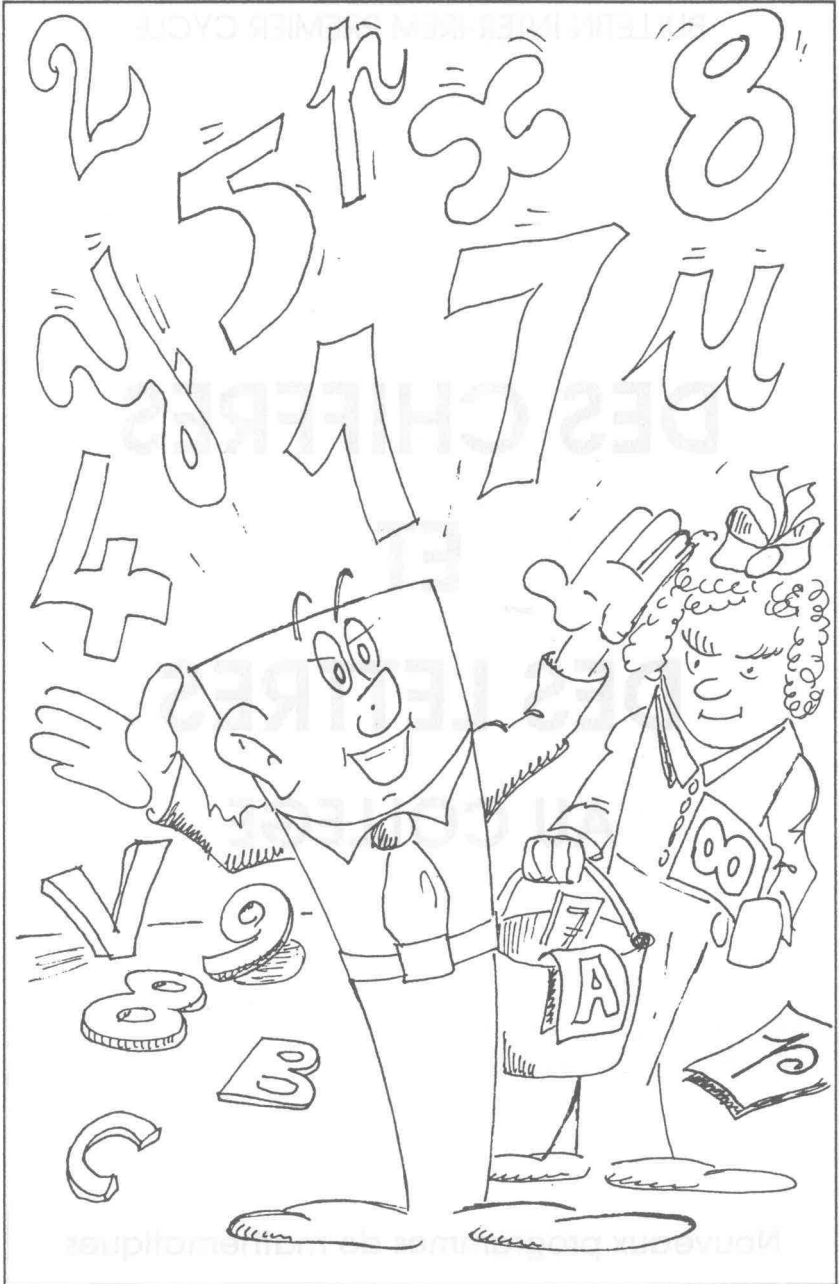


BULLETIN INTER-IREM PREMIER CYCLE

DES CHIFFRES ET DES LETTRES AU COLLEGE

Nouveaux programmes de mathématiques



SOMMAIRE

PRÉFACE : Jean-Claude DUPERRET	5
---------------------------------------	---

PREMIÈRE PARTIE : DES CHIFFRES

♦ Présentation : R.Arnaud (Limoges)	9
♦ Ne privez pas vos élèves du plaisir de faire des statistiques : M.C.Combes (Montpellier)	11
♦ Représentation de donnée en 6^{ème} (lecture et conception) : M.H.Jabet (Limoges)	25
♦ Représentations graphiques dans l'environnement des élèves : A.M.Monfront (Paris VII)	43
♦ La forêt limousine : M.C.Babel (Limoges)	56
♦ Recensement : R.Delord et F.Mira (Bordeaux)	61
♦ Représentations graphiques en statistiques : J.F.Pichard (Rouen)	75
♦ Des impôts à l'ellipse : G.Pornin (Limoges)	103
♦ Médiane et moyenne en 3^{ème} pourquoi et comment ? : J.C.Duperret (Reims)	113
♦ Des caractéristiques de position aux caractéristiques de dispersion : D.Antoine et B.Chaput (Reims)	127
♦ Bibliographie	139

DEUXIÈME PARTIE : DES LETTRES

- ◇ **Algébrisation Fonctions** : M.Mathiaud (Paris 7).....143
- ◇ **Calcul numérique et calcul algébrique
au collège (quelles difficultés ?)** : (Strasbourg)147
- ◇ **A propos des difficultés du calcul algébrique en 3^{ème} :**
(Impression ou réalité ?) : R.Buisson (Limoges)179
- ◇ **Etude des fonctions au collège :**
A.Boudot, M.Grégoire, M.Moreau (Dijon)189
- ◇ **Acquisition de la notion de fonction
de la 6^{ème} à la 3^{ème} :**
A.Azam, G.Chabat, C.Fribourg, B.Petit (Rouen)215
- ◇ **Des activités faisant intervenir des fonctions :**
M.Mathiaud (Paris 7)237
- ◇ **En fin de 3^{ème} puis 2 à 3 mois plus tard :**
(Test élaborés par une équipe de l'IREM de Montpellier)251

PRÉFACE

Jean Claude DUPERRET

«Responsable de la Commission Inter-IREM
Premier Cycle»

Pendant quatre années (de 1985 à 1989), le travail de notre Commission a surtout porté sur le «*Suivi Scientifique*» des nouveaux programmes de collège, travail qui a donné lieu à la publication de quatre bulletins Inter-IREM respectivement pour les programmes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème}.

Nous avons, depuis lors, orienté nos travaux sur trois axes principaux :

- ① Réflexion sur l'enseignement des mathématiques : analyse didactique d'activités, activités de modélisation, processus d'apprentissage, raisonnement et démonstration,...
- ② Réflexion sur des thèmes forts des nouveaux programmes : statistique, géométrie de l'espace, transformations, ...
- ③ Réflexion sur les articulations entre cycles : liaison avec l'école élémentaire, avec les lycées (en particulier, un travail effectué avec la commission «Objectifs et niveaux d'approfondissement» en 1989-90, a donné lieu à la publication d'un Bulletin «*Liaison Collège-Seconde*»).

L'avancée de nos travaux nous permet d'envisager la publication de nouveaux bulletins Inter-IREM Premier Cycle.

C'est donc le premier de ces bulletins que nous vous présentons. Il est constitué de l'étude de deux thèmes, étude qui a donné lieu à la production d'articles de nature sensiblement différente, diversité qui est l'image de la diversité de notre réflexion.

La première partie (*Des chiffres !*) concerne «**la Gestion de données**». Elle pourrait s'intituler : progressivité de l'apprentissage des statistiques au collège. On y trouve beaucoup d'activités exploitées dans les différentes classes du collège. L'objectif de cet ensemble est de donner des pistes de travail sur ce thème encore marginal, et d'en montrer la richesse.

La deuxième partie (*Des lettres !*) concerne «**le calcul numérique, algébrique et fonctionnel**». Elle propose des articles où la réflexion l'emporte nettement sur la présentation des activités, en utilisant des synthèses d'observations portant sur les quatre années de collège.

La production d'un bulletin est un travail lourd et qui demande l'investissement de beaucoup d'équipes. Encore une fois, il n'en a pas manqué dans notre commission. Comme il est difficile de toutes les nommer ici, je tiens, en leur nom, à remercier plus particulièrement :

◊ René ARNAUD (Limoges) et Michèle MATHIAUD (Paris VII) qui ont bien voulu coordonner et «chapeauter» chacune des deux parties.

◊ La Commission «Probabilité et statistiques» qui a bien voulu relire et nous aider à améliorer la partie «Statistique» et en particulier son responsable Jean-François PICHARD (Rouen) qui a produit un article de synthèse sur les représentations en statistique.

◊ Jean BARBIER (Lyon) qui a bien voulu continuer le travail de mise en forme de notre bulletin, comme il l'avait fait pour les Suivis Scientifiques.

C'est par l'ADIREM que je finirai ces remerciements, car elle nous a toujours soutenus dans nos projets, et nous a donné les moyens matériels de les mener à bien.

Pour ma part, c'est le dernier Bulletin que je préparerai en tant que responsable de la commission 1er Cycle. C'est en effet à Robert DELORD, futur responsable de notre commission que reviendra le plaisir de présenter les prochains bulletins. Je lui souhaite de trouver autant de joie dans cette responsabilité que j'en ai trouvé depuis quatre ans.

Jean-Claude DUPERRET

PREMIÈRE PARTIE

DES CHIFFRES

Présentation	9
Ne privez pas vos élèves du plaisir de	
faire des statistiques	11
Représentation de données en 6^{ème}	25
Représentations graphiques dans	
l'environnement des élèves	43
La forêt limousine	56
Recensement	61
Représentations graphiques en statistiques	75
Des impôts à l'ellipse	103
Médiane et moyenne en 3^{ème}	113
Des caractéristiques de position aux	
caractéristiques de dispersion	127
Bibliographie	139

PRÉSENTATION

René ARNAUD

IREM de Limoges

Cette partie vous propose neuf articles de divers IREM (Bordeaux, Limoges, Montpellier, Paris VII, Reims et Rouen), suivis d'une bibliographie consacrée aux travaux des IREM traitant des statistiques dans les nouveaux programmes de Collège.

Si un certain nombre de pages se rapportent aux graphiques, c'est qu'ils constituent le moyen privilégié pour communiquer des données. Il est pour cela nécessaire de bien maîtriser leur approche, tout en restant vigilant eu égard à l'utilisation qui en est faite. N'oublions pas que la réalisation d'un graphique est aussi l'occasion de réinvestir un certain nombre de notions mathématiques, tout en proposant à l'élève un travail motivant.

Les cinq premiers articles rendent compte d'activités variées et faciles à adapter dans vos classes.

⇒ **Marie-Claire COMBES** a réalisé des fiches dans le but d'initier ses élèves au recueil de données (y compris sous forme de sondage) et à leur traitement numérique puis graphique.

Ces fiches étaient au départ destinées à la «préparation» du concours A VOS STATS.

⇒ **Marie-Hélène JABET** a fait travailler ses élèves sur la lecture des informations fournies par un graphique : il n'y a pas que le «dessin» à considérer, mais aussi tous les «textes» qui vont avec. La suite logique fut la conception de graphiques pertinents.

⇒ **Anne-Marie MONFRONT** a elle aussi voulu sensibiliser ses élèves aux informations véhiculées par un graphique, et ce, afin de développer leur esprit critique. Son travail porte également sur l'utilisation qui en est faite dans d'autres disciplines.

⇒ **Marie-Christine BABEL** a relié son travail à l'étude de l'environnement. Est-il besoin de rappeler que les statistiques se prêtent tout à fait aux travaux pluri-disciplinaires? C'est en particulier par cet intermédiaire que le professeur de Mathématiques peut prendre une part active à l'étude des thèmes transversaux.

⇒ **Robert DELORD et Françoise MIRA** partent, quant à eux, de données issues du Recensement Général de la population de 1990 et proposent diverses pistes pour exploiter ces données en Sixième^A, Cinquième ou Quatrième.

Les quatre autres articles font le point sur divers aspects de l'enseignement des statistiques au collège (voire en seconde).

⇒ **Jean-François PICHARD** dresse un bilan très complet (classification) des divers types de représentations statistiques.

⇒ **Gérard PORNIN** propose, au travers d'une activité, de réfléchir à la place des statistiques dans le cours de Mathématiques (c'est un bon moyen de réutiliser diverses notions tout en suscitant l'intérêt des élèves).

⇒ **Jean-Claude DUPERRET** traite des deux paramètres de position couramment utilisés : médiane et moyenne (non seulement leur «définition», mais aussi la spécificité propre à chacun).

⇒ **Dominique ANTOINE et Brigitte CHAPUT** concluent par une ouverture sur le Lycée, avec la notion de dispersion. Il ne s'agit pas d'expliquer comment est présenté l'écart-type en seconde, mais plutôt de fournir un support théorique aux enseignants. Un élève de Collège moyennement curieux peut très bien demander à quoi sert la touche σ_n qui existe sur bon nombre de calculatrices.

J'espère vivement que les textes qui suivent contribueront à ce que les statistiques, si proches du quotidien des élèves aient la place qu'elles méritent dans l'enseignement des Mathématiques au Collège.

Et maintenant, bonne lecture!

NE PRIVEZ PAS VOS ÉLÈVES DU PLAISIR DE FAIRE DES STATISTIQUES !

Marie-Claire COMBES
IREM de Montpellier

Les statistiques, motivantes quant au travail de groupe peuvent et doivent prendre place très tôt dans l'année.

Dès la **Sixième**, il est possible pour les élèves de s'engager dans un travail sérieux sur des sujets qui les passionnent (cf. fiches méthodologiques A1, A2 et A3).

Les thèmes d'étude ne manquent pas et je n'ai encore rencontré aucun élève à court d'idées. Les élèves sont beaucoup plus motivés par un sujet qui les intéresse que par un thème identique pour tous et imposé par le professeur.

Très tôt, ils peuvent être sensibilisés à la méthode du travail statistique.

Une fois le thème choisi, le travail primordial est le recueil des données numériques. Là, plusieurs stratégies peuvent être mises en place (cf. fiches méthodologiques B1, B2, B3 et B4).

Toutefois, une enquête au niveau du collège n'est pas difficile à mettre en place. Mes élèves, par groupes, choisissent une ou deux questions qu'ils désirent poser quant au thème choisi, puis chacun d'entre eux prépare un tableau à double entrée où figurent les questions de tous les groupes et a pour mission d'interroger 6 ou 8 élèves dont il a le nom. Très vite on se retrouve avec un nombre conséquent de réponses. Quelques petits incidents surviennent lors de ces enquêtes, ils permettent de prendre conscience qu'on ne peut

pas accorder une confiance aveugle aux résultats d'une enquête.

Ce travail-là enthousiasme en général les élèves.

Chaque groupe reçoit ensuite toutes les réponses concernant la variable à étudier et là commence le travail collectif avec d'une part le dépouillement dans le but de constituer un tableau de valeurs et d'autre part le choix de la meilleure ou des meilleures représentations graphiques à mettre en œuvre afin de mettre en évidence le phénomène observé.

Préalablement les différentes représentations graphiques ont été vues ou revues en classe dans des séquences plus traditionnelles.

Les pourcentages prennent leur véritable sens à ce moment là, et c'est une bonne occasion de les réinvestir (cf. fiches méthodologiques C1 et C2).

Les élèves peuvent alors comparer leurs résultats avec des études faites sur certains livres sur le même thème.

Leur travail débouche enfin sur la confection d'une affiche qui permet de valoriser leur production aux yeux des autres, affiche qui mise dans un lieu «stratégique» du collège, pourra être consultée par tous. Et à ce stade, même les élèves les plus brouillons sont capables de faire des efforts car c'est bien autre chose de livrer un travail aux yeux de tous que de donner un devoir qui sera vu simplement par le professeur, même s'il y a une note comme sanction.

Parallèlement, il est intéressant de faire une activité sur la méthode des quotas.

A partir de l'enquête d'un groupe, à condition d'avoir fait noter la date de naissance et le sexe de la personne interrogée (ou tout autre critère d'établissement de quota), on pourra comparer les résultats donnés par :

- le traitement de l'enquête exhaustive,
- le traitement de l'enquête "au hasard" (on prélève un échantillon "au hasard" parmi toutes les réponses),
- le traitement par la méthode des quotas (cf. fiches méthodologiques E1 et E2), avec à nouveau réinvestissement des calculs de pourcentages.

Les statistiques nous fournissent donc des matériaux pour de multiples activités sociales et mathématiques.

NB : La fiche D n'est pas reproduite ci-après, mais les réponses qui y figurent sont marquées en italique lorsqu'il y est fait référence (fiches B2 et C1).

JE CHOISIS LE SUJET QUI M'INTÉRESSE

1°) Dans ton collège

Tu peux t'intéresser

- à l'âge des élèves
- à leur taille
- à leurs loisirs
- à leurs chanteurs préférés
- à leurs animaux préférés
- à leurs performances sportives
 - en endurance
 - en course de vitesse
 - en saut
- à la place occupée dans leurs loisirs par la télévision
- à leurs livres préférés
- au métier de leurs parents
- au métier qu'ils envisagent
- à la nationalité de leurs grands parents

2°) Dans ton village

Tu peux t'intéresser

- aux différentes catégories d'âge représentées
- à l'évolution de la population au fil des années
- à la répartition des différents commerces
- à la dernière élection municipale

...

JE CHOISIS LE SUJET QUI M'INTÉRESSE

3°) Dans ton quartier

Tu peux t'intéresser

au nombre d'enfants par famille
à la marque des voitures
aux animaux familiers
aux professions des adultes...

4°) Dans le canton de recrutement de ton collègue

Tu peux t'intéresser

à l'évolution comparée de la population
des différentes communes concernées
à la pyramide des âges de chaque commune...

5°) Dans ton département

Tu peux t'intéresser

aux températures moyennes mensuelles
aux précipitations moyennes mensuelles
au degré de pollution des nappes phréatiques
à la pollution des plages...

6°) En France

Tu peux t'intéresser

au budget de l'Etat
aux dernières élections législatives
au tourisme...

à la densité d'habitants par pays

intéresser ^{ph} attirer l'attention; intéresser les "non-clerges" x14

--

JE RECUEILLE LES DONNÉES NUMÉRIQUES

Je veux faire ma propre enquête

1°) Je choisis la “population” que je veux étudier

Elle dépend du thème choisi.

Exemple 1

Je veux établir le hit-parade des chanteurs préférés du collège de Saint Gély du Fesc .

Ma “population” est constituée par tous les élèves du collège de Saint Gély du Fesc.

Exemple 2

Je veux étudier le nombre d'enfants par famille dans mon quartier.

Ma “population” est constituée par toutes les familles de mon quartier.

MA “POPULATION” EST:

JE RECUEILLE LES DONNEES NUMÉRIQUES

Je veux faire ma propre enquête

2°) Je choisis le type d'enquête que je vais mener

a) Je peux faire une enquête exhaustive

Le recensement est une enquête exhaustive.

Je pose les questions à toutes les personnes constituant ma "population"

Cette méthode est la plus sûre mais longue et impossible quand la "population" est très nombreuse.

b) Je peux faire une enquête "au hasard"

Je n'interroge qu'un certain nombre de personnes prises "au hasard" dans ma "population"

Dans l'exemple 1 je décide d'interroger 50 élèves du collège "au hasard" pendant la récréation.

Est-ce que cela te semble représentatif de l'ensemble des élèves du collège ? Pourquoi ? Consulte la fiche D pour savoir si ta réponse est exacte .

(réponse : ce type d'enquête a ses limites. Souvent les élèves qui sont ensemble ont les mêmes goûts)

c) Je peux faire une enquête par la méthode des quotas

Je n'interroge qu'un certain nombre de personnes. Ces dernières sont choisies afin de respecter la composition de ma "population"

Cette méthode n'est pas facile. Si tu veux en savoir plus consulte les fiches H 1 et H 2.

MON ENQUETE SERA :

JE RECUEILLE LES DONNÉES NUMÉRIQUES

Je veux faire ma propre enquête

. Je pense faire répondre les personnes par écrit :

- Je rédige ma (mes) question(s) que je fais corriger par le professeur de Français si je ne suis pas sûr de l'orthographe.
- Je demande un stencil pour machine à alcool à mon professeur ressource.
- Je peux me grouper avec d'autres camarades qui veulent travailler sur la même "population".
- Si je n'y arrive pas j'écris plusieurs fois les questions sur le stencil afin de limiter le nombre de tirages nécessaires.

. Je préfère enquêter oralement :

- Je prépare la liste des personnes que j'ai décidé d'interroger afin de ne pas interroger plusieurs fois la même.
- Je prépare un tableau avec les différentes réponses susceptibles d'être faites afin de pouvoir comptabiliser facilement par la suite.

AU

TRAVAIL !

JE RECUEILLE LES DONNÉES NUMÉRIQUES

Je cherche des données existantes

Voici quelques documents qui peuvent te donner des idées et qui regorgent de chiffres :

DATA chez Larousse

QUID 91

Tes livres de Biologie et de Sciences Humaines

Tu peux les trouver au C.D.I.

Demande aussi à ton professeur

de Mathématiques

de Biologie

de Sciences Humaines

Ce dernier a en sa possession beaucoup de documents pour t'aider.

Pense aussi à la Mairie de ton village qui possède à présent les renseignements fournis par le dernier recensement.

Enfin, si tu habites près d'une grande ville tu peux aller voir à l'INSEE .

Institut
National de la
Statistique et des
Etudes
Economiques

Pour Montpellier il se trouve :

274 allée Henri II de Montmorency
(près de la Mairie et d'Antigone)

JE RENDS MES DONNÉES PLUS PARLANTES EN CALCULANT DES POURCENTAGES

Si je dis que 48 élèves de mon collège ont redoublé l'année dernière, peux-tu te faire une idée du niveau des élèves de ce collège ?

Consulte la réponse sur la fiche D.

(réponse : ce nombre ne veut rien dire si l'on ne connaît pas l'effectif total du collège)

Je veux calculer les pourcentages de chaque catégorie
Je complète le tableau ci-dessous

"Population" entière étudiée		100
Réponse 1		
Réponse 2		

Je fais autant de lignes que de réponses.

Je complète les cases où figurent les pointillés.

Je calcule l'opérateur.

Je calcule les nombres figurant dans les cadres.

Ces nombres représentent les pourcentages des diverses réponses obtenues.

JE RENDS MES DONNÉES PLUS PARLANTES EN CALCULANT DES POURCENTAGES.

. S'il s'agit d'une évolution dans le temps

surtout s'il y a plusieurs évolutions à comparer
je complète le tableau ci-dessous

Effectif de la première année		100
Effectif de la deuxième année		

. S'il s'agit de faire un diagramme circulaire ou demi-circulaire

je calcule mes pourcentages

je multiplie chaque pourcentage trouvé

par 3,6 si je veux faire un diagramme circulaire

par 1,8 si je veux faire un diagramme demi-circulaire

j'ai ainsi trouvé les mesures en degré des différents secteurs

METHODE DES QUOTAS

Exemple :

Je veux établir le hit parade des chanteurs préférés du collège de Saint Gély du Fesc.

Je cherche ce qui peut avoir une influence sur le choix des élèves.

Je suppose que l'âge et le sexe interviennent.

Voici la répartition des élèves suivant leur date de naissance et leur sexe :

Année de naissance	Filles	Garçons	Effectif total
1980	0	2	2
1979	51	49	100
1978	74	78	152
1977	61	67	128
1976	55	47	102
1975	24	22	46
1974	8	5	13
1973	1	1	2

Je calcule les pourcentages.

Pour cela tu peux te rapporter aux fiches C 1 et C 2.

Il y a :

0,4 % d'élèves nés en 1980	dont	0 % de filles.
18,3 % d'élèves nés en 1979	dont	51,0 % de filles.
27,9 % d'élèves nés en 1978	dont	49,5 % de filles.
23,5 % d'élèves nés en 1977	dont	47,7 % de filles.
18,7 % d'élèves nés en 1976	dont	53,9 % de filles.
8,4 % d'élèves nés en 1975	dont	52,0 % de filles.
2,4 % d'élèves nés en 1974	dont	61,5 % de filles.
0,4 % d'élèves nés en 1973	dont	50,0 % de filles.

MÉTHODE DES QUOTAS

Dans mon échantillon de 50 élèves, je respecte ces pourcentages.
Je vais donc interroger :

$$\frac{50 \times 18,3}{100} \quad \text{soit 9 élèves} \quad \text{de 1979, dont 5 filles}$$

$$\frac{50 \times 27,9}{100} \quad \text{soit 14 élèves} \quad \text{de 1978, dont 7 filles}$$

$$\frac{50 \times 23,5}{100} \quad \text{soit 12 élèves} \quad \text{de 1977, dont 6 filles}$$

$$\frac{50 \times 18,7}{100} \quad \text{soit 9 élèves} \quad \text{de 1976, dont 5 filles}$$

$$\frac{50 \times 8,4}{100} \quad \text{soit 4 élèves} \quad \text{de 1975, dont 2 filles}$$

$$\frac{50 \times 2,4}{100} \quad \text{soit 1 élève} \quad \text{de 1974, 1 fille.}$$

Cette méthode n'est pas facile.

Si tu la choisis montre ton travail à ton professeur de Mathématiques pour qu'il t'aide.

REPRÉSENTATION DE DONNÉES EN SIXIÈME (LECTURE ET CONCEPTION)

Marie-Hélène JABET
IREM de Limoges

I- DES CONSTATS

Cette recherche trouve son origine dans des observations faites à propos d'élèves de sixième du collège Picart le Doux à **Bourganeuf (Creuse)**, collège en milieu rural. Ces observations peuvent être regroupées suivant trois types :

- Les élèves sont confrontés dès la classe de sixième à l'étude de graphiques tant en Mathématiques qu'en Biologie ou en Sciences Humaines. On demande d'ailleurs à ces élèves une lecture et une interprétation rigoureuses.

- Il est également évident que les transferts ne s'effectuent souvent pas d'une discipline à l'autre. Tel savoir-faire acquis en Biologie ne réapparaît pas en Sciences Humaines.

- Si on inscrit le problème de la lecture des graphiques dans le contexte

plus général de la LECTURE on observe une prise d'information seulement partielle.

En particulier, les enfants sont peu sensibles aux liens entre titre, texte et dessin.

A ce propos on peut se demander si on ne valorise pas en Mathématiques des productions très décontextualisées : un élève qui fournit un diagramme circulaire respectant les proportions angulaires ne se verra pas pénalisé s'il a, par exemple, oublié le titre.

II-RÉFLEXIONS A PROPOS DES GRAPHIQUES

◊ Il est important que le lecteur de graphique comprenne qu'il vit une situation de communication.

A l'origine du graphique il y a un auteur qui a choisi le mode de représentation et le texte accompagnateur en fonction de ses outils, du contexte, de ses propres idées, du type de lecteur, de son dessein...

Pour que les enfants conduisent une réflexion sur ce problème il paraît donc nécessaire qu'ils vivent les *deux* situations de *lecteur* et de *concepteur*.

◊ Les graphiques privilégient nettement la *dimension visuelle*. C'est justement cet aspect perceptif qui pose problème au consommateur comme aux élèves et qui peut faire négliger l'environnement écrit (et même annihiler l'esprit critique).

De plus, dans l'expérience des enfants, les occasions sont rares de travailler sur des documents où textes et dessins sont intimement liés : bandes-dessinées, graphiques, contes illustrés, photographies avec une légende...

◊ Faut-il attendre la classe de seconde comme le suggèrent les Instructions Officielles pour entraîner "les élèves à la pratique de la démarche propre à la statistique :

- lecture de données sur les individus d'une population
- choix des résumés à mettre en œuvre pour décrire cette population
- exécution des calculs
- présentation des résultats
- contrôle et analyse critique des résultats" ?

Ne faut-il pas leur faire jouer beaucoup plus tôt un rôle de concepteur ?

III-COMPTRE-RENDU D'EXPÉRIENCE

Elle a porté sur quatre classes de sixième en 1989-90 puis sur deux autres l'année suivante, et se compose de huit séquences.

Pour les séquences 1 et 2 (contexte d'un graphique), ainsi que pour les séquences 3, 4 et 5 (utilité des différents modes de représentation), l'élève est en situation de lecteur.

Pour la séquence 6 (apprendre à tracer des graphiques), ainsi que pour les séquences 7 (démarche statistique) et 8 (critique), l'élève est en situation de concepteur.

A chaque fois, la consigne était écrite au tableau et y restait durant toute la séance, après avoir été commentée par le professeur.

Séquence 1

Durée : une heure

Document remis à chaque élève : fiche A (voir en annexe)

Cette fiche reprend des activités du livre de CM1 Objectif calcul (Hatier)

Objectif :

- L'élève étant mis en situation de lecteur, lui demander d'identifier pour chaque document de la fiche A : des auteurs possibles, des intentions probables des auteurs et d'autres lecteurs possibles (que lui-même).

Consigne :

- Pour chaque document, indique dans un tableau qui a donné ces informations, pour qui, pour quoi faire.

qui ?	pour qui ?	pour quoi faire ?

- Une fiche par groupe (ceux qui ont fini plus tôt peuvent remplir une autre colonne intitulée : que peut-on être amené à chercher ?).

Gestion de la classe :

- Tout d'abord un travail de lecture et de réflexion individuel (sans rien écrire), 5 à 10 min suivant les élèves.

- Puis un travail par groupe de deux (ou de quatre) permettant d'éviter l'écueil de la page blanche en raison de la difficulté de la tâche et pour pouvoir gérer plus facilement la séquence suivante.

Rôle du professeur :

- Observation du travail des élèves et non intervention sauf à la demande de l'un d'entre eux.

- A la fin de la séquence, collecte des productions.

- Elaboration de la fiche de synthèse des réponses qui sert de support à la deuxième séquence (devant nécessairement avoir lieu assez rapidement après la première).

Remarques :

- L'expérience sur deux ans montre que dans le collège précité les productions d'élèves varient peu d'une année sur l'autre.

- La fiche A fait apparaître à posteriori une certaine difficulté de lecture due à l'interprétation et à la disposition des documents proposés ; de plus le seul document dont on ne peut identifier l'auteur est malencontreusement placé le premier.

- A titre d'anecdote, dans le document III, environ 15 % des élèves n'ont pas pu lire le mot "tué", les majuscules étant privées d'accent.

- Des productions d'élèves relatives aux documents IV et V sont jointes en annexe.

Séquence 2

Durée : une heure

Document remis à chaque élève : fiche B (voir en annexe)

Afin que la séance ne dépasse pas une heure, cette fiche ne reprend que des réponses d'élèves relatives aux documents I, II et III.

Les réponses prises en compte sont celles apparues le plus souvent (comme le ministre du budget pour le document I), mais figurent aussi quelques réponses marginales (comme téléspectateurs pour le document III).

Objectif :

- Faire analyser par les élèves la synthèse des réponses de la classe.

Consigne :

- Après avoir lu les réponses des élèves à propos de la fiche A, barre au crayon noir les réponses qui te paraissent fausses (10 min).

- Un des élèves d'un groupe viendra donner oralement ses réponses au tableau (5 min).

Gestion de la classe :

- En groupe, les élèves disposant toujours de la fiche A.

Rôle du professeur :

- Intervient seulement dans les parties de débat.

- Insiste sur les points suivants :

- Il n'existe pas forcément une seule réponse aux questions posées.

- Lorsque la source du document n'est pas citée (le document I) il est

difficile de retrouver le contexte.

- Il est capital de lire correctement tous les renseignements, les textes accompagnateurs.
- Peut à la fin de la séquence prévoir une institutionnalisation donnant, sous forme d'un texte, les grands traits d'une méthodologie de lecture de graphique : recherche du contexte, de la date, de la source, du thème... (l'élève se reportera également à ce guide de lecture lorsqu'il devra communiquer une information à l'aide d'un graphique).

Séquence 3

Durée : une heure

Document remis à chaque élève : fiche C (voir en annexe)

Objectif :

- Regrouper des documents différents réalisés à partir de mêmes données statistiques pour forcer la lecture précise des indices.

Consigne :

- Chaque groupe écrit sur une affiche quels sont les documents qui vont ensemble et pour quelles raisons. Ces raisons seront discutées au tableau.

Gestion de la classe :

- D'abord un travail silencieux et individuel pour prendre connaissance du document (10 min au moins), puis un travail par groupe de quatre pour favoriser l'argumentation et la diversité des prises d'indices.

Rôle du professeur :

- Observation des élèves pendant la première phase, puis au moment du débat un rôle d'animation (donner la parole aux élèves voulant exposer d'autres arguments).
- En synthèse, faire le listing de toutes les raisons données par les élèves.

Remarques :

- La pauvreté des affiches montre que l'objectif «méthodologie de lecture» est loin d'être atteint au niveau du repérage des indices.
- Six documents sont proposés. Certains les groupent automatiquement par deux mettant souvent le I avec le IV ! (l'argument des élèves étant alors que le document I, daté 1/1/83, ne peut s'apparier ni avec le II ni avec le VI datés 1982).
- L'âge pose d'ailleurs une autre difficulté à cause des tranches 0 à 14 ans, puis 15 à 25 ans (les 14 ans et demi ont disparu !).

- Dans le document I difficulté de lecture des âges à cause de la graduation.

- Les documents sont volontairement décontextualisés (certains élèves font remarquer qu'il n'y a pas la source) pour brouiller les pistes.

Séquence 4

Durée : une heure

Les documents mentionnés dans cette séquence sont ceux de la fiche C

Objectif :

- Reconnaître la spécificité du document VI (données précises).

Consigne :

- Trouve pour chaque document I, II et VI, le nombre de "femmes" de 0 à 14 ans dans le Limousin en 1982 (c'est à dire aussi au 1/1/83).
- Les résultats obtenus sont-ils les mêmes ?
- Quel est le plus précis ?
- S'il y en a un qui est plus précis, à quoi servent les autres ?

Gestion de la classe :

- Individuelle : 5 min (lecture des consignes et réflexion).
- En groupe pour le côté sécurisant, étant donné qu'il est impossible de répondre à la question pour le document II (diagramme circulaire) et pour gérer plus facilement les demandes d'explications.

