feuille. Vous pouvez en mesurer les trois côtés et les trois angles. Ecrire ensuite un message comportant le* ***minimum*** *de renseignements possibles pour qu'un autre groupe puisse dessiner avec ce minimum de renseignements un triangle identique au votre».*

Le professeur échange les messages entre chaque groupe.

Un bilan des propositions et des résultats obtenus permet de mettre en évidence que : *«Dans tous les cas, on a besoin d'au moins une longueur. Trois angles ne sont pas suffisants pour caractériser un triangle».*

C'est à partir de là que je propose de prolonger les observations et de poser la question : *«Que peut-on dire de deux triangles qui ont des angles égaux ?»*

Ils ont bien sûr la même forme. De tels triangles s'appellent des **triangles semblables** !

Ce qui nous conduit au seul ajout nécessaire pour la classe de cinquième.

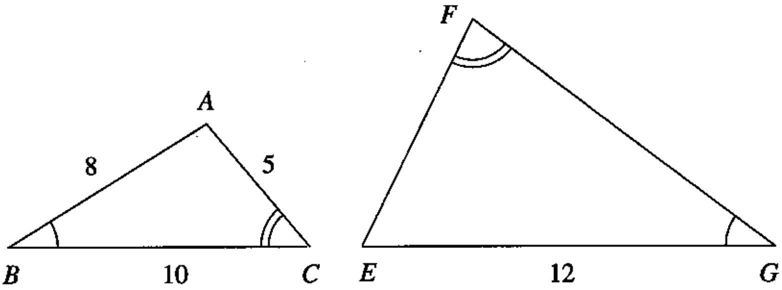
Théorème :

> **Si deux triangles ont leurs angles égaux, alors leurs côtés ont des longueurs proportionnelles.**

(L'utilisation d'un logiciel tel que Cabri-Géomètre peut aussi aider à la mise en place de cette propriété).

Ce résultat peut être réinvesti dans des activités intéressantes pour l'apprentissage de la déduction :

Exemple 1



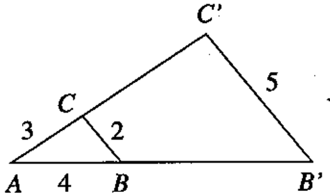
Dessin de Michel *Dessin de Pierre*

Trouve les dimensions manquantes sur le dessin de Pierre.

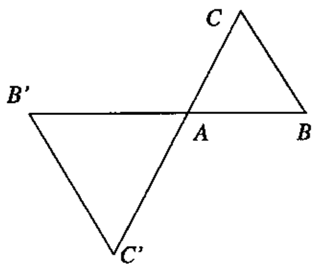
Un objectif ici est d'apprendre à reconnaître les côtés correspondants.

Ce serait aussi l'occasion de réinvestir les notions d'angles alternes-internes et d'angles correspondants qui sont actuellement au programme de cinquième.

Exemple 2



Sachant que (BC) est parallèle à (B'C'), en utilisant les longueurs indiquées sur le dessin, calcule AB' et AC'.

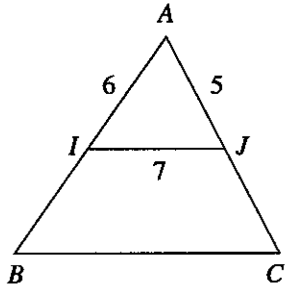


Idem avec la configuration ci-contre.

Voici un dernier exercice et une proposition de rédaction de sa solution :

Exemple 3

On sait que I est le milieu de [AB] et (IJ) est parallèle à (BC). En utilisant les longueurs indiquées sur le dessin, calcule AB, AC et BC. Quelle remarque peux-tu faire?



Solution possible :

On sait que I est le milieu de $[AB]$. Or, $AI = 6$, donc $AB = 12$.

On sait que $(IJ)//(BC)$. Les angles $\widehat{I}$ et $\widehat{B}$ sont donc correspondants.

TH: Deux angles correspondants sont égaux, donc $\widehat{I} = \widehat{B}$

De même, on démontre que $\widehat{J} = \widehat{C}$.

Les triangle AIJ et ABC ont leurs angles égaux.

TH: Si deux triangles ont leurs angles égaux, alors leurs côtés sont proportionnels.

Comme $AB = 2AI$ alors $AC = 2AJ = 10$ et $BC = 2IJ = 14$.

Remarque : $J \in [AC]$ et $AC = 2AJ$ donc J milieu de $[AC]$.

Aucun théorème supplémentaire ne serait à introduire au niveau de cette classe.

II - Le théorème de Thalès en quatrième

Avec ce seul ajout, en classe de cinquième, on pourrait alors introduire, dès la quatrième, le théorème de Thalès sous la forme suivante :

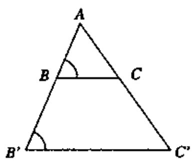
Théorème 1

A, B, B' étant alignés

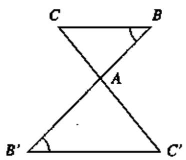
A, C, C' étant alignés

Si *(BC)//(B'C')*

alors $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BC}{BC'}$.



Cas 1



Cas 2

La démonstration impose cependant d'envisager deux cas de figure :

Dans le cas 1, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{B'}$ sont correspondants, donc égaux, ainsi que $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$. Dans le cas 2, les angles sont alternes-internes. Dans les deux cas, les triangles ABC et $AB'C'$ ont leurs angles égaux et d'après le théorème admis en cinquième, leurs côtés sont proportionnels. Il suffit alors de traduire le tableau de proportionnalité :

AB	AC	BC
AB'	AC'	$B'C'$

en rapports égaux, ce qui est une activité du cadre numérique de la classe de quatrième.

L'énoncé de ce théorème 1 introduit tout de suite les rapports des trois côtés : ce n'est plus le théorème de Thalès ! Je propose d'ailleurs de réserver ce nom à la classe de seconde, pour la forme vectorielle :

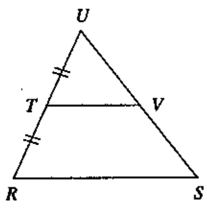
Si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$.

Ce théorème 1 est une bonne continuité entre les classes de cinquième et de quatrième. C'est le théorème de «Thalès homothétie», et comme le dit Jean-Claude DUPERRET (cf. l'article *Pour un Thalès dynamique*), l'utilisation du mot «homothétie» au collège ne gêne pas si on reste raisonnable. On peut parler, par exemple, de «situation de triangles homothétiques» afin de la distinguer de «situation de triangles semblables». Cependant, contrairement à Jean-Claude DUPERRET, ma proposition conduit logiquement à l'introduction de «Thalès projection» **après** le «Thalès homothétie» ; mais j'accepte le débat...

Le théorème 2 suivant apparaît bien alors comme un cas particulier du théorème 1. Ce qui est plus logique et moins perturbant pour les élèves que de le faire apparaître comme une application de la conservation du milieu par projection, comme le propose le programme actuel.

Théorème 2 :

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté, qui est parallèle à un deuxième côté, coupe le troisième en son milieu.



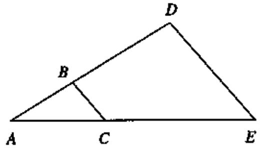
Cas particulier du théorème précédent. (On a de plus $TV = RS/2$).

La réciproque du théorème 1 pose toujours le problème de l'ordre respectif des points. On pourrait, comme on le fait actuellement, admettre cette réciproque, en la mettant en place au cours d'activités. Je propose par exemple l'énoncé suivant :

Théorème 3

A, B, D étant alignés, et *A, C, E* étant alignés dans le même ordre,

Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ alors *(BC)//(DE)*



On peut énoncer le cas particulier :

Théorème 4 : (Théorème des milieux)

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

III - Et la projection ?

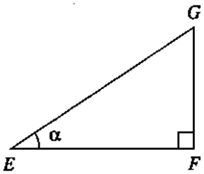
Les modifications ci-dessus tendent à éliminer des programmes la notion de projection.

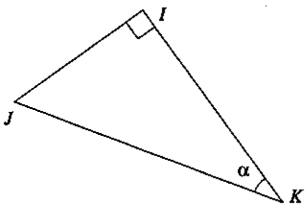
Peut-on s'en passer complètement ?

Voici quelques propositions :

1) L'introduction du **cosinus**, par exemple, est une bonne occasion de réinvestir le résultat admis en cinquième, sans utiliser les projections :

Etant donné un angle α (de mesure α en degrés!), tous les triangles rectangles possédant un angle aigu de même mesure, sont semblables, ils ont leurs angles égaux.



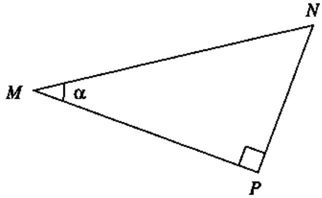


On sait, depuis la classe de cinquième, que ces triangles ont leurs côtés proportionnels, donc :

$$\frac{EF}{IK} = \frac{EG}{JK} \text{ d'où (programme de } 4^{\text{ème}}\text{) } \frac{EF}{EG} = \frac{IK}{JK}.$$

et pour tout autre triangle rectangle *MNP* ayant les mêmes angles (par exemple $\widehat{M} = \alpha$) alors :

$$\frac{EF}{EG} = \frac{MP}{MN}$$



Ce rapport constant caractérise l'angle α et se nomme cosinus α.

2) La notion de projection est utilisée actuellement pour un autre point du programme de quatrième :

«Les coordonnées du milieu d'un segment»

Voici une proposition qui permet de s'en passer :

a) Si l'on présente le problème avec le dessin suivant :

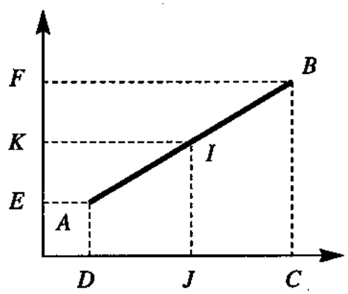
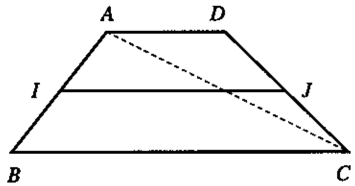


Figure 1

Il suffit de préparer cette étude par l'exercice ci-dessous :

Dans un trapèze *ABCD* de bases [*AD*] et [*BC*], démontrer que si *I* et le milieu de [*AB*] alors la parallèle à *(AD)* passant par *I* coupe [*DC*] en son milieu *J*.