Rôle du professeur :

- Observation des élèves.
- Mais surtout déblocage des situations difficiles en faisant remarquer qu'il faut utiliser le renseignement donné en bas du document I (et peut-être compter les points), sachant que l'objectif n'est pas ici un apprentissage de la proportionnalité.
- Et encore sécuriser les enfants (après leurs recherches infructueuses) au sujet du document II.
- Proposer aux groupes plus rapides le même calcul pour les autres tranches d'âge : 15 à 25 ans...
- *L'institutionnalisation* consiste à faire remarquer que dans un tableau, on a accès aux données exactes.

Séquence 5

Durée : une heure

Document remis à chaque élève : fiche D (voir en annexe)

Objectif :

- Découvrir la spécificité que peuvent avoir les documents I et II de la fiche C.

Consigne :

- Essaye de répondre aux questions par toi-même (15 min). Puis rédiger en groupe une fiche réponse (15 min) ; cette fiche sera lue au tableau par le rapporteur que les élèves du groupe auront désigné.

Gestion de la classe :

- Individuelle puis en groupe (pour gérer plus facilement le débat), les élèves disposant toujours de la fiche C.

Rôle du professeur :

- Au moment de la lecture des fiches donner les bonnes réponses (il n'y a pas le choix) si elles n'ont pas été découvertes, en faisant ressortir l'intérêt de chaque document.
- L'institutionnalisation consiste à faire noter que pour une série de données numériques il y a plusieurs modes de représentation. Il est important d'en connaître de nombreux de façon à choisir le plus approprié à l'information que l'on veut donner.

Séquence 6 (non relatée ici, car plus classique)

Durée : plusieurs heures

Objectif :

- Apprendre à traduire des données sous forme d'un pourcentage, d'une «illustration» (qui peut être au niveau sixième un diagramme en secteurs ou en bâtons, un tableau, une courbe sur axes gradués).

Séquence 7

Durée : deux heures

Objectif :

- Faire vivre aux élèves une pratique de démarche statistique.

Consigne :

- Chaque groupe préparera une grande affiche comportant au moins trois modes de représentation différents pour les moyennes obtenues en Mathématiques par les élèves de la classe. Cette affiche sera exposée à l'autre groupe.

Gestion de la classe :

- Par groupe de quatre, les groupes étant associés deux à deux.

Rôle du professeur :

- C'est ici une personne-ressource qui intervient à la demande.

Remarques :

- Le fait d'avoir à fabriquer une affiche pour un autre groupe d'élèves fait vivre une situation de communication et sensibilise les élèves à la présentation des textes accompagnateurs.
- Certains élèves ont eu des difficultés pour la classification et la répartition des données.
- Pour certains groupes plus rapides que d'autres, on peut proposer de faire plus de trois représentations.
- On trouve, dans les affiches, des représentations étudiées (diagrammes circulaires ou en bâtons) mais aussi des pyramides (comme celle des âges) et même des rectangles (ou bien des carrés) à cent cases, réminiscence de l'apprentissage des pourcentages.
- Des productions d'élèves sont jointes en annexe.

Séquence 8

Durée : une heure

Objectif :

- Contrôle et critique d'une production.

Consigne :

- Contrôler l'affiche donnée par l'autre groupe et critiquer s'il y a lieu cette production (30 min).
- Lire la fiche de critiques donnée par l'autre groupe, puis modifier la vôtre s'il y a lieu (30 min).

Gestion de la classe :

- Par groupe de quatre, les groupes étant associés deux à deux.

Rôle du professeur :

- Il intervient à la demande en cas de litige.

Remarque :

- Les élèves sont particulièrement sensibles à la propreté des affiches et se montrent même à ce sujet plus critiques que le professeur.

Prolongement ...

Il est possible de mettre en place une neuvième séquence ayant deux objectifs :

- Apprendre à vérifier la véracité des renseignements proposés par certaines "illustrations" de données.

→ Mettre en doute les graphiques non ou mal contextualisés à dessein afin de leurrer le consommateur non averti (les documents prennent alors une connotation scientifique plus sérieuse).

IV-CONCLUSION

Nous vivons dans une période caractérisée par l'afflux d'informations visuelles avec un rôle de l'image prépondérant.

Une des missions de l'école est d'éduquer. Les enseignants ne peuvent ignorer les changements intervenus dans la transmission des informations tant au niveau qualitatif que quantitatif.

L'exercice de la citoyenneté passe entre autres par deux capacités :

- L'analyse d'informations reçues sous toutes les formes (tableaux, graphiques...)
- La communication d'informations de manière appropriée à la finalité recherchée.

Au niveau des collègues, ces deux capacités pourraient devenir des objectifs transdisciplinaires. Cela suggère l'idée de mener ce type de travail parallèlement dans différentes disciplines (Sciences Humaines, Biologie, Sciences Physiques, Education Civique). Cette pratique aurait l'avantage de faciliter le transfert d'apprentissage.

La volonté ici manifeste de diversifier les représentations, leurs utilisations, les disciplines, fait écho à la phrase de Guy Brousseau : "à enseigner trop bien dans un environnement limité, on peut bloquer la reprise de ce savoir quand l'environnement devient différent".

Les fiches A et C sont réalisées avec des documents extraits des ouvrages ou fascicules suivants :

» *Education Civique 6ème*

DELAGRAVE (P.Wirth, L.Wirth, P.Pommier)

» *Sciences et techniques biologiques 6ème*

HACHETTE Classiques (G.Miquel, D.Moser, B.Msihid, C.Piazzini)

» *Femmes en chiffres Limousin*

*Préfecture de Région - Délégation Régionale à la Condition Féminine
INSEE*

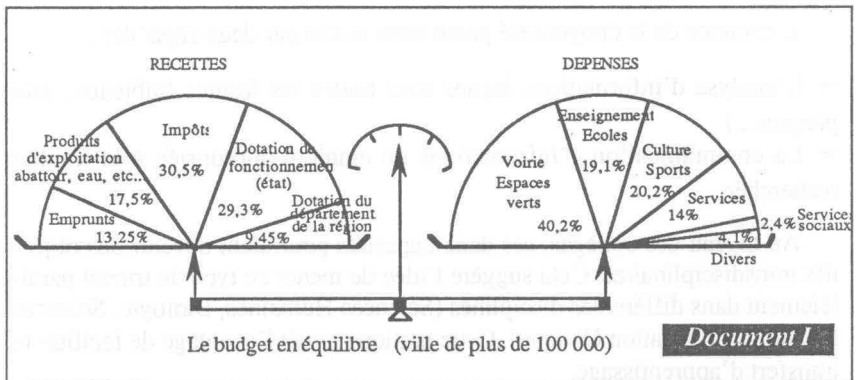
» *Fiches Collège MATHS 4ème/3ème*

La Prévention Routière

FICHE A

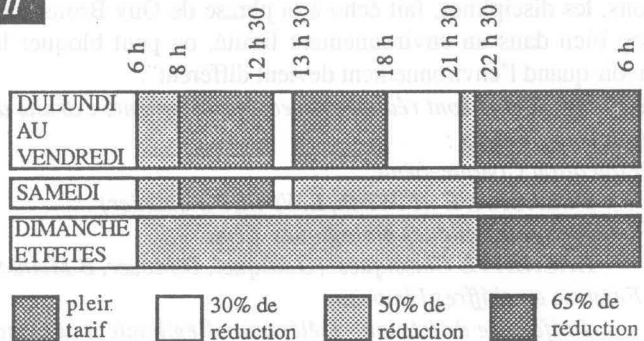
Document I	
Document II	Document III
Document IV	Document V

Répartition des documents sur la fiche
remise aux élèves



Document II

Tarif des communications téléphoniques



ces tarifs s'appliquent aux
communications échangées
à l'intérieur de la France métropolitaine

FRANCE

TELECOM

FICHE B

RÉPONSES DES ÉLÈVES

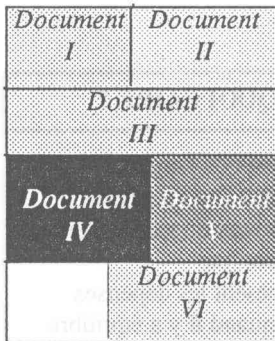
	QUI ?
d o c u m e n t I	- le ministre du budget - les impôts - les professeurs - le maire - l'état - la banque - les commerçants - les gens qui dépensent trop - la commune de plus de 10 000 habitants
d o c u m e n t II	- le professeur - le chef d'EDF - les marchands de journaux - France Télécommunications - la banque
d o c u m e n t III	- les hôpitaux - le président de chaque pays - les agents recenseurs - la prévention routière - la police des états

FICHE B

RELATIVES A LA FICHE A

POUR QUI ?	POUR QUOI FAIRE ?
- les habitants - l'état - les élèves - les parents - les citoyens - le préfet - le maire - le budget - les commerçants - les impôts	- savoir donner de l'argent - savoir ce que l'on va gagner - savoir combien on gagne d'argent - se rendre compte - combien pèsent les dépenses - connaître quand il y a équilibre
- les utilisateurs - les parents (les gdes personnes) - les abonnés - ceux qui ne veulent pas se déplacer	- pour téléphoner - pour savoir - pour payer moins cher - pour connaître les tarifs (et les heures moins chères) - nous apprendre à lire ce qui est écrit
- les habitants - la population - les français - les élèves - toutes les personnes - les maires - les téléspectateurs	- savoir le nombre d'habitants - savoir ce qui se passe dans le monde - s'informer - voir s'il y a des victimes - comparer la France aux autres pays - connaître le nombre de tués dans une année - savoir si le pays se maintient

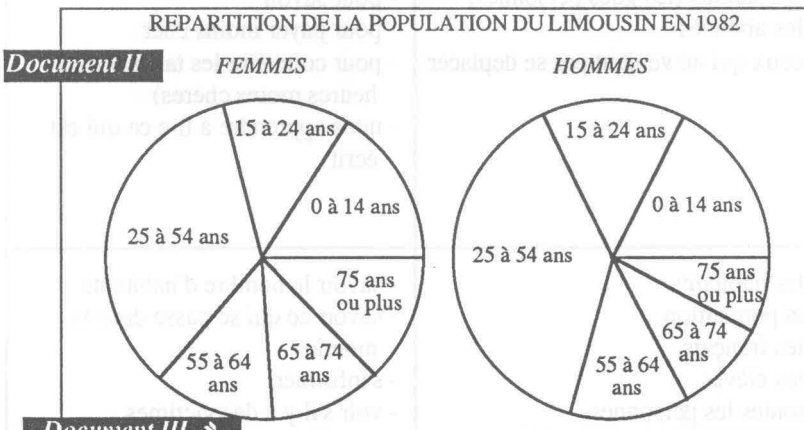
FICHE C



Disposition des documents sur la fiche remise aux élèves

LIMOUSIN (âge au 1/1/83)

Document I



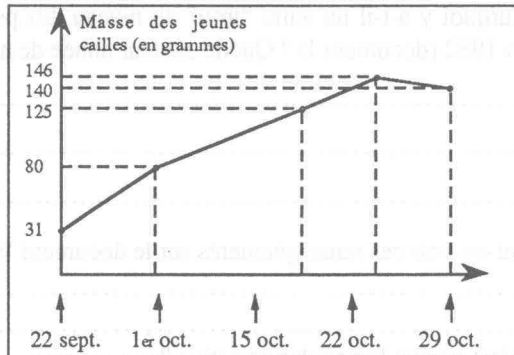
MASSES / DATES ➡	22 sept.	1er oct.	15 oct.	22 oct.	29 oct.
Jeunes cailles nourries avec de la farine d'élevage	31 g	80 g	125 g	146 g	140 g
Jeunes cailles nourries avec une demi-ration de farine d'élevage	29 g	37 g	53 g	62 g	82 g

FICHE C

Vitesse en km/h	25	50	75	100	125	150
Distance parcourue en 1 sec (en m)	8	16	24	32	40	48
Temps de freinage (en s, route sèche)	1	2	3	4	5	6
Distance de freinage (route sèche)	8	32	72	128	200	288
Temps de freinage (route mouillée)	2	4	6	8	10	12
Distance de freinage (route mouillée)	16	64	144	256	400	576
Distance d'arrêt (réaction 1/2 s route sèche)	12	40	84	144	220	312
Distance d'arrêt (réaction 1/2 s route mouillée)	20	72	156	272	420	600
Distance d'arrêt (réaction 1s. route sèche)	16	48	96	160	440	336
Distance d'arrêt (réaction 1 s, route mouillée)	24	80	168	288	440	624

Document IV

Document V →



Document V ↘

Age atteint en 1982	Femmes	%	Hommes	%	Ensemble	%
0 à 14 ans	60 184	15,9	62 528	17,5	122 712	16,7
15 à 24 ans	49 876	13,1	52 364	14,7	102 240	13,9
25 à 54 ans	132 360	34,9	136 596	38,2	268 956	36,5
55 à 64 ans	46 808	12,3	43 660	12,2	90 468	12,3
65 à 74 ans	42 384	11,2	34 584	9,7	76 968	10,4
75 ans ou plus	47 660	12,6	27 572	7,7	75 232	10,2
TOTAL	379 272	100,0	357 304	100,0	736 576	100,0

FICHE D

Questions à propos de certains documents de la fiche C

1) Pourquoi y a-t-il très peu de points vers le haut sur le document I ?

.....

.....

2) Pourquoi y a-t-il comme un trou au niveau des personnes qui avaient 65 ans en 1982 (document I) ?

Quelle est leur année de naissance ?

.....

.....

.....

3) Pourquoi y a-t-il un autre "trou" au niveau des personnes qui avaient 40 ans en 1982 (document I) ? Quelle est leur année de naissance ?

.....

.....

.....

4) Peut-on voir ces renseignements sur le document VI ?

.....

.....

5) Qu'est-ce que la population active ?

Colorie la part correspondant à la population active sur les disques du document II.

Est-elle grande par rapport à l'autre ?

Voit-on cela facilement sur le document VI ?

.....

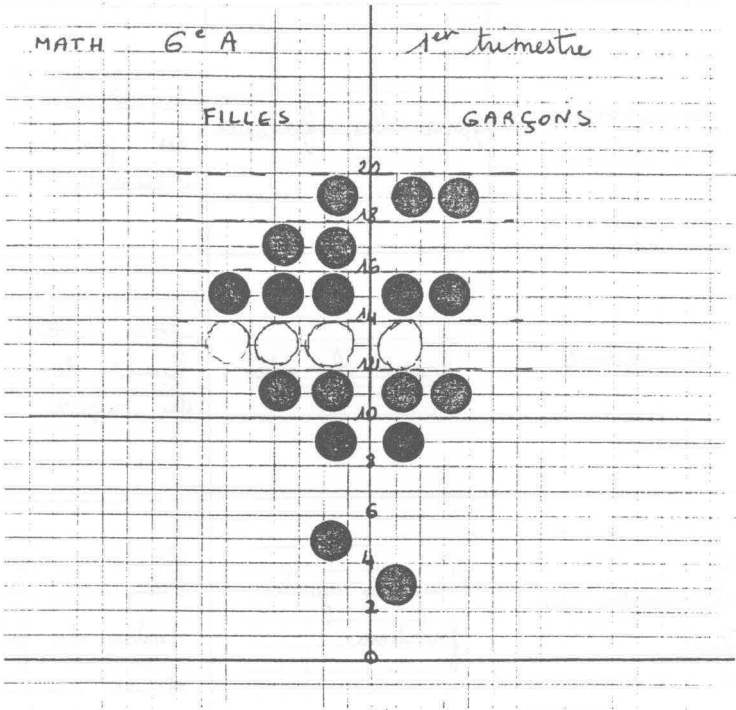
.....

.....

PRODUCTIONS D'ELEVES (séquence 1)

	qui ?	pour qui ?	pour quoi faire ?
d o c u m e n t IV	des savants	pour les forestier	à calculé le % des feuilles ou des résineux
d o c u m e n t V	des savants	pour l'état	pour savoir le nombre de population des régions
d o c u m e n t IV	Le ministre des forêts	Pour les gardes forestiers	Pour voir le nombre de feuilles et de résineux
d o c u m e n t V	Le ministère des populations au Limousin	Pour le Limousin	Pour savoir la densité de population en Limousin

PRODUCTIONS D'ELEVES (séquence 7)



MATH 6^e A 1^{er} TRIMESTRE

au dessus de 18	de 10 à 12	de 8 à moins 10 de 6
de 16 à 18	de 14 à 16	de 12 à 14

LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DANS L'ENVIRONNEMENT DES ÉLÈVES : LE RÔLE DES MATHÉMATIQUES

Anne-Marie MONFRONT

IREM de Paris VII

Tout l'environnement de nos élèves est imprégné de diagrammes. Ils en rencontrent dans les journaux d'adultes ou de jeunes, à la télévision, dans leurs manuels scolaires (Biologie, Histoire, Géographie, Education Civique, Physique...). De plus, plusieurs les utiliseront dans leur métier, par l'intermédiaire de logiciels, pour transmettre ou recevoir des informations.

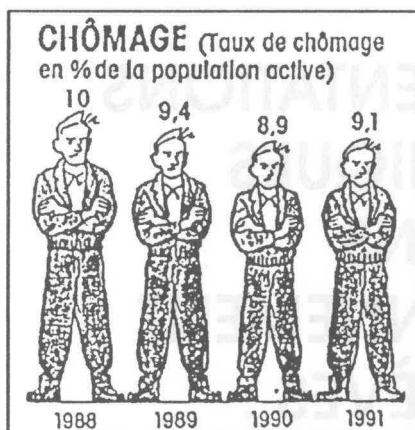
Le cours de Mathématiques ne peut ignorer cet état de fait ; encore plus qu'à propos d'autres notions, il serait vain et artificiel de faire table rase de toutes ces connaissances pour construire un édifice rigoureux et pur.

Comment partir de ces expériences variées ? Comment les utiliser ? Quel

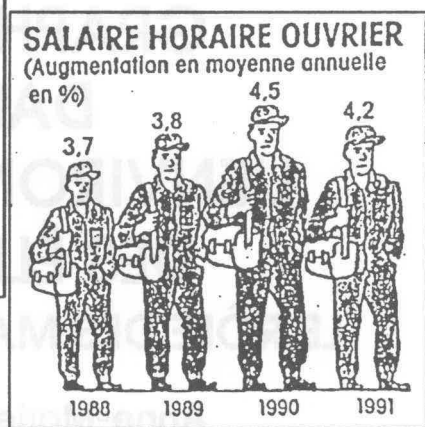
rôle peut avoir, dans cette optique, au Collège, l'enseignement des Mathématiques sur les représentations graphiques ?

L'ÉTAT DES LIEUX

De nombreux graphiques servent d'**illustrations** ajoutées au texte, à la fois pour attirer l'oeil, rompre la monotonie et pour mettre en valeur une conclusion qualitative.

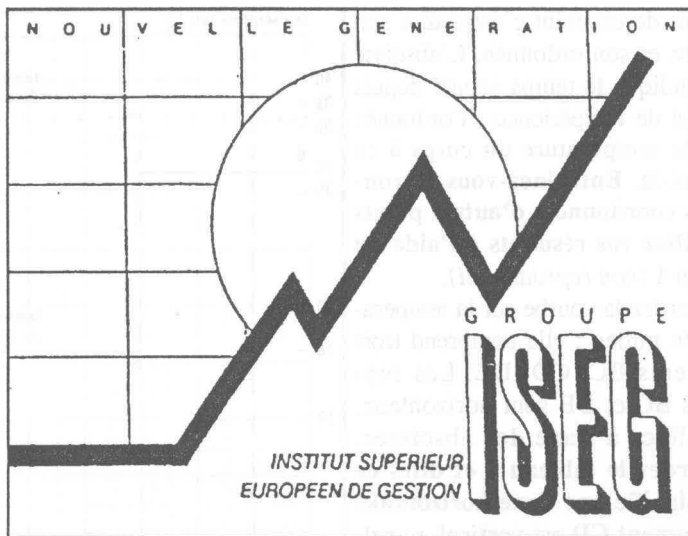


*Le Nouvel Observateur
(janvier 1991)*



Dans la représentation ci-dessus, l'attention est attirée sur les évolutions contraires du taux de chômage et de l'augmentation des salaires ouvriers ; la notion d'échelle, de proportionnalité des nombres avec les hauteurs ou les surfaces (ou les volumes) des personnages n'apparaît pas.

Dans cette première optique, notre souci de rigueur mathématique n'a peut-être pas sa place ; de toutes façons, ce type de langage est si répandu que nous ne pourrions mener qu'un combat d'arrière-garde. Pour ne pas renoncer à tout travail interdisciplinaire ou basé sur l'actualité, il vaut mieux apprendre à nos élèves l'intérêt et les limites de ce type d'illustration. Dans cet esprit, il est bon d'apprendre à "lire" avec la distance qui convient les nombreux messages publicitaires tels que le suivant :



D'autres graphiques sont utilisés comme **outil d'étude** plus parlant qu'un tableau. L'aspect mathématique y a davantage sa part mais là encore, il vaut mieux rejeter toute hégémonie. En Biologie, voir le document ci-après, il est par exemple question de croissance continue ou discontinue là où nous n'emploierions pas ces termes ; des évolutions de tailles ou de températures sont représentées avec des segments verticaux ; deux échelles verticales différentes sont utilisées sur un même graphique. On peut à l'occasion montrer le point de vue des mathématiciens sans condamner ce qui est présenté de façon parlante pour l'objectif poursuivi.

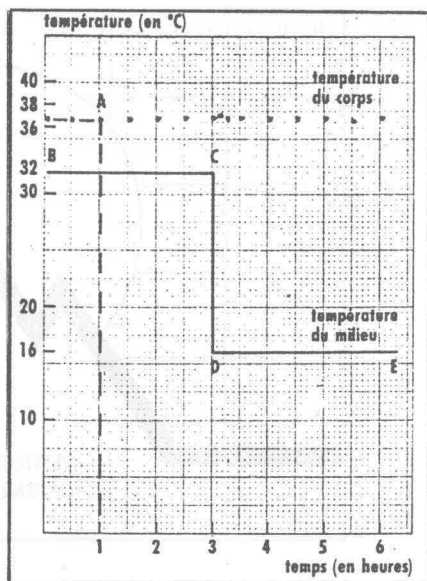
La seule lecture du graphique permet d'aboutir à la même conclusion. Il est surtout plus parlant qu'un tableau de données numériques. **Mais pour cela, il faut apprendre à le lire.**

- Regardez toujours en premier les deux axes qui servent de repère : l'axe horizontal ou axe des abscisses et l'axe vertical ou axe des ordonnées.
- Lisez ce que représentent les axes : ici le temps est en abscisse et la température en ordonnée. D'une façon générale on représente en ordonnée le facteur qu'on veut étudier.
- Regardez sur chaque axe l'échelle utilisée (1cm = 20 minutes en abscisse ; 1cm = 4°C en ordonnée).
- Regardez sur le graphique le point A. Il faut être capable de lire les coor-

données de ce point c'est à dire son abscisse et son ordonnée. L'abscisse de A indique le temps écoulé depuis le début de l'expérience ; l'ordonnée de A la température du corps à ce moment-là. **Entrenez-vous à trouver les coordonnées d'autres points et vérifiez vos résultats à l'aide du tableau 1 (non reproduit ici).**

- Regardez la courbe sur la température du milieu ; elle comprend trois segments BC, CD, DE. Les segments BC et DE sont horizontaux, parallèles à l'axe des abscisses. **Regardez le tableau 1 et dites ce que signifie une ligne horizontale.** Le segment CD est vertical, parallèle à l'axe des ordonnées : **dites ce qu'il signifie.**

- On peut réunir les points représentant la température du corps. On obtient ainsi une courbe représentant les variations de la température du corps en fonction du temps. **Construisez cette courbe ; comment est-elle ? Que signifie-t-elle ? En construisant cette courbe, que suppose-t-on ?**



La croissance d'une chenille de papillon.

Observez les deux courbes qui traduisent, en fonction du temps :

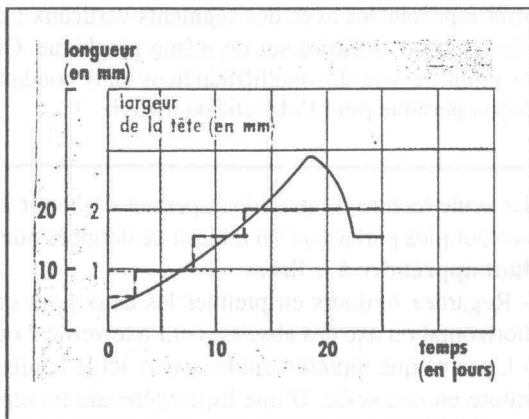
- l'une l'évolution de la taille de la tête de la chenille,

- l'autre l'évolution de la longueur totale du corps.

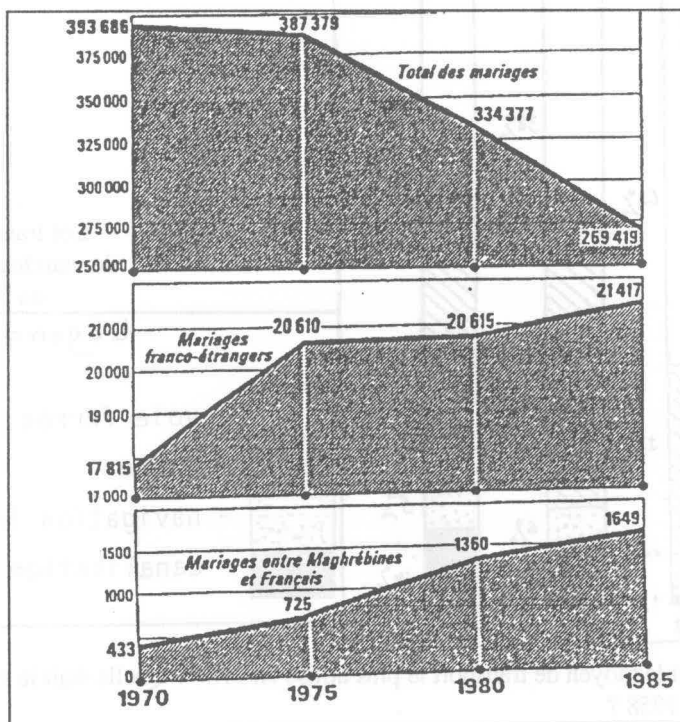
Comparez ces courbes de croissance et complétez la phrase suivante :

Tandis que la tête de la chenille présente une croissance *discontinue*, l'ensemble du corps, lui, s'accroît de manière *continue*.

Emettez une hypothèse pour expliquer cette différence.



Il y a sans doute une limite (personnelle ?) au-delà de laquelle on peut déplorer la présentation d'un graphique trop trompeur, au moins à première vue, ou trop difficile à interpréter correctement. Par exemple, ce graphique paru dans *Le Monde* est très différemment admis par les uns ou les autres.



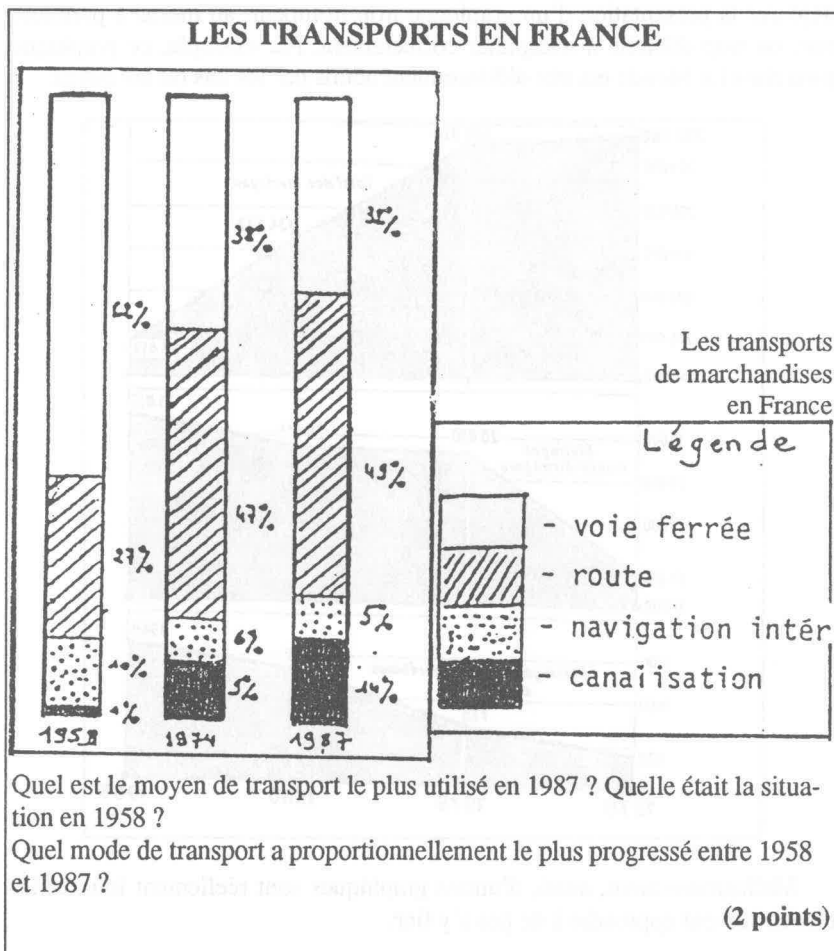
Malheureusement, aussi, d'autres graphiques sont réellement faux et les élèves doivent apprendre à ne pas s'y fier.

Mais nous pouvons trouver de nombreux diagrammes qui sont riches d'informations. Ils méritent une étude qui a tout à fait sa place dans les objectifs des programmes actuels du Collège. Nous allons en présenter un exemple.

PRÉSENTATION D'UN EXEMPLE D'ÉTUDE

Voici un document et des questions extraits de l'épreuve d'Histoire et Géographie du Brevet des Collèges des Académies de Paris, Versailles,

Créteil (juin 1990) (photocopie du sujet distribué aux élèves).



On peut envisager plusieurs niveaux d'étude. Ce travail a été réalisé dans une classe de troisième.

Le graphique, résumé d'informations

Dans l'esprit de l'épreuve du Brevet, ce diagramme résume et visualise des informations permettant, en particulier, une réponse rapide aux trois questions posées (2 points sur 36, durée de l'épreuve 2h).

Déjà à ce niveau, une certaine habitude de lecture est nécessaire ; il y a deux sortes de comparaisons : l'importance relative des divers transports au cours d'une même année (les deux premières questions), et les évolutions de ces pourcentages (troisième question). La réponse à cette dernière question, d'après les collègues qui ont surveillé ou corrigé, a rarement été exacte ; on peut en attribuer la cause au libellé de la question ou à la notion sous-jacente. Il y a une difficulté réelle, surtout si les élèves n'ont pas été confrontés en troisième ou les années précédentes à des situations semblables qui ont tout à fait leur place dans un cours de Mathématiques.

Le graphique "producteur"

Le diagramme précédent peut, en classe de Mathématiques, être la source de questions, de conjectures et être le point de départ d'une étude plus approfondie

La notion de grandeur-produit

Une des premières questions qui se posent est celle de l'unité choisie pour "mesurer" ces transports : des tonnes peut-être, mais pour les canalisations, ce ne serait pas judicieux, des mètres-cubes peut-être. Dans les deux cas, la notion de grandeur-produit, qui est à présenter en classe de troisième (ici tonne-km ou $\text{m}^3\text{-km}$) est utile dans cet exemple.

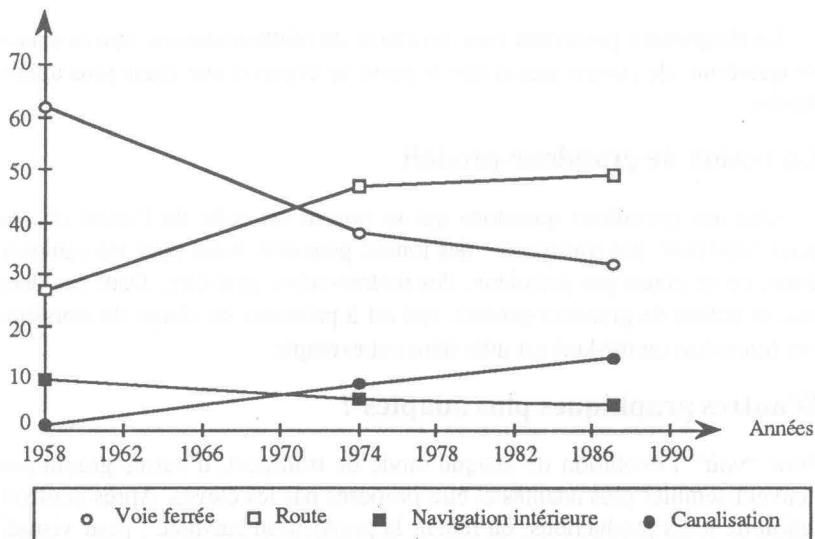
D'autres graphiques plus adaptés ?

Pour "voir" l'évolution de chaque mode de transport, d'autres graphiques peuvent sembler plus adaptés et être proposés par les élèves. Après confrontation de leurs productions, on retient la proposition suivante : pour visualiser aussi les dates et donc mieux l'évolution, il est bon de faire un graphique avec les dates en abscisse, tenant ainsi compte de leurs écarts différents : 16 ans et 13 ans. En plaçant en ordonnées les pourcentages de chaque mode de transport et en joignant les points correspondant à un même transport, on obtient quatre courbes visualisant l'évolution de chacun. C'est l'occasion d'aborder ou de revoir la signification de chaque point des courbes et la notion sous-jacente de variable continue ou discrète. On voit mieux sur ces courbes par exemple la diminution en pourcentage de la navigation intérieure. Par contre on perd la vision de la place relative de chaque mode de transport par rapport à l'ensemble : par exemple le fait que la route représente environ la moitié de l'ensemble des transports en 1987 saute moins aux yeux.