La démonstration utilise deux fois le théorème 2 du II ci-dessus, dans les triangles *ABC*, puis *ACD*. Il suffit ensuite d'utiliser ce résultat dans les trapèzes *ABCD* et *ABFE* de la figure 1.

b) Mais si l'on présente le problème avec le dessin suivant :

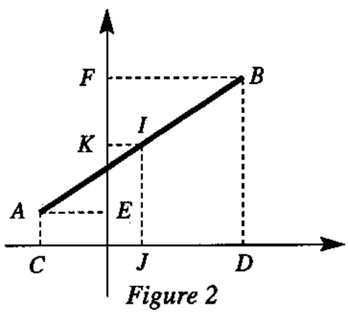
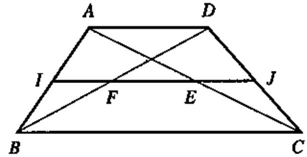


Figure 2

Les segments [*AB*] et [*EF*] sont les diagonales du trapèze *AEBF*. Donc, il faut préparer cette situation par l'exercice ci-dessous :

Montrer que dans un trapèze *ABCD* de bases [*AD*] et [*BC*], les milieux des côtés non parallèles et des diagonales sont alignés sur une parallèle aux bases.



Les hypothèses sont ici *I, F, E, J* milieux respectifs de [*AB*], [*BD*], [*CA*] et [*CD*]. Dans le triangle *ABC*, d'après le théorème des milieux, *(IF)//(AD)* et donc *(IF)//(BC)*. Dans le triangle *ABC*, on a aussi *(IE)//(BC)*. On en déduit *I, E, F* alignés. On démontre de même que *F, E, J* sont alignés. Les quatre points sont bien alignés sur une parallèle aux bases.

Revenons à la figure 2 : si I est le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[EF]$, d'après ce qui précède, la droite (IK) est parallèle à (FB) et (AE), donc au premier axe du repère. L'ordonnée de I est bien l'abscisse de K, milieu de $[EF]$, sur le deuxième axe.

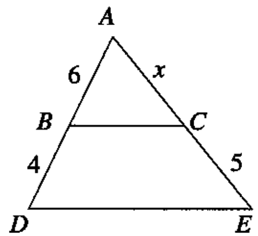
Au prix ici d'une activité un peu lourde, on peut se passer encore des projections.

3) Une dernière remarque :

L'expression : *«H est le* ***projeté orthogonal*** *de A sur (d)»* est plus rapide que *«La perpendiculaire à (d) passant par A coupe cette droite en h»* ou *«H est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A»*. Mais, est-elle plus facile pour nos élèves ?

IV - Le théorème de Thalès en troisième

Ce sera l'occasion d'introduire un peu de projection et de régler le problème des «petits bouts» dont parle Jean-Claude Duperret et qu'il faut bien que je remercie pour son excellent article qui me permet aujourd'hui de compléter le mien.



Les «petits bouts», ce sont les segments $[BD]$ et $[CE]$ de la figure ci-contre.

Pour l'instant, d'après le théorème 1, «Thalès homothétie», on peut écrire l'équation $\frac{x}{x+5} = \frac{6}{10}$ qui a les mêmes solutions que $10x = 6x + 30$, soit $4x = 30$. Si un élève me propose $\frac{x}{5} = \frac{6}{4}$, bravo, je ne vais surtout pas interdire cette équation équivalente aussi à $4x = 30$. Nous constaterons au contraire que $4x = 30$ est aussi équivalente à $\frac{x}{6} = \frac{5}{4}$ ou encore $\frac{x}{6} = \frac{x+5}{10}$. Après un complément de travail où l'on aura l'occasion de se tromper avec $\frac{x}{5} = \frac{BC}{DE}$, je pourrai énoncer le théorème de «Thalès projection» qui me permet aussi du rapport de projection k de (AB) sur (AC) : $k = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$.

La projection arrive en son temps au moment où elle est utile pour répondre à un questionnement d'élève. Je ne pense pas d'ailleurs qu'il soit nécessaire d'aller plus loin au collège. C'est en seconde, comme je le dis plus haut, et pour la forme vectorielle, que l'on pourra reparler de projection.

On trouvera d'autres pistes de travail sur les deux aspects de Thalès dans l'article de Jean-Claude DUPERRET.

Je voudrais, par contre, rappeler qu'en seconde j'utilise toujours avec profit, pour l'introduction de l'homothétie, la situation de l'IREM de Lyon décrite page 209 dans le Bulletin Inter Irem *«Maths en Seconde : Énoncés et scénarios»* (Personnellement, j'interdis l'usage de la règle graduée).

IV - Des programmes alourdis ?

Je ne pense pas alourdir ainsi le programme de quatrième puisqu'il est « soulagé » de tout ce qui concerne les projections. Il ne faudrait pas, bien sûr, transférer en quatrième tout ce qui se fait actuellement en troisième à propos du théorème de Thalès.

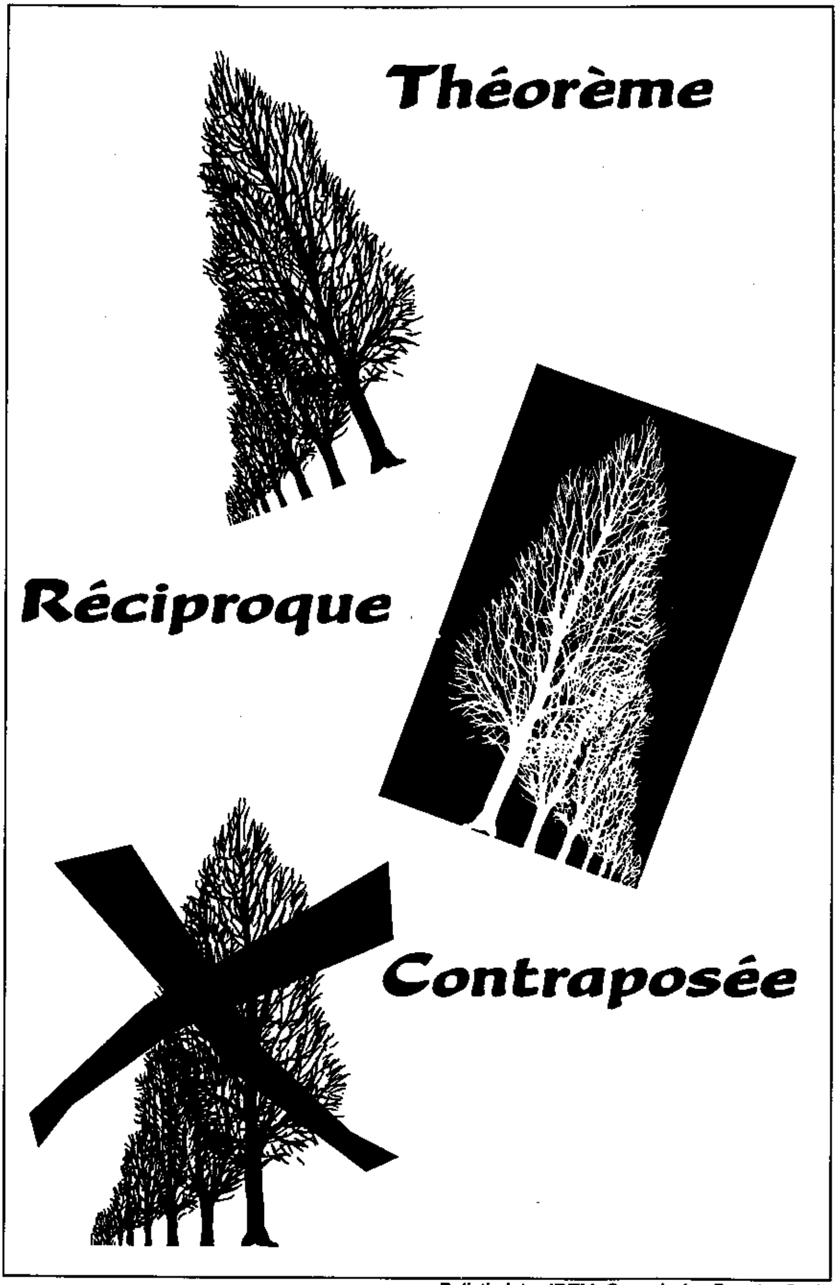
Le programme de troisième ne nécessite plus une introduction au «Théorème de Thalès», mais ce sont les problèmes posés qui permettent de le compléter dans son aspect projection. Il est aussi réinvesti dans les plans de l'espace.

Le sinus et la tangente d'un angle aigu pourraient, de la même façon, se présenter dans la continuité de ce qui a été fait en classe de quatrième pour le cosinus.

Le chapitre Agrandissement-réduction serait bien un prolongement des activités de la classe de cinquième, comme le souhaite déjà le programme actuel. Pour deux triangles semblables, l'un est un agrandissement de l'autre.

En conclusion, je voudrais rappeler que j'ai beaucoup défendu les programmes actuels du collège et que je les trouve bons. Mais, proposer des évolutions à partir des observations faites dans mes classes de collège, mais aussi de seconde, me semble nécessaire. Il existe d'autres points des programmes actuels sur lesquels on peut réfléchir.

C'est l'un des rôles des IREM que de réfléchir et de proposer ces évolutions.


Théorème
Réciproque
Contraposée

Contraposée et réciproque

René MULET-MARQUIS
IREM de LYON

Faut-il, pour des élèves de collège, distinguer l'usage de la réciproque d'une propriété (De Pythagore, de Thalès) de celui de sa contraposée ?

La question ci-dessus, proposée comme thème de travail aux membres de la commission premier cycle a suscité des réactions fortes (y compris à l'extérieur de la commission). Pour certains, engager un tel débat est presque un scandale : que reste-t-il à enseigner si on renonce à ces distinctions ? Pour d'autres, que les premiers qualifieraient de laxistes, ce n'est peut-être pas une priorité. Pour d'autres, enfin, la difficulté à faire entrer les élèves dans ces subtilités est telle que n'ayant pas le sentiment de pouvoir enseigner avec profit ces notions ils préfèrent éviter de les aborder.

1) Introduction

Prenons un instant le regard d'un collègue de bonne volonté (comme nous le sommes tous ...) qui souhaite se forger une conviction. Il peut consulter les programmes de collège : la notion de contraposée n'y figure pas. Il va ensuite feuilleter les manuels scolaires : il cherchera en général en vain l'énoncé explicite de la contraposée de propriétés étudiées, en tout cas dans la partie connaissance ou savoir des manuels.

Si parfois elle est évoquée, c'est avec une grande discrétion... Mieux, sous le titre *Réciproque*, dans plusieurs ouvrages, on trouve des exercices relevant de la contraposée.

Enfin si notre professeur corrige le Brevet, il constate que, dès qu'un élève marque sur sa copie « d'après Pythagore » sans énoncer la propriété, sa réciproque ou leur contraposée, le barème l'invite, en général, à attribuer tout ou partie des points.

En résumé, les programmes, les manuels, les consignes de correction du brevet, montrent un engagement modéré de leurs auteurs au sujet de l'initiation à l'usage de la contraposée, qui peut laisser perplexe notre collègue.

Arrivé à ce stade de ses investigations, un professeur éprouve sans doute le besoin d'un retour aux sources. Il lui faut se remémorer quelques éléments de logique. (Précisons qu'il ne s'agit pas d'enseigner ces éléments tels quels aux élèves...).

2) L'implication

L'implication simple

L'implication P $\Rightarrow$ Q est ***fausse*** uniquement si : P vrai Q faux (1)

Elle est ***vraie*** dans tous les autres cas :

$$\begin{cases} \text{P vrai Q vrai} & (2) \\ \text{P faux Q vrai} & (3) \\ \text{P faux Q faux} & (4) \end{cases}$$

La réciproque de P $\Rightarrow$ Q c'est l'implication Q $\Rightarrow$ P.

Quelques remarques :

A - Savoir que P $\Rightarrow$ Q est vrai ne *donne aucun renseignement sur la vérité de P ni sur celle de Q.*

Exemple : OR = 13 cm, OL = 5 cm, LR = 12 cm. Le triangle ORL est-il rectangle ?

Si $OL^2 + LR^2 = RO^2$ alors
le triangle est rectangle en L.
Donc le triangle est rectangle en L.

B - Savoir que P vrai et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (2). C'est la situation usuelle de déduction. On peut alors affirmer que Q est vrai.

$OR^2 = 13^2$ $\quad$ $OL^2 + LR^2 = 5^2 + 12^2$

$= 169$ $\quad$ $= 25 + 144$

$= 169$

Propriété : Si $OR^2 = OL^2 + LR^2$ alors le triangle ORL est rectangle en L

Conclusion : Le triangle ORL est rectangle en L

C - Savoir que P faux et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (3) ou le cas (4). Nous ne savons rien de la vérité de Q. (Beaucoup d'élèves, dans ce cas pensent qu'ils peuvent conclure que Q est faux).

$LR^2 = 12^2$ | $RO^2 + LO^2 = 13^2 + 5^2$

$= 144$ | $= 169 + 25 = 194$

Démonstration : Si $RO^2 + LO^2 = LR^2$ alors le triangle ORL est rectangle en L

Conclusion Le triangle ORL n'est pas rectangle en L car $RO^2 + LO^2$ n'est pas égal à LR^2

D - Savoir que Q est faux et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (4). On peut alors affirmer que P est faux.

Un raisonnement tel que :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ (non Q)

De plus : si ABC est un triangle rectangle en A
alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (P $\Rightarrow$ Q)

Donc ABC n'est pas un triangle rectangle en A (non P)

est parfaitement cohérent du point de vue logique. Il risque d'être assez troublant pour un élève en cours d' apprentissage à la recherche et à la rédaction de démonstration, ce qui peut faire penser à utiliser la contraposée.

3) La contraposée

La contraposée

La contraposée de P $\Rightarrow$ Q c'est l'implication (non Q) $\Rightarrow$ (non P).

Elle est fausse uniquement dans le cas où
(non Q) vrai et (non P) faux
donc Q faux et P vrai (c'est la même chose que (1)).

Elle est vraie dans tous les autre cas.

L'implication P $\Rightarrow$ Q et sa contraposée, (non Q) $\Rightarrow$ (non P) sont équivalentes.

L'exemple ci-dessus devient :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ (non Q)
de plus : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors
le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
(non Q) $\Rightarrow$ (non P).

Donc ABC n'est pas un triangle rectangle en A. (non P)

On retrouve le schéma déductif usuel.

On a présenté plus haut l'implication simple.

En pratique, on utilise souvent en mathématique l'implication généralisée :

L'implication généralisée

Dans un référentiel E
$\forall x, x \in$ E $\qquad$ $P(x) \Rightarrow Q(x)$
Pour être ***vraie***, une telle implication doit être vérifiée quel que soit x appartenant à E.
Elle est fausse dès qu'elle n'est pas vérifiée pour un élément x.

Pour comprendre un tel énoncé (qui ne lui est pas donné sous la forme formalisée ci-dessus) l'élève doit repérer ce qu'est P, ce qu'est Q, ce que sont les objets x et quel est le référentiel E, ce référentiel étant souvent implicite, ainsi que le quel que soit. Il doit aussi admettre les critères de validité ou de non validité de ces énoncés.

Les propriétés données aux élèves dans les cours de géométrie relèvent de l'implication généralisée. Par exemple :

Dans l'ensemble T des triangles du plan	E
Quel que soit le triangle ABC appartenant à T	$\forall x, x \in$ E
Si $AB^2+AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A	$P(x) \Rightarrow Q(x)$

4) Reformuler la question de départ

Muni des éléments de logique qui précèdent, il nous faut revenir à la question de départ. Faut-il pour les élèves de collège distinguer l'usage de la réciproque (de Pythagore, de Thalès) de celui de la contraposée ? Cette question semble plus abordable en la reformulant en une double interrogation :

(1) Faut-il pour les élèves de collège distinguer l'usage de la réciproque de celui de la contraposée ?

(2) Pythagore et Thalès sont-ils le bon champ de travail pour opérer cette distinction ?

La formulation de la première question peut faire croire qu'il s'agit simplement de former les élèves à faire un choix entre deux possibilités. En fait, du point de vue de l'apprenant si on l'initie à l'usage de la contraposée, la situation est beaucoup plus complexe. Après avoir repéré que, par exemple, Pythagore intervient dans la résolution d'un problème, il doit faire un choix entre quatre propriétés (directe, réciproque et leur contraposée) dont deux ne sont en général pas données explicitement dans le cours.

Pour des élèves en cours d'initiation au raisonnement déductif cela semble une difficulté déjà importante qui peut devenir insurmontable dans le cas de propriétés à la formulation complexe comme celle de Thalès.

Laisser à la charge de l'élève l'écriture de la contraposée des propriétés semble dépasser les objectifs du collège. Si l'on veut qu'il distingue l'usage des diverses propriétés étudiées (dont leur contraposée et leur réciproque) il semble nécessaire qu'elles soient données explicitement.

5) Pythagore , réciproque et contraposée

Venons-en à la deuxième question :

Le raisonnement :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

De plus, si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle est rectangle en A.

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

est un raisonnement faux assez fréquent chez les élèves (On peut remplacer le si....alors....par la contraposée de sa réciproque pour qu'il devienne juste).

Faire percevoir aux élèves qu'il est faux se heurte à de gros écueils. Tout d'abord, il conduit à un résultat juste, d'autre part **aucune des lignes écrites prises isolément ne peut être mise en défaut !**

Dans le domaine numérique, un élève peut admettre qu'un calcul est faux, bien qu'il conduise à un résultat juste, quand on lui fait observer des erreurs qui se compensent. En revanche admettre qu'un raisonnement est faux bien qu'aucune des lignes qui le composent ne soit contestable est extrêmement difficile.

Chaque fois que l'on tente de faire distinguer réciproque et contraposée au sujet de propriétés qui sont des équivalences, on se heurte aux difficultés ci-dessus .

Si l'on souhaite distinguer réciproque et contraposée il semble utile de travailler avec des propriétés pour lesquelles la réciproque est fausse.

L'usage de la réciproque à la place de la contraposée peut plus facilement être mis en défaut puisque la propriété utilisée est alors fausse.

Par exemple, pour la propriété :

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

La contraposée :

Si les diagonales d'un quadrilatère ne sont pas perpendiculaires alors ce n'est pas un losange.

se distingue de la réciproque :

Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange,

puisque cette dernière est fausse et qu'un contre-exemple s'exhibe facilement.

Pour en revenir au théorème de Pythagore on peut considérer que c'est une propriété caractéristique des triangles rectangles, comme il existe une propriété caractéristique des triangles équilatéraux. Est-il justifié d'avoir des exigences de rédaction différentes dans l'utilisation de l'une ou de l'autre ?

6) Thalès , réciproque et contraposée

Il nous reste à aborder le théorème de Thalès. Le programme du collège hésite entre un point de vue "projection" et un point de vue "triangle". On retrouve cette hésitation dans les manuels qui proposent parfois plusieurs formulations pour ne pas privilégier l'un des deux points de vue.

La réciproque du théorème de Thalès, telle qu'elle est énoncée dans la plupart des manuels de troisième, possède une particularité pour le moins surprenante : ce n'est pas en général la réciproque du théorème direct ! (laquelle est fausse au demeurant).

Version 1

Théorème de Thalès

Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

M soit sur la droite (AB)

N soit sur la droite (AC)

$(MN)//(BC)$

alors : $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$.

Réciproque

Si, dans un triangle ,

la place du point M sur (AB) par rapport à A et B est la même que celle du point N sur (AC) par rapport à A et C,

et $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$

alors : $(MN)//(BC)$.