	1958	1974	1987
Voie ferrée	62	38	32
Route	27	47	49
Navigation intérieure	10	6	5
Canalisation	1	9	14

Tableau constitué avec les données relevées sur le document fourni

Valeurs en %



Ce graphique, comme le diagramme présenté, ne nous renseigne que sur l'évolution relative de chaque mode de transport, mais on ne sait pas si les transports par voie ferrée ont augmenté ou diminué en valeur brute (on peut avoir rencontré ces types de questions dans le Suivi Scientifique de Quatrième, page 314, population active et population totale de la France).

Vers une analyse plus poussée

Voir le mode de transport qui a "proportionnellement le plus augmenté" est aussi difficile sur les deux graphiques. Ce n'est pas le mode de transport dont l'augmentation est la plus grande, c'est à dire celui qui correspond à la

courbe qui monte le plus vite ; il faut remarquer que, pour les canalisations, le pourcentage est passé de 1 à 14 de 1958 à 1987, alors qu'il n'a pas doublé pour la route.

Cette comparaison peut se lire sur les deux graphiques mais avec une certaine habitude et sans doute les nombres aident plus que la représentation.

Pour comparer ce qui a "proportionnellement le plus augmenté", l'outil "base 100" est bien adapté. L'utilisation fréquente des pourcentages en troisième et dans les années précédentes les rend disponibles assez naturellement à la plupart des élèves. Ils constituent un tableau en prenant pour base 100 en 1958. Il est nécessaire pour plusieurs élèves d'utiliser un tableau de proportionnalité tel que, pour la route :

en 1958	en 1987
27	49
100	?

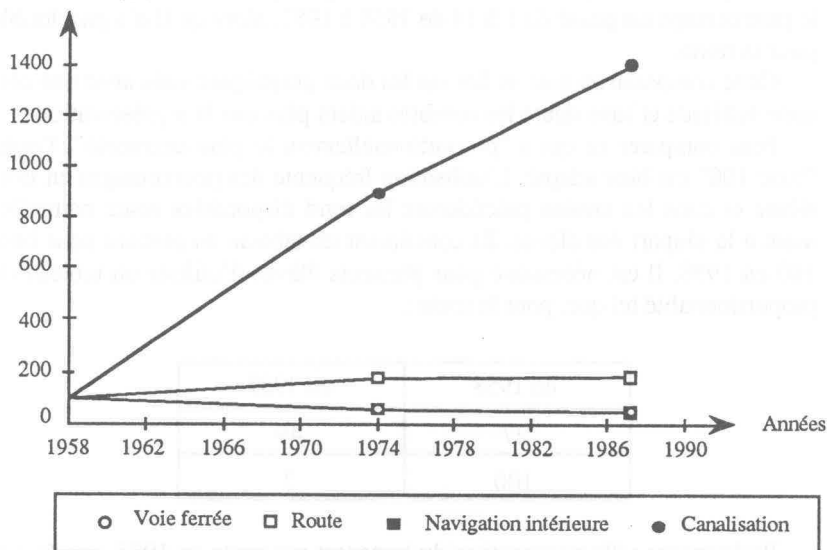
Ils énoncent : "le pourcentage du transport par route en 1987, représente 181,5% du pourcentage du transport par route en 1958".

Ce rapport de pourcentages permet d'analyser la situation sous l'aspect de l'évolution relative de chaque mode de transport c'est-à-dire dans l'optique de la troisième question posée au Brevet. Ce problème peut avoir été déjà soulevé en quatrième (voir Suivi Scientifique Quatrième p.317, la production industrielle en URSS de 1928 à 1937).

Le tableau général des nombres rapportés à la base 100 en 1958 est alors constitué et les courbes correspondantes sont dessinées.

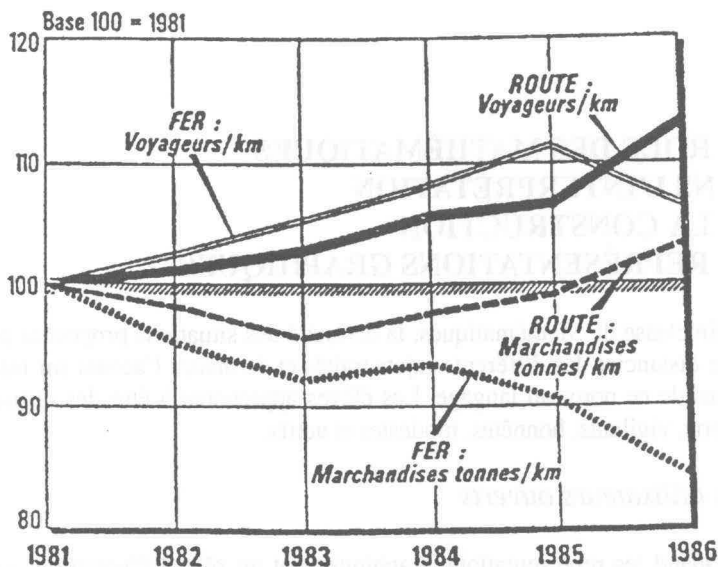
	1958	1974	1987
Voie ferrée	100	61,3	51,6
Route	100	174	181,5
Navigation intérieure	100	60	50
Canalisation	100	900	1400

Base 100 en 1958



Ce graphique totalement différent des précédents est long à établir mais son exploitation apporte de nombreux renseignements difficiles à lire sur les autres. Par contre, il perd des données comme celles demandées dans les deux premières questions du Brevet : il occulte complètement la place relative de chaque variable étudiée par rapport aux autres. La forte croissance a une moindre importance s'il s'agit d'un phénomène de faible part relative, comme dans cette étude le transport par canalisations. Il existe des modes de représentations plus complexes tenant compte à la fois des deux paramètres : part relative et indice de croissance.

Pour réinvestir et consolider ces notions, le graphique suivant est intéressant à observer et à commenter. Attention, les unités sont des grandeurs-produits, écrites incorrectement voyageurs/km au lieu de voyageurs·km. On remarque que dans une comparaison d'indices, les unités peuvent être différentes pour les divers types de transport.



Source : Commission des comptes des transports de la nation

La route bat le rail

Le Monde
(Décembre 1987)

La forte baisse des carburants en 1986 a provoqué des dégâts dans les transports ferroviaires et avantagé les transports routiers. En matière de voyageurs, la voiture particulière progresse de 4,6% et les autocars de 1,8% alors que le fer régresse de 3,2%. En matière de transport de marchandises, la route reste à la hausse (+ 4,2%) alors que ses concurrents reculent (- 6,9% pour la voie d'eau et - 7,5% pour le fer).

LE RÔLE DES MATHÉMATIQUES DANS L'INTERPRÉTATION ET LA CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES.

En classe de Mathématiques, la diversité des situations proposées permet de se distancier des différents sujets traités et de mettre l'accent sur les techniques de ce nouveau langage. Les élèves apprennent à être des utilisateurs ouverts, vigilants, honnêtes, modestes et actifs.

Des utilisateurs ouverts

Quand les représentations graphiques ont un rôle d'illustration, visualisant un phénomène, l'objectif peut être plus qualitatif que quantitatif ; l'essentiel est de comprendre ce langage, en restant conscient des imprécisions, sans tout rejeter pour autant.

Des utilisateurs vigilants

Les graphiques résumés, concentrés d'informations quantitatives, méritent une lecture attentive et vigilante. Il est utile d'apprendre à travers des observations et des constructions ce que l'on peut lire ou non selon le type de diagramme, le choix des échelles. Reprenons deux exemples cités.

Les diagrammes en barres comme celui des transports en France ne visualisent pas l'évolution dans le temps : si la deuxième date était beaucoup plus proche d'une date extrême que de l'autre, il faudrait se méfier de l'impression donnée par l'image qui ne refléterait pas du tout l'évolution réelle.

On ne peut pas tirer les mêmes conclusions d'un graphique dont l'échelle verticale commence à 0 ou non. Dans l'exemple des mariages en France, il est bien entendu "difficile" de comparer des données représentées avec des échelles extrêmement différentes. Mais de plus, on peut constater que les mariages entre Maghrébines et Français ont quadruplé de 1970 à 1985 alors qu'une remarque de cette sorte ne peut se faire sur les deux autres. Une lecture hâtive du total pourrait faire dire sur ce modèle qu'on ne se marie

presque plus en France en 1985, six fois moins qu'en 1970 ; il faut remarquer que l'échelle commence à 250 000 pour réaliser l'erreur de lecture ; seul le type de variation peut être observé ici.

Pour donner aux élèves une certaine aisance alliée à une vigilance constante dans l'utilisation du langage graphique, l'étude de diagrammes variés où chaque fois on pointe les comparaisons, possibles ou non, doit aller de pair avec la réalisation de tels diagrammes.

Des utilisateurs honnêtes et modestes

Si, à partir des mêmes données, chaque élève ou groupe d'élèves choisit le type de graphique, les échelles en fonction de ce qu'il veut mettre en valeur, la confrontation permettra de ne pas aller trop loin dans l'interprétation : selon le graphique, on serait tenté de parler de grande diminution ou de faible baisse pour un même phénomène. De plus, par exemple, une baisse de 4% des naissances en France, qu'elle soit représentée de façon catastrophique par une courbe plongeant presque jusqu'à l'axe des abscisses ou par une courbe haut placée et baissant à peine, ne peut qu'être constatée ; des connaissances démographiques supplémentaires sont nécessaires pour une interprétation plus poussée.

Des utilisateurs actifs

A travers ces diverses études, on peut espérer provoquer l'envie d'approfondir, de se poser des questions pour cerner le phénomène, de tenter d'y répondre en gérant au mieux les données ou en cherchant des informations supplémentaires.

Cette attitude active face au langage graphique pourrait aider nos élèves à utiliser ce cadre comme outil dans de nombreux problèmes de mathématiques où il est tout à fait adapté.

LA FORET LIMOUSINE

Marie-Christine BABEL

IREM de Limoges

*Cet article présente une partie du travail réalisé sur ce thème avec une classe de cinquième du collège de **Sardent (Creuse)**, en liaison avec le club nature de l'établissement.*

I- MISE EN PLACE D'UN TABLEAU

Un document du SRAF (Service Régional d'Aménagement Forestier), non reproduit ici, a servi de point de départ. Il comportait, pour chacun des trois départements de la région Limousin (Corrèze, Creuse, Haute-Vienne), un graphique à bandes verticales relatif au pourcentage de la surface du département qu'occupent les différentes essences d'arbres.

Le fait que les valeurs numériques soient mentionnées a permis, entre autres, de mettre en place le tableau suivant :

	feuillus	résineux
Corrèze	60 %	40 %
Creuse	71 %	29 %
Haute-Vienne	81 %	19 %

Comme vous avez pu le constater, cette première phase du travail (lecture de graphiques) est relatée très succinctement car, bien qu'important, ce type d'activité est assez classique.

II- DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

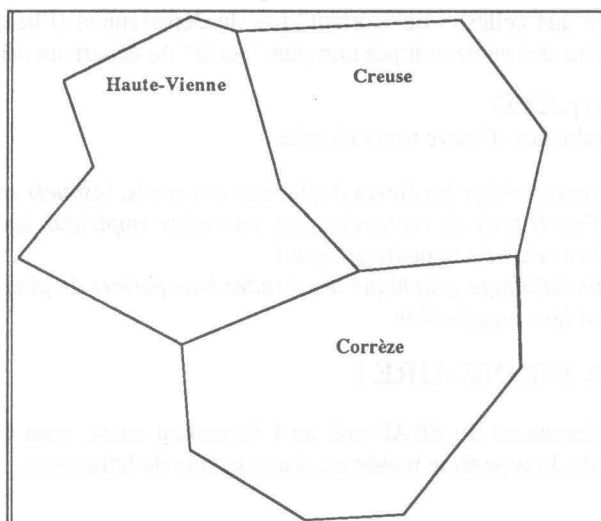
Les notions de diagrammes circulaires ou de diagrammes à bandes verticales sont elles aussi assez classiques, et non moins importantes (elles ont d'ailleurs été reprises avant d'aborder cette activité).

Il semble cependant intéressant d'assortir la réalisation de tels graphiques d'une "contrainte" (d'autant plus que le type de représentation qui en découle intervient assez souvent, dans les manuels de géographie par exemple). C'est le but de la seconde phase du travail, relatée ci-dessous.

1° Diagrammes circulaires

Document remis à chaque élève :

Une photocopie (format A4) représentant la région Limousin schématisée :



Consigne (écrite au tableau et commentée par l'enseignant) :

Tracez un cercle "dans" chaque département (le rayon doit être le même).

Réalisez alors les diagrammes circulaires représentant le pourcentage de feuillus et de résineux (précisez les calculs effectués pour déterminer les angles au centre).

Contrainte :

Choix du rayon commun et de chacun des centres afin que les cercles ne "sortent" pas du département.

2° Diagrammes à bandes verticales

Document remis à chaque élève :

Une autre photocopie (format A4) représentant la région Limousin schématisée.

Consigne (écrite au tableau et commentée par l'enseignant) :

Réalisez un diagramme à bandes verticales représentant le pourcentage de feuillus et de résineux "dans" chaque département (l'échelle doit être la même ainsi que la largeur des bandes).

Facultatif : Vous pouvez imager les bandes afin de visualiser feuillus et résineux.

Contrainte :

Choix de l'échelle commune, de la largeur des bandes et de leur positionnement afin que celles-ci ne "sortent" pas du département (l'habillage graphique des bandes ne devrait pas non plus "sortir" du département).

En annexe (p.XXX)

Une production d'élève assez réussie.

Cette activité oblige les élèves à effectuer des choix, lesquels sont l'aboutissement d'un travail de recherche plus ou moins empirique (qui pourrait d'ailleurs être réalisé par petits groupes).

La partie habillage graphique des bandes leur permet de plus de donner libre cours à leur imagination.

III- A LA BONNE AIRE !

Sur le document du SRAF cité au I figuraient aussi, pour chacun des départements, la superficie boisée ainsi que le taux de boisement.

Un certain nombre d'élèves a trouvé qu'il était possible d'en déduire les superficies approchées de la Corrèze, de la Creuse et de la Haute-Vienne (soit respectivement 5860 km^2 , 5650 km^2 et 5510 km^2).

Ceci a amené la classe à se demander si la représentation schématisée du Limousin qui avait été utilisée respectait les surfaces.

D'où la phase finale du travail, n'ayant à priori pas de rapport avec les statistiques : mesurer les aires sur une photocopie et vérifier s'il y a proportionnalité avec les valeurs réelles.

La classe a été partagée en trois groupes, chacun étant chargé d'un département.

Document remis à chaque élève :

Une photocopie (format A4) représentant le département schématisé .

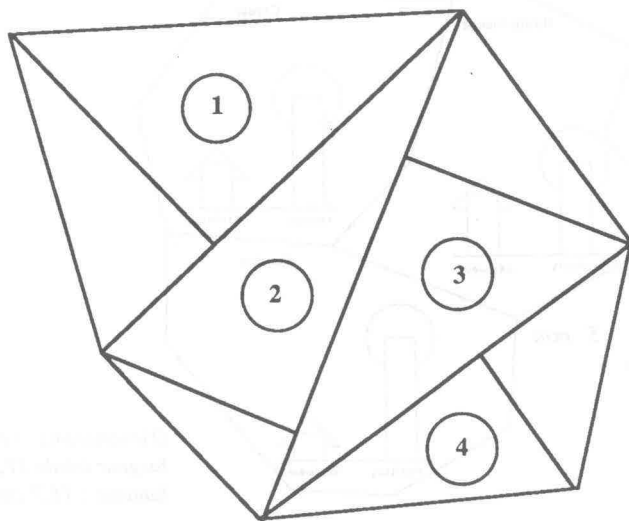
Consigne (écrite au tableau et commentée par l'enseignant) :

Découpez le polygone représentant le département en traçant des triangles.

Pour chaque triangle, tracez une hauteur, mesurez-la ainsi que la base correspondante et déduisez-en une valeur approchée de l'aire du triangle.

Indiquez enfin une valeur approchée de l'aire du polygone considéré.

Vous trouverez ci-dessous une production d'élève relative à la Creuse :



Ensuite, et c'est là que réapparaît l'aspect statistique, chaque groupe a communiqué la moyenne arithmétique des résultats trouvés par ses membres, d'où le tableau suivant :

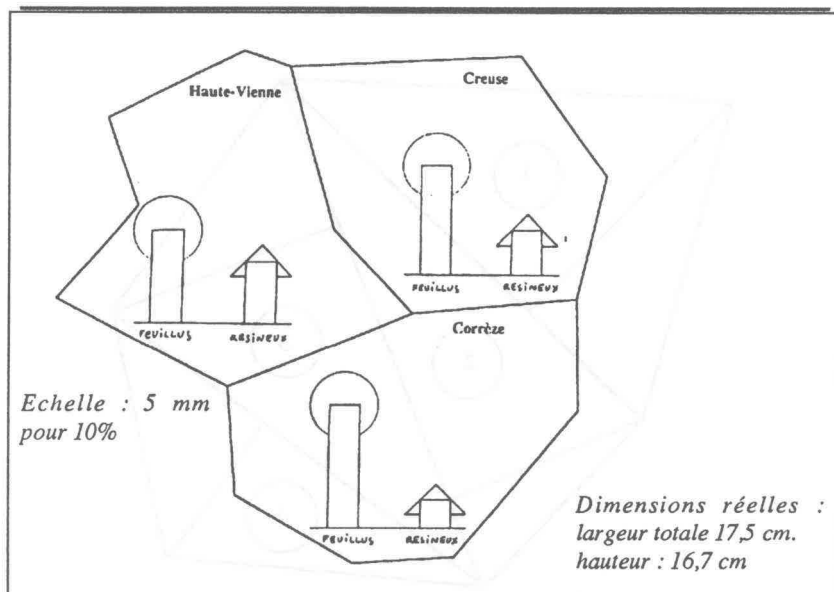
	département	moyenne
Groupe 1	Corrèze	$\approx 70,8 \text{ cm}^2$
Groupe 2	Creuse	$\approx 64,8 \text{ cm}^2$
Groupe 3	Haute-Vienne	$\approx 67,6 \text{ cm}^2$

Le lecteur pourra imaginer les âpres discussions qui résultèrent de la comparaison de ces données numériques ... après avoir lui-même effectué quelques calculs.

IV- EN GUISE DE CONCLUSION

Lecteurs de la région Limousin, si vous êtes intéressés, les photocopies schématisées vous seront remises gratuitement à l'IREM de Limoges.

Les autres, pour peu qu'ils habitent dans une région boisée, peuvent facilement adapter cette activité à leur région, quitte à réaliser eux-mêmes (ou à faire réaliser par leurs élèves) la schématisation.



RECENSEMENT

Robert DELORD , Françoise MIRA
IREM de Bordeaux

Les activités présentées dans cet article concernent les classes de 6^{ème}, 5^{ème} et 4^{ème}. Elles ont été élaborées et expérimentées (uniquement pour les classes de 5^{ème} et de 4^{ème}) au cours de l'année scolaire 1990-91 par le groupe Premier Cycle Dordogne.

I-INTRODUCTION

L'idée de départ

Pour aborder la rubrique "*Organisation et gestion de données*" des programmes, il nous a paru intéressant d'exploiter les résultats provisoires relatifs au Recensement Général de la population de 1990 publiés dans la presse locale.

Cela permet en effet d'ancrer l'introduction de certaines notions dans l'environnement des élèves tout en permettant une approche interdisciplinaire (Education Civique notamment).

Principaux objectifs

- Collecter et organiser des données ;
- lire et critiquer les différents types de graphiques couramment utilisés,

notamment dans les autres disciplines ;

- utiliser les "statistiques" comme occasion de "*faire des maths*" et tout particulièrement de réinvestir certaines notions du programme : proportionnalité, pourcentages, mesure des angles...

N B : Pour chacun des trois niveaux de classe, une "dominante" a été privilégiée :

- en SIXIEME, on insiste sur l'organisation des données et diverses façons de les présenter : tableaux de nombres ; diagrammes circulaires, en bâtons, en barres.

- en CINQUIEME, l'accent est mis sur le taux de pourcentage : calcul, mais surtout signification et intérêt d'un tel calcul.

- en QUATRIEME, il s'agit surtout de réinvestir des acquis antérieurs.

II-ACTIVITÉS SIXIÈME

PREMIÈRE PARTIE

Cette première partie pourrait, fort utilement, faire l'objet d'un travail interdisciplinaire avec le professeur de Géographie et/ou d'Education Civique

Objectifs

- Lire et interpréter différents types de graphiques et de diagrammes usuels ;
- Sélectionner des données et les ranger.

Activité 1

Après avoir distribué les graphiques a), b), c), d) (voir annexe 1) aux élèves, on peut poser des questions du type :

- *Que représente chaque graphique ?*
- *Quelle était, approximativement, la population du département de la Dordogne en 1910 ? Celle de Trélissac en 1982 ? etc...*
- *Citer une ville dont la population a augmenté de 1975 à 1982 et de 1982 à 1990 ; etc...*
- *Le graphique b) permet-il de connaître approximativement la population de Montpon en 1978 ? etc...*

Prolongements souhaitables :

- *Qu'est-ce qu'un recensement ? Pourquoi un recensement ?*
- *Qu'est-ce que l'INSEE (voir d)) ? Quel est son rôle ?*
- *Lien entre l'évolution démographique du département et sa réalité géographique, économique, etc...*

Activité 2

Une photocopie de la page du quotidien régional "SUD-OUEST" -ou mieux une "vraie" page de journal- sur laquelle figurent les résultats des recensements de 1975, 1982 et 1990 pour toutes les communes du département de la Dordogne est distribuée aux élèves (voir annexe 2).

Consigne :

Relever les informations relatives au secteur scolaire () du collège et les ranger dans un tableau.*

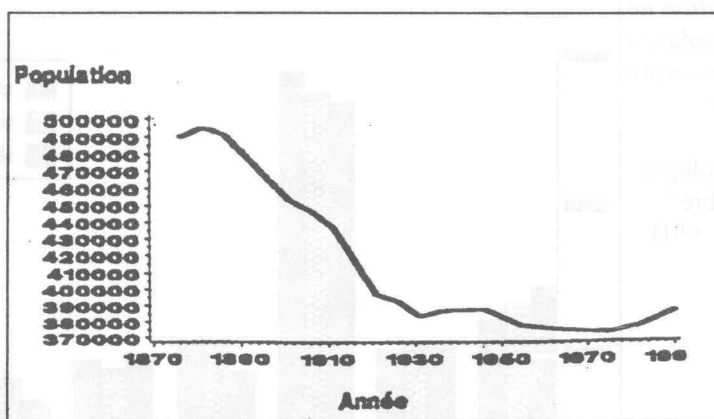
* ou au canton si le secteur scolaire comprend trop peu de communes.

Remarque : On pourra exploiter l'éventuelle diversité des rangements proposés (par ordre alphabétique des communes, par ordre croissant ou décroissant de la population, etc...) en mettant en évidence l'intérêt de tel ou tel type de rangement selon le "regard" que l'on souhaite porter sur la situation représentée.

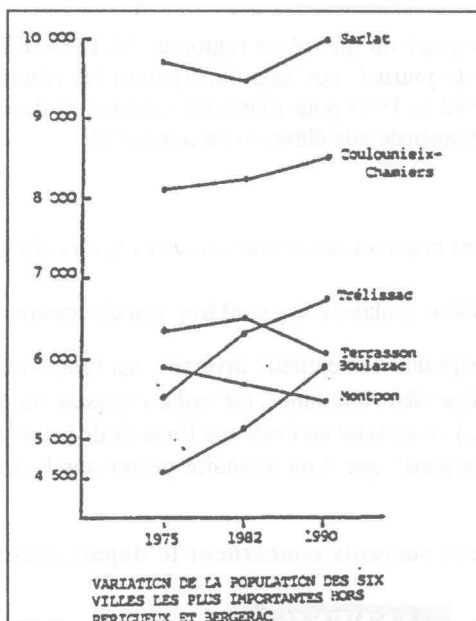
Les quatre graphiques suivants concernent le département de la Dordogne.

ANNEXE 1

a)



*Population du département depuis un siècle
"Dordogne libre" (28.3.91)*



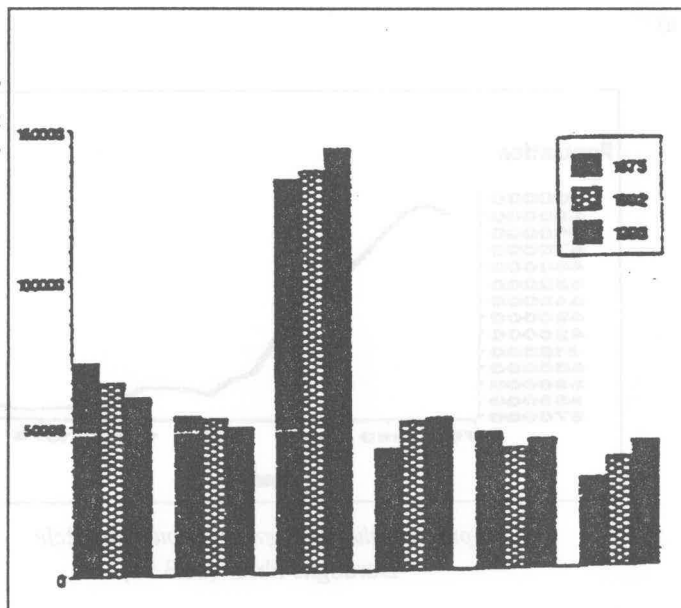
b)

«Sud-Ouest»
(5.2.91)

c)

Evolution de
la population
par tranche
d'âge

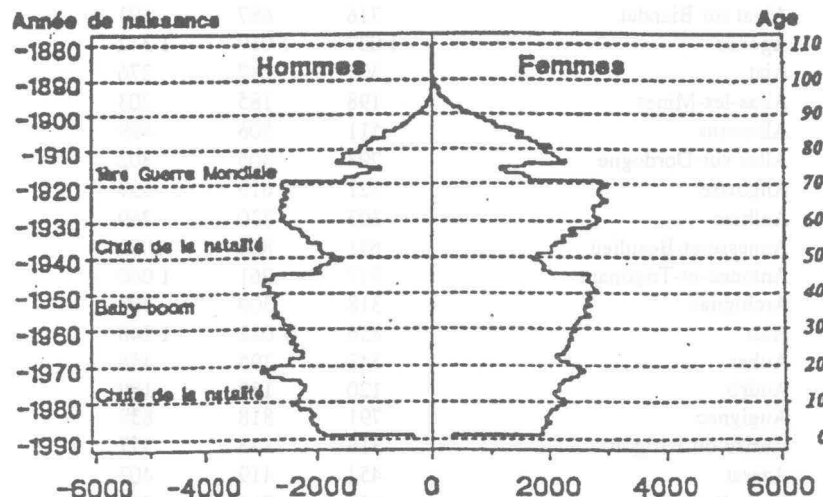
“Dordogne
libre”
(28.3.91)



d)

DÉMOGRAPHIE

La pyramide du Périgord PYRAMIDE DES AGES au 5 mars 1990



"Sud-Ouest"(22.4.91)

Effectifs

Voilà à quoi ressemble la population de Dordogne analysée en fonction de son âge. Cette pyramide des âges réalisée par l'INSEE à partir des données recueillies au cours du recensement de l'année dernière est riche d'enseignements «Elle résume, comme le notent les responsables

de l'Institut National l'histoire démographique de la population et éclaire son devenir». Comme pour l'Aquitaine et la France entière, la pyramide des âges du département montre un ralentissement marqué des naissances depuis vingt ans, une surpopulation féminine aux âges élevés traduisant

l'écart croissant de l'espérance de vie au profit des femmes, un fort vieillissement de la population, heureusement quelque peu ralenti par les vingt ans de naissances nombreuses après 1945. C'est pour cela que la pyramide ne ressemble plus guère à...une pyramide.

ANNEXE 2

DORDOGNE : LES CHIFFRES DU RECENSEMENT 1990

NOM DE LA COMMUNE	en 1975	en 1982	en 1990
	1	2	3
Abjat sur Biandat	716	687	693
Agonac	1 027	1 059	1 342
Ajat	301	297	276
Allas-les-Mines	198	185	203
Allemands	511	506	489
Alles-sur-Dordogne	293	305	302
Angoisse	721	619	559
Anlhiac	303	330	269
Annesse-et-Beaulieu	631	826	1099
Antonne-et-Trigonant	917	961	1 060
Archignac	318	309	302
Atur	836	1 082	1 248
Aubas	348	395	458
Audrix	120	130	180
Augignac	791	818	838
Auriac-du-Périgord	316	333	377
Azerat	454	419	407
Bachelierie (La)	668	711	722
Badefols-d'Ans	518	511	461
Badefols-sur-Dordogne	143	150	188
Baneuil	259	262	299
Bardou	58	43	36
Bars	254	228	217
Bassillac	701	1 297	1 641
Bayac	308	304	328
Beaumont	1 226	1 261	1 166
Beaupouyet	532	512	439
Beauregard-de-Terrasson	533	575	653
Beauregard-et-Bassac	206	193	209
Beaumont	350	340	328
Beaussac	224	203	212
Beleymas	193	215	206
Belvès	1 623	1 581	1 553
Berbiguières	160	173	181
Bergerac	27 764	26 832	26 899
Bertric-Burée	308	314	340
Besse	207	183	171

Beynac-et-Cazenac	411	460	489
Bézenac	137	169	117
Biras	343	354	372
.....			

Extrait du journal "Sud-Ouest" du 24.10.90

DEUXIÈME PARTIE

Activité 3

Objectif : Réaliser des diagrammes en bâtons et en barres.

Note : Les communes qui apparaissent dans cette partie sont celles du secteur scolaire du collège La Roche Beaulieu (Commune d'Annesse).

Communes	1975	1982	1990
Annesse	621	826	1099
La Chapelle	331	421	703
Marsac	1569	1657	1939
Razac	1702	2062	2212

1°) En s'inspirant du graphique b) de l'activité 1, réaliser un graphique représentant les variations de population de chaque commune du secteur scolaire de ton collège.

2°) Pour chaque commune du secteur scolaire, réaliser un diagramme en barres de l'évolution de la population de 1975 à 1990, en "passant" par 1982 (s'inspirer du graphique c) de l'activité 1 : une tranche d'âge sera "remplacée" par une commune).

3°) Le tableau ci-dessous concerne ta classe.

a) Le compléter, en indiquant, pour chaque commune, le nombre d'élèves de ta classe qui y habitent.

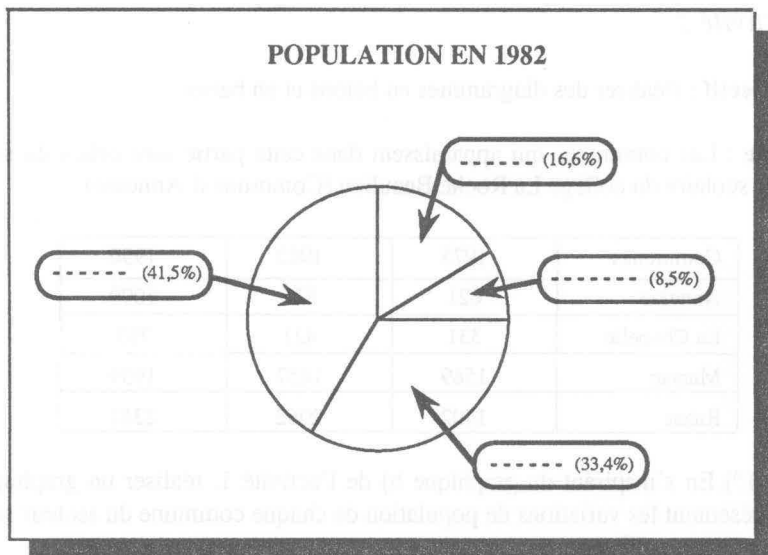
Communes	Effectif
Annesse	
La Chapelle	
Marsac	
Razac	
Autres communes	

b) Représenter ce tableau par un diagramme en bâtons.

Activité 4

Objectif : Contrôler la validité d'un diagramme circulaire (prérequis : calcul d'un pourcentage et mesure des angles).

Le diagramme circulaire ci-dessous représente la répartition des habitants, en 1982, pour les quatre communes du secteur du collège.



1°) Indiquer, dans chaque cas, le nom de la commune correspondante.