On trouve par exemple dans la conclusion du théorème direct Version 1 l'égalité de trois rapports. Les prémisses de la réciproque ne contiennent que l'égalité de deux rapports. De plus les prémisses de la réciproque précisent la place respective de M et N par rapport à A et B, d'une part, et A et C, d'autre part, ce qui n'est pas fait dans la conclusion du théorème direct.

Version 2

Théorème de Thalès

ABC est un triangle. B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC).

Si les droites $(B'C')$ et (BC) sont parallèles, alors : $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$

Réciproque :

Si, dans un triangle ABC, deux points B' et C' occupent des positions relatives analogues sur les droites (AB) et (AC)

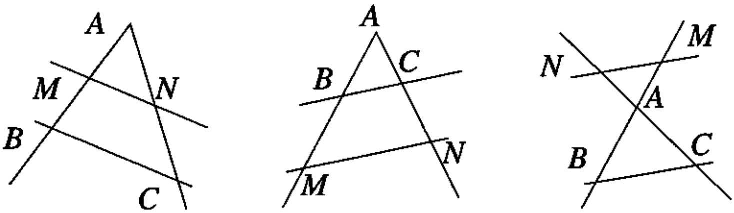
et

si $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$,

alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

Dans la Version 2, une certaine " symétrie " est rétablie en supprimant le troisième rapport , mais comme pour la Version 1 la "position analogue des points" figurant dans la réciproque vient rompre cette symétrie .

Version 3



Théorème de Thalès

Dans les trois cas de figures ci-dessus,
si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

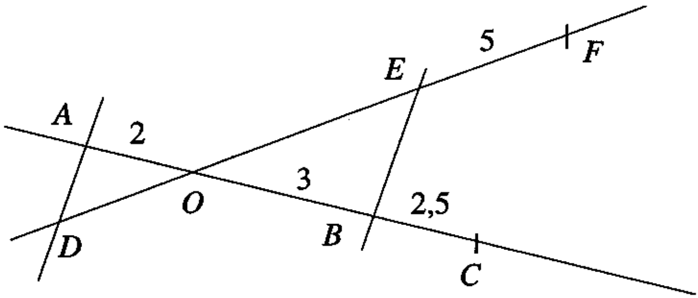
Réciproque

Dans les trois cas de figures ci-dessus,

si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$,

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

La Version 3 en s'appuyant explicitement sur l'observation du dessin («Dans les trois cas de figure ci-dessus») évacue les questions d'ordre et d'alignement. La propriété réciproque énoncée ressemble bien, au troisième rapport près, à la réciproque de la propriété de Thalès. Cette formulation a l'avantage de la simplicité. Elle a l'inconvénient de conduire à lire sur le dessin les alignements ou l'ordre des points ce qui semble en contradiction avec l'initiation à la démonstration en géométrie menée au collège.



Exercice (extrait des épreuves du Brevet de Nantes 1994)

Sur la figure ci-dessus, les droites *(AD)* et *(BE)* sont parallèles.

a) Calculer *OD* et *AD*,

b) Les droites *(EB)* et *(CF)* sont-elles parallèles ? Justifier.

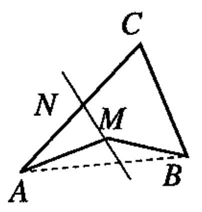
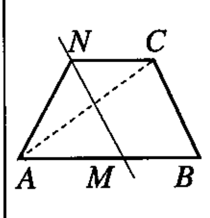
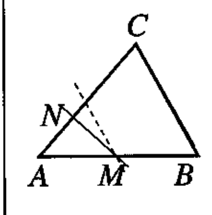
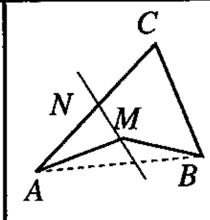
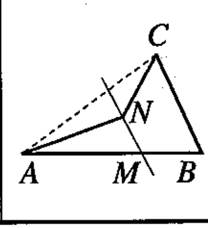
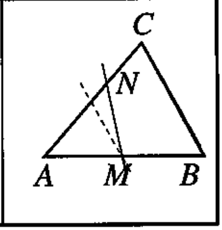
Choisir la Version 1 ou la Version 2 ne permet pas d'échapper obligatoirement à ce problème. En effet dans la plupart des manuels, et ce quelle que soit la formulation utilisée, on trouve des exercices où comme dans celui reproduit ci-dessus l'alignement n'est pas précisé dans le texte et doit être lu sur le dessin. Par analogie avec la notion de «Théorème élève» proposée par A.Bouvier on peut y voir le fonctionnement d'un «Théorème maître» qui peut s'énoncer: *«Quant on travaille sur Thalès, il est licite de lire sur la figure les alignements mais pas le parallélisme»*.

Tentons d'écrire la contraposée du théorème de Thalès Version 1 :

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$

alors $M \notin (AB)$ ou $N \notin (AC)$ ou les droites *(MN)* et *(BC)* ne sont pas parallèles .

Voici quelques figures illustrant cette propriété :

<table>
<tr><th></th><th>$M \notin (AB)$</th><th>$N \notin (AC)$</th><th>(MN) et (BC) ne sont pas parallèles</th></tr>
<tr><td>$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Telle quelle cette contraposée n'est guère utilisable. Elle est loin de l'idée usuelle associée à la contraposée où une inégalité de rapports entraîne le non parallélisme de deux droites.

Pour la Version 2, la contraposée devient :

> *ABC* est un triangle, *B'* est sur la droite *(AB)*, *C'* est sur la droite *(AC)*.
>
> Si $\frac{AB'}{AB} \neq \frac{AC'}{AC}$,
>
> alors les droites *(B'C')* et *(BC)* ne sont pas parallèles.

Cette formulation est utilisable et correspond à l'usage habituel de la contraposée.

Enfin, pour la Version 3 :

> Dans les trois cas de figure ci-dessus :
>
> si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AM}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$,
>
> alors les deux droites *(BC)* et *(MN)* ne sont pas parallèles.

On retrouve les problèmes évoqués pour le théorème (lecture sur la figure des alignements).

7) Conclusion

Arrivés au terme de cet article, il nous faut tenter d'apporter une conclusion :

D'une part, il ne nous semble pas déraisonnable d'amorcer au collège un travail sur la distinction des notions de réciproque et de contraposée. Traditionnellement Pythagore et Thalès sont des supports privilégiés pour l'apprentissage de la démonstration : ils ne semblent pas être le champ de travail approprié pour distinguer réciproque et contraposée. Sans doute faut il chercher d'autres supports en géométrie, mais aussi en algèbre.

Quel que soit le support, des conditions semblent devoir être remplies :

- Il est souhaitable que les énoncés soient donnés explicitement.
- Il est souhaitable de travailler avec des énoncés qui ne soient pas uniquement des équivalences (voir ce qui est dit plus haut pour Pythagore).
- Il est souhaitable d'utiliser des propriétés pour lesquelles on écrive une véritable réciproque (voir ce qui est dit plus haut pour Thalès).

D'autre part, compte-tenu des pratiques et des formulations très variées des enseignants au sujet de Thalès, il nous semble qu'évaluer des élèves sur ce thème au Brevet des Collèges doit être fait avec la plus grande prudence. En particulier, on peut s'interroger sur la pertinence de questions faisant appel à une contraposée.

Remarques et notes personnelles

Thalès en Europe ?...

Le Théorème de Thalès : comment est-il enseigné en Europe ?

Hélène DERUAZ et Nicole KOGEJ
Cité scolaire internationale de Lyon

Le groupe «Europe» travaille à l'IREM de Lyon et réunit des collègues enseignant pour la plupart, en collège ou lycée internationaux.Nous accueillons de nombreux élèves étrangers, en particulier européens, c'est pourquoi nous nous intéressons à l'étude comparée de l'enseignement des mathématiques dans différents pays.

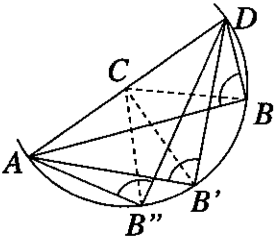
Le cas du théorème de Thalès montre une diversité assez grande dans les approches, les énoncés et les types d'exercices, et peut expliquer certaines difficultés d'adaptation spécifiques rencontrées par nos élèves étrangers.

L'analyse qui suit concerne quatre pays d'Europe (ALLEMAGNE, GRANDE-BRETAGNE, ITALIE et ESPAGNE), et a été menée à partir de manuels de mathématiques, mais aussi enrichie par des commentaires ou des réflexions de certains de nos élèves.

Nous avons choisi d'y faire figurer des énoncés d'exercices, qui nous ont paru assez représentatifs des exercices proposés dans ces manuels, ou qui sont peut-être moins posés en France sous cette forme, ce qui peut nous permettre de faire évoluer nos «stocks» d'exercices traditionnels.

En annexe, un extrait du *«Lexique de Mathématiques»* de Nicole KOGEJ, regroupant le vocabulaire relatif à ce chapitre . (Ce lexique est publié chez ALEAS EDITEUR 15, quai Lassagne 69001 LYON).

1) EN ALLEMAGNE :



Le « théorème de Thalès » existe, mais c'est un tout autre théorème qu'en France ! Il s'agit du théorème sur les triangles rectangles dont l'hypoténuse est diamètre d'un cercle :

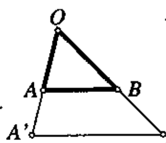
« Jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter ».

Ce qui correspond à notre "théorème de Thalès" se nomme en allemand *« die Strahlensâtze »* (« théorème des faisceaux de droites concourantes »). Il est étudié en neuvième année (équivalent de notre Troisième), préparé par le théorème des milieux dans un triangle, et par des exercices de partage de segments en *n* parties égales.

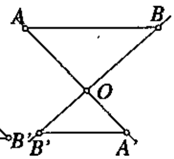
S1 Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf einer Gerade wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf irgend einer andern (fig. 32. 4 und 5).

$\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$; $\overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$

S1 gilt auch, wenn man *Geraden* durch *Strahlen* ersetzt.