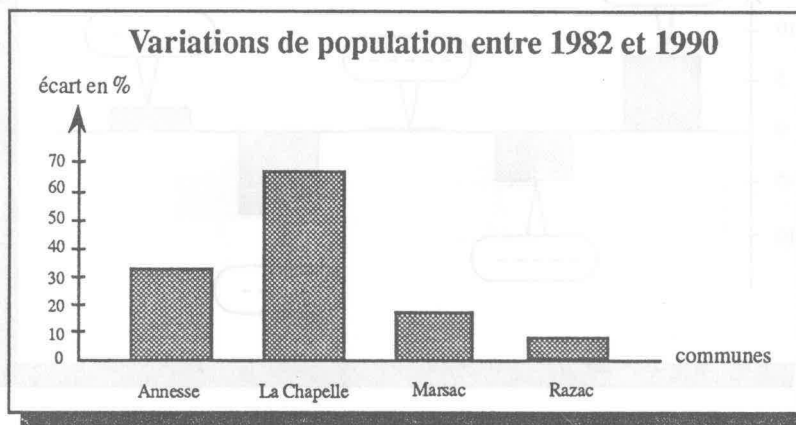
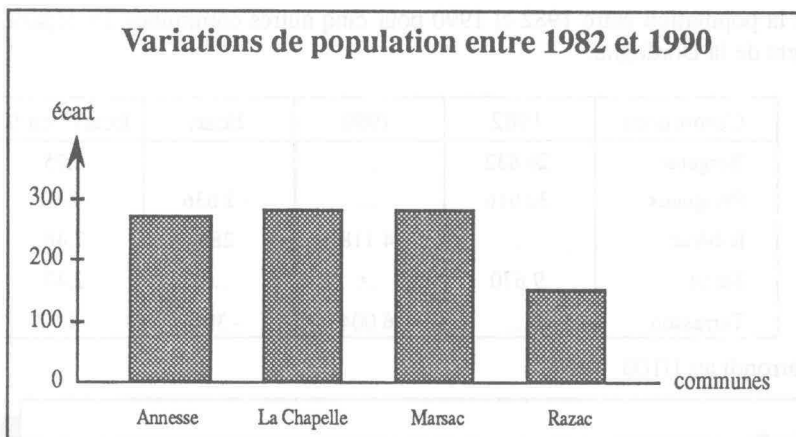
2°) a) Vérifier que les pourcentages indiqués sont corrects (approximativement).

b) Vérifier que le diagramme circulaire est correct.

Activité 5

Objectif : Sensibiliser à la notion de taux (d'augmentation ou de diminution de la population).

Les deux diagrammes en barres ci-dessous traduisent les variations de population entre 1982 et 1990 pour les quatre communes du secteur scolaire du collège La Roche Beaulieu (commune d'Annesse).



1°) a) A-t-on l'impression "au premier coup d'oeil", que ces diagrammes représentent la même situation ?

b) Expliquer les différences entre ces deux diagrammes.

2°) Parmi les quatre communes du secteur, quelle est celle qui a connu la plus forte augmentation de population entre 1982 et 1990 ?

Activité 6

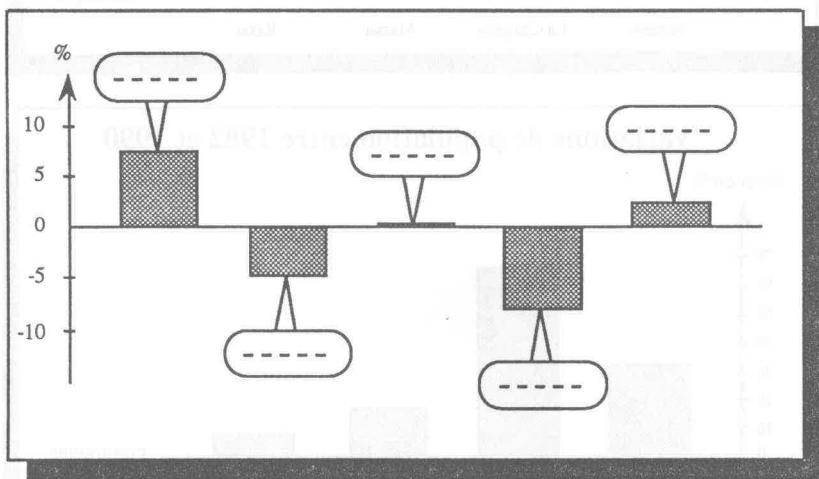
Objectif : Sensibiliser à la représentation de variations négatives.

Le tableau et le diagramme en barres suivants concernent les variations

de la population entre 1982 et 1990 pour cinq autres communes du département de la Dordogne.

Communes	1982	1990	Ecart	Ecart* en %
Bergerac	26 832	...	...	0,25
Périgueux	32 916	...	- 2 636	- 8,01
Ribérac	...	4 118	286	7,46
Sarlat	9 670	...	...	2,47
Terrasson	...	6 004	- 301	- 4,77

* arrondi au 1/100



1°) Expliquer la signification du signe - devant certains nombres.

2°) Compléter, avec le nom de la commune qui convient, les "bulles" du diagramme.

3°) Compléter le tableau.

III-ACTIVITES CINQUIEME

Organisation

Phases de recherche individuelle ou à deux, suivies de débat collectif.

Activité 1

Voici les résultats du recensement pour les quatre communes du secteur du collège La Roche Beaulieu (Commune d'Annesse) :

Communes	1975	1982	1990	écart 82/90	écart 75/90
Annesse	621	826	1 099	273	
La Chapelle	331	421	703	282	
Marsac	1 569	1 657	1 939	282	
Razac	1 702	2 062	2 212	150	
Total				(a).....	(b).....

1°) Compléter la dernière ligne et la dernière colonne de ce tableau.

Comment peut-on vérifier les résultats des cases a et b du tableau ?
Faire cette vérification.

2°) Les variations de population entre 1982 et 1990 ont été traduites dans le diagramme en barres ci-dessous :

Il s'agit du premier diagramme en barres de l'activité 5 (sixième), non reproduit ici.

Réaliser de même un diagramme en barres pour traduire les variations de population entre 1975 et 1990.

3°) Cyrille dit qu'entre 1982 et 1990, trois communes ont vu leur population augmenter de la même manière.

Sandrine, elle, dit que c'est à La Chapelle que la population a le plus augmenté, et de loin !

Qui a raison ? Pourquoi ?

Commentaires

Le choix d'une échelle pour réaliser le diagramme pose problème à certains élèves au 2°).

La question 3°) donne lieu à un débat intéressant : une large majorité des

élèves pense que les trois communes ont connu la même augmentation (ambiguïté, voulue, de l'expression "de la même manière").

Il faut passer à un exemple "caricatural" pour faire basculer la conviction des élèves :

La ville A avait 100 habitants, sa population augmente de 100 ; la ville B avait 10 000 habitants, sa population augmente de 100 : leurs populations ont-elles augmenté "de la même manière" ?

Activité 2

1°) Pour pouvoir réellement comparer les augmentations de population, il aurait fallu que toutes les communes aient la même population en 1982.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

Communes	1982	1990	écart 82/90	écart en %
Annesse	826	1 099	273	
La Chapelle	421	703	282	
Marsac	1 657	1 939	282	
Razac	2 062	2 212	150	

b) Faire un nouveau diagramme représentant cette fois les écarts en pourcentage.

c) Peut-on maintenant répondre facilement à la question 3°) de l'activité 1 ?

2°) a) Ajouter une ligne "Total" au tableau ci-dessus, puis la compléter.

b) Marie dit que pour obtenir le pourcentage d'augmentation sur l'ensemble des quatre communes, il faut ajouter les pourcentages obtenus pour chaque commune.

A-t-elle raison ? (Pour justifier la réponse, effectuer le calcul proposé par Marie et examiner le résultat obtenu).

Commentaires

Bien que le calcul d'un taux ait été récemment étudié, peu d'élèves ont réinvesti les pourcentages au 1°).

Au 2°) le total n'est ni 100 %, ni la somme des pourcentages : ce qui crée "un choc" chez les élèves.

Travail à la maison (pour la séance suivante)

Les données ci-dessous concernent d'autres communes du département de la Dordogne.

Malheureusement, elles ont été en partie effacées.

1°) Retrouver celles qui manquent.

Communes	1982	1990	écart 82/90	écart en %
Bergerac	26 382			0,25
Périgueux	32 916		- 2 636	
Ribérac	3 832		286	
Sarlat	9 670		239	
Terrasson	6 305	6 004		

2°) Faire un diagramme en barres représentant les écarts en pourcentage (voir activité 1, 2°))

Activité 3

1°) et 2°) *Même consigne que pour l'activité 4 (sixième).*

Utiliser le tableau de données figurant au début de l'activité 1.

3°) Faire un diagramme circulaire représentant la population des différentes communes pour l'année 1990.

Commentaire :

Pas de problème (les élèves avaient déjà construit des diagrammes circulaires).

IV-ACTIVITÉS QUATRIÈME

Activité 1

1°) Les deux diagrammes en barres ci-dessous traduisent les variations de population entre 1982 et 1990 pour les quatre communes du secteur scolaire du collège La Roche Beaulieu.

Expliquer les différences entre les deux diagrammes.

Il s'agit des diagrammes en barres de l'activité 5 (sixième), non reproduits ici.

2°) Quelle est, de ces quatre communes, celle qui a connu la plus forte augmentation de population entre 1982 et 1990 ?

3°) Les deux diagrammes précédents ont été obtenus à partir du tableau ci-dessous. Malheureusement, certaines données ont été effacées. Les retrouver.

Communes	1982	1990	écart	écart en %
Annesse	826			33,05
La Chapelle	421		282	
Marsac	1 657	1 939		
Razac	2 062			
Total			987	

Activité 2

1°) Compléter les bulles ci-dessous, puis vérifier que le diagramme circulaire est approximativement correct.

Il s'agit du diagramme de l'activité 4 (sixième), non reproduit ici.

2°) Faire un diagramme circulaire sur le même modèle pour la population en 1990.

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous représentant votre classe selon la commune d'origine de chaque élève :

Communes	Effectif	Fréquence en %
Annesse		
La Chapelle		
Marsac		
Razac		
Autres		
Total		

b) Représenter ce tableau par un diagramme en bâtons, puis par un diagramme circulaire.

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES EN STATISTIQUES

Jean-François. PICHARD
IREM de Rouen

Cet article est basé sur le travail fait dans le groupe «Statistiques» de l'IREM de Rouen qui est exposé dans la brochure «Graphiques au collège» [7] (1). C'est surtout un instrument de réflexion sur les graphiques statistiques.

L'objectif poursuivi est de clarifier les principes de base pour la construction de graphiques et d'en proposer une classification permettant d'indiquer un des graphiques pertinents pour présenter un phénomène. Cette classification est commentée et illustrée d'exemples tirés pour la plupart de manuels de collège. La mise en œuvre de ces principes permet aussi de donner une grille de lecture et d'interprétation pour les nombreux graphiques que l'on trouve dans les médias.

L'idée sous-jacente dans cette étude est que l'utilisation de graphiques (que ce soit la construction ou la lecture) sera rendue plus simple si on peut la rattacher à une typologie qui porte sur la structure de la population d'étude de la ou des variables considérées.

(1) Les références bibliographiques sont indiquées entre crochets [...] ; la brochure [7] comporte une bibliographie p.55.

La complexité des graphiques, qui est liée au nombre et à la nature des variables (2), n'est abordée qu'à partir de quelques exemples issus principalement de manuels de géographie de collège actuellement disponibles.

Graphique et représentation

Le dictionnaire *Hachette* définit le mot *graphique* ainsi : «qui décrit, représente par des figures». *Le Petit Robert* propose tout ce «qui représente, par des lignes, des figures sur une surface». *Le Larousse* est plus précis : «représentation de données qualitatives, ordonnées ou quantitatives, par une construction utilisant les propriétés de la perception visuelle et appliquant les lois de la graphique».

Citons deux extraits : la «représentation graphique fait apparaître des systèmes de signaux fondamentaux que l'Homme a construit pour retenir, comprendre et communiquer les informations qui lui sont nécessaires»[3] ; «La Graphique est une méthode permettant de transcrire des informations et de faire apparaître des relations entre des données ou ensembles de données. Elle est fondée sur la perception visuelle...» [6].

On peut donner la définition suivante : un graphique ou une représentation graphique, est un dessin codifié -quant à la forme, la taille et la couleur- dont les points, les courbes, les surfaces, voire les volumes en perspective, respectent les proportions des grandeurs observées.

La forme du graphique dépend de la ou des questions qu'on se pose concernant le phénomène étudié. Son but est de dégager rapidement les informations essentielles ; il est pertinent s'il visualise des situations ou des relations qui ne sautent pas aux yeux à la lecture des données présentées souvent sous forme de tableaux. Le graphique doit être un révélateur (3).

De cette première approche, nous pouvons énumérer les **trois qualités** essentielles d'un graphique :

1. La **lisibilité** : un graphique doit être plus directement et rapidement lisible que les données chiffrées. Il ne crée pas d'informations supplémentaires, mais révèle l'essentiel masqué sous l'abondance de données ;

2. La **fidélité** : un graphique doit respecter les données et rendre fidèlement la réalité. L'impression visuelle suggérée ne doit pas

(2) *Analyse de la complexité et du statut des graphiques ...* de Janvier, Sabatier, Baillé, Maury dans [5].

(3) *La sous-utilisation des images graphiques* de Bonin dans [5].

conduire à déformer cette réalité, comme par exemple la fausse perspective ;

3. L'**auto-suffisance** : il doit pouvoir être compris, indépendamment de la série de données qu'il représente, par :

- son titre qui désigne le phénomène de façon précise,
- le libellé des axes avec l'échelle retenue,
- l'indication des sources.

LES GRAPHIQUES DE BASE

Les différents graphiques utilisés en statistique combinent deux types de base qui sont des représentations de situations mathématiques :

Les graphiques de fonctions

On considère ici la notion de *fonction* ou *application*, usuelle en mathématiques, notée $f : E \rightarrow F$, où E est l'ensemble de départ (ensemble de définition) et F l'ensemble d'arrivée (ensemble des valeurs de la fonction). L'ensemble de définition, et celui d'arrivée, est soit numérique (une partie des entiers, un intervalle de $\mathbf{R}, \dots$), soit non numérique mais fini.

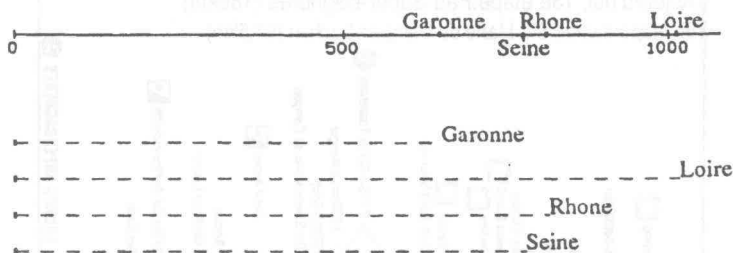
On appellera *graphique de la fonction* une représentation codifiée, dérivée du graphe de f (4) et permettant de mieux visualiser ce graphe. Par abus de langage, on confond parfois les termes *graphe* et *graphique*. L'allure de ces graphiques dépend surtout des propriétés de l'ensemble E de départ.

On distinguera les cas où :

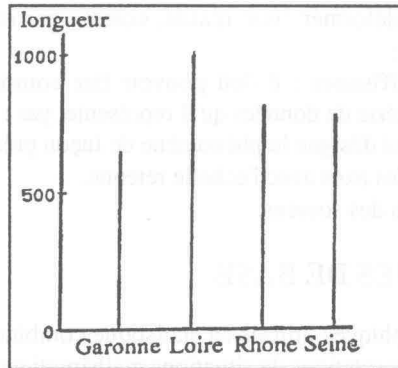
1. l'ensemble de départ est fini, sans structure d'ordre.

Exemple : «Aux grands fleuves de France on associe leur longueur».

Plusieurs représentations sont possibles, parmi lesquelles les trois suivantes :



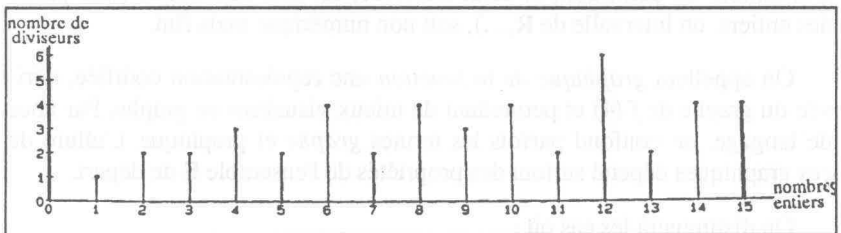
(4) Le graphe de f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour x décrivant E .



2. l'ensemble de départ est fini avec un ordre.

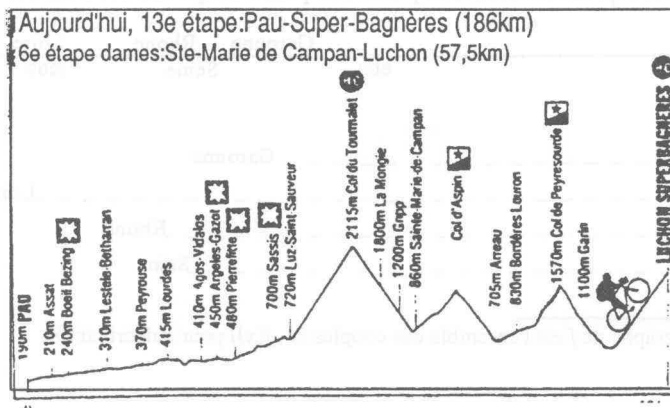
Exemple : «A tout nombre entier compris entre 1 et 15, on associe le nombre de ses diviseurs».

A partir du graphe, en reliant chaque point à l'axe des abscisses par un bâton vertical, on obtient un graphique qui donne une meilleure visualisation :



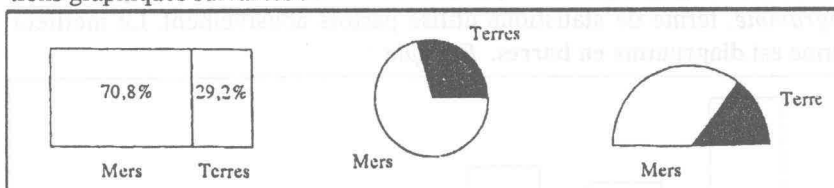
3. la fonction est définie sur un intervalle.

Exemple : L'étape du Tour de France (Magnard, Mathématiques 5^{ème}, 1987).



Les graphiques de partition

Exemple - On lit sur un manuel de géographie : les mers occupent 70,8% de la surface du globe. La référence est ici la surface totale de la Terre (le *tout*) et on décompose celle-ci en deux surfaces (les *parties*) : celle occupée par les mers et celle occupée par les terres. La proportion des mers et des terres à la surface du globe terrestre peut faire l'objet de l'une des représentations graphiques suivantes :



Formalisation

On s'intéresse à la mesure d'une grandeur X - le *tout* -, mesure exprimée par un nombre réel positif x , qui s'écrit comme somme de deux ou plusieurs nombres $a, b, \dots$ correspondant à deux ou plusieurs «*parties*» $A, B, \dots$ qui composent la grandeur X : $x = a + b + \dots$ ($a \geq 0, b \geq 0, \dots$).

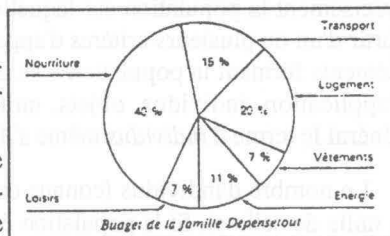
La *contribution* de a à x , ou la *proportion* correspondant à A , est donnée par le rapport a/x . Cette proportion est souvent traduite par un pourcentage en multipliant le nombre a/x par 100. La somme de ces proportions correspondant à chaque partie vaut 1 et la somme des pourcentages vaut 100.

Cette décomposition de la somme en plusieurs nombres peut se représenter par un graphique vérifiant la condition suivante : les rapports entre mesures des grandeurs sont les mêmes que ceux entre les surfaces qui les représentent ; le rapport de l'aire représentant A à celle représentant X est égal à a/x .

Deux modes de représentations graphiques sont choisis en général pour symboliser la partition d'un *tout* :

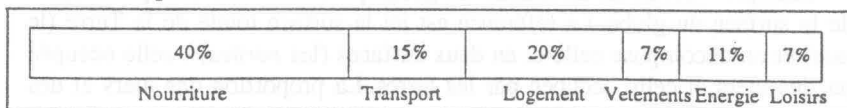
- soit une surface unique, si possible convexe (rectangle, cercle,...), est choisie pour figurer le tout. Chaque partie sera alors représentée par une portion de cette surface en respectant la règle des rapports ci-dessus :

(5) Cette notion serait à caractériser de façon précise. Elle est certainement difficile à comprendre au niveau 6^{ème}.

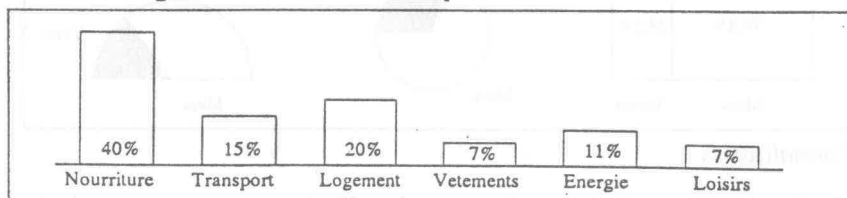


Exemple : répartition d'un budget familial pour une famille-type (5) (Hatier-Mathématiques, Pythagore - 6^o)

- soit on associe à chaque partie une surface de même forme (par exemple des rectangles de base égale), d'aire proportionnelle à la mesure de la partie, le tout correspondant alors à la réunion de ces surfaces.



Attention : le graphique formé par de tels rectangles ne constitue pas un *histogramme*, terme de statistique utilisé parfois abusivement. Le meilleur terme est **diagramme en barres**. *Exemple :*



Dans certains cas, il est proposé un diagramme figuratif (un pictogramme), c'est-à-dire que les figures suggèrent les composants (bonhommes, tracteurs,...) dont on connaît les mesures. Mais il doit toujours respecter la règle des rapports : si on utilise des formes à deux dimensions, ou même suggérant des formes à trois dimensions, les surfaces ou les volumes doivent être proportionnels aux mesures des grandeurs représentées.

SITUATION STATISTIQUE

Population - Individus

Toute étude de *statistique descriptive* nécessite que l'on définisse très précisément la population sur laquelle elle porte, la délimitation étant faite à partir d'un ou plusieurs critères d'appartenance que l'on fixe au préalable. Les éléments formant la population sont appelés, selon le contexte ou le domaine d'application, individus, objets, unités statistiques, items,... On utilise en général le terme d'*individus* même s'il ne s'agit pas de personnes humaines.

Le nombre d'individus (connus ou non) est l'**effectif** de la population, ou la taille de celle-ci. Si la population étudiée est extraite d'une population plus vaste, on la qualifiera d'**échantillon** et on parlera alors de la taille de l'échantillon (6)

(6)Cependant une extension des résultats obtenus sur un échantillon à toute la population n'est possible que sous certaines conditions de représentativité.

Pondération des individus

La description des individus ne suffit pas pour un modèle statistique. Il faut définir en plus l'importance de chaque individu au sein de la population. Celle-ci est exprimée par un coefficient positif - le *poids* - attribué à chaque individu. L'ensemble de ces coefficients affectés aux individus forme la **pondération** de la population (7).

Si tous les individus sont jugés d'égale importance, on attribue à chacun d'eux le même poids. Dans ce cas, la population est dite **équipondérée** : tous les individus entrent dans l'étude avec un poids égal, soit le poids 1 (mesure de dénombrement), soit $1/n$, si la population est de taille n .

La population pondérée est notée (A, P) où $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ désigne la population et la pondération est définie par les $P(a_i) = p_i$ ($p_i > 0$), poids de l'individu a_i . Dans le cas où la population est équipondérée, on la note plus simplement A .

Structures prédéfinies sur la population

Une information supplémentaire peut être fournie sur une éventuelle «organisation» des individus ; dans ce cas, cette information sera un élément à intégrer dans toute représentation graphique et dans tout traitement statistique.

On envisagera les différents cas suivants :

- il n'y a **aucune structure** sur la population. Les individus sont **permutables**, en ce sens que toute permutation des individus n'altère nullement les études réalisées sur ceux-ci. On adoptera un ordre arbitraire pour en établir la liste : ordre alphanumérique, ordre enquête, ordre d'enregistrement dans un fichier... ;
- il existe un **ordre total** entre les individus ; c'est le cas lorsque les unités statistiques sont des «instantés» (dates) ou des périodes (jours, mois...), ou des objets classés selon leur ordre de fabrication ou d'observation et pour lesquels le rang est une information essentielle. Dans ce cas, la population est dite ordonnée ;
- il existe une **structure de voisinage** - on dit également *relation de contiguïté* ou *distance* - entre les individus. C'est le cas en

(7) Le *poids d'un groupe* d'individus est obtenu en additionnant les poids des différents individus constituant le groupe. La pondération est donc une *mesure* - au sens mathématique du terme - sur la population.

particulier en géographie, lorsque les unités statistiques sont des régions (commune, département, pays), ou en agronomie (parcelles de terrain)..., ou une **structure spatiale** : points à la surface de la Terre (ville par exemple). L'organisation spatiale des données peut jouer un rôle essentiel dans l'étude statistique.

- enfin il peut exister des structures plus spécifiques, telle que :
 - ◊ une **relation d'équivalence** qui est souvent obtenue à partir d'une partition des individus en classes disjointes ;
 - ◊ une **structure d'arbre** : relation de parenté en démographie, par exemple ;
 - ◊ une **structure spatio-temporelle**...

Dans tous les cas, on supposera, pour plus de commodité d'écriture, que les individus sont numérotés ou indexés par les entiers de 1 à n et forment donc une suite $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Si les individus sont ordonnés, on admet que l'ordre sur les individus est celui donné par les indices.

Caractère défini sur une population

Caractéristiques des individus

Chaque individu d'une population donnée possède différentes propriétés caractéristiques propres ou partagées avec d'autres individus. Une étude statistique de la population portera sur une ou plusieurs de ces caractéristiques, la (ou les) même(s) pour tous les individus.

Par exemple, pour chaque élève d'une classe fixée, on peut s'intéresser à :
- son âge, - sa taille, - son niveau dans une matière, ...

Pour faire le relevé de cette caractéristique sur les individus de la population, il faut établir un protocole, c'est-à-dire définir un moyen d'observation ou de mesure de cette caractéristique, ce qu'on nommera *instrument de mesure*, qui peut être un instrument physique (thermomètre, balance,...), mais aussi tout autre moyen :

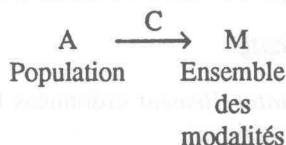
- un examen pour apprécier le niveau d'un élève ;
- une question dans un questionnaire, ...

et un étalonnage de cet instrument de mesure (barème de notation, liste de réponses, ...), le codage (8).

(8) voir l'article *Données et codage* de Pluvinaud dans [1]

Caractère

Etant données une caractéristique et un instrument de mesure étalonné adapté à celle-ci, le *caractère statistique* (ou encore variable) associé est l'application qui, à chaque individu, fait correspondre la valeur, la *modalité*, qui lui est attribuée par cet instrument :



A la suite $(a_1, \dots, a_n)$ des individus, on associe la suite $(x_1, \dots, x_n)$ où la valeur $x_i = C(a_i)$ est une modalité M avec les mêmes remarques sur l'ordre entre les valeurs x_i que sur l'ordre des individus a_i (ordre arbitraire ou ordre naturel). Les x_i forment les relevés (ou les observations) pour le caractère C , certaines de ces modalités x_i pouvant d'ailleurs être identiques. Dans cette situation statistique, chaque individu est muni d'un poids. Ce poids, qui mesure l'importance de l'individu dans la population, sera aussi affecté au relevé correspondant (mesure image par le caractère C).

L'observation d'un caractère C sur la population A se traduit donc par la donnée des n couples (x_i, p_i) (pour i variant de 1 à n) formant une série statistique. Si les individus sont équipondérés, on abrège l'écriture en notant la série statistique par $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Typologie des caractères

Le problème de l'existence d'une structure (par exemple une relation d'ordre) sur l'ensemble des modalités se pose aussi, en particulier dans la perspective d'une typologie des caractères et des représentations graphiques adaptées à chaque type de caractère.

La classification adoptée pour les caractères découle de la réponse à deux questions :

- l'ensemble M des modalités du caractère est-il muni d'un ordre ?
- les valeurs du caractère sont-elles numériques, c'est-à-dire peut-on les soumettre à des opérations arithmétiques ayant un sens par rapport à la population et au caractère considérés ?

Les réponses à ces deux questions permettent d'envisager les quatre cas suivants :

1. Caractère nominal

Les valeurs du caractère ne sont pas numériques et il n'existe pas de relation d'ordre sur l'ensemble des modalités. C'est le cas lorsque les modalités sont définies par une liste proposée. Exemples :

- le caractère *sexe* où les modalités sont (F,M) ;
- le caractère *vote* pour un des 6 candidats (A, B, ... , F) ;...

2. Caractère ordinal qualitatif

Les modalités sont *naturellement* ordonnées bien que les valeurs du caractère ne soient pas numériques.

Exemples : Avec l'opinion suivante ... , êtes-vous

- tout à fait d'accord
- plutôt d'accord
- indifférent
- en désaccord.

Ici, les modalités proposées sont ordonnées et il n'est pas judicieux de faire des regroupements de modalités qui ne respecteraient pas cet ordre.

3. Caractère semi-quantitatif

Les caractères de ce troisième type sont ceux relatifs aux relevés de classes ou d'intervalles de valeurs numériques : on note pour chaque individu et pour une caractéristique quantitative (taille, salaire, durée, ...), non pas la valeur exacte mais la classe dans laquelle se fait l'observation après avoir fait un découpage de la plage des observations en intervalles.

Exemple : Lors d'une enquête sur les salariés d'une entreprise, on pose la question suivante : « Dans quelle tranche de salaire mensuel vous situez-vous ? »

- moins de 6 000 francs
- de 6 000 à moins de 10 000 francs
- de 10 000 à moins de 15 000 francs
- plus de 15 000 francs.

4. Caractère numérique

Les modalités sont des valeurs numériques entre lesquelles des opérations arithmétiques sont envisageables. Un caractère numérique est donc une application définie sur la population A à valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ (intervalle de $\mathbf{R}$, partie des entiers ou des décimaux...).

On est amené parfois à distinguer :

- les caractères quantitatifs, pour lesquels l'addition a un sens (nombre de frères et sœurs, longueur, masse...),
- les caractères dits à échelle d'intervalle pour lesquels seule la moyenne a un sens (température par exemple).

Lors d'un traitement automatique, l'ordinateur ne prend en compte bien évidemment que le «type d'enseignement» de la série statistique ; c'est au praticien de faire le choix des traitements en considérant le sens des données. Ainsi pour certains caractères numériques, les traitements arithmétiques (somme, moyenne...) sont légitimes (ce sont de vrais caractères quantitatifs). Par contre, d'autres ne sont numériques que parce qu'il est plus commode de les enregistrer sous cette forme ; par exemple, les codes de l'INSEE sont, pour le caractère sexe, 1 pour masculin et 2 pour féminin.

LA CLASSIFICATION DES GRAPHIQUES

Une classification des graphiques statistiques usuels doit tenir compte de la structure prédéfinie sur la population, du nombre de variables étudiées simultanément et du type de ces variables (9).

Le premier critère retenu dans la classification est le nombre de variables intervenant dans le graphique. On distinguera les graphiques selon que l'étude porte sur :

- un seul caractère (statistique univariée),
- deux caractères (statistique bivariée),
- plus de deux caractères (statistique multivariée).

Ce critère du nombre de variables est un facteur important pour la complexité du graphique dont le support est un espace de deux dimensions.

Le second critère de classification fait intervenir la structure définie sur la population. Quatre cas sont à envisager selon que les individus sont :

- permutables : il n'y a aucune structure a priori sur la population,
- ordonnés selon une relation d'ordre total. C'est le cas essentiellement des séries temporelles où les unités statistiques sont soit des instants, soit des périodes.
- organisés selon une structure de voisinage. Il s'agit essentiellement

(9) La première tentative de systématisation et de classification des graphiques a été faite pour le troisième Congrès International de Statistique de Vienne (Autriche) en 1857, où il est noté que le point de départ est la nature des données à représenter.

d'unités spatiales faisant l'objet d'un repérage sur une carte, type carte de géographie. Deux types de représentation graphique sont à distinguer selon que ces unités sont :

- en implantation ponctuelle (ville, station météo...)
- en implantation zonale (région, parcelle de terrain...)
- organisés selon une structure spécifique telle qu'une structure d'arbre, une structure spatio-temporelle, ...

Nous ne développerons pas les deux derniers cas :

- pour les graphiques relatifs aux unités spatiales, il est préférable de renvoyer le lecteur aux ouvrages spécialisés ([3], [4]) rédigés par des «graphiciens» qui ont fait une étude approfondie des techniques de représentation.
- pour les graphiques du groupe 4, chaque situation est particulière et doit conduire à un graphique approprié.

Le troisième critère de classification fait intervenir le type du ou des caractères étudiés simultanément :

- nominal
- ordinal qualitatif
- semi-quantitatif (les modalités sont des intervalles de $\mathbf{R}$)
- numérique (ou quantitatif).

Pour des graphiques faisant intervenir plusieurs caractères, tous les «croisements» sont a priori possibles. Une étude peut par exemple porter sur quatre caractères dont un est nominal, deux sont numériques et un est semi-numérique.

Dans le cas d'un seul caractère, le tableau général ci-après permet de symboliser les différentes situations en croisant les deux autres critères de classification, à savoir la structure sur la population (en trois classes) et le type de caractère (en quatre classes).

Classification des graphiques relatifs à un seul caractère

Cas où les individus sont permutables

Dire que les individus sont permutables signifie que l'identité et le numéro d'ordre de chaque individu sont des informations superflues et donc que le graphique ne doit pas nécessairement en tenir compte. On considère quatre genres de graphiques selon le type du caractère :

1. Caractères nominaux

L'ensemble des modalités est fini et n'est muni d'aucune relation, en particulier d'ordre. Chaque individu possédant une et une seule de ces modalités, un caractère nominal avec k modalités réalise une partition de la population en k classes, chaque classe correspondant aux individus ayant la même modalité. Puisque l'on peut négliger l'identité des individus, seul intervient le poids de chaque classe (le nombre des individus de la classe pour une population équipondérée). On se trouve dans une situation où l'on désire représenter la partition d'un tout (ici, l'ensemble des individus) en k parties.