32.4



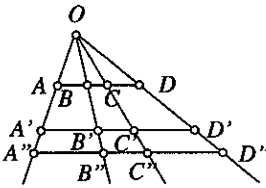
32.5

S1 Si un faisceau de droites concourantes est coupé par deux parallèles, alors le rapport des longueurs des segments formés sur l'une des droites est égal au rapport des longueurs des segments correspondants sur n'importe quelle autre droite du faisceau. : $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$; $\overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$

(remarque : $\overline{OA}$ désigne la *longueur* du segment [*OA*]).

S1 s'applique aussi en remplaçant « droites concourantes » par « demi-droites de même origine »

S2 (deuxième théorème) : énoncé analogue, mais concernant les segments parallèles [AB] et [A'B'] : $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$



S3 (troisième théorème) : variante avec plus de deux droites ou demi-droites concourantes en O :

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$

La réciproque est indiquée, avec une mise en garde sur les hypothèses nécessaires à bien vérifier.

Dans les manuels de mathématiques, des démonstrations sont proposées pour les théorèmes cités ; mais j'ignore si, en classe, les professeurs les expliquent.

Sont ensuite développées de très nombreuses applications : théorème dans l'espace, partage de segments et divisions harmoniques, utilisations du théorème en technologie et pour diverses mesures concrètes (compas d'agrandissement/réduction, pantographe, échelles de cartes, etc...), forme *vectorielle* du théorème, et enfin l'étude des composées d'homothéties, et du groupe des homothéties/translations ; cependant les manuels semblent beaucoup plus ambitieux que ne peuvent l'être les professeurs allemands avec trois heures par semaine ...!

Exercices :

1- Déterminer x par le calcul, et faire une figure correspondante, pour chacune des équations :

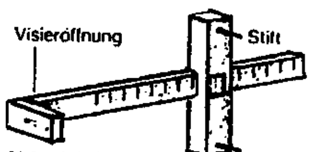
a) $3 : x = 5 : 7$ b) $x : 4 = 5 : 6$ c) $5{,}5 : 4 = x : 2,6$

2- On donne trois segments de longueurs a, b, et c. Construire un segment de longueur :

a) $x = \frac{ab}{c}$ b) $y = \frac{a^2}{b}$ c) $z = \frac{a^2 + b^2}{c}$

3- Un petit pois de 6 mm de diamètre cache complètement la pleine lune, lorsqu'on le tient à 66 cm des yeux. Quel est le rapport entre le rayon de la Lune et celui de la Terre, sachant que la distance entre la Terre et la Lune vaut 60 fois le rayon terrestre ?

4- Un vieil instrument, le *bâton de Jacob* (voir figure), était utilisé au Moyen-ge pour mesurer des hauteurs et des distances. Fabriquer un modèle, et expliquer son utilisation. Donner des exemples de mesures et de calculs.



37.2. Jokobstab

5- Montrer *vectoriellement* que dans un parallélogramme $ABCD$, si le point E partage le côté $[AB]$ de longueur 1 dans un rapport k:1 (k est un réel positif), alors (DE) partage la diagonale $[AC]$ dans le rapport $(k + 1)$:1.

Les élèves allemands, une fois surmontée la difficulté du changement de nom du théorème en France (Thalès/Strahlensatz), s'adaptent assez facilement aux types d'exigences de l'enseignement français (en particulier la distinction entre le théorème direct et le théorème réciproque) ; cependant, ils ne semblent pas habitués à rédiger autant que nous les démonstrations.

2) EN GRANDE - BRETAGNE :

L'expression "Théorème de Thalès" est inconnue des élèves anglais, pendant tout le "tronc commun" d'enseignement qui conduit au diplôme *G.C.S.E.(General Curriculum of Secondary Education*, présenté vers l'âge de quinze ans, à un niveau équivalent à notre fin de Seconde en France).

On étudie par contre les notions d'homothétie ("enlargement"), et celles detriangles et de figures semblabes.

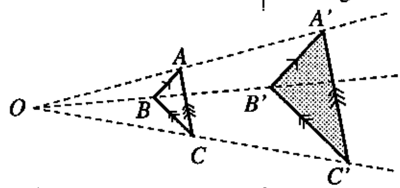
Enlargement is a *transformation*, i.e. a change. In an enlargement the size of the object usually changes and the scale factor of the enlargement describes the size of the enlargement. So the object and its image are similar. Matching angles in the object and image are equal, corresponding lengths are in proportion.

For example, in this diagram triangle ABC (the object) has been enlarged to triangle A'B'C' (the image) by the *spider* or *ray method*. It uses a centre of enlargement O and scale factor $k > 1$.
Matching lengths have been changed in the

Une homothétie est une transformation, c'est-à-dire un changement. Dans une homothétie,la dimension de l'objet change, en général, et le rapport d'homothétie décrit la dimension du changement. La forme de l'objet est toujours conservée dans une homothétie. Ainsi l'objet et son image sont semblables.

Les angles correspondants sur l'objet et sur l'image sont égaux, les longueurs correspondantes sont proportionnelles.

Par exemple, sur cette figure, le triangle ABC (l'objet) a été agrandi en un triangle A'B'C' par la méthode *de l'araignée ou des rayons*. Le centre d'homothétie est O, et le rapport $k>1$.
Les longueurs ont toutes été multipliées



same way, i.e. by the scale factor k.

Lengths from centre / Lengths on shape

$OA' = kOA$ $\quad$ $A'B' = kAB$

$OB' = kOB$ $\quad$ $B'C' = kBC$

$OC' = kOC$ $\quad$ $C'A' = kCA$

Since $k > 1$, all the *image lengths* are greater than the matching *object lengths.*
Matching sides of the image and object are parallel.
A'B' is parallel to AB, B'C' is parallel to BC, C'A' is parallel to CA.

par le même facteur k.

Longueurs
depuis le centre / sur les figures

$OA' = k\,OA$ $\quad$ $A'B' = k\,AB$

$OB' = k\,OB$ $\quad$ $B'C' = k\,BC$

$OC' = k\,OC$ $\quad$ $C'A' = k\,CA$

Comme $k>1$, toutes les longueurs images sont plus grandes que les longueurs de l'objet.
Les côtés correspondants de l'image et de l'objet sont parallèles.

Sont examinés successivement les cas où le rapport k est entier positif, puis une fraction entre 0 et 1, puis négatif. On apprend à déterminer le centre d'homothétie connaissant 2 points et leurs images, ainsi que le rapport entre les aires et les volumes pour des figures homothétiques de l'espace.

L'étude des "triangles semblables" constitue ensuite un cas particulier important : «Lorsqu'une droite parallèle à l'un des côtés coupe un triangle, alors un triangle semblable apparaît. On peut le vérifier sans connaître les mesures des côtés des triangles (...) en utilisant les propriétés des angles» Les trois cas de similitude des triangles sont énumérés.

Aucune allusion n'est faite à la notion de projection, et la réciproque permettant de montrer que deux droites sont parallèles n'est pas mentionnée. Signalons aussi que le «théorème des milieux» dans un triangle n'a pas de statut spécial, il n'est pas cité comme cas particulier.

Les exercices proposés, du moins jusqu'au niveau de l'examen *National G.C.S.E.*, sont essentiellement pratiques et concrets : reconnaissance de figures semblables, sans réelle démonstration), et calculs de longueurs, aires ou volumes. Ce chapitre n'occupe pas une place très importante dans les programmes, et ne dépasse pas 5% des questions d'examen.

Exercices :

1- Exercice d'examen (*G.C.S.E.*, juin 1993)

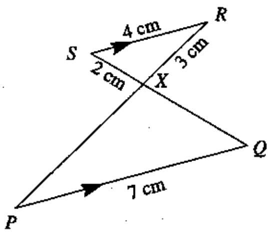
In the diagram, SR is parallel to PQ.

$SR = 4$ cm, $SX = 2$ cm, $RX = 3$ cm and $PQ = 7$ cm.

(i) Explain why the triangles RSX and PQX are similar.

(ii) Calculate the length of PX and the length of QX.

(iii) It is also given that the area RSX is 2.90 cm^2.
Calculate the area of triangle PQX
correct to two significate figures.



2- Reconnaître des triangles semblables parmi une série de figures (dessinées sans respecter les dimensions ni l'échelle), où l'on indique les 3 côtés, ou 2 angles, ou 2 côtés et 1 angle.

3- Deux figures homothétiques étant données, trouver le centre et/ou le rapport d'homothétie.

4- Deux cylindres C et D sont semblables, et de hauteurs 8 cm et 32 cm respectivement.Le volume de C est 73,5 cm 3. Quel est le vo-lume de D ?

5- Placer les points A(1,4), B(1,1), et C(3,1) ; puis compléter cette multiplication de

matrices : $$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Placer les 3 nouveaux points obtenus A' , B' , C' . Que dire du triangle A' B' C' ?

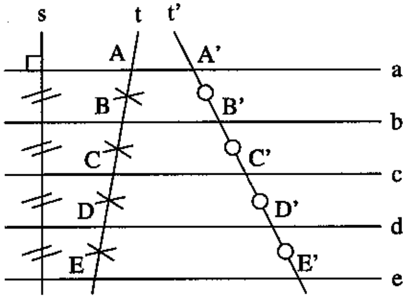
Les élèves anglaix que nous accueillons dans notre établissement sont très surpris devant nos demandes de démonstrations rédigées, et devant nos distinctions entre théorème direct et réciproque.

Le premier contact avec "l'environnement Thalès" se fait au niveau de notre cinquième française.

3) EN ITALIE :

Il teorema di Talete : I segmenti staccati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

Le lette *a, b, c, d, e* sono tra loro parallele ed equidistanti
$AC = 2AB$ cosi come pure $A'C' = 2A'B'$;
$AE = 4AB$ cosi come pure $A'E' = 4A'B'$
$AD = \frac{3}{2}\ AC$ cosi come pure $AD' = \frac{3}{2}\ AC'$
Le relazioni precedentemente scritte possono venir poste solto la forme di proporzioni :
$AC : AB = A'C' : A'B'$, $AE : AB = A'E' : A'B'$,
$AD : AC = A'D' : A'C'$, ecc



Le théorème de Thalès : Les segments déterminés par un réseau de droites parallèles sur deux sécantes à ces droites sont directement proportionnels.