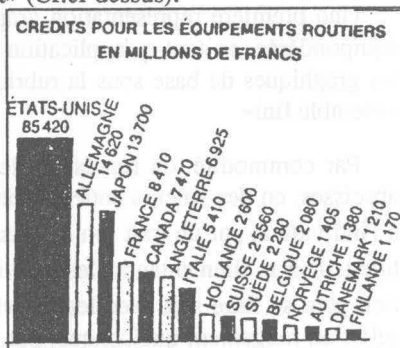
Les graphiques appropriés sont ceux rencontrés dans la partie «graphique de base» pour le problème de la partition d'un tout. On privilégiera toutefois les surfaces et les partitions qui respectent le plus possible le manque d'ordre parmi les modalités :

◇ le cercle avec des secteurs angulaires ; en d'autres termes le graphique appelé familièrement un «camembert» (Cf. ci-dessus).

◇ le diagramme en barres ; l'ordre de présentation de ces rectangles est arbitraire et on adopte par exemple l'ordre qui donne des rectangles de hauteur croissante.

On procédera de la même façon avec un pictogramme (diagramme figuratif).

Exemple (Cedic-Nathan-Math 5^{ème})



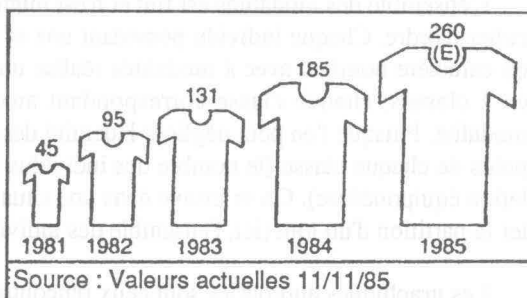
2. Caractères ordinaux qualitatifs

Un tel caractère réalise encore une partition de l'ensemble des individus, mais les différentes parties sont elles-mêmes ordonnées. Un graphique approprié doit tenir compte de cet ordre :

◇ si on adopte un graphique en partition d'une surface, on choisira une surface et un découpage qui permettent de visualiser cet ordre, par exemple un demi-cercle (un «demi-camembert»). Cette représentation est en général adoptée pour représenter le nombre de députés par tendance politique au sein de l'Assemblée Nationale. On peut aussi utiliser le découpage d'un rectangle avec l'ordre de lecture de la gauche vers la droite (Cf. p. xxx).

◊ si on adopte un diagramme en barres ou figuratif, les figures devront évidemment être ordonnées selon l'ordre des modalités.

Exemple :
(Cedic-Nathan -
Math 5^{ème})



3.Caractères numériques

Première représentation graphique

Une première représentation graphique du caractère sur une population équipondérée, en tant qu'application de A dans R, est celle rencontrée dans les graphiques de base sous la rubrique «fonction numérique définie sur un ensemble fini».

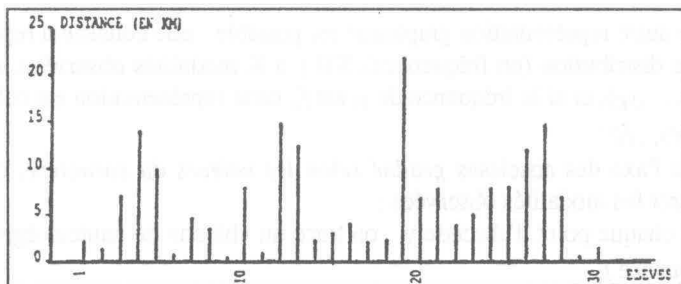
Par commodité, on représente les individus de A alignés sur l'axe des abscisses, en des valeurs entières consécutives, et la valeur x_i correspondant à l'individu a_i par un trait (on dit aussi un bâton) vertical de hauteur proportionnelle à x_i . Bien entendu, les individus étant permutable, cette représentation peut se faire soit avec les individus rangés dans leur ordre initial, soit selon un rangement quelconque, par exemple celui qui donne des bâtons de hauteurs croissantes (ou décroissantes).

Exemple : ayant effectué une enquête auprès de 30 élèves d'un collège de la région de Rouen, on a sélectionné la question suivante «Quelle est la distance en kilomètres que vous parcourez pour venir de chez vous au collège ?»

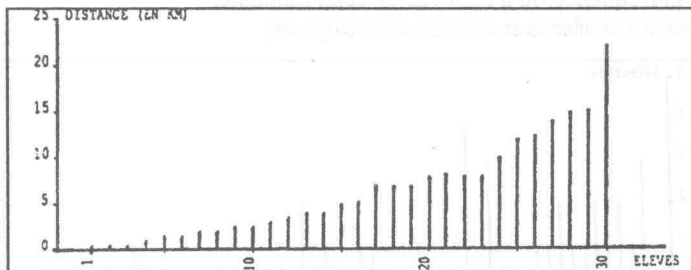
La série statistique «brute» équipondérée, obtenue en interrogeant les élèves par ordre alphabétique est :

2	1,5	7	14	10	0,5	4,5	3,5	0,5	8
1	15	12,5	2,5	3	4	2	2,5	22	7
8	4	5	8	8	12	15	7	0,5	1,5

Ces valeurs peuvent être représentées par le diagramme en bâtons :



On facilite la lecture en rangeant les distances par valeurs croissantes et en représentant la série statistique ordonnée par le nouveau diagramme en bâtons :



Distribution du caractère

Pour le caractère X observé, deux ou plusieurs individus peuvent avoir donné la même réponse. Si les individus sont permutable, il est possible d'établir la liste des modalités observées et d'attribuer à chacune d'elles un coefficient de pondération de la manière suivante : le *poids d'une modalité* est la somme des poids des individus ayant eu cette réponse (le nombre des individus dans le cas d'une population équipondérée, et on parlera d'*effectif* de la modalité). On détermine la *fréquence* de la modalité en divisant son poids par le poids total P , puis on en déduit le pourcentage.

La série statistique constituée par la suite des modalités observées (généralement rangées par valeurs croissantes), chacune de ces modalités étant accompagnée de sa pondération (effectif, fréquence ou pourcentage), forme la **distribution du caractère X** .

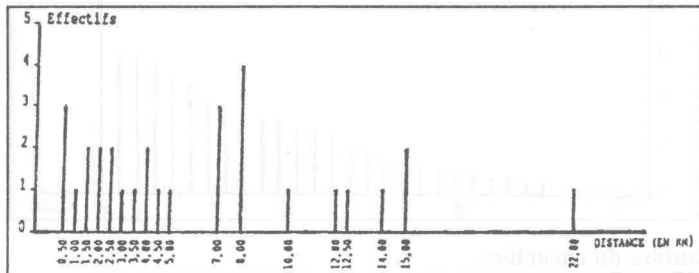
Représentation de la distribution

Une autre représentation graphique est possible : elle consiste à représenter cette distribution (en fréquences). S'il y a K modalités observées, notées $(y_1, y_2, \dots, y_K)$, et si la fréquence de y_i est f_i , cette représentation est celle des couples (y_i, f_i) :

- sur l'axe des abscisses *gradué selon les valeurs du caractère*, on fait figurer les modalités observées ;
- en chaque point d'abscisse y_i , on trace un « bâton » de hauteur égale à la fréquence f_i .

La distribution du caractère «distance» est représentée par le diagramme en bâtons des fréquences : l'axe des abscisses est gradué selon les distances (en km) et pour chaque distance relevée, on trace un trait dont la hauteur est égale à la fréquence ou à l'effectif de cette modalité.

Distribution en effectifs du caractère distance (en km)



4. Caractères semi-quantitatifs

Fréquence d'un intervalle

Ayant fixé deux valeurs a et b dans l'ensemble des modalités d'un caractère numérique X , on peut s'intéresser au poids des observations réalisées entre ces valeurs, c'est-à-dire la somme des poids (ou le nombre) des individus qui admettent une modalité du caractère X comprise entre a et b . Par exemple, pour une population équipondérée :

- ◇ nombre de personnes ayant un âge compris entre 25 et 35 ans,
- ◇ nombre de salariés ayant un salaire mensuel compris entre 4 000 et 6 000 francs,
- ◇ nombre de candidats reçus à un examen (note comprise entre 10 et 20),

.....

Bien entendu on pourrait fixer une plage de valeurs qui ne serait pas un intervalle mais un ensemble de nombres quelconque ; en pratique, on se limite aux seuls intervalles, qu'on appelle aussi **classe** (classe d'âge) ou **tranche** (tranche de salaire).

Dans la suite de cette partie, on considère une population équipondérée.

On appelle *effectif* d'un intervalle (10) le nombre des observations réalisées dans celui-ci. L'effectif est une grandeur «absolue» qui dépend non seulement de la répartition des observations, mais aussi de la taille de la population sur laquelle porte l'étude statistique.

Plus intéressante est la mesure «relative» obtenue en considérant la proportion (ou le pourcentage) des observations dans l'intervalle par rapport au nombre total d'observations. Cette proportion est la *fréquence* du caractère dans l'intervalle. Par abus de langage, on dira aussi que c'est la fréquence de l'intervalle (pour le caractère X).

Densité des observations

La fréquence d'un intervalle dépend encore de la longueur de celui-ci. Un intervalle qui recouvre toutes les modalités possibles (par exemple une classe d'âge entre 0 et 120 ans) a une fréquence de 1. Pour une meilleure connaissance de la localisation des observations, il est plus judicieux de s'intéresser au rapport entre la fréquence d'un intervalle et sa longueur (appelée aussi amplitude de l'intervalle).

On appellera *densité* du caractère statistique sur l'intervalle (a,b) , avec $a < b$, le rapport entre la fréquence de cet intervalle et son amplitude. Cette notion de densité est celle que l'on rencontre en géographie humaine quand on parle de densité de population dans une région donnée, calculée en faisant le rapport entre le nombre d'individus et la superficie de la région.

Partition en classes

Pour étudier la répartition des observations d'un caractère numérique, il est commode de «découper» l'ensemble des modalités en classes disjointes, c'est-à-dire telles qu'aucune valeur n'appartienne simultanément à deux classes différentes. Pour réaliser cette partition, il faut choisir (11) : - le nombre K de classes désirées, les $(K + 1)$ bornes a_i des intervalles.

(10) Pour une pondération quelconque sur la population, le poids d'un intervalle est la somme des poids des observations dans celui-ci.

(11) On donnera ci-dessous des indications sur des choix raisonnés.

On prend les valeurs a_i croissantes et, sauf élimination d'individus à réponse jugée aberrante, l'intervalle $[a_0, a_K]$ recouvre l'ensemble des modalités observées.

Pour chacun de ces intervalles $[a_0, a_1[, [a_1, a_2[, \dots, [a_{K-1}, a_K]$ de la partition, on détermine son effectif puis sa fréquence, enfin sa densité.

Histogramme

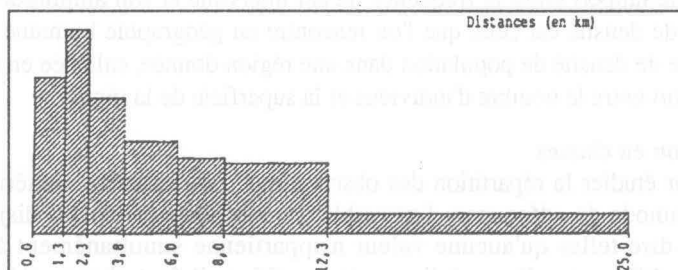
Lorsque l'on traite un caractère numérique et que l'on a défini une partition de R en intervalles, une représentation graphique adaptée est celle appelée **histogramme** : c'est celle de la densité du caractère en tant que fonction des différents intervalles de la partition.

1. La partition étant fixée, on trace un axe horizontal - axe des abscisses - sur lequel on marque les bornes des classes en utilisant une échelle arithmétique. Cet axe est gradué suivant les valeurs du caractère étudié (âge, salaire, taille...).

2. Sur chaque intervalle de la partition, on construit un rectangle dont la hauteur est proportionnelle à la densité de l'intervalle. En d'autres termes, sa surface représente la fréquence de la classe et est donc proportionnelle à l'effectif de la classe.

Pour l'exemple donné, de nombreux histogrammes peuvent représenter cette répartition des distances. Pour en dessiner un, choisissons de façon arbitraire, 7 classes ($K = 7$) et les 8 bornes suivantes :

$a_0 = 0$, $a_1 = 1,3$, $a_2 = 2,3$, $a_3 = 3,8$, $a_4 = 6$, $a_5 = 8$, $a_6 = 12,3$, $a_7 = 25$.



conseil des graphiciens

Des études sur la perception visuelle ont prouvé que l'œil juge mal une surface vide (blanche). Il est conseillé pour cela de remplir les rectangles de

l'histogramme par une trame ou un grisé qui permet de distinguer l'intérieur de la surface représentative de son extérieur. On pourrait s'interroger sur le choix de la meilleure trame.

mléthode de choix des classes pour un histogramme

De nombreux logiciels statistiques permettent de dessiner des histogrammes sur écran, table traçante ou autre périphérique, dès que l'on a fourni au programme les informations indispensables à son tracé :

- le nombre K de classes désirées.
- les bornes ou la méthode pour définir des bornes de façon systématique.

Parmi les partitions respectant certaines conditions, on peut citer :

◇ les partitions en intervalles d'amplitudes égales

L'utilisateur choisit le nombre K et les extrémités a_0 et a_K ; les bornes intermédiaires sont calculées pour que tous les intervalles aient la longueur $(a_K - a_0)/K$. Dans ce cas, les rectangles de l'histogramme ont des bases égales.

◇ les partitions à effectifs si possibles égaux

L'utilisateur choisit encore K , a_0 et a_K , et les bornes sont calculées de telle façon que chaque intervalle contienne le même nombre d'observations, c'est-à-dire n/K . Il est possible que, du fait de la présence d'ex-aequo et de problèmes de divisibilité, cette condition ne puisse pas être remplie exactement. La partition devra alors satisfaire au mieux l'exigence de rectangles de surfaces égales.

◇ les partitions en classes Bertin

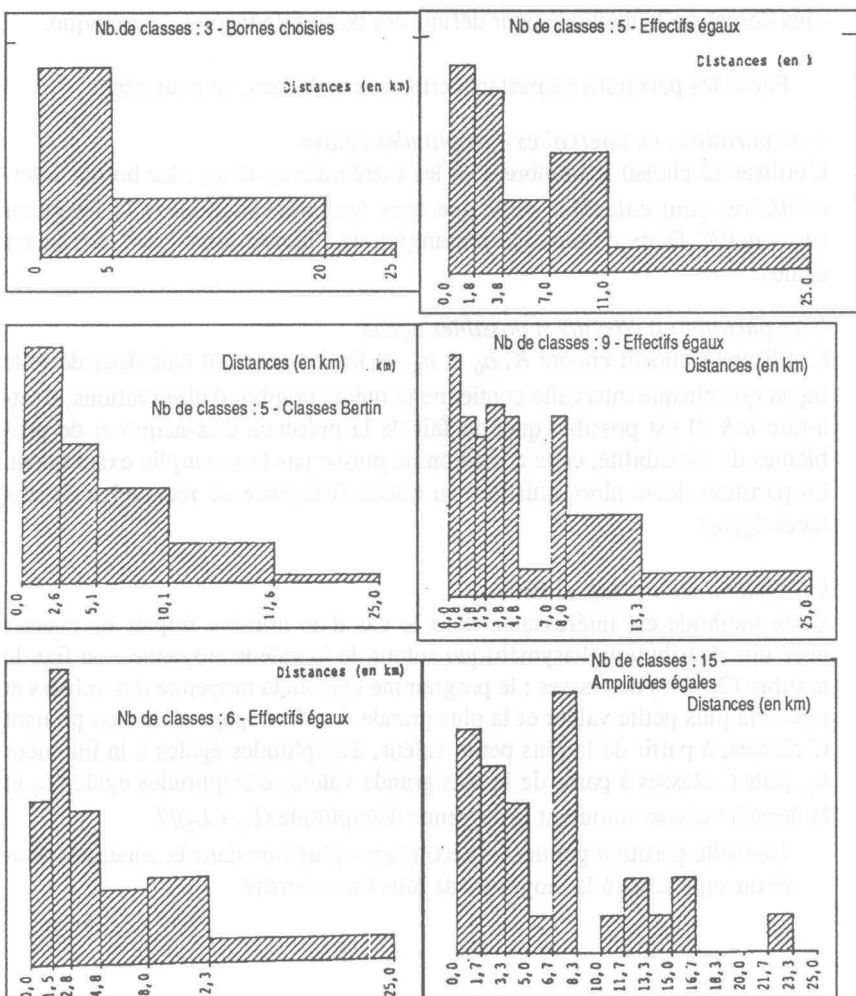
Cette méthode est intéressante dans le cas d'un nombre impair de classes avec une distribution dissymétrique autour de la valeur moyenne : on fixe le nombre $(2C + 1)$ de classes ; le programme calcule la moyenne des valeurs et relève la plus petite valeur et la plus grande. Le découpage se fait en prenant C classes, à partir de la plus petite valeur, d'amplitudes égales à la longueur L_1 , puis C classes à partir de la plus grande valeur, d'amplitudes égales L_2 et la dernière classe entourant la moyenne d'amplitude $(L_1 + L_2)/2$.

Une telle partition permet un découpage «plus fin» dans la zone, inférieure ou supérieure à la moyenne, de plus forte densité.

influence du nombre et du choix des classes

Dans le cas de séries statistiques relatives à de «petites populations», ce qui est le cas de cette enquête - ici $n = 30$ -, la forme de l'histogramme peut dépendre des choix du nombre de classes et de la méthode utilisée pour déterminer les classes.

Les exemples d'histogrammes suivants (12), construits à partir des mêmes données et ayant la même surface hachurée, illustreront cette «instabilité» :



(12) Les tracés du paragraphe *Caractères numériques* sont de B.Lannuzel

LES GRAPHIQUES DANS LES AUTRES DISCIPLINES

Tout au long de la scolarité en collège, c'est essentiellement en géographie que les élèves étudient, interprètent ou réalisent des graphiques.

A-Les graphiques en 6^{ème}

Diagrammes pluvio-thermiques

En géographie de 6^{ème}, quelle que soit l'intention des auteurs de manuels, ils utilisent tous des graphiques dans l'étude des différents climats de la Terre, partie essentielle du programme. Deux facteurs sont retenus pour l'étude des climats : les températures et les précipitations.

Les élèves doivent savoir lire, interpréter, construire :

- des graphiques des températures moyennes par mois pour une ville donnée (13) ;
- des graphiques des précipitations par mois pour une ville donnée ;
- des graphiques climatiques officiellement appelés diagrammes pluvio-thermiques qui sont la superposition de ces deux graphiques pour une ville donnée.

Les précipitations et les températures sont relevées en respectant un protocole bien précis : *« Il y a deux axes verticaux : à gauche, en bleu, l'axe des précipitations est gradué en mm ; à droite en rouge, l'axe des températures est gradué en °C. On a choisi une graduation telle que P (précipitations) est égale à 2T (températures) car à une température donnée (20° par exemple), l'évaporation peut prélever une quantité d'eau deux fois plus importante (40 mm) »* (Hachette 6^{ème}, 1990, p.203).

Sur un même graphique, la représentation des températures moyennes, calculées pour les 30 dernières années, (en rouge) et des précipitations (graphique en barres, en bleu) permet de mettre en relation deux indicateurs significatifs du climat.

Ce type de diagramme représente deux caractères dont l'un, la température, porte sur une population d'instant et l'autre, la pluviosité, sur une population de périodes (voir document A).

(13) Il semble que les élèves ont des difficultés à comprendre la notion de moyenne de températures par mois. Beaucoup d'élèves pensent que c'est la même température chaque jour du mois, malgré la contradiction avec l'expérience quotidienne. A noter que si les élèves savent calculer des moyennes sur des ensembles finis dès l'école primaire, la notion de moyenne (moyenne arithmétique) n'est, en Mathématiques, qu'au programme de 4^{ème}.

Autres graphiques.

Dans tous les manuels de 6^{ème}, en dehors des cartes, on rencontre aussi mais en nombre limité :

- des diagrammes en camembert ;
- des courbes de fonction ;
- des graphiques en barres représentant plusieurs caractères nominaux pour amener à faire des comparaisons (*document B*).
- d'autres diagrammes à plusieurs caractères dans la partie *Initiation à l'Economie (document C)*.

B-Les graphiques de la 5^{ème} à la 3^{ème}.

On peut classer les différents graphiques rencontrés dans les manuels en quatre grandes rubriques.

- des graphiques de fonction, la plupart montrant l'évolution d'une population, d'une production d'un pays au cours des années. Certains dessins représentent plusieurs données sur le même graphique pour amener à faire des comparaisons ou en tirer des conclusions (*document D*) ;
- des histogrammes accolés, la pyramide des âges (*document E*) ou d'autres diagrammes en barres représentant plusieurs données sur le même diagramme. La lecture, l'interprétation d'une pyramide des âges sont des éléments importants dans l'étude des populations. La lecture de ce genre de graphique est abordée en 5^{ème} puis approfondie en 4^{ème} et surtout en 3^{ème}. C'est un sujet qui se retrouve souvent au Brevet des Collèges.
- des représentations spatiales de deux caractères dont l'un, taille des agglomérations, est en implantation ponctuelle et l'autre, la densité d'habitants, est en implantation zonale (*document F*).
- des diagrammes polygonaux ou en étoile représentant plusieurs caractères (*documents G et H*).

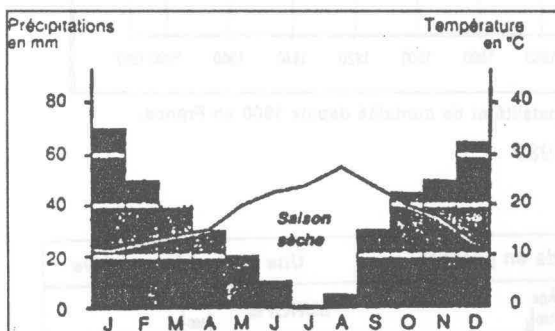
On peut noter à ce propos l'utilisation du terme «carré magique» pour une représentation qui n'est pas un carré et qui n'a rien à voir avec le terme «carré magique» utilisé en Mathématiques.

Références :

- [1] *Analyse des données*, t.1, Publication de l'A.P.M.E.P. n°28, 1980.
- [2] Artigue M. et Swed T., *Représentations graphiques*, IREM de Paris 7, n°30, 1984.

- [3] Bertin J. *La graphique et le traitement graphique de l'information*, Flammarion, Paris 1977.
- [4] Brunet R., *La carte mode d'emploi*, Fayard/Reclus, Paris 1987.
- [5] Colloque "Les représentations Graphiques dans l'Enseignement et la Formation", Grenoble, 8-9 juillet 1991.
- [6] *La graphique*, Guide Méthodologique pour la pratique du travail autonome, C.R.D.P. de Besançon, 1983.
- [7] *Graphiques au collège*, groupe "Statistique" : Badizé, Jacques, Lannuzel, Orange, Petitpas, Pichard ; IREM de ROUEN, juin 1991.

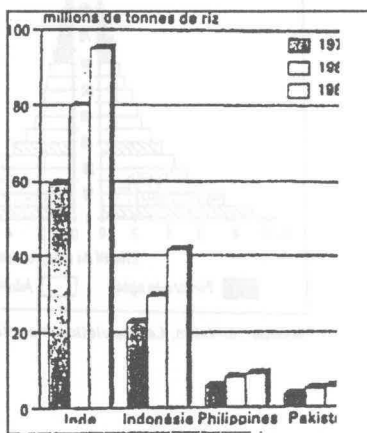
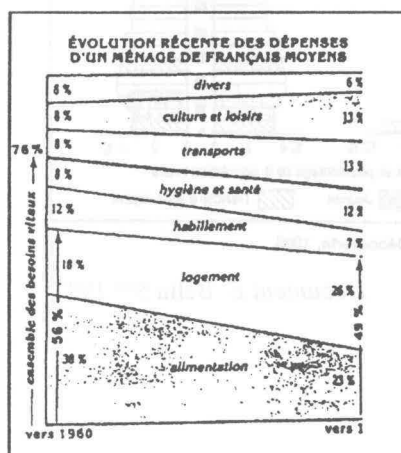
DOCUMENTS



Le diagramme pluviothermique de Tunis

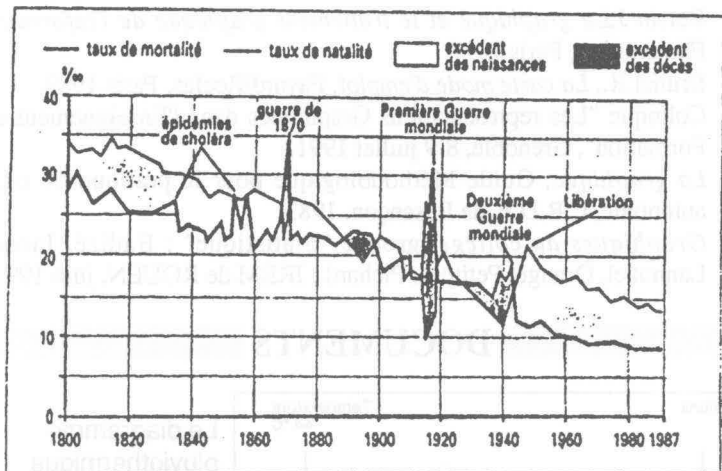
Document A
Hachette 6^{ème} 90

Document B
Hachette 6^{ème} - 1990



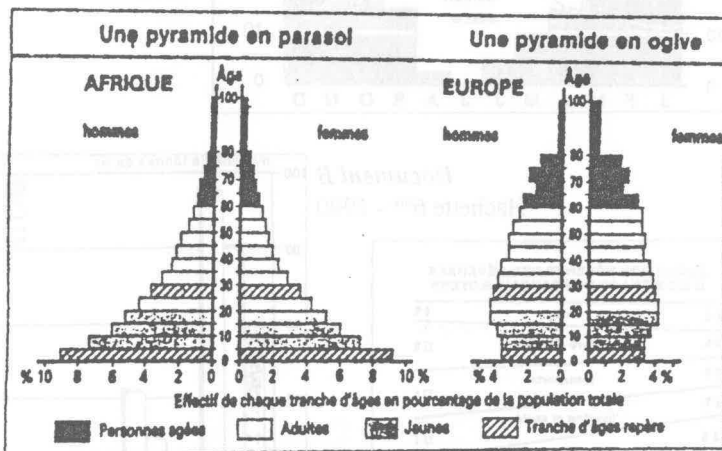
Document C
Hatier 6^{ème} 87

La production de riz augmente en Asie



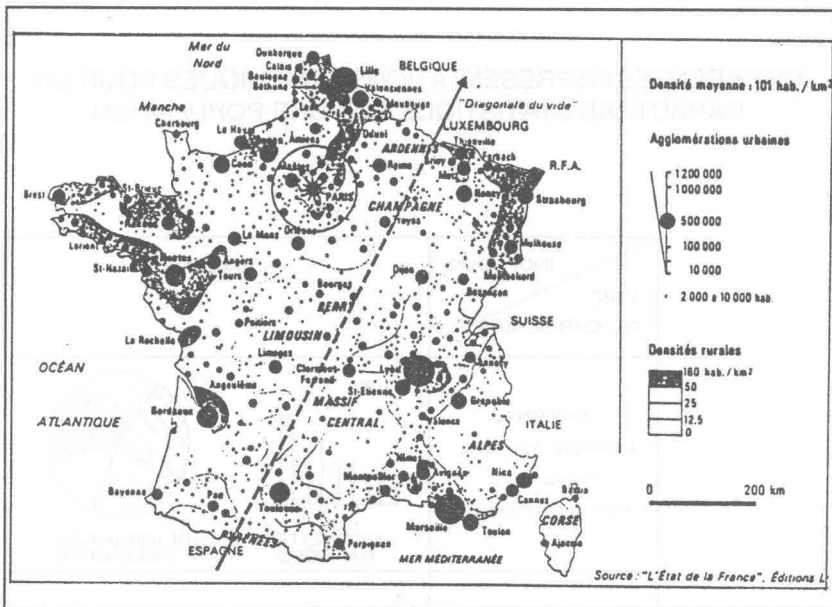
Évolution des taux de natalité et de mortalité depuis 1800 en France.

Document D - Belin 3^{ème} 1989



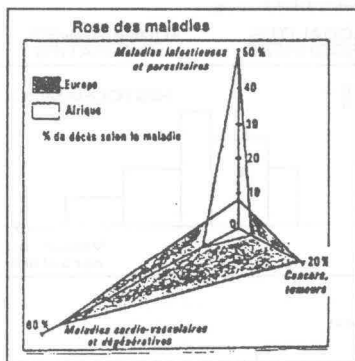
Source : J. Vailin, La population mondiale, La Découverte, 1986.

Document E Belin 5^{ème} 1987

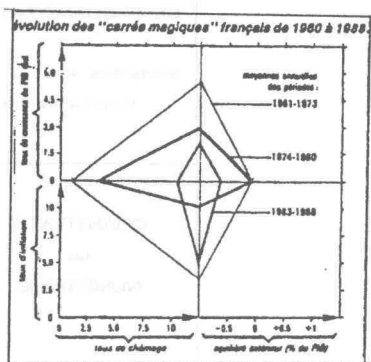


Source : "L'Etat de la France". Editions La Découverte. 1987.

Document F Istra 3^{ème} 1989

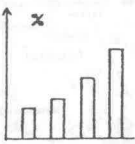
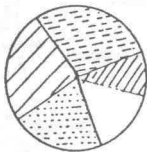
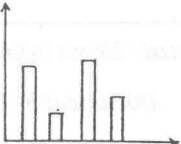
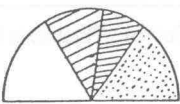
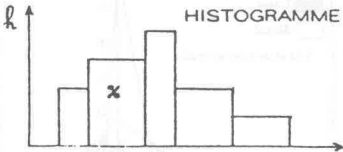
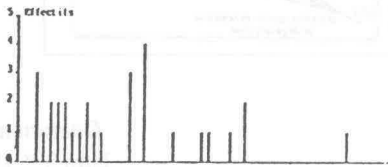


Document G Istra 5^{ème} 1987

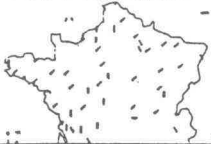
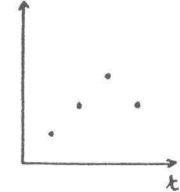
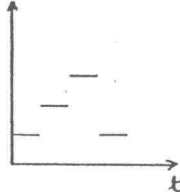
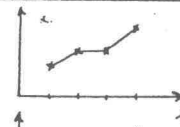
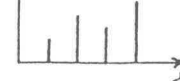
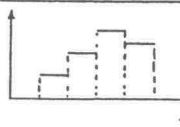


Document H Istra 3^{ème} 1989

DIFFERENTES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES POUR UN CARACTERE STATISTIQUE SUR UNE POPULATION

INDIVIDUS TYPE DE CARACTÈRE	PERMUTABLES
NOMINAL (Nombre fini de modalités non ordonnées)	  MODALITÉS RANGÉES +DIAGRAMMES FIGURATIFS
ORDINAL QUALITATIF	  MODALITÉS ORDONNÉES +DIAGRAMMES FIGURATIFS
SEMI-QUANTITATIF modalités = intervalles de $\mathbb{R}$	 HISTOGRAMME CLASSES Valeur du caractère
QUANTITATIF ou NUMÉRIQUE	

DIFFERENTES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES POUR UN CARACTERE STATISTIQUE SUR UNE POPULATION

ORDONNÉS		SPATIAUX	
DATE	PÉRIODE	IMPLANTATION PONCTUELLE	IMPLANTATION ZONALE
		signe -variation d'orientation -forme des signes 	variation -de couleur -de grain 
MOD 	MOD 	variation de valeur aspect +/- foncé de la surface 	
 		variation de taille  1980	

DES IMPOTS A L'ELLIPSE ...

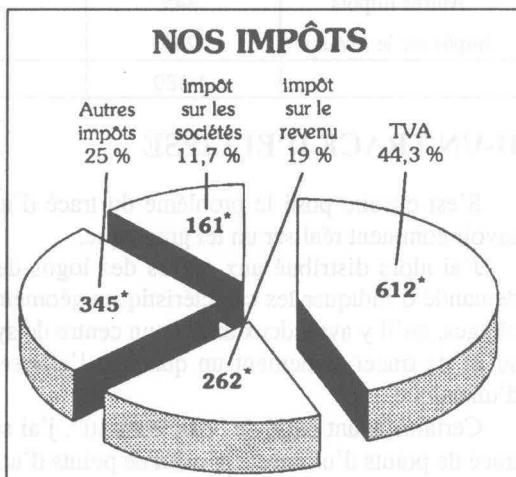
Gérard PORNIN
IREM de Limoges

Cet article présente une activité réalisée avec des élèves de troisième du Collège Marouzeau à Guéret (Creuse), dans le courant du deuxième trimestre 1990-91.

Si, quand vous aurez lu les quatre premiers paragraphes, vous réagissez comme bon nombre de collègues à qui ce travail a été présenté : "C'est pas des stats, c'est de la géométrie !", vous serez prêts à aborder le cinquième paragraphe où sont présentés les objectifs.

I- A PARTIR D'UN DOCUMENT

Il s'agit de la photocopie, distribuée à chaque élève, d'une feuille jointe au formulaire de déclaration des revenus de 1989 et intitulée : "A QUOI SERVENT NOS IMPOTS EN 1990 - Les priorités pour 1990". L'étude a porté sur le premier graphique : "NOS IMPOTS", reproduit ci-contre :



Les élèves ont ainsi été confrontés à une représentation graphique sous forme de “parts de camembert” vues en perspective cavalière. Ils ont eu l'impression que le dessin de base était une ellipse (mot connu car déjà prononcé lors de représentations en perspective cavalière de cylindres ou de sphères).