Même si le mot projection n'est pas prononcé, c'est bien l'idée de : « la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière » qui l'introduit (avec ses corollaires : « notre réciproque du théorème des milieux », suivi de « notre théorème des milieux » - seul le mot corollaire est employé -).

L'application au triangle se fait alors aussitôt après le théorème de Thalès énoncé ci-dessus, *mais sans évoquer de réciproque.*

Suivent les triangles semblables et les cas de similitude :

1- deux angles respectivement égaux
2- deux angles égaux compris entre deux côtés respectivement proportionnels
3- les trois côtés respectivement proportionnels.

Les professeurs semblent avoir assez de latitude sur le temps à y consacrer.

Exercices :

1- Démontrer que dans un triangle quelconque les milieux des trois côtés et le pied de l'une des trois hauteurs sont les sommets d'un trapèze isocèle .

2- Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et[CA] d'un triangle quelconque Montrer que les points C et P sont équidistants de la droite (QR) .

3- Montrer que deux des quatre triangles obtenus à l'intérieur d'un trapèze, après le tracé de ses diagonales, sont semblables .

4- Démontrer que le point d'intersection P des diagonales d'un trapèze est situé au milieu du segment passant par P, parallèle aux bases et dont les extrémités sont sur les côtés non parallèles du trapèze .

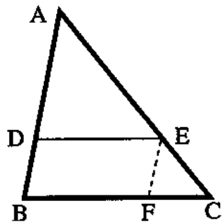
5- Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D et de grande base [AB]. Soit E le point de [AB] tel que AE = DC, soit M le milieu de [BC]. Montrer que les triangles AMD et EMB sont isocèles.(*)

4) EN ESPAGNE :

La première rencontre avec "l'environnement Thalès" se fait à treize ans : "proportionnalité géométrique et son rapport avec la mesure". Les professeurs y consacrent quatre semaines.

Enoncé 1

Teorema de Tales :



— *Toda recta paralela a un lado de un triángulo de un triangulo* **determina otro triángulo semejante al opuesto.**

Hypothesis : DE ‖ BC (fig. 158)

Tesis : $\begin{cases} \widehat{D}=\widehat{B}\,;\ \widehat{E}=\widehat{C} \\ \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC} \end{cases}$

Demostracion :

Théorème de Thalès :

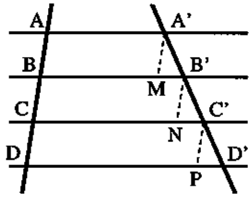
Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine un autre triangle semblable à celui-ci .

(*) référence de ce travail :
PERCORSI DI MATEMATICA-ALGEBRA-GEOMETRIA-INFORMATICA
par L.Tonolini et M.Certo chez Minerva Italica tome 1

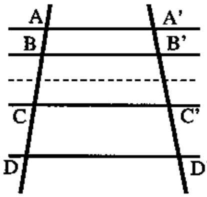
Enoncé 2

Teorema de Tales :

I - Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas de forma tal que determinan en un una de ellas segmentos iguales, los segmentos determinados en la otra son también iguales.



II - Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados en ambias, son proporcionales.

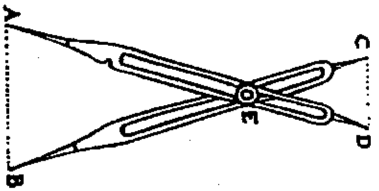


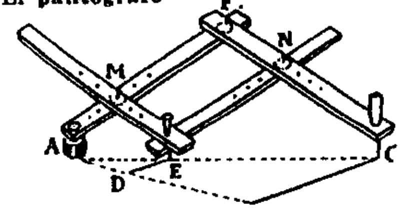
Théorème de Thalès :

I- Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles de telle sorte qu'elles déterminent sur l'une d'elles des segments de même mesure alors les segments homologues sur l'autre sont aussi égaux.
II- Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles, les segments correspondants déterminés sur chacune d'elles sont proportionnels.

Là aussi, bien que le mot ne soit pas explicitement prononcé, la projection est présente :

- dans le cas du *premier énoncé,* un travail important sur la notion de segments proportionnels et sur les propriétés des proportions fait suite à: «notre: la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière» pour en arriver «à la projection d'une échelle non régulière». Le triangle apparaît alors comme un cas particulier. La réciproque est citée et évoquée comme un nouvel outil pour démontrer que deux droites sont parallèles .(«Notre théorème des milieux» est présenté comme un simple exemple du cas particulier triangle cité plus haut). Viennent alors les triangles semblables, l'énoncé du théorème de Thalès et les cas de similitude des triangles (les mêmes que pour l'Italie !) Les triangles semblables conduisent alors à démontrer le théorème suivant et sa réciproque: «si un faisceau de droites concourantes coupe deux droites parallèles alors il détermine sur elles des segments proportionnels». Dans les applications, le compas de réduction et le pantographe sont cités.





- dans le cas du *deuxième énoncé*, le théorème est le point de départ, puis sont évoqués les partages de segments en parties égales puis en parties proportionnelles «Notre énoncé du théorème de Thalès, façon 3° », apparaît alors, après les cas de similitude des triangles, *mais sans évoquer de réciproque*.

Exercices :

1- Calculer la mesure des côtés du petit triangle formé en prolongeant les deux côtés non parallèles d'un trapèze dont les bases mesurent b et b' et les côtés non parallèles m et n.

2- Un point C situé entre A et B divise le segment $[AB]$ de 45 cm dans le rapport $CA/BC = 2/3$ calculer CA et BC et la distance de C au milieu O de $[AB]$.

3- M est un point de la droite (AB) mais extérieur au segment $[AB]$ et tel que $MA/MB = 9/5$,sa distance à O, milieu de $[AB]$, est 35 cm. Trouver AB, MB et MA.

4- Dans un losange $ABCD$ tracer une parallèle à la diagonale $[AC]$ qui coupe (AB) en E et (BC) en F. Par ces points tracer les parallèles à (BD); celles-ci coupent (AD) en H et (CD) en G. Démontrer que $AH \times CD = AD \times CG$.

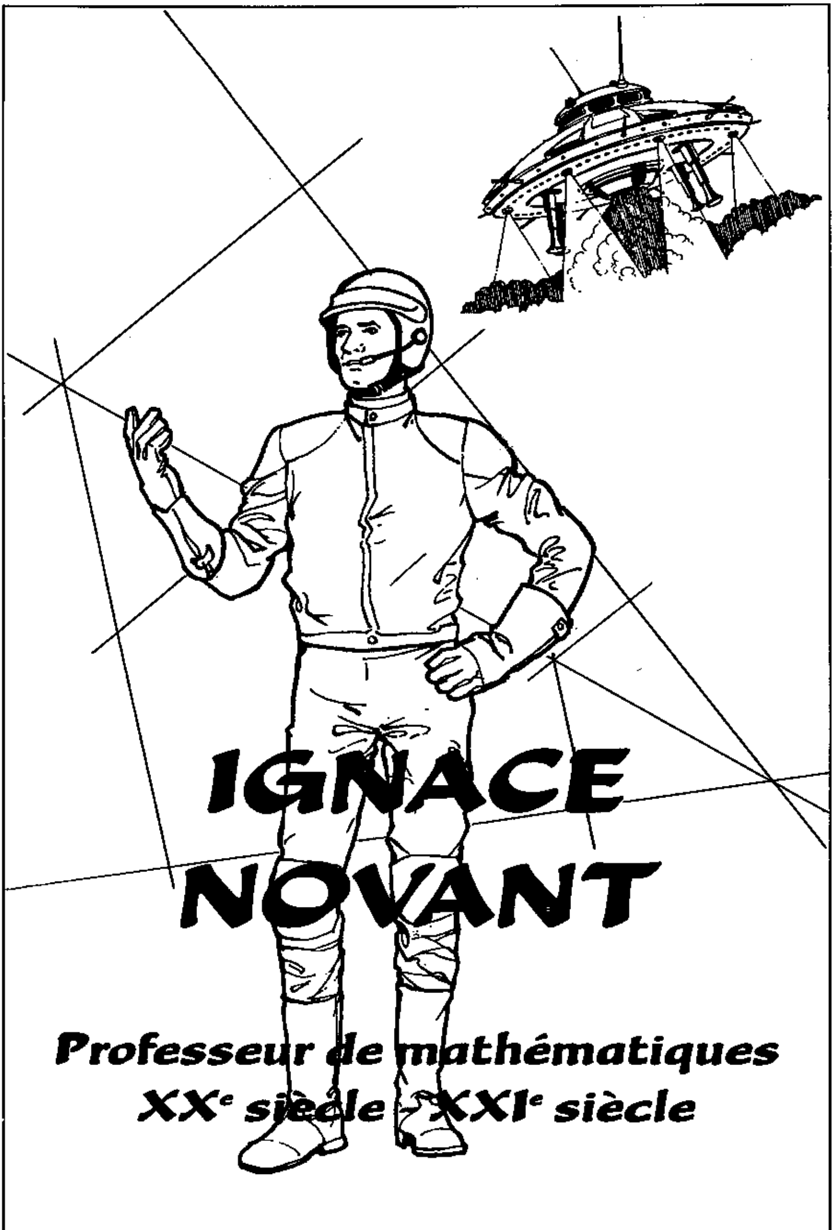
5- Démontrer que les droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle à partir du point d'intersection de ses médianes divise chaque côté en trois parties égales.

Page suivante :
Extrait du «*Lexique de Mathématiques*» de Nicole KOGEJ
ALEAS Editeur - 15, quai Lassagne - 69001 LYON →

Français	Anglais	Allemand	Espagnol	Italien
angles alternes-internes	interior alternate angles	Wechselwinkel (m)	ángulos alternos internos	angoli interni alterni
angles correspondants	corresponding angles	Stufenwinkle (m)	ángulos correspondientes	angoli corrispondenti
cas de similitude des triangles	Rules for two triangles to be similar	Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken	casos de semejanza de los triángulos	criteri di similitudine dei triangoli
centre (m) d'homothétie	centre of enlargement	Streckungszentrum (n)	centro de homotecia	centro di omotecia
concourant	concurrent; converging	zusammenlaufend; schneidend	concurrente; convergente; secante	centro di omotecia
correspondant	corresponding	korrespondierend	correspondiente	corrispondente
couper (se)	to cut ; to meet	schneiden (sich)	cotarse; encontrarse	segarsi; incontarsi; intersecarsi
couper au milieu	to bisect	halbieren	bisecar	dimezzare
déterminer	to determine	bestimmen	determinar	individuar
égal	equal	gleich	igual	uguale
faisceau de droites concourantes	set of straight lines which meet at the same point	Strahlenbündel	haz de rectas	fascio di rette
homologue	corresponding transformed	korrespondierend	homólogo	omologo
homothétie (f)	enlargement similarity; dilatation	Streckung (f)	homotecia	omotetia (f)
intersection (f)	intersection	Scnittstelle (f); Durchschnitt (m)	intersección	intersezione (f)
joindre	to join; to connect	verbinden	unir; juntar	congiungere
milieu	mid point	Mittlepunkt (m)	punto medio	punto medio
opposé	opposite	gegenüberliegend	opuesto	opposto
pantographe (m)	pantograph	Pantograph (m)	pantógrafo	pantografo (m)
parallèle à	parallel to	parallele zu	paralelo a	paralelo a
rapport (m) d'homothétie	scale factor of an enlargement	Streckungsfaktor	razón de homotecia	rapporto di omotetia
réseau de droites parallèles	set of parallel straight lines	Menge (f) von parallele Gerade	conjunto de rectas paralelas	fascio (m) di rette parallele; fascio
sécante (f)	secant; transversal	Sekante (f); schneidente Gerade (f)	secante; transversal	secante (f); transversale (f)
triangles congruents (égaux)	congruent triangles	kongruente Dreiecke	triangulos congruentes (iguales)	triangoli uguali
triangles semblables	similar triangles	ähnliche Dreiecke (n)	triangulos semejantes	triangoli simili

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES
- Les *«Actes du Premier Congrès Européen de Mathématiques de Paris»* (Springer Verlag 1992), où l'on trouve d'intéressants articles sur l'enseignement des mathématiques en France, Allemagne, Italie, Belgique et Royaume Uni.
- *«Les mathématiques dans le système éducatif espagnol»* par Florencio VILLARROY BULLIDO ("L'Ouvert", n°79 - 1995 - Strasbourg).

Remarques et notes personnelles


IGNACE
NOVANT
Professeur de mathématiques
XXe siècle - XXIe siècle

Extrait des mémoires de IGNACE NOVANT enseignant de mathématiques

(fin du XX^e siècle - début du XXI^e siècle)

Yves THOMAS

Extrait du livre XII (vers 1988)

Enfin, j'ai découvert comment enseigner efficacement le théorème de Thalès. Les nouveaux programmes m'ont ouvert les yeux. Comment ai-je pu ne pas y penser plus tôt ? La notion de Thalès triangle résout vraiment tous mes problèmes.

Je n'ai plus besoin de me servir de la notion de projection que mes élèves comprennent si mal.

Les figures dans lesquelles on peut utiliser le théorème de Thalès deviennent faciles à reconnaître, puisqu'il n'y en a que deux types.

Je peux justifier facilement le théorème pas des considérations sur l'agrandissement et la réduction de triangles.

Puisqu'on dispose du rapport de longueurs des côtés parallèles, je vais pouvoir poser des problèmes inaccessibles à mes élèves de troisième jusqu'à présent.

L'approche nouvelle est une bénédiction pour mes collègues de seconde, ils n'auront pratiquement plus rien à faire pour enseigner l'homothétie.

Extrait du livre XIV (vers 2004)

Enfin, j'ai découvert comment enseigner efficacement le théorème de Thalès. Les nouveaux programmes m'ont ouvert les yeux. Comment ai-je pu ne pas y penser plus tôt ? La notion de Thalès projection résout vraiment tous mes problèmes.

Je ne m'appuie plus sur l'agrandissement (tout le monde sait que cette notion est d'une simplicité trompeuse et que, malgré tous nos efforts, certains élèves continuent à penser qu'on peut obtenir un agrandissement en ajoutant un même nombre à toutes les mesures).

Les figures dans lesquelles on peut utiliser le théorème de Thalès deviennent faciles à reconnaître puisqu'il n'y en a qu'un type.

Je n'aurai plus besoin dans les problèmes de passer par des mises en équation aussi fastidieuses qu'inutiles pour calculer les longueurs des segments qui ne sont pas des côtés des deux triangles utilisés.

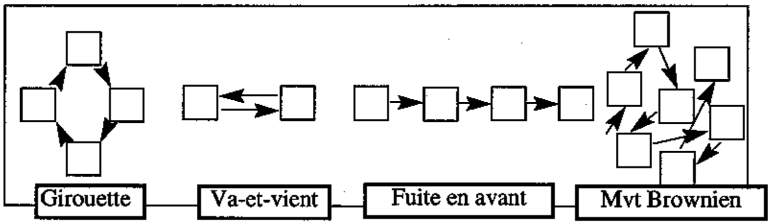
En parlant de projection, on sera naturellement conduit à insister sur l'alignement, finis les exercices de Brevet où les élèves sont invités à admettre l'alignement suggéré par la figure.

Je vais enfin pouvoir formuler une réciproque qui soit vraiment une réciproque, le rapport formé avec les côtés parallèles rendait ça vraiment pénible.

Exercices

1 - Parmi les schémas suivants, lequel représente le plus probablement l'évolution de la pensée pédagogique de I. Novant pendant sa carrière ?

Vous justifierez votre réponse en vous appuyant sur les documents ci-dessus.



2 - Dans le livre XXI de ses mémoires (vers 2011) I.Novant abordait à nouveau le théorème de Thalès dans un bref paragraphe commençant par «Enfin, j'ai découvert comment enseigner efficacement le théorème de Thalès. Les nouveaux programmes m'ont ouvert les yeux. Comment ai-je pu ne pas y penser plus tôt ? ...»

Imaginez une suite en 20 lignes maximum.

3 - Dans votre propre réflexion pédagogique, vous avez sans doute parfois suivi un parcours analogue à celui de I Novant. Expliquez en vous appuyant sur des exemples précis en quoi votre démarche ressemblait à la sienne et en quoi elle différait.

Y. Thomas
Collège René Bernier
St Sébastien sur Loire

St Sébastien le 25/11/2994
Aux rédacteurs de la brochure
IREM "Thalès"

Chers collègues,

J'ai eu la grande chance de retrouver par hasard le texte ci-dessus, extrait d'un manuel destiné à la formation des professeurs du XXIème siècle, et qui fait référence à un pédagogue encore plus ancien, aujourd'hui oublié.

Après avoir lu les deux citations, et effectué les deux premiers exercices, je me suis émerveillé du chemin que nous autres pédagogues avions parcouru en quelques siècles. J'étais bien convaincu que le plus médiocre des enseignants d'aujourd'hui saurait éviter les errements grossiers de notre infortuné prédécesseur.

Par jeu, j'ai ensuite essayé de répondre au troisième exercice. Vous pensez, bien évidemment, que mon introspection n'a pas révélé la moindre analogie avec la "pensée d'I Novant.

Erreur, chers collègues ! grossière erreur !

En réalité, je pense comme lui, en permanence.

Soucieux, comme chacun d'entre vous, d'être le plus utile possible à mes élèves, j'ai cruellement conscience de certaines des limites de ma pratique, que les erreurs chroniques de mes élèves soulignent quotidiennement.

C'est pourquoi je suis à l'affût de toutes les innovations dont j'espère chaque fois qu'elles résoudront tous mes problèmes. Bien entendu, ce n'est jamais le cas. Chaque innovation résout certains problèmes et en pose de nouveaux.

"Cela est bien ainsi !" dites vous, "il suffit de peser dans les deux méthodes en présence les avantages et les inconvénients puis de choisir celle des deux qui se montre à l'évidence la plus avantageuse".

En effet, estimés collègues, il suffit de procéder comme vous le dites... Cependant, je ne procède jamais ainsi.

En ce qui me concerne, la comparaison que vous suggérez n'est jamais équitable, car je compare les résultats d'une méthode dont les inconvénients sont patents et les avantages depuis longtemps oubliés, aux intentions d'une nouvelle méthode dont les avantages supposés sont évidents puisque la méthode a été construite autour d'eux et dont les limites n'ont pas encore été mises en évidence par la pratique.

A ma grande honte, je ne cherche même pas à imaginer les possibles limites de la nouvelle méthode, ce qui corrigerait en partie l'injustice de mon jugement, car je trouve beaucoup plus de plaisir à polémiquer avec ceux de mes collègues (pas vous chers confrères) qui, souffrant d'une lésion cérébrale symétrique de la mienne, refusent de considérer que l'innovation envisagée pourrait avoir un soupçon d'utilité.

Dans mes choix pédagogiques, j'ai donc à peu près la même lucidité que l'électeur qui comparant chaque fois le bilan du sortant au programme de son concurrent, voterait de façon systématique pour l'opposant.