La première étape a consisté à “rassembler” les parts sur papier calque, ce qui les a confortés dans cette opinion.

Je leur ai alors demandé si ces parts étaient tracées comme sur un disque. Presque tous les élèves ont pensé à calculer les angles au centre correspondants avant de répondre.

Après avoir mis en place le tableau ci-dessous, ils ont été très surpris de constater que ces angles calculés ne correspondaient pas à ceux mesurés (la colonne pourcentages avait uniquement pour but de vérifier l'exactitude de ceux figurant sur le document). Pour donner un élément d'explication j'ai signalé que l'ellipse représente souvent un cercle ou un disque vus en perspective cavalière, laquelle ne conserve pas en général les angles.

Impôts	Milliards de F	Pourcentages	Angles au centre d'un disque (en degrés)
T.V.A	612	44,3	160
Impôt sur les sociétés	161	11,7	42
Autres impôts	345	25	90
Impôt sur le revenu	262	19	68
	1 380	100	360

II-UN TRACÉ D'ELLIPSE

S'est ensuite posé le problème du tracé d'une ellipse, car ils ont voulu savoir comment réaliser un tel graphique.

J'ai alors distribué aux élèves des logos de forme elliptique et leur ai demandé d'indiquer les caractéristiques géométriques. La majorité a vu, par pliages, qu'il y avait deux axes et un centre de symétrie ; on en a déduit qu'il suffit de tracer seulement un quart de l'ellipse puis de compléter à l'aide d'un calque.

Certains ayant parlé de “cercle aplati”, j'ai suggéré une analogie entre le tracé de points d'un cercle et celui de points d'une ellipse.

L'exercice suivant a été alors proposé aux élèves :

On considère un carré RSTU de centre O, les points I, J, I', J' étant les milieux respectifs des côtés [UR], [RS], [ST] et [TU].

On trace [II'] et [JJ'].

Sur [RI] on construit le point L tel que $RL = \frac{1}{4} RI$, puis sur [OI] le point M tel que $OM = \frac{1}{4} OI$.

La droite (J'M) coupe alors [JL] en P et [JR] en N.

Comment semblent être les segments [JL] et [J'N] ? Le démontrer.

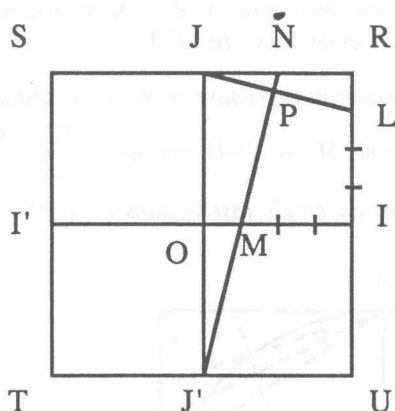


Figure 1

Tous remarquent la perpendicularité de ces segments. Pour la démontrer certains pensent à la réciproque de la propriété de Pythagore mais doivent abandonner devant le manque de distances connues ; d'autres pensent aux angles. En les encourageant dans cette voie ils constatent que certains angles semblent être égaux et notamment $\widehat{JJ'N}$ et $\widehat{R JL}$, d'autant plus que beaucoup remarquent la superposition possible des triangles OMJ' et RLJ .

Lorsque j'eus précisé qu'il était possible d'utiliser la trigonométrie, certains élèves ont trouvé la démonstration suivante :

$$\text{Dans le triangle } OMJ', \text{ rectangle en } O : \tan(\widehat{OJ'M}) = \frac{OM}{OJ'} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Dans le triangle } RLJ, \text{ rectangle en } R : \tan(\widehat{RJL}) = \frac{RL}{RJ} = \frac{1}{4}$$

Ainsi $\tan(\widehat{OJ'M}) = \tan(\widehat{RJL})$, ce qui laisse penser que les angles aigus $\widehat{OJ'M}$ et $\widehat{RJL}$ sont égaux.

Après cela presque tous sont arrivés, plus ou moins rapidement, à la fin de la démonstration, la façon la plus courte étant de voir que dans le triangle NJJ' rectangle en J , l'angle $\widehat{JJ'P}$ étant le complémentaire de $\widehat{PJN}$ est aussi celui de $\widehat{JJ'P}$. Donc $\widehat{JPJ'} = 90^\circ$.

Comme le triangle JPJ' est rectangle en P , cela veut dire que P est élément du cercle de centre O et de diamètre $[JJ']$.

De la même manière on pourrait reprendre cette démonstration avec tout point L de $[RI]$ et tout point M de $[OI]$ tels que : $\frac{RL}{RI} = \frac{OM}{OI}$ et ainsi obtenir des points d'un quart du cercle inscrit dans le carré $RSTU$ (voir figure 2, partie droite).

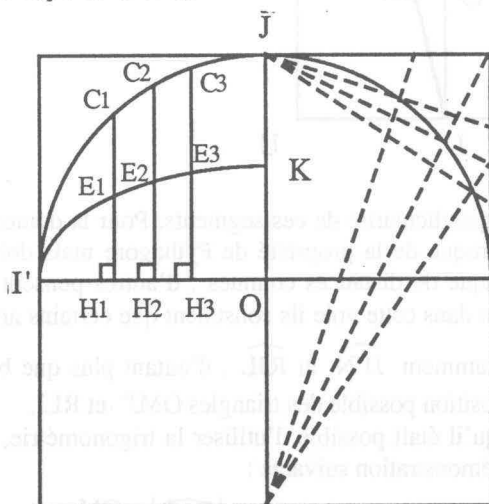


Figure 2

Par analogie on va procéder de la même façon pour construire des points d'un quart d'ellipse inscrite dans un rectangle (voir figure 3). Les élèves vérifient que le logo de forme elliptique qui a été distribué est bien inscrit dans un rectangle dont les médiatrices des côtés sont les axes de symétrie de l'ellipse.

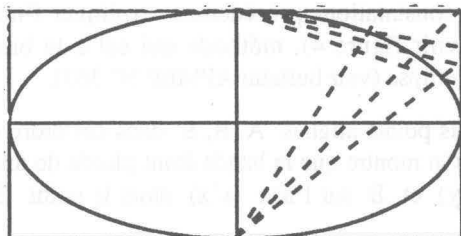


Figure 3

III-D'AUTRES TRACÉS

Si on a pris un rectangle de même longueur que le côté du carré, on peut reporter un quart d'ellipse dans ce carré comme sur la figure 2, partie gauche, et faire constater que pour les points C_1, C_2, C_3 de l'arc de cercle IJ de projetés orthogonaux H_1, H_2, H_3 sur [I'O], les points correspondants E_1, E_2, E_3 de l'ellipse semblent être tels que :

$$E_2, E_3 \text{ de l'ellipse semblent être tels que : } \frac{H_1E_1}{H_1C_1} = \frac{H_2E_2}{H_2C_2} = \frac{H_3E_3}{H_3C_3} = \frac{OK}{OJ} = \frac{OK}{OI'}$$

OK étant la longueur du demi-petit axe de l'ellipse notée b et OI' celle du demi-grand axe notée a .

Ce rapport b/a constant peut être interprété comme le "coefficient d'aplatissement".

On a ainsi une construction possible d'une ellipse à partir d'un cercle.

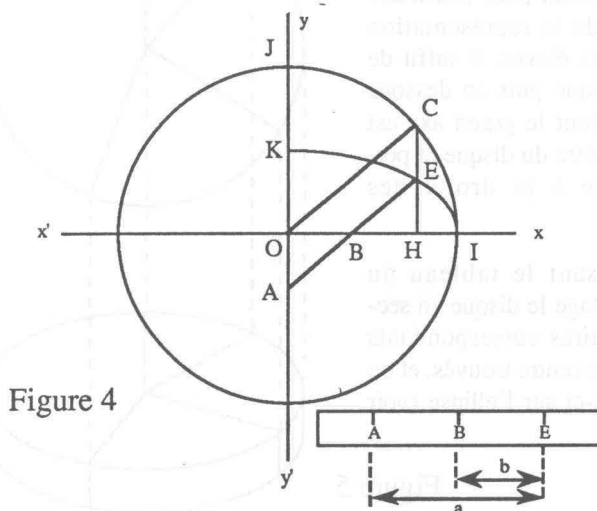


Figure 4

On peut, à partir des constatations précédentes, expliquer l'utilisation d'une bande de papier (voir figure 4), méthode qui est à la base de la construction de traceurs d'ellipse (voir bulletin APMEP N° 367).

Il suffit de prendre trois points alignés A, B, E dans cet ordre de sorte que $AE = a$ et $EB = b$. On montre que la bande étant placée de telle façon que A soit sur l'axe ($y'y$) et B sur l'axe ($x'x$) alors le point E est un point de l'ellipse.

En effet si l'on considère le point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AE}$, C est élément du cercle car $OC = AE = a$. Comme (OA) est perpendiculaire à ($x'x$) et (CE) parallèle à (OA), (CE) est perpendiculaire à ($x'x$) en H.

La démonstration du fait que $\frac{HE}{HC} = \frac{b}{a}$ a été assez bien vue par les élèves qui ont tout de suite pensé à la propriété de Thalès dans le triangle OCH : $\frac{HE}{HC} = \frac{HB}{HO} = \frac{EB}{CO} = \frac{b}{a}$.

Donc E est élément de l'ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$.

IV-RETOUR AU DOCUMENT

En conclusion pour construire les "parts" de la représentation distribuée aux élèves, il suffit de tracer un disque puis en dessous une ellipse dont le grand axe est égal au diamètre du disque et perpendiculaire à la droite des centres.

En utilisant le tableau du début on partage le disque en secteurs circulaires correspondants aux angles au centre trouvés, et on projette ceux-ci sur l'ellipse (voir figure 5).

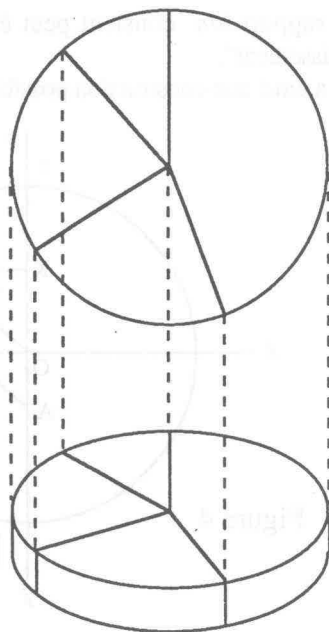


Figure 5

Pour donner l'image d'un "camembert" on translate la demi-ellipse inférieure parallèlement au petit axe. On peut alors décaler les "parts" les unes par rapport aux autres pour retrouver la représentation initiale.

V-POURQUOI CETTE ACTIVITE ?

Au niveau des médias, il est de plus en plus fréquent de trouver des "camemberts" en perspective cavalière. Il est donc intéressant d'éveiller l'esprit critique des élèves face à de tels graphiques.

Ils risquent en effet d'en avoir une perception erronée, conditionnés qu'ils sont par le tracé de diagrammes circulaires (la non proportionnalité des angles les a d'ailleurs surpris).

Après une phase d'observation, il est souhaitable de passer à la réalisation concrète, mais celle-ci nécessite d'expliquer clairement comment tracer une ellipse. L'étude de cette conique n'est évidemment pas au programme de troisième, mais ne soyons pas hypocrites : il faut bien, un jour ou l'autre représenter un cylindre, je ne parle pas d'une sphère, en perspective cavalière (on ne peut pas éternellement se contenter des vues en coupe !).

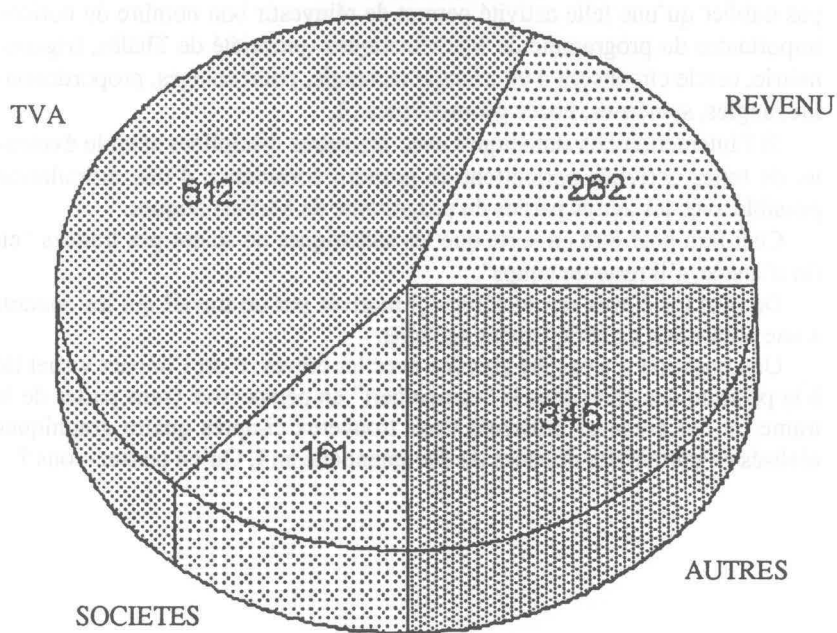
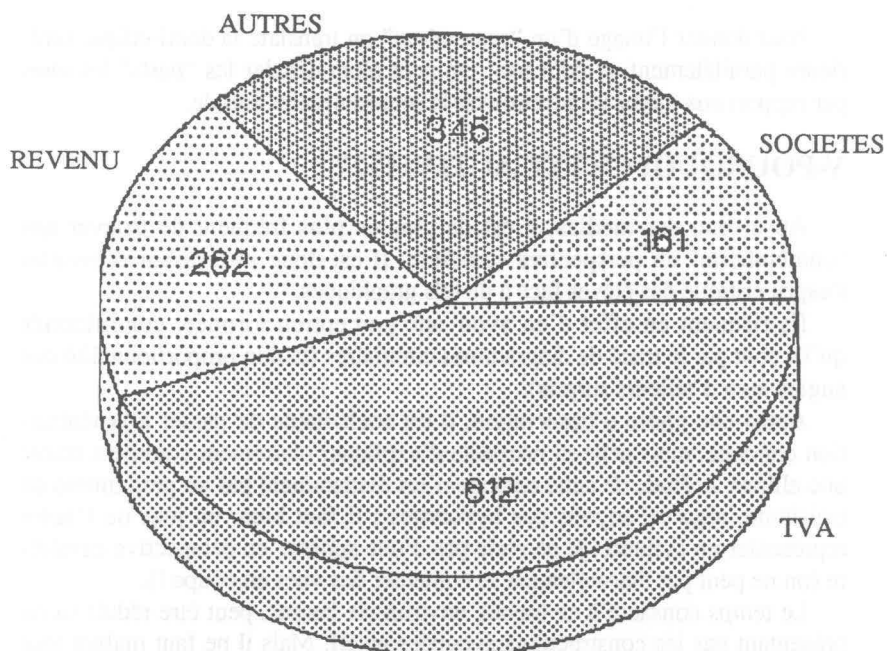
Le temps consacré à ce travail, environ six heures, peut être réduit en ne présentant pas les constructions évoquées au III. Mais il ne faut malgré tout pas oublier qu'une telle activité permet de réinvestir bon nombre de notions importantes du programme de Mathématiques (propriété de Thalès, trigonométrie, cercle circonscrit à un triangle rectangle, pourcentages, proportionnalité, angles, symétries, tracés géométriques...).

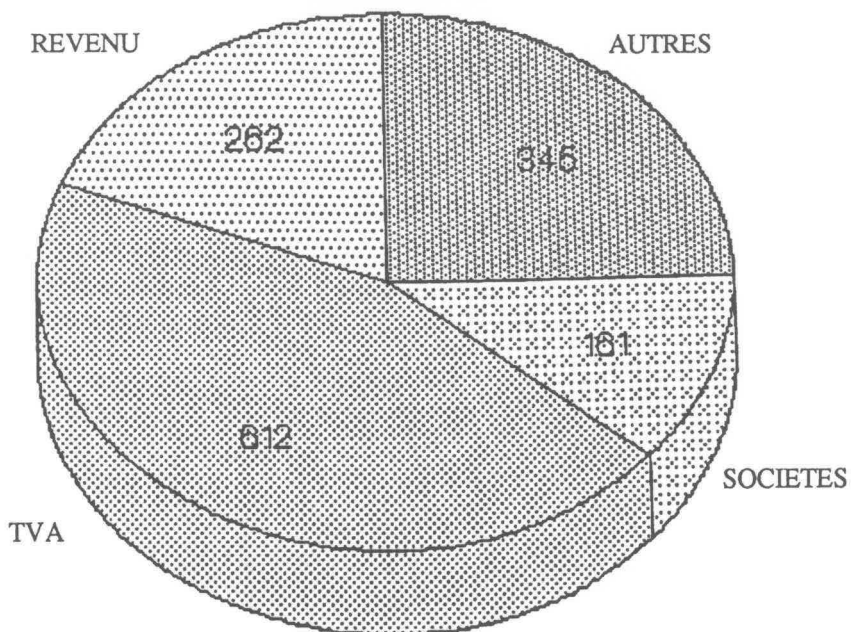
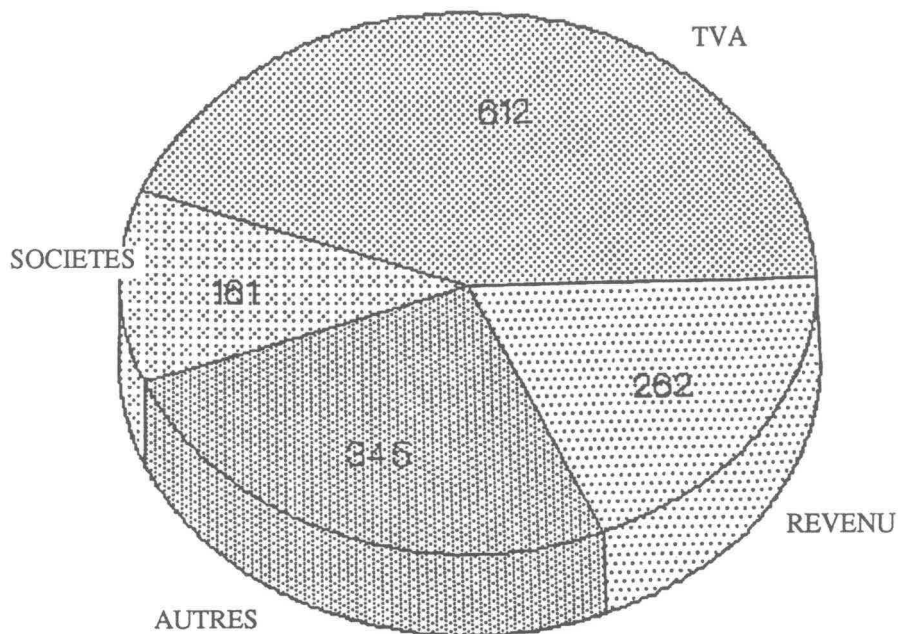
Si l'interaction des statistiques avec les autres disciplines semble évidente, de telles activités permettent de prendre conscience d'une articulation possible avec les autres parties du programme de Mathématiques.

Ceci fera peut-être en sorte que les statistiques ne soient pas traitées "en fin d'année, s'il reste du temps".

De plus les élèves seront sûrement motivés par un travail qui les conduit à une réalisation esthétiquement agréable.

Une question n'a pas été abordée avec les élèves, c'est l'impact visuel lié à la position des parts dans le "camembert" en perspective (sans parler de la trame ou des couleurs utilisées). Vous trouverez ci-après quatre graphiques réalisés en partant des données du document cité au I. Qu'en pensez-vous ?





MÉDIANE ET MOYENNE EN TROISIÈME POURQUOI ET COMMENT ?

Jean-Claude DUPERRET

IREM de Reims

Dans le suivi scientifique 3^{ème} et dans le bulletin de liaison collège-lycée, nous avons présenté quelques situations illustrant les notions de moyenne et de médiane.

Mais nous nous sommes alors surtout attachés à produire des situations montrant *comment* enseigner ces notions aux élèves. En particulier, la médiane (qui, contrairement à la notion de moyenne, n'est pas une «connaissance exigible» du programme de 3^{ème} !) a surtout été un prétexte à réinvestir d'autres notions. (Exemples : le théorème de Thalès) (Voir [1] et [2]).

Je crois qu'il est cependant important de montrer à nos élèves *pourquoi* la notion de médiane vient apporter un complément d'information indispensable à la moyenne pour mieux comprendre une série statistique.

Il peut être aussi intéressant de leur proposer une situation montrant l'insuffisance de la connaissance des tendances centrales pour décrire parfaitement une série statistique.

C'est le travail que j'ai essayé de faire avec mes élèves de 3^{ème} en 1990-91 (classe de 3^o1 latiniste, qui fait partie de ce qu'on appelle par tradition une «bonne classe» : le numéro ne saurait tromper!).

Partie 1 : Méfiez-vous des informations.

Un matin, sur une radio périphérique, j'entends le commentateur donner l'information suivante : «*La moyenne des gens qui suivent des cures est de 60 ans*» et d'ajouter : «*Si la majorité des gens qui suivent une cure ont la soixantaine, il faut cependant remarquer que 50% des curistes ont moins de soixante ans*»...Sic!

Dans le commentaire qui a suivi, j'ai cru comprendre que l'objet de cette information était le souci des villes d'eaux de s'équiper pour un public potentiellement jeune. Pour moi, quelle chance : j'avais l'intention de commencer les statistiques avec mes élèves de 3^{ème}. J'arrive donc dans ma classe et rapporte aux élèves l'information précédente en leur demandant s'ils sont d'accord avec la conclusion du commentateur. La plupart des élèves répondent spontanément «oui». Mais quelques-uns (qui ont appris à se méfier de mes questions!) se contentent d'un «peut-être» ou d'un «faut voir».

Façon très polie de me renvoyer mon problème!

Je leur propose alors les deux situations suivantes :

Situation 1 : Histoire de notes (séquence 1)

Un professeur rend un devoir aux 31 élèves de sa classe. Voici la liste des notes :

8 16 9 16 19 12 7 9 17 8
9 11 9 15 9 8 8 20 7 8
14 18 6 19 7 15 18 16 17 10
18

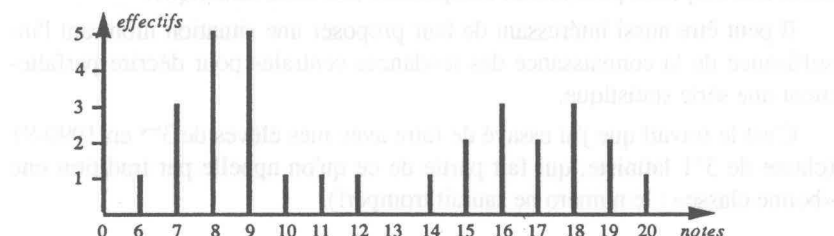
Question 1 : Comment clarifier cette série de notes ? Quelle représentation graphique choisir ?

Les élèves tombent rapidement d'accord sur les deux réponses suivantes :

a) *Rangement des données dans un tableau*

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
Effectifs	1	3	5	5	1	1	1	0	1	2	3	2	3	2	1	31

b) *Diagramme en bâtons*



Question 2 : A partir des informations précédentes, répondre aux questions :
 ◇ Quelle(s) note(s) représente(nt) le plus grand nombre de copies ?
 ◇ Quelle est la moyenne de la classe à ce devoir ?

A la première question, la réponse vient rapidement : **8 et 9**.

Pour la moyenne, il n'y a pas de difficulté non plus. C'est cependant l'occasion d'introduire la moyenne pondérée. On trouve donc : $\bar{x} \approx 12,35$

Nous revenons alors aux questions soulevées par le commentaire radiophonique.

Questions :

- ◇ La moyenne est environ 12,35 : est-ce que les notes de la majorité des élèves sont proches de la douzaine de points ?
- ◇ Y a-t-il 50% d'élèves qui ont moins de 12,35 ?

A la première question, les élèves constatent que 12 et 13 encadrant 12,35 sont les notes les moins «fréquentées».

A la deuxième question, ils arrivent au total de 17 élèves sur 31 qui ont moins de la «moyenne», soit 55% des élèves.

Question 3 : Existe-t-il une note telle qu'il y ait autant d'élèves ayant moins que cette note que d'élèves ayant plus?

Vu qu'il y a 31 élèves, il vient rapidement que la note cherchée doit être celle du 16^{ème} élève car il y en aura 15 «avant» et 15 «après». Le tableau déjà fait suffit alors pour donner cette note : **m = 11**.

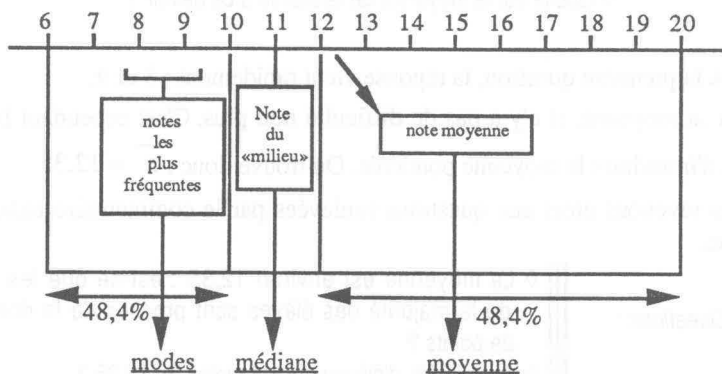
Bien que cela ne soit pas nécessaire (les élèves ayant suffisamment d'éléments pour répondre à la question posée), j'en profite pour rappeler les notions vues en 4^{ème} sur les effectifs cumulés croissants (car je compte réinvestir cette notion dans la situation 2).

On établit donc le tableau :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs cumulés croissants	1	4	9	14	15	16	17	17	18	20	23	25	28	30	31

 D'où la solution déjà proposée

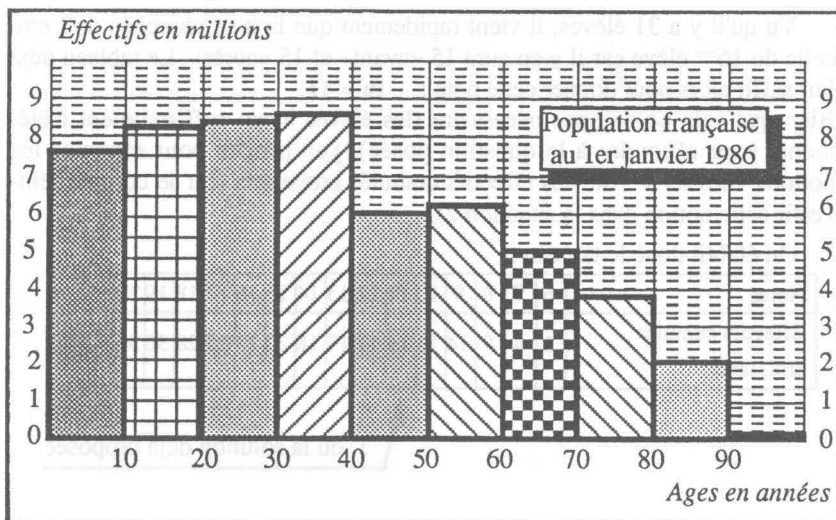
On résume alors la situation :



Suit alors une première mise en forme de ces notions et un premier débat sur la situation d'origine (celle des curistes).

Situation 2 : Histoire d'âges (séquence 2)

Pour avoir une situation plus proche de celle du départ, je propose aux élèves le graphique suivant représentant la partition de la population française en «classes d'âges» au premier janvier 1986. Je leur précise que les centenaires ont été comptés dans la classe des 90-100 ans.



Question 1 : Quelle est la classe d'âge la plus nombreuse ?

Avec le graphique proposé, la réponse est immédiate pour les élèves : ce sont les personnes ayant entre 30 et 40 ans.

Question 2 : Je cherche l'âge d'un français «partageant» cette population en deux parties égales : ceux qui sont plus jeunes que lui et ceux qui sont plus vieux.

La recherche par groupes qui suit permet de dégager deux courants de réponses :

◇ *Les premiers privilégient l'aspect numérique :*

L'effectif total est de 56 millions.

Il y a 24,5 millions de Français qui ont moins de 30 ans.

Il y a 23,2 millions de Français qui ont plus de 40 ans.

Il faut donc chercher entre 30 et 40 ans et plus près de 30 que de 40.

◇ *Les seconds privilégient l'aspect géométrique :*

Il faut partager le diagramme «verticalement» en deux diagrammes d'aires égales.

Je leur propose alors de les aider à affiner leurs résultats pour chacun des deux aspects.

Aspect numérique :

Question : Combien ont moins de 35 ans ?

D'une manière naturelle, les élèves partagent la population des 30-40 ans en deux parties égales, attribuant la moitié de 8,6 millions au 30-35 ans; (l'hypothèse d'une répartition uniforme dans chaque classe semble un implicite admis en l'absence d'autres informations! Cela m'a évité de me lancer dans des explications douteuses sur le choix d'une telle répartition).

Ils obtiennent donc 28,5 millions (24,2 + 4,3), ce qui leur permet de dire que le «Français du milieu» a entre 30 et 35 ans.

Je leur propose alors de réitérer le procédé : couper les 30-35 ans en deux parties égales, ce qui les amène à la conclusion que l'âge cherché est entre 32,5 et 35 ans.

Pour préciser davantage, les élèves sont d'accord sur le fait qu'il suffit de réitérer le procédé.

Aspect géométrique

Question : Quelle est l'aire totale du diagramme ?

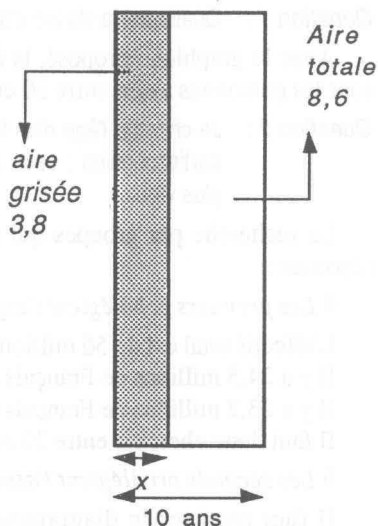
La réponse 56 apparaît rapidement, mais bien entendu sans aucune précision sur l'unité d'aire!

On s'intéresse alors au rectangle dans lequel se fera le partage, celui des 30-40 ans. Je les aide à modéliser le problème (voir la figure ci-contre) après leur avoir fait découvrir qu'il fallait trouver un rectangle d'aire 3,8 dans un rectangle d'aire 8,6 (ces deux rectangles ayant la même «hauteur»).

Question : Calculer x .

L'utilisation de la proportionnalité les conduit à trouver $x \approx 4,4$.

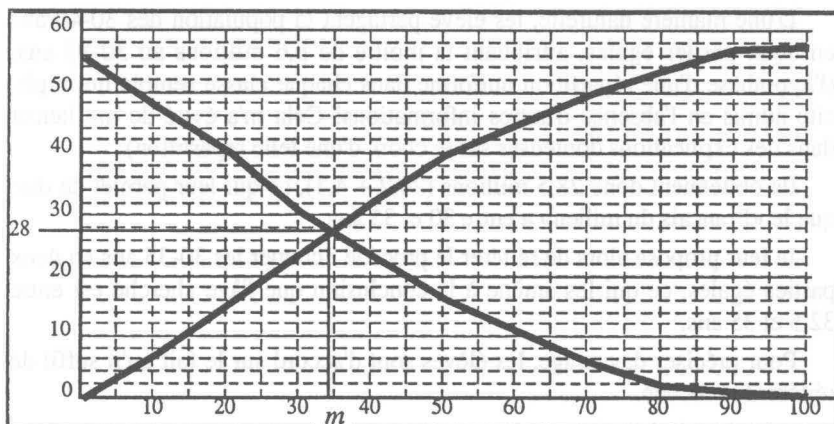
D'où l'âge cherché : 34,4 ans.



Des méthodes classiques (séquence 3).

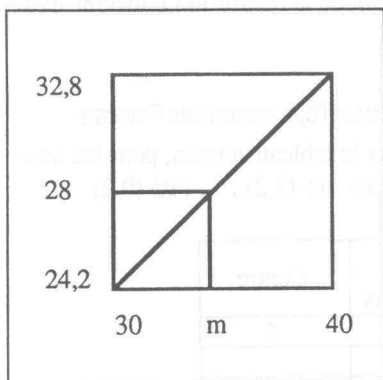
Je leur propose alors les «méthodes classiques» de recherche de la médiane lors de la séquence suivante.

1-Méthode graphique :



Polygones des effectifs cumulés

2-Méthode calcul



On utilise le théorème de Thalès ou la proportionnalité pour établir

$$\frac{m - 30}{28 - 24,2} = \frac{40 - 30}{32,8 - 24,2}$$

D'où $m \approx 34,4$ ans.

Pour la description de ces méthodes, voir [1] et [2].

Remarque : Dans cette séquence, j'avais pour objectif de réinvestir des notions de 4^{ème} (effectifs cumulés) et peut-être, pour raison non avouée, de refaire «comme les années précédentes» (amortissement et sécurité!).

Mais avec le recul, cette séquence me paraît tout à fait inutile car elle n'apporte rien de plus aux élèves. Elle a même pour effet une certaine perte de sens de la notion de médiane qui est alors occultée par la présence d'outils mathématiques (effectifs cumulés, polygone, théorème de Thalès) qui ne sont pas forcément maîtrisés par les élèves.

En particulier, la notion d'effectifs cumulés me semble une notion difficile pour les élèves de premier cycle, difficulté due à la mauvaise maîtrise d'expressions telles que : «...ceux qui ont plus de...», «...ceux qui ont moins de...»

Et la moyenne ? (séquence 4)

Cette notion paraît a priori comme la plus facile et certainement la mieux maîtrisée par nos élèves ; mais s'il est relativement aisé de donner un sens à la médiane (voir ce qui précède), comment définir en premier cycle la moyenne, sinon comme le résultat d'un calcul (voire une touche sur la calculatrice)!

Pour justifier ce calcul auprès de mes élèves, je leur pose une première question :

Question : En dehors de toute indication, quelle moyenne d'âge prendriez-vous pour chacune des classes ?

La notion de «centre» est alors généralement proposée, sous le terme de «milieu». (Encore une fois, l'aspect «naturel» de la répartition uniforme évite bien des explications difficiles).

Je leur demande alors :

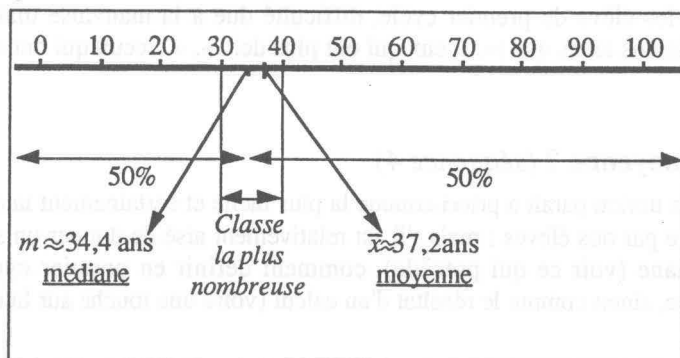
Question : En vous aidant de la situation 1, calculer l'âge moyen des Français.

Pour les aider, je leur donne à compléter le tableau suivant, pour les amener à calculer la moyenne pondérée de 5 (7,6) ; 15 (8,2) ; ... ; 95 (0,2).

Classes d'âge	Effectifs en millions	Centre
$0 \leq x < 10$	7,6	5
$10 \leq x < 20$		
$20 \leq x < 30$		
$30 \leq x < 40$		
$40 \leq x < 50$		
$50 \leq x < 60$		
$60 \leq x < 70$		
$70 \leq x < 80$		
$80 \leq x < 90$		
$90 \leq x \leq 100$		

On obtient $\bar{x} \approx 37,2$ ans

On peut alors résumer la situation :



En revenant alors à la situation d'origine (les curistes), j'ai pu constater dans le débat qui a suivi que tous les élèves avaient compris pourquoi les affirmations du commentateur de radio étaient a priori erronées.

Partie II :

*«Les statistiques, c'est comme le bikini,
ça donne une idée, mais ça cache l'essentiel»*

*Louis Armand
de l'Académie Française*

J'ai proposé, plus tard dans l'année et à des dates différentes, deux autres séquences de statistiques :

La première (séquence A) avait pour objectif de faire résoudre des problèmes originaux, et difficiles, pour préparer mes élèves à la participation au Rallye Mathématique Champagne-Ardenne organisé par l'IREM de Reims.

La seconde (séquence B) avait pour objectif de ne pas les laisser partir en seconde avec le sentiment que la connaissance de la moyenne et de la médiane suffisait pour décrire parfaitement une série statistique.

Séquence A : Vous avez dit «moyenne»

Problème 1 : CGT-CNPF [3]

Dans une entreprise familiale, les salaires sont répartis comme suit :

Direction	le patron : 60 000 F	Personnel	5 contremaîtres : 8 000 F
	son frère : 30 000 F		
	6 parents : 10 000 F		10 ouvriers : 4 000 F

La CGT déclare que le salaire «moyen» est de 4 000 F.

Les contremaîtres s'estiment, eux, dans le «moyenne».

Quant au patron, il prétend que ses parents sont dans le «moyenne».

Chacun a raison, mais comment justifier leurs «différences de positions» ?

Problème 2 : la photo [3]

Pour illustrer un article sur la population d'une ville, un rédacteur en chef demande à un photographe la photo de la famille moyenne de cette ville. Le photographe prétend qu'il ne peut pas. Pourquoi ?

Le rédacteur en chef demande alors la photographie d'une famille typique (la plus fréquente). Nouveau refus. Pourquoi ?

Problème 3 : Trajet automobile.

Ayant eu à effectuer un trajet en voiture, j'ai parcouru la moitié de ce trajet sur des routes encombrées à une vitesse moyenne de 30 km/h. Pour la deuxième moitié de mon trajet, j'ai pris l'autoroute et j'ai roulé à la vitesse moyenne de 90 km/h. Quelle a été ma vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

Problème 4 : Equipement automobile.

Deux villages ont le même nombre d'habitants. Dans l'un, il y a une voiture pour quatre habitants. Dans l'autre, il y en a une pour douze habitants. Quel est le taux d'équipement moyen en voiture des deux villages réunis ?

Problème 5 : La population.

Supposons que la population d'une ville augmente avec une vitesse proportionnelle au nombre d'habitants. Si la population était de 250 000 habitants au premier janvier 1980, et de 490 000 au premier janvier 1990, quelle était sa population au premier janvier 1985 ?

Problème 6 : Crédit, prêt et inflation.

On place une somme d'argent $S = 64\,000$ F au premier janvier 1982, à un taux annuel t . Sachant que le nouveau capital obtenu à partir de ce placement est de 81 000 F au premier janvier 1988, quel était ce capital au premier janvier 1985 ?

Remarques :

Seules les expressions «moyenne» et «moyenne pondérée» apparaissent dans les programmes de premier cycle (et de 2^e), avec tous les dangers d'interprétation de ces mots.

A travers les problèmes précédents, je voulais confronter mes élèves à d'autres types de moyennes.

Les problèmes 1 et 2 avaient pour objectif de leur apprendre à se méfier de l'utilisation du mot «moyenne» et de leur faire comprendre que la moyenne n'était pas a priori un élément de la série de départ. (une famille ayant 2,8 enfants!).

Les problèmes 3 et 4 font intervenir la notion d'«inverse proportionnalité» donc la *moyenne harmonique* (inverse de la moyenne arithmétique des inverses).

Les problèmes 5 et 6 font intervenir la notion d'augmentation ou de diminution suivant une fonction du type $x \mapsto (1 + t)x$ (ce qui est une compétence exigible du programme de 3^{ème}) donc la *moyenne géométrique de deux nombres* (racine carrée du produit de ces deux nombres, notion qu'on peut généraliser à n nombres avec la racine $n^{\text{ème}}$ du produit de ces n nombres).

Mais le traitement de ces problèmes ne demande en aucun cas l'introduction de ces moyennes, simplement un peu de réflexion et une bonne gestion d'outils du premier cycle (vitesse, fonctions, intérêt, ...).

Ils découvriront en seconde (sans que le mot ne leur soit prononcé) la *moyenne quadratique* (racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés) avec l'écart-type. Mais je suis déjà dans la séquence B!...

Analyse succincte

La classe devait trouver en 1 h 45 le maximum des quinze problèmes que je leur avait proposés (résultats numériques ou explication sommaire, comme dans le rallye R.M.C.A.). Ces six problèmes en faisaient partie.

- Le problème 1 a été résolu.
- Le problème 2 n'a été résolu qu'à moitié (personne n'ayant pensé qu'il pouvait y avoir «deux» familles typiques (ou plus de deux!))
- Les problèmes 3 et 4 ont été résolus (je n'ai pas de traces de la recherche!).
- Les problèmes 5 et 6 n'ont pas été résolus.

Séquence B : «Pour ne pas arriver trop sûr en seconde!»

Situation 1 : Elève régulier ou dispersé ?

Voici les notes de quatre élèves de 3^{ème} (en mathématiques!) :

Cécile	:	20, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 2.
Franck	:	11, 11, 10, 9, 11, 12, 13, 11, 9, 13, 11.
Lætitia	:	1, 2, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19.
Manuel	:	9, 19, 10, 5, 11, 13, 17, 3, 15, 7, 12.

Voici les quatre appréciations du professeur de mathématiques concernant ces élèves :

A : Elève qui a régulièrement progressé grâce à un travail très sérieux.

B : Elève moyen qui s'en sort grâce à un travail très régulier.

C : Que de capacités gâchées! Après un très bon début, les résultats se sont «écroulés» par absence totale de travail.

D : Elève fantaisiste mais capable. Doit progresser s'il accepte de fournir un travail régulier!

Question : Redonnez à chaque élève son appréciation.

Et pourtant! En regardant la colonne des résultats du bulletin, je n'arrive pas à distinguer ces quatre élèves. Pourquoi ?

Et pourtant! Fort de mes connaissances en statistiques, j'établis la «médiane» de chacun des élèves. Je n'arrive toujours pas à les distinguer. Pourquoi ?

Question : Est-ce que la connaissance des caractéristiques de position suffit à analyser une série statistique ? Comment qualifieriez-vous les notions supplémentaires qu'il faut ajouter pour mieux comprendre une série ?

A travers cette situation, je voulais faire prendre conscience à mes élèves de deux notions que les tendances centrales ne peuvent mettre en évidence ;

- la notion du temps : la chronologie des résultats n'apparaît plus.

- la notion de dispersion : à tendances centrales égales, l'étendue de deux

séries peut être très différente.

Situation 2 : Maths ou français : qu'est-ce qui rapporte le plus ?

(Travail proposé par groupes de deux : dans un premier temps l'un s'occupait des maths, l'autre du français).

1- Voici la répartition des notes de deux cents candidats au brevet des collèges en maths et en français :

En maths :

Classes de noms	Effectif	Fréquence	Fréquence %	Effectif cumulé	
				croissant	décroissant
$0 \leq x < 2$	2				
$2 \leq x < 4$	6				
$4 \leq x < 6$	8				
$6 \leq x < 8$	28				
$8 \leq x < 10$	38				
$10 \leq x < 12$	46				
$12 \leq x < 14$	42				
$14 \leq x < 16$	16				
$16 \leq x < 18$	10				
$18 \leq x < 20$	4				

En français

Classes de noms	Effectif	Fréquence	Effectif %	Effectif cumulé	
				croissant	décroissant
$0 \leq x < 2$	0				
$2 \leq x < 4$	8				
$4 \leq x < 6$	25				
$6 \leq x < 8$	40				
$8 \leq x < 10$	55				
$10 \leq x < 12$	37				
$12 \leq x < 14$	26				
$14 \leq x < 16$	7				
$16 \leq x < 18$	2				
$18 \leq x < 20$	0				

Question : Pour la série que vous avez à étudier, remplissez le tableau, donnez la classe la plus fréquente, la moyenne et la médiane.

On trouve :

En maths : 10 - 12

En français : 8 - 10

$$\bar{x} \approx 10,68$$

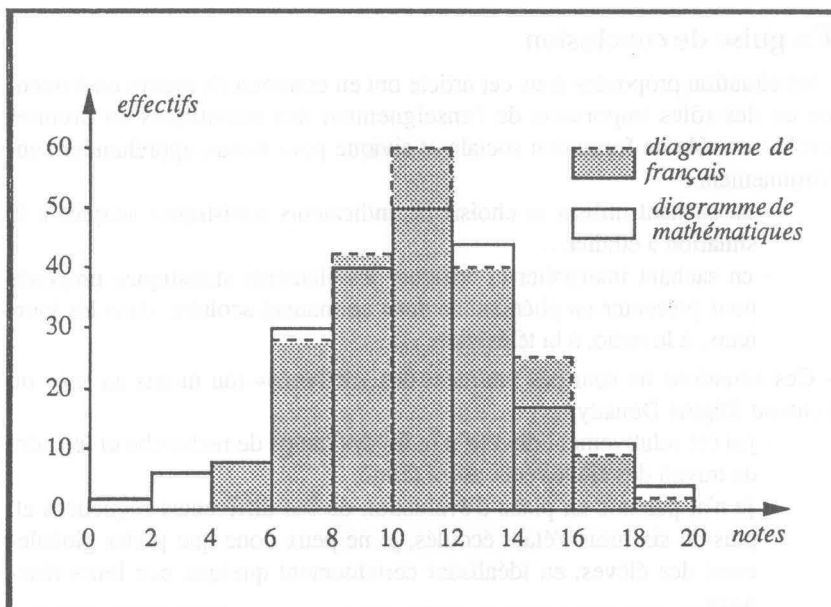
$$\bar{x} \approx 9,04$$

$$m \approx 10,78$$

$$m \approx 8,98$$

2-Après avoir fait constater aux élèves que pour chacune des séries, il y a une «bonne tendance centrale», je leur propose de les comparer en relevant de deux points les notes de français, ce qui correspond environ à l'écart des notes entre les deux matières.

Question : Après avoir relevé de deux points les notes de français, représentez les séries sur un même graphique en bandes



(Ce graphique était à faire par les élèves en utilisant deux couleurs différentes).

Question : Même en faisant coïncider les caractéristiques centrales, on obtient deux graphiques différents. Comparer alors ces deux séries en complétant le tableau suivant :

	Maths	Français
entre 10 et 12	23%	27,5%
entre 8 et 14	63%	66%
entre 6 et 16	85%	91,5%
entre 4 et 18	94%	99%
entre 2 et 20	99%	100%

(Ce tableau, complété par les élèves pour les pourcentages, avait pour objectif de mettre en évidence la différence de dispersion. Mais les nombres choisis ne font pas apparaître nettement cette différence. Je n'ai pas parlé d'écart-type, laissant cela pour la seconde!)

En guise de conclusion

- les situations proposées dans cet article ont en commun de mettre en évidence un des rôles importants de l'enseignement des statistiques en premier cycle : un rôle de formation sociale et civique pour mieux appréhender l'environnement :

- en sachant utiliser et choisir les indicateurs statistiques adaptés à la situation à étudier...
- en sachant interpréter et critiquer les éléments statistiques proposés pour présenter un phénomène dans un manuel scolaire, dans les journaux, à la radio, à la télévision, ...
- Ces situations ne sont pas vraiment des «activités» (au moins au sens où l'entend Régine Douady) :
 - j'ai été relativement directif à la fin des temps de recherche et le cadre de travail des élèves était assez fermé;
 - je n'ai pas mis en place d'évaluation de ces différentes séquences et, plus de six mois s'étant écoulés, je ne peux donc que parler globalement des élèves, en idéalisant certainement quelque peu leurs réactions.

Bibliographie :

- [1] Bulletin Inter-IREM Premier Cycle : «Suivi scientifique 3^{ème}».
- [2] Bulletin Inter-IREM Premier Cycle - Niveau d'Approfondissement : «Liaison Collège-Second».
- [3] Martin Gardner : *La Magie des paradoxes*.

DES CARACTÉRISTIQUES DE POSITION AUX CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

ou de la Troisième à la Seconde

Dominique ANTOINE , Brigitte CHAPUT
IREM de Reims

La dispersion

Comme il a été vu dans l'article précédent de Jean-Claude Duperret, les caractéristiques de position - moyenne, médiane - abordées en premier cycle ne suffisent pas à résumer une série statistique. Il est nécessaire de tenir compte de sa dispersion.

La première mesure de cette dispersion qui vient à l'esprit est l'étendue, c'est-à-dire l'écart entre la plus petite et la plus grande des valeurs de la série. C'est le caractère de dispersion le plus simple mais il présente l'inconvénient de prendre en compte les valeurs extrêmes de la série, qui peuvent être mal connues ou même être exceptionnellement fortes ou faibles.

Par exemple, est-il raisonnable d'utiliser comme mesure de dispersion des revenus la différence entre le revenu d'une célébrité du cinéma et celui du plus pauvre des marginaux ?

Pour tenir compte de l'ensemble des valeurs d'une série, on préfère mesurer la dispersion autour des paramètres de position, ce qui fait appel à la notion de distance. Si on considère les écarts (1) des termes de la série à un nombre quelconque : ce sont des nombres qui s'expriment dans la même unité que celle de la série étudiée.

La moyenne arithmétique des écarts à la moyenne d'une série est l'écart moyen. Bien que mesurant la dispersion de la série, il est insensible à certaines variations.

Par exemple, considérons la série statistique 2, 5, 8, 11, 14 qui a pour moyenne 8 et pour écart moyen 3,6. Ces deux caractéristiques sont inchangées si on retranche 2 à la première valeur de la série et que l'on ajoute 2 à la seconde.

De telles modifications sur la série laissent-elles toujours invariants l'écart-moyen et la moyenne ?

On préfère utiliser l'écart-type, noté σ , qui est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne. (C'est la moyenne quadratique des écarts à la moyenne).

Il s'exprime dans la même unité que la série étudiée et il est d'autant plus grand que la série est dispersée (nul, si et seulement si la série est constante).

Les écarts interquantiles (interquartile et interdécile en particulier) sont aussi utilisés pour mesurer la dispersion.

Propriétés de l'écart-type

Calculs

Bien que la plupart des calculatrices scientifiques possèdent une touche calcul de l'écart-type, notée en général σ_n , il arrive que l'on ait besoin des formules suivantes.

Soit une série de N observations $x_1, x_2, \dots, x_N$ de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ .

(1) L'écart entre deux nombres est défini comme la valeur absolue de leur différence.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

La seconde formule, appelée formule de König, sera préférée à la première chaque fois que les termes en $(x_i - \bar{x})^2$ ne seront pas simples : elle a l'avantage de ne contenir qu'une fois la moyenne.

Remarque : La touche $\sigma_n \cdot 1$ est utilisée lors du calcul d'une estimation de l'écart-type d'une population à partir d'un échantillon.

Sensibilité aux variation de la série

Modification de certaines valeurs

L'écart-type est sensible aux modification internes de la série (en particulier, il est toujours modifié si l'on ajoute et retranche un même nombre à deux valeurs).

Reprenons l'exemple ci-dessus : l'écart-type de la première série est environ 4,24 alors que celui de la seconde est environ 4,69.

Changement affine des valeurs

Si on remplace la série (x_i) d'écart-type σ par la série $(ax_i + b)$, où a et b sont des réels, d'écart-type σ' , alors $\sigma' = |a| \sigma$.

Remarque : Cette propriété peut être utilisée lors d'un changement affine d'unité. On l'employait aussi, avant l'usage des calculatrices électroniques, pour simplifier les calculs d'écart-type.

Partition de la population - Ajout de nouvelles données.

Une série statistique a été scindée en deux séries d'effectifs respectifs m et p , de moyennes respectives $\bar{y}$ et $\bar{z}$ et d'écarts-types respectifs α et β . La série de départ a pour effectif $n = m + p$, pour moyenne $\bar{x} = \frac{m \bar{y} + p \bar{z}}{m + p}$ et pour

$$\text{écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{m\alpha^2 + p\beta^2}{m+p} + \frac{mp}{(m+p)^2}(\bar{y} - \bar{z})^2}.$$

On peut utiliser les résultats ci-dessus lorsqu'on ajoute d'autres données à une série statistique, pour calculer ses nouvelles caractéristiques ou pour savoir comment elles évoluent.

Peut-on ajouter une nouvelle donnée à une série statistique sans en changer la moyenne ? sans changer l'écart-type ? en ne changeant ni l'un ni l'autre ?

Regroupement en classes

Il arrive que l'on soit amené à regrouper des données en classes. On effectue alors les calculs à partir des valeurs centrales de chaque classe, ce qui peut donner des caractéristiques sensiblement différentes de celles de la série initiale.

Exemple : Voici les durées en minutes du trajet en chemin de fer entre deux villes.

227 155 177 174 165 165 165 179 177 143 143 260
 154 155 242 154 172 173 173 173 173 173 183 183
 175 176 181 175 222 1178 204 193 193 186 173 202
 165 165 173 175 198 182

La moyenne de la série est environ 179,85 minutes et son écart-type est environ 23,41 minutes.

Si on regroupe les données en classes d'amplitude 20 minutes, on obtient :

classes	valeurs centrales	effectifs
[140,160[	150	6
[160,180[	170	22
[180,200[	190	8
[200,220[	210	2
[220,240[	230	2
[240,260[	250	1
[260,280[	270	1

La nouvelle moyenne est alors 180 minutes et le nouvel écart-type est environ 25,91 minutes.

Dans le cas d'une distribution voisine d'une distribution normale, le groupement en classes de même amplitude majore la valeur de σ^2 d'environ

$\frac{h^2}{12}$ (correction de Sheppard) où h est l'amplitude constante des classes.

Interprétation géométrique

Pour les enseignants

Une série statistique $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^N$.

On munit $\mathbf{R}^N$ d'un produit scalaire $X \cdot Y = \frac{1}{N} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N)$

et de la distance euclidienne associée d :

$$d(X, Y) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}{N}}$$

où $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

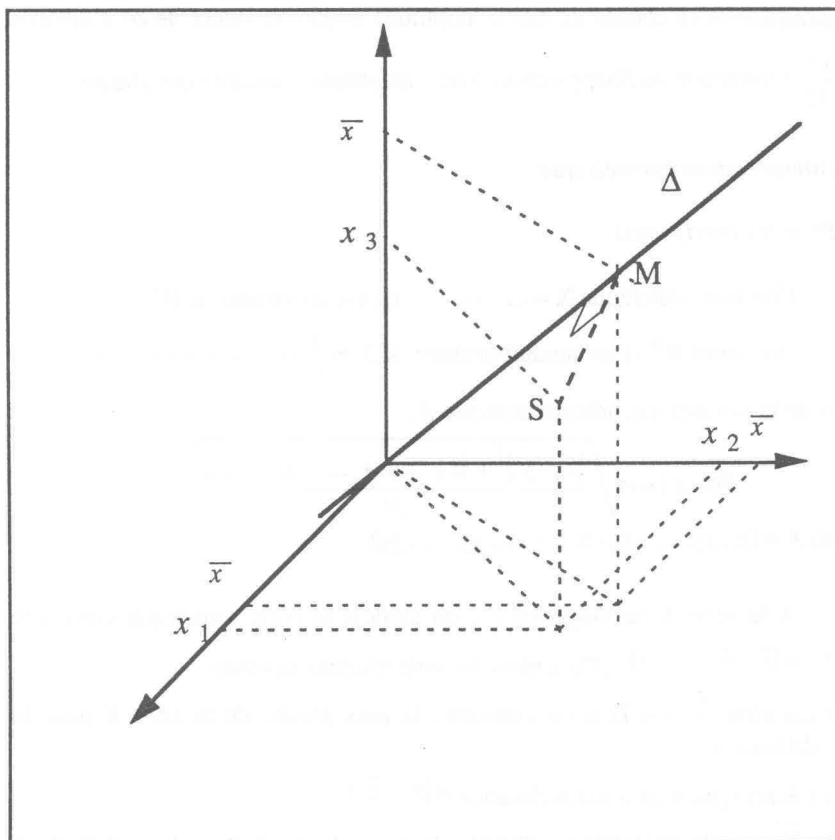
A la série X de moyenne $\bar{x}$, on associe la série statistique constante $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$. On a alors les trois résultats suivants :

- 1-La série $\bar{X}$ est la série constante la plus proche de la série X pour la distance d .
- 2-l'écart-type σ de X est la distance $d(X, \bar{X})$,
- 3- $\bar{X}$ est la projection orthogonale (pour le produit scalaire ".") de X sur la droite Δ d'équations $x_1 = x_2 = \dots = x_N$.

Illustration dans $\mathbf{R}^3$:

S représente la série X

M représente la série $\bar{X}$



Interprétation géométrique de la moyenne et de l'écart-type.

Démonstration de 1 et 3 :

En effet, si $Z = (a, a, \dots, a)$ où $a \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} [d(X, Z)]^2 &= (X - Z)^2 = [(X - \bar{X}) + (\bar{X} - Z)]^2 \\ &= (X - \bar{X})^2 + 2(X - \bar{X})(\bar{X} - Z) + (\bar{X} - Z)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [d(X, \bar{X})]^2 + \frac{2}{N} [(x_1 - \bar{x})(\bar{x} - d) + (x_2 - \bar{x})(\bar{x} - d) + \dots + (x_N - \bar{x})(\bar{x} - d)] + [d(\bar{X}, Z)]^2 \\
&= [d(X, \bar{X})]^2 + 2(\bar{x} - d) \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} - \bar{x} \right) + [d(\bar{X}, Z)]^2 \\
&= [d(X, \bar{X})]^2 + [d(\bar{X}, Z)]^2. \quad \text{Ainsi } [d(X, Z)]^2 \geq [d(X, \bar{X})]^2.
\end{aligned}$$

$\bar{X}$ minimise la distance entre X et Δ et $\bar{X}$ est la projection orthogonale de X sur Δ (chacun aura reconnu le théorème de Pythagore!).

Pour les élèves

Les explications données ci-dessus sont évidemment hors du programme de seconde. On peut cependant utiliser les connaissances des élèves (si! ils en ont) et leur bon sens (s'ils en ont!) pour construire un instrument de mesure de la dispersion d'une série statistique.

On veut mesurer la distance entre les valeurs d'une série statistique et sa moyenne ; ce qui nous amène à considérer les deux séries $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$.

L'analogie avec la distance de deux points du plan conduit à la formule :

$$\delta^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2.$$

Cette quantité, si elle mesure bien la dispersion, se révèle inutilisable pour comparer les dispersions de deux séries statistiques d'effectifs différents.

Exemple : Considérons les deux séries :

S1 = (3, 4, 4, 5, 6, 6, 7) d'effectif 7 et de moyenne 5, et

S2 = (3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7) d'effectif 14 et de moyenne 5.

Elles ont même diagramme des fréquences ; ce qui n'est pas mis en évidence par la formule précédente qui donne $\delta_1^2 = 12$ et $\delta_2^2 = 24$.

$\delta_2^2 = 2\delta_1^2$ car on a doublé les effectifs de chaque valeur.

Pour pallier cet inconvénient, on est amené à diviser δ_2 par l'effectif de la série. On obtient ainsi la variance de la série, on en prend la racine carrée pour conserver la dimension du caractère étudié.

Répartition de la population

L'écart-type s'exprime dans la même unité que les valeurs de la série, ainsi on peut s'intéresser aux observations distantes de la moyenne de 1 ou 1,5 ou 2 ... écarts-types.

Considérons une série statistique X d'effectif total N , de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ .

Pour $\alpha > 0$, on note n_α le nombre de valeurs distantes de $\bar{x}$ de moins de $\alpha\sigma$, c'est-à-dire appartenant à l'intervalle $I = [\bar{x} - \alpha\sigma; \bar{x} + \alpha\sigma]$.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ x_i \notin I}} (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ x_i \in I}} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ x_i \notin I}} (x_i - \bar{x})^2 \geq \frac{1}{N} (N - n_\alpha) \alpha^2 \sigma^2$$

$$\text{Ainsi, } \frac{N - n_\alpha}{N} \leq \frac{1}{\alpha^2} \text{ et } \frac{n_\alpha}{N} \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Il y a alors au moins 75% des valeurs comprises entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$.

Quel est le pourcentage minimal des valeurs qui s'éloignent de $\bar{x}$ de moins de 3σ ?

Dans de nombreux cas, on a affaire à une série dont la distribution est proche d'une distribution gaussienne ; la répartition des effectifs est alors approximativement la suivante :

◊ 68% des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$

◊ 95% des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$

◊ 99,74% des valeurs sont comprises entre $\bar{x} - 3\sigma$ et $\bar{x} + 3\sigma$.

Il apparaît ainsi que l'écart-type informe sur l'étalement des données autour de la moyenne, ce qui justifie sa dénomination.

Exemple :

On a mesuré en kilogrammes les poids de 815 fillettes du même âge appartenant aux groupes scolaires d'une ville. On obtient le tableau suivant ;

classes	valeurs centrales	effectifs
[15,5 ; 16,5[	16	4
[16,5 ; 17,5[	17	9
[17,5 ; 18,5[	18	31
[18,5 ; 19,5[	19	75
[19,5 ; 20,5[	20	183
[20,5 ; 21,5[	21	204
[21,5 ; 22,5[	22	157
[22,5 ; 23,5[	23	97
[23,5 ; 24,5[	24	40
[24,5 ; 25,5[	25	12
[25,5 ; 26,5[	26	3

La moyenne de la série est $m \approx 21,06$ kg et l'écart-type est $\sigma \approx 1,63$ kg.

Il y a 96,6% de filles ayant un poids compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$.

Il y a 99,1% de filles ayant un poids compris entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$.

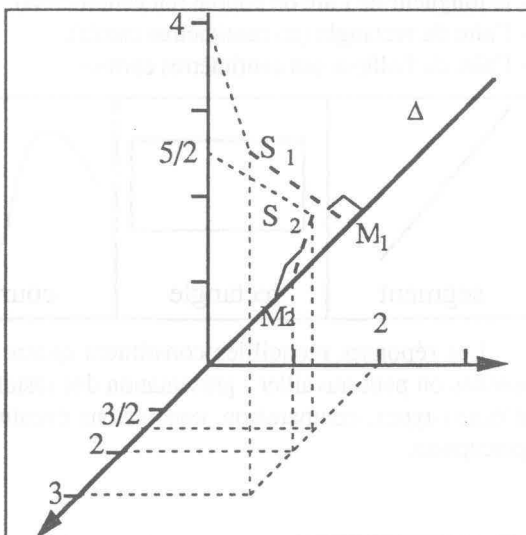
Comparaison des séries statistiques

De même effectif : interprétation géométrique.

On considère les deux séries statistiques (3, 2, 4) et (3/2, 2, 5/2) représentées par les points S_1 et S_2 .

Δ est la droite d'équation

$$x_1 = x_2 = x_3.$$



Comparer les moyennes et les écarts-types des deux séries revient à comparer les positions de points sur la droite Δ et des longueurs de segments.

De caractères différents

Il est possible de comparer la dispersion de deux séries dont les caractères sont différents à l'aide de mesures de dispersion relative c'est-à-dire le rapport entre une valeur de dispersion et une valeur centrale de la même série.

Par exemple, on pourra procéder à la comparaison des salaires en France et aux Etats-Unis (on évite le problème posé par les unités monétaires) et à celle des salaires d'un même pays au cours des trente dernières années (la prise en compte de l'inflation est alors inutile).

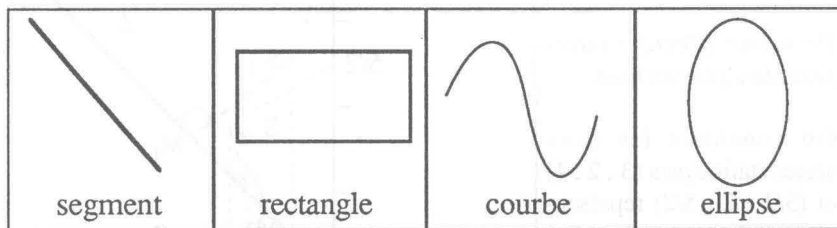
Activités en seconde

Pour illustrer ce qui précède, voici quelques activités que l'on peut proposer aux élèves.

Une activité de l'I.R.E.M. de Strasbourg

Après leur avoir distribué les graphiques ci-dessous, on demande aux élèves d'évaluer sans aucun instrument de mesure :

- la longueur du segment (en centimètres),
- la longueur de l'arc de courbe (en centimètres),
- l'aire du rectangle (en centimètres carrés),
- l'aire de l'ellipse (en centimètres carrés).



Les réponses recueillies constituent quatre séries statistiques sur lesquelles on peut travailler : présentation des résultats, calculs de moyennes et d'écarts-types, comparaison, conclusions éventuelles sur les différences de perception.

Une activité de l'I.R.E.M. de Reims.

On demande à chaque élève de la classe de tracer un rectangle, de mesurer au millimètre près ses dimensions, puis de faire le quotient de la longueur et de la largeur. On obtient trois séries statistiques ; que pensez-vous de la dernière ?

Une activité de l'I.R.E.M. de Limoges.

On trouvera dans la brochure «*Statistique et technologie*» éditée par l'IREM de Limoges un compte-rendu d'expériences de fabrication d'épingles pour le béton armé. Il donne de nombreuses séries statistiques et leurs exploitations.

Bibliographie.

- Jean CUENAT, *Cours de statistique élémentaire*, Editions Magnard.
- Francis LABROUE, *Statistique et technologie*, IREM de Limoges.
- Michel LAVIÉVILLE, *Statistique et probabilités*, Dunod.
- Albert MONJALLON, *Introduction à la méthode statistique*, Vuibert.
- P.PEPE et M.TISSERAND-PERRIER, *Méthodes statistiques dans les sciences humaines*, Masson.
- Didier SCHLACTHER, *De l'analyse à la prévision*, Ellipses.
- Daniel FREDON, *La touche σ_{n-1} de votre calculatrice*, dans l' Irémois n°21 (Bulletin de l'IREM de Limoges).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Suivi Scientifique 1985-1986**
Bulletin Inter-IREM Premier Cycle
Nouveaux programmes de sixième
- [2] **Suivi Scientifique 1986-1987**
Bulletin Inter-IREM Premier Cycle
Nouveaux programmes de cinquième
- [3] **Suivi Scientifique, classe de quatrième 1987-1988**
Bulletin Inter-IREM Premier Cycle
Nouveaux programmes de quatrième
- [4] **Suivi Scientifique, classe de troisième 1988-1989**
Bulletin Inter-IREM Premier Cycle
Nouveaux programmes de troisième
- [5] **Liaison Collège-seconde 1989-1990**
Bulletin Inter-IREM Premier Cycle-Niveaux d'Approfondissement
Nouveaux programmes de seconde
- [6] **L'enseignement de la statistique en France (février 1991)**
ASU (Association pour la statistique et ses Utilisations)
4 place Jussieu-Tour 45 - 55E2 - 75252 PARIS CEDEX 05

Ce livre blanc dresse un constat de la place qu'occupe en France la Statistique dans l'enseignement primaire, secondaire et supérieur ainsi que dans la formation initiale et continue des maîtres. Il recense de plus les formations existantes de l'enseignement supérieur (Université, Grandes Ecoles). Enfin, la dernière partie est consacrée à des «propositions pour l'enseignement de la statistique».