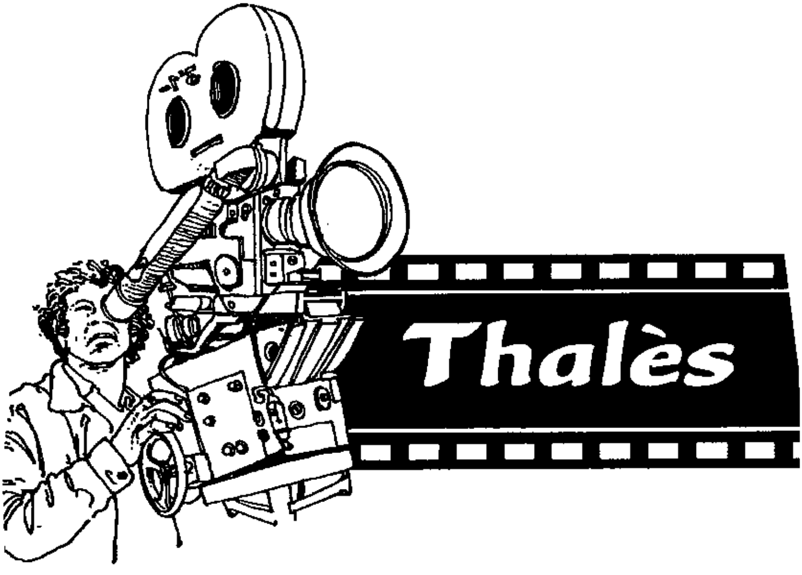
C'est pourquoi, très sages collègues, je m'en remets à vous pour rédiger les conseils judicieux que je ne suis pas qualifié pour donner, me gardant bien d'introduire la dissonance dans le chœur harmonieux de vos voix autorisées.

Thalès vous garde de la présomption, de la suffisance, de la paresse et de la résignation qu'il n'a pas su m'épargner.

Yves Thomas

Des images

pour



Thalès

Des images pour Thalès

Jean DELERUE
IREM de Nice

Pourquoi des images ?

Les commentaires des programmes de mathématiques pour les collèges commencent par ces phrases :

> *L'enseignement des mathématiques comporte deux aspects :*
> *Il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas,tableaux, figures. Il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.*

Le réel est souvent pauvre dans une salle de classe et l'observer n'est pas simple.

L'enseignant pourra amener des images du réel grâce à différents média et l'un des rôles sera d'amener l'élève à sentir la structure mathématique présente derrière l'image.

L'image pourra servir à poser un problème, valider un énoncé ou même démontrer une figure. L'énoncé de Thalès et ses applications font peur aux élèves, l'utilisation d'images aide les élèves.

Documents imprimés

Livres

Les livres proposent en général des illustrations complémentaires aux exercices ; mesurer la hauteur d'un arbre ou d'une pyramide en utilisant l'ombre au sol sont des situations fréquentes; le thème de l'échelle est aussi souvent présent. Il est déconseillé d'écrire sur le livre et la schématisation à partir de cette image fixe exige au moins une copie sur transparent pour rétroprojecteur.

Transparents

Déjà réalisés

L'IREM d'Orléans publie des séries de pochettes de transparents pour l'enseignement des mathématiques. La pochette R11 est dédiée aux propriétés de Thalès avec entre autre une pyramide et son plan de coupe.

A photocopier

Le bulletin Inter IREM Images et Math publié par la CIIIM propose la réalisation de transparents à rabats complémentaires au film du CNDP. L'échelle posée contre un mur p. 87 est prête à être photocopiée. Un scénario d'utilisation pendant un cours est proposé.

Les logiciels graphiques ou les logiciels de Présentation Assistée par Ordinateur permettent de faire facilement les dessins correspondants aux exercices et de les sortir sur transparents en couleur. Sans refaire les montages sophistiqués existants il est possible de créer des documents simples proches du cours.

Diapositives

Productions de Poitiers

La diapositive est un support fort utilisé dans l'enseignement, Jean Fromentin a impulsé une collection de diapositives, il est probable que très vite des exercices sur Thalès seront au catalogue.

Films

Si Thalès m'était conté

Deux films courts de cinq minutes publiés en 1978 au CNDP ref.002 S 1664. Ces films ont été conçus bien avant les programmes actuels mais des passages sont tout à fait utilisables avec les élèves. On y retrouve l'échelle posée sur le mur et bien sûr l'ombre de la pyramide. Un compte rendu d'utilisation en classe de ces films a été publié dans les *bulletins* 334 et 335 de l'APMEP.

Vidéodisque Homothétie

Parmi les sujets traités dans le vidéodisque *"Objectif Géométrie"* publié par le CNDP ref.002 44005 on trouve un chapitre sur l'homothétie. Il y a à la fois du film et des animations qui peuvent être intégrées dans un travail sur Thalès.

Tangentix

Film d'animation publié par le CNDP ref.002 X6742. La recherche de la tangente dans un triangle rectangle passe par la mesure de menhirs et par la construction de triangles semblables.

Productions étrangères

IFB Similar triangles

International Film Bureau est une société déjà ancienne qui commercialise entre autre des films de mathématiques souvent achetés par les IREM. Le bulletin Inter Irem N° 31 décrit un certain nombre de ces films dont un sur les triangles semblables.
C'est un film d'animations dont j'intègre quelques séquences dans mon cours.

Images numériques

L'image numérique arrive en force dans nos établissements, les coûts des matériels ont baissé et il est devenu possible de demander aux élèves de travailler des images. Par exemple ? Après avoir numérisé l'image de l'échelle du film du CNDP, on peut demander aux élèves de caractériser les parallèles ou les projections. En utilisant les masques on passera de l'image compliquée avec l'échelle et le pot de peinture au simple dessin géométrique.

Les logiciels d'image de synthèse comme 3D Studio permettent un travail très complet sur les projections et les ombres.

Toujours en numérique, les logiciels multimédia devraient permettre un cheminement individuel dans l'information et aider les élèves, les CDROM se multiplient, il n'y en a encore aucun sur Thalès ; mais sans doute cette absence sera rapidement comblée.

Les limites de l'image

L'image ne peut remplacer un raisonnement et le danger est grand que les élèves restent à l'image. L'image peut perturber, déséquilibrer comme les élastiques tendus entre les barres de mécano posées sur un rétroprojecteur, le raisonnement s'impose alors pour retrouver un équilibre.

Remarques, notes personnelles, expérimentation

ADRESSES DES IREM

BESANÇON Faculté des Sciences La Bouloie- 25030 Besançon Cedex
tel. 81 66 61 92 - 81 66 61 91 *Télécopie : 81 66 61 99*

BORDEAUX Université Bordeaux I - I.F.E. - 40 rue Lamartine-33400 Talence
tel. 56 84 89 75 *Télécopie 56 84 89 78*

BREST Faculté des Sciences - 6, avenue Victor Le Gorgeu - 29287 Brest Cedex - tél. 98 31 65 44 *Télécopie : 98 31 64 41*

CAEN IUT, Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen
tél. 31 44 27 91 *Télécopie : 31 94 32 59*

CLERMONT Fd Université Clermont-Ferrand II
Complexe scientifique des Cézeaux - 63177 Aubières Cedex
tél. 73 40 70 98 *Télécopie : 73 40 70 78*

DIJON Université de Bourgogne- IREM BP 138 - 21004 Dijon Cedex
tél.80 39 52 30 *Télécopie : 80 39 52 30*

GRENOBLE BP 41 - 38401 St Martin d'Hères Cedex
tél. 76 51 46 62 *Télécopie : 76 51 44 25*

LILLE Université des Sciences et Techniques 59655 Villeneuve d'Asq Cedex
tél. 20 43 41 82 - 20 43 41 81 *Télécopie : 20 43 49 95*

LIMOGES 123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex
tél. 55 45 72 31 - 55 45 72 49 *Télécopie : 55 45 73 20*

LORRAINE Université Nancy I - Faculté des Sciences, BP 239
54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex
tél. 83 27 55 51 *Télécopie : 83 91 25 73*

LYON Université Lyon I- 43, Bd du 11 Novembre 1918 -
69622 Villeurbanne Cedex
tél. 72 44 80 00 p. 37-24 - 72 44 81 24 *Télécopie : 72 44 80 67*

MARSEILLE Faculté des Sciences de Luminy - 70, rue Léon Lachamp
13288 Marseille Cedex
tél. 91 26 90 00 - 91 41 39 40 *Télécopie : 91 26 93 43*

MONTPELLIER Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon - 34095 Montpellier Cedex 5
tél. 67 14 33 83 - 67 14 33 84 *Télécopie : 67 14 39 09*

NANTES : Pays de Loire 2, rue de La Houssinière - 44072 Nantes Cedex
tél.40 37 30 16 - 40 37 30 15 *Télecopie : 40 93 38 78*

Antenne LE MANS - Université du Maine - Route de Laval
72017 Le Mans Cedex
tél.43 83 32 15 *Télecopie : 43 83 33 66*

NICE IREM de Nice - Faculté des Sciences - BP 71 - 06108 Nice Cedex 2
tél. 93 52 98 73 *Télecopie : 93 51 91 91*

ORLÉANS Université d'Orléans, BP 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
tél. 38 41 71 90 *Télecopie : 38 41 71 93*

PARIS-NORD Université de Paris Nord Avenue Jean Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
tél. (1)49 40 36 40 *Télecopie : 49 40 36 36*

PARIS VII Université Paris VII - 2, Place Jussieu - 75005 Paris
tél. (1)44 27 53 83 *Télecopie : 44 27 56 08*

PICARDIE 4, rue Raspail, BC 619 - 02322 Saint-Quentin
tél. 23 64 82 62 - 23 62 62 98 *Télecopie : 23 64 82 62*

POITIERS 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers Cedex
tél. 49 45 38 77 *Télecopie : 49 45 40 50*

REIMS Moulin de la Housse, BP 347 - 51062 Reims Cedex
tél. 26 05 32 08 *Télecopie : 26 85 35 04*

RENNES Campus Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
tél. 99 28 63 42 *Télecopie : 99 28 16 38*

ROUEN IREM de Rouen - Université de Rouen - BP 153
76135 Mont Saint-Aignan Cedex
tél. 35 14 61 41 *Télecopie : 35 14 61 41*

STRASBOURG 10, rue Général Zimmer - 67084 Strasbourg Cedex
tél. 88 41 63 07 *Télecopie : 88 61 90 69*

TOULOUSE Université Paul Sabatier - 118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
tél. 61 55 68 83 *Télecopie : 61 55 82 58*

ANTILLES Cité Scolaire Baimbridge
GUYANE Bâtiment P 3°étage - BP 17
97110 Pointe-à-Pitre
GUADELOUPE
tél. 19 590 26 36 48 *Télecopie : 19 590 91 37 59*

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie CHIRAT
42540 Saint-Just-la-Pendue
Dépôt légal décembre 1995 N° 1784