- [7] **Repères IREM n°1 (octobre 1990)**
L'enseignement des Mathématiques en sixième et cinquième (la contribution des IREM) p.28-50. Antoine Bodin.
IREM de Besançon.

La deuxième partie de l'article propose une bibliographie commentée qui présente, en particulier, l'ensemble des documents produits par les

- IREM depuis 1986 en ce qui concerne le cycle d'observation.
- [8] **Repères IREM n°6** (janvier 1992)
Peut-on commencer le premier trimestre de seconde par les statistiques? p.20-26 - René Arnaud.
IREM de Limoges.
- [9] **Petite bibliographie de documents de statistique dans les IREM**
(octobre 1989), Jean-François Pichard

Vous y trouverez aussi des références d'articles parus dans le Bulletin Vert de l'APMEP ou dans la revue Tangente.

Cette publication a été complétée en novembre 1990 par un document intitulé «Addenda à la bibliographie des documents de statistique dans les IREM». Les seules publications répertoriées dans ce document et qui concernent les statistiques au Collège sont [10] et [11] ci-dessous (accompagnées du commentaire que nous avons reproduit).

- [10] **Organisation et gestion de données, 2 activités pour les classes de 6^{ème} et 5^{ème}** (28 pages ; 1989).
J.P.Giovanelli - J.Huc - M.Lewillon - S.Pellequier - M.Seco.
IREM de Montpellier

Activité «fiche de rentrée», p. 1-17. Chaque élève remplit une fiche sur plusieurs caractéristiques ; ces fiches sont exploitées tout au long de l'année : graphiques en bâtons, histogrammes, nuages de points.

Activité «famille-enfants», p. 19-28. Sur un tableau donnant le nombre de familles suivant leur nombre d'enfants pour les années 1968, 75, 82, calcul de pourcentages, diagrammes en bâtons, évolution suivant les années.

Exemple d'activités relativement classiques.

- [11] **Mathématiques - Evaluation par capacité-contrat d'objectifs, classe de 4^{ème}** (fin juin 1989) Volume II, pages 201 à 413.
G.Barré - C.Beaumont - P.Delhayel - B.Velcin.
IREM de Picardie

Cette brochure fait suite à celles des classes de 6^{ème} (1987) et 5^{ème} (1988).

Séquence 8 : données statistiques - indices, p. 261-299.

Fiches d'objectifs : histogramme, classe, effectifs cumulés, indices.

Nombreux exemples par fiche, repris de diverses sources, pas tous très judicieux, certains étant d'interprétation assez difficile (les indices en particulier).

[12] Nouveaux programmes de 4^{ème} (juin 1988)

3^{ème} partie : gestion de données

Josiane Guibert - Gérard Leriche - Geneviève Margot - Etienne Thépot.

IREM d'Orléans n°34.

DEUXIÈME PARTIE

DES

LETTRES

Algébrisation Fonctions	143
Calcul numérique et calcul algébrique	
au collège (quelles difficultés)	147
A propos des difficultés du calcul algébrique	
en 3^{ème} (Impression ou réalités ?)	179
Etude des fonctions au collège	189
Acquisition de la notion de fonction	
de la 6^{ème} à la 3^{ème}	215
Des activités faisant intervenir des fonctions	237
En fin de 3^{ème} puis 2 à 3 mois plus tard	251

ALGÉBRISATION FONCTIONS

Michèle MATHIAUD

IREM Paris 7

*Présentation des travaux des IREM de DIJON, LIMOGES,
PARIS 7, ROUEN et STRASBOURG)*

Contrairement aux contenus des Suivis Scientifiques qui, concernant chacune des quatre classes du Collège, s'intéressaient en priorité aux enseignements relatifs à un niveau de classe désigné, les composants de cette partie de brochure sont centrés sur une étude de l'évolution «transversale» de la 6^{ème} à la 2^e des notions relevant du calcul algébrique et des fonctions.

La pratique du programme aux quatre niveaux du Collège et la connaissance des contenus et objectifs donnés pour la classe de Seconde (et les classes de Première et Terminale) ont orienté la réflexion et le travail d'équipes d'enseignants de Collège ; ces équipes ont alors bâti des séquences, les ont analysées, ont fait des compte-rendu écrits.

De ce fait, nous présentons dans cette partie quelques unes des productions émanant d'équipes IREM. Il y a d'une part des études approfondies sur des sujets spécifiques (travaux des IREM de Strasbourg, Dijon et Rouen) d'autre part des exposés de tests ou d'activités commentés (travaux des IREM de Limoges et Paris 7).

Conformément aux directives et commentaires du programme qui mettent l'accent sur les conceptions «constructivistes» de l'apprentissage, conceptions qui ont toujours été celles des IREM, nous pouvons remarquer dans les travaux proposés ci-après l'aspect «spirale» de l'enseignement des mathématiques au Collège et en Seconde. Cet enseignement tient largement compte de la nécessité de mettre en jeu de nombreuses fois, donc éventuellement depuis la Sixième et sous des formes aussi diverses que variées, des concepts qui seront mis au rang de Savoir Savant, ce sont des connaissances exigibles. Ces concepts seront institutionnalisés, peut-être seulement en classe de Troisième voire même bien plus tard.

Ainsi, sans attendre l'étude des dérivées en classe de Première, de la continuité en classe de Terminale ou en classes Post-bac, nous ne nous interdisons pas au Collège de construire des représentations graphiques, point par point de fonctions diverses (trigonométriques, polynômiales de degré supérieur à 1) dans le cas où celles-ci modélisent une situation donnée et où la lecture du graphique sera l'un des outils de résolution du problème posé.

Ces représentations favorisent aussi la mise en place de la notion de fonction, permettent à l'élève de prendre conscience de l'existence de différents types de variation et parmi ceux-ci, de distinguer le linéaire et l'afine, fonctions qui sont explicitement au programme de Quatrième et Troisième ; on peut aussi, grâce aux graphiques, mettre l'accent sur le caractère discret ou continu d'une variable (à quoi cela correspond-il de relier des points sur un graphique? A représenter plus complètement la fonction? Pour mieux voir? Pour faire joli?...).

Les travaux présentés sont des études complètes qui auraient perdu leur spécificité et leur intérêt s'ils avaient été tronqués; le lecteur trouvera peut-être quelques redites mais il comprendra mieux les points de vue de chaque équipe et les différences de place et d'importance données à ces contenus ou démarches communs dans chacun des exposés.

Dans la partie **ALGÈBRISATION**, nous présentons

- une étude de l'IREM de Strasbourg
(Marie-Anne KEYLING, Claude MATHERN, Danielle MAURETTE,
Monique ORTLIEB, Jean-Claude RAUSCHER, Gabrielle
ROESCH, François PLUVINAGE).
- des analyses d'erreurs de l'IREM de Limoges. (Robert BUISSON)

Dans la partie **FONCTIONS**, il y a

- un travail de l'IREM de Dijon,
(Annie BOUDOT, Monique GREGOIRE, Michel MOREAU)

- un travail de l'IREM de Rouen,
(Annie AZAM, Georges CABAT, Claude FRIBOURG, Brigitte PETIT)
- des propositions d'activités par L'IREM de Paris 7.
(Michèle MATHIAUD)

En guise de conclusion, nous vous donnons des résultats comparatifs de tests élaborés par l'IREM de Montpellier en Septembre 1990 et donnés à cette même date à 200 élèves d'un lycée de l'académie ; puis nous avons testé 760 élèves de toutes les classes de Troisième de collèges diversement répartis en France et 300 élèves de Seconde d'un même lycée, les uns en juin 1991, les autres en Septembre 1991.

Ces résultats nous incitent à réfléchir sur le fait que de nombreuses connaissances que l'on croyait disponibles à un niveau donné ne sont bien souvent seulement qu'en cours d'acquisition...

CALCUL NUMÉRIQUE ET CALCUL ALGÈBRIQUE AU COLLÈGE : QUELLES DIFFICULTÉS ?

*Recherche menée par l'équipe "Premier Cycle"
de l'IREM de Strasbourg.*

1. PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

Présentation de l'équipe

La recherche présentée ici a été menée par une équipe de professeurs qui travaillent dans quatre collèges représentatifs de situations sociologiques de recrutement variées.

Professeurs de collège constituant le groupe :

Marie-Anne KEYLING, Collège du Hohberg, Strasbourg

Claude MATHERN, Collège Martin Schongauer, Ostwald

Danielle MAURETTE, Collège Kléber, Strasbourg

Monique ORTLIEB, Collège du Hohberg, Strasbourg

Jean-Claude RAUSCHER, Collège Martin Schongauer, Ostwald

Gabrielle ROESCH, Collège Hans Arp, Strasbourg

En outre, Monsieur François PLUVINAGE, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, a pu nous donner son point de vue et ses encouragements sur les travaux que nous menions ; il a également revu la présentation de cet article.

La présente synthèse de la recherche a été rédigée par Jean-Claude RAUSCHER.

Orientation générale de notre recherche

L'hypothèse didactique sur laquelle nous fondons notre travail est que le développement des apprentissages est davantage lié à une hiérarchisation des tâches à effectuer qu'à une hiérarchie des contenus. En conséquence la première étape de notre démarche consiste à observer et analyser les tâches que les élèves ont à effectuer et à apprendre. Ainsi, il s'agissait ici de proposer dans les trois derniers niveaux du collège un test qui permette de repérer des évolutions dans la compréhension et la manipulation de la notion de variable.

C'est en fonction des éléments ainsi recueillis que nous élaborons et expérimentons ensuite des activités qui ont pour but de faire progresser les élèves dans l'apprentissage défini. Enfin, à la suite de ce parcours, nous soumettons les élèves à un test final destiné à l'analyse de leurs progressions.

Objet de la recherche

Avec l'orientation indiquée, nous nous sommes au cours de l'année scolaire 1989/90 particulièrement penchés sur le problème de l'*accès au monde de la formalisation et du calcul littéral*.

Il nous fallait donc nous donner les moyens de repérer avec précision quelques difficultés rencontrées régulièrement par les élèves dans ce domaine au cours des trois dernières années de collège, difficultés dont on a en général de vagues idées a priori. Une de ces "vagues" idées par exemple, est qu'il y aurait pour les élèves une opposition entre un monde "numérique" supposé facile d'accès et un monde "littéral" plus difficile. Cette idée trouve en général sa traduction dans les livres d'enseignement par l'exposition ou le traitement de quelques exemples numériques destinés à constituer un tremplin pour l'introduction d'une formulation littérale de la propriété en jeu (par exemple pour la distributivité). Or, on se rend bien vite compte de la 5^{ème} à la 3^{ème} confondues, que ce parallélisme hâtif, même s'il est accepté formellement, se heurte, à l'usage, à bien des difficultés de compréhension chez nos élèves. De même, les programmes de 1985 demandent d'introduire l'algèbre principalement dans des situations où il se révèle être un outil de traitement d'une situation donnée. Cette recommandation, essentielle, ne lève pas en elle-même toutes les difficultés d'accès au monde de l'algèbre. Elle ouvre au

contraire un champ de recherches dans nos classes, auquel nous nous avons proposé notre contribution, dans le cadre de la commission Inter-IREM Premier cycle.

Pour notre part et inspirés en cela par les travaux de R.DUVAL et F.PLUVINAGE (voir «*Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*» Vol.1, 1988 et Vol.2, 1989, IREM de STRASBOURG), nous voudrions insister sur le fait que dans tous ces cas, l'élève se trouve en fait confronté à des registres différents (registre numérique, registre algorithmique, registre littéral ou registre du langage naturel) et que la navette de l'un à l'autre de ces registres recouvre en fait une variété de difficultés différentes d'expression et de traitement. Repérer et hiérarchiser quelques unes des difficultés de cet ordre fut donc notre première tâche.

2. TEST DE DÉBUT D'ANNÉE : QUELLES DIFFICULTÉS ?

2.1. Population

La population concernée a comporté : 7 classes de 5^{ème} (153 élèves), 4 de 4^{ème} (90 élèves) et 3 de 3^{ème} (71 élèves). Sans que la population interrogée constitue au sens statistique un échantillon représentatif, elle correspond, par les quatre collèges qu'elle représente, à des environnements variés.

2.2. Observations à l'origine du test

On sait d'une part, combien les élèves ont du mal à respecter les règles de priorité sur les opérations dès qu'il s'agit de calcul littéral. D'autre part, à la suite d'un test passé en octobre 88 dans des classes de 4^{ème} et 3^{ème}, nous avons remarqué que, même si les élèves savaient faire du "calcul littéral" c'est à dire transformer certaines expressions littérales (réduire, factoriser, développer), ils avaient de façon massive des difficultés à appliquer leur savoir-faire pour réduire un programme de calcul du type :

- * Choisir un nombre,
- * Multiplier ce nombre par -25 ,
- * Ajouter $6,5$ au résultat précédent,
- * Multiplier le résultat obtenu par -4 ,
- * Ajouter 26 .

Enfin, nous avons remarqué que lorsqu'on demandait aux élèves de citer des exemples où les formules de transformation pourraient servir (identités remarquables, formule de distributivité), ils se ramenaient à des cas numé-

riques comme par exemple calculer $(3 + 7)^2$

A partir de ces observations, on peut penser que la notion de variable pose des problèmes de sens liés à l'articulation entre le registre numérique, le registre algébrique ou symbolique et le registre algorithmique .

2.3. Le test

Il se compose de deux parties à passer chacune en environ 30 minutes à des moments différents. Nous avons regroupé les questions suivant les contenus qu'elles abordaient. L'une s'intitule : "*Géométrie et formules*", l'autre "*Programme de calculs*". Les questions sont proposées à des élèves de la classe de 5^{ème} à celle de 3^{ème}, car les situations qu'elles présentent sont accessibles dès la deuxième année du collège. Les deux pages suivantes reproduisent le test présenté aux élèves.

PROGRAMMES DE CALCULS

I. Un problème

En prenant un certain nombre et en lui ajoutant son **double**, on obtient un certain résultat.

Question : Comment un élève qui connaît le résultat peut-il retrouver le nombre de départ ?

II. Calculs astucieux

II.1. Faites les calculs suivants (calculatrice autorisée) :

a) $49 \times 29 + 51 \times 29$

b) $7 + 7 \times 9999$

II.2. Les calculs précédents peuvent être faits **mentalement** à condition de commencer par une addition.

Question : Compléter les programmes de calcul correspondant à ces calculs mentaux:

Calcul a) 1° On calcule d'abord la somme de et de
 2° Ensuite, on

Calcul b) 1° On calcule d'abord la somme de et de
 2° Ensuite, on

II.3.Calculer mentalement :

$$987654321 \times 1234 - 987654321 \times 234 =$$

III. Programme de calcul

Voici un programme de calcul correspondant à l'expression $(n + 1) \times 2$:

- Prendre un nombre n .
- Lui ajouter 1.
- Multiplier le résultat obtenu par 2

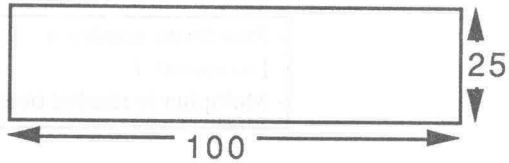
Question : Rédiger un programme de calcul correspondant à l'expression suivante :

$$(3 + 5 \times n) \times 2 - 6$$

Le programme :

GÉOMÉTRIE ET FORMULES

I.1. Calculer le périmètre du rectangle ci-contre :

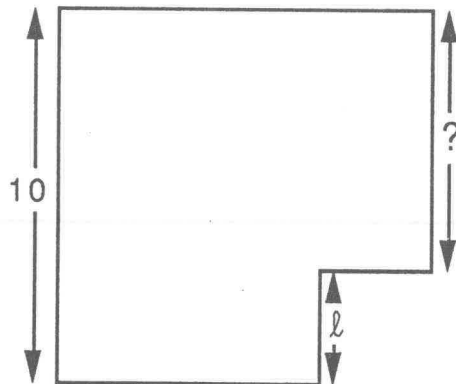


I.2. Voici un carré duquel on a ôté un morceau de forme carrée lui aussi.

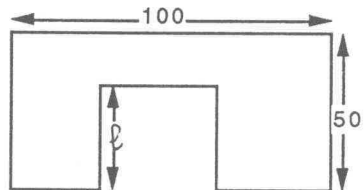
a) Exprime la mesure du segment AB à partir des indications de la figure.

b) L'unité étant le cm, faire le dessin lorsque

$l = 6 \text{ cm}$



II.a. La figure ci-contre est un rectangle duquel on a ôté un morceau lui aussi de forme rectangulaire. Exprime le périmètre de cette figure à partir des données indiquées.



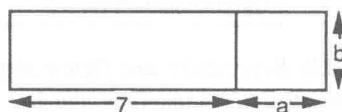
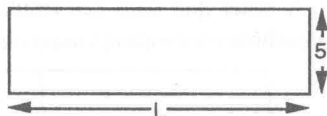
II.b. Calcule la valeur de ce périmètre

lorsque $l = 25$.

III. Donne :

a) le périmètre du rectangle ci-contre

b) l'aire de ce rectangle



IV Nous avons représenté ci-contre un

rectangle obtenu par la juxtaposition de deux rectangles plus petits

Question : Parmi les expressions suivantes, entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle:

$$\begin{array}{lll} S = 7 + a \times b & S = 7 \times b + a \times b & S = 7 \times b + a \\ S = 7 \times a \times b & S = 7 \times (a + b) & S = (7 + a) \times b \\ S = b \times (a + 7) & S = 7 \times b + a \times b & \end{array}$$

2.4. Les résultats du test de début d'année

En observant, question par question, les taux de réussite en 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème} nous avons été amenés à distinguer 4 types de profil. Il y a les questions pour lesquelles il y a un bon taux de réussite (>75%) tout au long des trois niveaux ; ensuite il y a celles pour lesquelles on constate une progression régulière pour aboutir finalement à un bon taux de réussite en 3^{ème} (>75%). Mais il y a aussi les questions pour lesquelles, même si on constate une progression tout au long des trois niveaux, les échecs sont encore majoritaires ou équilibrés avec les réussites en 3^{ème}. Enfin il y a aussi les questions pour lesquelles il y a un fort taux d'échecs (>65%) dans les trois niveaux. Dans la présentation qui suit, les taux de réussite relatifs aux différentes questions sont regroupés par profils.

Première catégorie : questions pour lesquelles il y a un bon taux de réussite (>75%) tout au long des trois niveaux.

G11 Calcul du périmètre d'un rectangle à partir de données numériques

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	85%	94%	93%

A noter que dans ces résultats figurent des erreurs d'écriture (oubli des parenthèses nécessaires mais résultat juste) avec les pourcentages suivants:

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Oubli de parenthèses	10%	6%	10%

GI2b Reproduire une figure simple dans le cas où une valeur numérique a été attribuée à une longueur L

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	74%	82%	83%

PII1a Calcul de $49 \times 29 + 51 \times 29$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	82%	88%	97%

PII1b Calcul de $7 + 7 \times 9999$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	72%	77%	83%

Deuxième catégorie : questions pour lesquelles on constate une progression régulière pour aboutir finalement à un bon taux de réussite en 3^{ème} (>75%).

GI 2a Exprimer une longueur en fonction d'une longueur connue et d'une longueur indéterminée l ($AB=10-l$)

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	31%	45%	83%

A noter qu'en 5^{ème} et 4^{ème} nous trouvons de nombreux élèves qui donnent des résultats sous forme numérique (4, 5 ou 6):

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réponse numérique	31%	38%	11%

GIIIa Exprimer le périmètre d'un rectangle sachant que ses dimensions sont 5 et L ($2 \times (5 + L)$ ou $10 + 2 \times L$)

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	64%	72%	78%

GIIIb Exprimer l'aire d'un rectangle sachant que ses dimensions sont 5 et L

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	50%	70%	88%

Troisième catégorie : questions pour lesquelles, malgré une progression tout au long des trois niveaux, les échecs sont encore majoritaires ou équilibrés avec les réussites en 3^{ème}.

GIV Reconnaître les expressions donnant l'aire d'un rectangle composé de 2 rectangles de dimensions respectives a et b, 7 et b

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite(3 formules)	26%	46%	50%

PI Comprendre qu'ajouter un nombre et son double c'est calculer son triple

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	21%	30%	44%

A noter que de nombreux élèves comprennent le “double” comme “l’identique” :

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	43%	41%	5%

PII 2a Compléter le programme de calcul mental de $49 \times 29 + 51 \times 29$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	22%	35%	50%

Quatrième catégorie : questions pour lesquelles il y a un fort taux d’échecs (au moins deux tiers) dans les trois niveaux.

GII 2a Exprimer le périmètre d’une figure en forme de U en fonction de données numériques et d’une donnée littérale L en repérant que la somme de 3 longueurs non indiquées est connue

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	13%	10%	31%

Des élèves se laissent piéger par la forme de la figure et, confondant périmètre et aire, retranchent 2L ou 3L au périmètre du grand rectangle:

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	10%	19%	15%

GII 2b Même exercice avec une valeur numérique attribuée à L

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	16%	11%	33%

Là aussi, des élèves se laissent piéger par la forme de la figure et, confondant périmètre et aire, retranchent 2L ou 3L au périmètre du grand rectangle:

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	18%	30%	9%

PII 2b Compléter le programme de calcul mental de $7 + 7 \times 9999$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	10%	7%	14%

PII 3 Calculer mentalement $987654321 \times 1234 - 987654321 \times 234$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	14%	24%	28%

PIII Ecrire un programme de calcul correspondant à l'expression $(3 + 5 \times n) \times 2 - 6$

	5° / 153	4° / 90	3° / 71
Réussite	21%	24%	30%

2.5. Analyse des regroupements

Les résultats nous ont conduits à distinguer quatre catégories de questions : celles qui paraissent d'un accès facile dès la 5^{ème}, celles qui deviennent progressivement d'un accès facile, celles pour lesquelles on note des progrès réguliers mais qui dont l'accès n'est pas encore suffisamment maîtrisé en 3^{ème}, et enfin celles qui offrent des résistances tenaces quel que soit le niveau où elles sont posées. Ce constat effectué, nous avons essayé d'analyser les tâches que recouvrent ces différentes catégories de questions.

Les questions pour lesquelles il y a un bon taux de réussite tout au long des trois niveaux, sont celles où il s'agit de *manipuler des nombres donnés*, soit à propos de situations géométriques simples, soit dans des calculs comportant des sommes et des produits. Les calculs sont correctement menés même si l'on rencontre parfois des présentations incorrectes (absence des parenthèses par exemple).

Dans les questions qui se caractérisent par une progression régulière pour aboutir finalement à un bon taux de réussite en 3^{ème}, nous trouvons celles où, dans une situation géométrique simple, il s'agit d'exprimer une longueur, un périmètre ou une aire, en fonction d'un élément variable désigné par une lettre. Si, en début de 5^{ème} et de 4^{ème}, nous trouvons encore beaucoup d'élèves qui s'obstinent à attribuer une valeur numérique à la lettre (en mesurant sur une figure tracée par exemple) ou qui ne répondent pas, il n'y en a pratiquement plus en 3^{ème}. L'apprentissage de *l'utilisation d'une variable pour écrire une formule* relative à une situation simple semble donc s'effectuer progressivement sans problème. Par contre, nous voyons que la complexité de la figure à analyser peut engendrer des échecs importants, même en 3^{ème} (exercice GIIa).

Pour les questions marquées par un fort taux d'échecs même en 3^{ème}, nous trouvons paradoxalement des exercices purement numériques côtoyant des exercices comportant des variables. Pourquoi cela ? La difficulté commune semble être qu'il faut *transformer une expression en une autre* pour répondre à la question. Il semble donc que les "exemples numériques" soient aussi délicats à manipuler que les "exemples littéraux" dès lors que l'activité ne se réduit pas à calculer ou à exprimer, mais passe par une transformation.

Nous pourrions peut être cerner la difficulté un peu plus en amont en considérant l'exercice qui demande de *décrire le traitement à effectuer sur une variable pour mettre en oeuvre une formule donnée* (ici $(3 + 5x) \times 2 - 6$). De la 5^{ème} à la 3^{ème} nous trouvons pour cet exercice un très fort taux d'échecs. Alors que sur un exemple numérique les règles de priorité sont respectées, ici *l'ordre des calculs décrits correspond souvent simplement à l'ordre de lecture* des signes opératoires. Les calculs ne sont pas organisés autour de la variable. D'autres fois encore, on gomme la dimension de variable en affectant une valeur à x et en décrivant le déroulement de l'exécution du calcul. Dans un cas comme dans l'autre, on ne donne pas son rôle réel à la variable. Comment alors transformer une expression numérique ou littérale, si l'on n'accorde pas à la lettre où au nombre à manipuler un rôle particulier dans le traitement ? Les conditions pour qu'on entre dans un registre où les variables ou les nombres seraient manipulés comme des symboles ne sont pas présentes. A la suite de ce test, nous avons donc tenté d'élaborer et d'expérimenter des activités où considérer une lettre ou un nombre comme une variable soit une nécessité.

3. QUELLES ACTIVITÉS ?

3. 1. Orientation des activités

A la suite du test initial passé en début d'année et analysé en décembre 1989, nous avons constaté que la difficulté des tâches tenait moins à une opposition entre un domaine numérique (supposé de manipulation facile) et un domaine littéral (supposé plus délicat à maîtriser), qu'au statut des lettres ou des nombres manipulés. En effet de manière massive nous avons constaté que les élèves ont du mal à entrer dans un registre où, soit les nombres, soit les lettres sont manipulés comme des symboles. Ainsi, rappelons que le fait de décrire le traitement à effectuer sur une variable pour mettre en oeuvre une formule donnée donne lieu à des erreurs fréquentes de la 5^{ème} à la 3^{ème}. L'analyse montre que ces erreurs consistent à décrire un ordre de calcul qui correspond à l'ordre de lecture et non pas à l'organisation des calculs à partir de la variable à laquelle on affecte une valeur numérique. Et remarquons que ces erreurs se produisent malgré de nombreuses occasions de la 5^{ème} à la 3^{ème} où les élèves ont à "formaliser" une situation. Notre but au cours de l'année a donc consisté à élaborer des activités où considérer une lettre ou un nombre comme une entité symbolique soit une nécessité. Nous présentons ici uniquement les activités qui ont été conçues dans ce but. Il est bien entendu que, par ailleurs, tout au long du déroulement des programmes de 5^{ème} et 4^{ème}, nous avons proposés aux élèves des situations où des besoins spécifiques de formulations ou de traitements algébriques apparaissent (problèmes géométriques, problèmes numériques, proportionnalité ...)

En février 90 nous avons élaboré un scénario d'activités en 4^{ème} dont les objectifs d'apprentissage sont :

- de savoir transformer un programme de calcul en formule et se servir de parenthèses
- de savoir transformer une formule en un programme de calcul et d'y maîtriser l'organisation du calcul autour de la variable
- de savoir utiliser la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition comme un outil de transformation des formules (dans le domaine algébrique, une entrée dans le "monde de la démonstration" consiste à chercher ou prouver des équivalences entre formules).

En 5^{ème}, nous voulions une activité qui offre des perspectives similaires en s'appuyant a priori sur un contexte uniquement numérique. Mais il fallait bien entendu que les contraintes données obligent les élèves à manipuler cer-

tains des nombres comme des entités symboliques, indépendamment de leurs valeurs numériques. De plus cette activité, comme celles de 4^{ème}, s'inscrit aussi dans la volonté d'ouvrir de préparer le terrain aux exercices qui consistent à trouver et prouver des règles générales.

3.2. Activité en cinquième

PROGRAMMES DE CALCULS : Des Chiffres et des Nombres....

1) PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ :

Notions mathématiques utilisées :

Les 4 opérations sur les décimaux, partie entière et partie décimale d'un nombre, nombres et chiffres.

Matériel nécessaire :

Feuilles pour rédiger des programmes de calculs à transmettre
Possibilité de travailler en binômes dans la classe.

Durée :

Environ 3h

Objectifs visés :

Ecrire et décoder des programmes de calculs où certains nombres sont manipulés comme des symboles.

2) DÉROULEMENT ET OBSERVATIONS :

1ère séance, 1h : le but et les règles qui président à l'activité :

a) Expliquer aux élèves qu'il s'agira de fabriquer et de réaliser des programmes de calculs, mais sans calculatrice. Les instructions permises sont des instructions que l'on trouve sur la calculatrice, mais aussi deux instructions qui n'y figurent pas. Les élèves doivent en avoir la liste :

- l'introduction de nombres notée NB
- les 4 opérations
- l'introduction de nombres en mémoire (M+ et M-)
- l'affichage de ce qu'il y a en mémoire (MR)
- l'opération qui consiste à prendre la partie entière d'un décimal notée ENT
- l'opération qui consiste à prendre la partie décimale d'un décimal notée DEC

Les deux dernières instructions sont expliquées sur quelques exemples. Nous avons pris le parti de ne pas les faire fabriquer à partir d'autres instructions.

b) Un exemple de programme et son fonctionnement :

Instruction	Affichages
Nb entier de 3 chiffres au choix	nombre choisi:
+ 10	
DEC	
x 10	Résultat :

– Le professeur peut faire fonctionner le programme sur un nombre qu'il choisit et ensuite demander aux élèves de choisir à leur tour et chacun pour soi un nombre et d'exécuter le programme.

– Après avoir rassemblé les nombres choisis et les résultats correspondants, on peut demander aux élèves de décrire ce que fait le programme ; en l'occurrence, il indique le chiffre des unités du nombre à trois chiffres qui a été introduit.

c) Une première fabrication de programme par les élèves :

Chaque élève doit fabriquer le programme qui pour tout nombre entier de trois chiffres donne son chiffre des centaines. C'est l'occasion de réexpliquer le fonctionnement du programme précédent aux rares élèves qui ne l'auraient pas encore assimilé. L'observation dans nos classes a montré que les élèves produisent assez rapidement leur programme. A noter que des variantes apparaissent dans les propositions, par exemple certains divisent le nombre par 10, prennent sa partie entière et recommencent à diviser cette partie entière par 10 avant de prendre la partie entière du résultat. D'autres divisent tout de suite par 100 et prennent la partie entière du résultat.

d) Un deuxième exemple de programme et son fonctionnement :

Afin de familiariser les élèves avec l'utilisation de la mémoire dans les programmes nous leur présentons le programme qui suit et leur demandons de le faire fonctionner plusieurs fois sur des nombres entiers à trois chiffres avant de décrire sur leur cahier le but de ce programme (qui donne en fait la somme du chiffre des centaines et de celui des unités).

Instructions	Affichages
Nb entier de 3 chiffres au choix	Nombre choisi:
:100	
ENT	
M+	
Nb choisi	
:10	
DEC	
x 10	
M+	
MR	Résultat :

2^{ème} et 3^{ème} séance :

D'autres programmes....

- Fabriquer un programme qui donne le chiffre des dizaines d'un nombre entier à 3 chiffres.
- Fabriquer un programme qui donne la somme des chiffres d'un nombre entier à 3 chiffres.
- Des programmes à partir de nombres entiers à 4 chiffres : somme du chiffre des dizaines et de celui des milliers, somme du chiffre des centaines et de celui des unités...

Pour ce travail on peut imaginer une structure d'échange de programmes, le receveur d'un programme ayant à le faire fonctionner et déterminer son but.

3.3. Activités en quatrième : Programmes de Calculs et Formules

ACTIVITÉ N° 1 : Transmission de Programmes de Calculs

1) PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ

Notions mathématiques utilisées :

Calcul et vocabulaire concernant les 4 opérations avec des nombres relatifs.

Matériel nécessaire :

Matériel pour rédiger, calculer. Possibilité de travailler en binômes ou par petits groupes dans la classe.

Durée : 1h

Objectifs visés : Savoir transformer un programme de calcul en formule et plus particulièrement y maîtriser le rôle des parenthèses

2) DÉROULEMENT

Les élèves de la classe ou du groupe sont partagés en 2 groupes de même effectif. Chaque élève du premier groupe a un correspondant dans le deuxième groupe.

Chaque élève reçoit un programme de calcul. Il doit le faire fonctionner pour quelques valeurs données (par exemple pour 1, 3 et 25).

Ceci fait, il y a échange de formules entre les correspondants par l'intermédiaire du professeur. A partir de la formule reçue, chaque élève doit essayer de retrouver le programme de calcul qu'avait son correspondant au départ.

Une fois le programme écrit, ils doivent le faire fonctionner pour les valeurs précédemment données (1, 3 et 25).

Dix minutes avant la fin de l'heure, les élèves correspondants se regroupent et confrontent leurs résultats et rectifient le programme ou la formule si nécessaire.

Exemples de programmes de calculs à transmettre

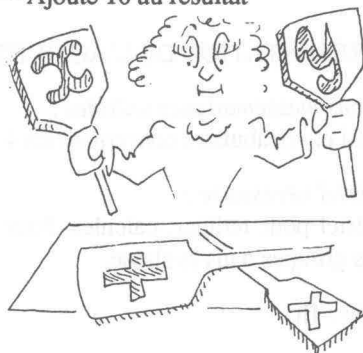
- Choisis un nombre
- Multiplie le par 7
- Ajoute 5

- Choisis un nombre
- Prends son opposé
- Ajoute 4
- Multiplie le résultat obtenu par 5
- Ajoute 30 au résultat

- Multiplie le résultat obtenu par 2
- Ajoute 6 fois le nombre de départ
- Retranche 10
- Choisis un nombre
- Multiplie le par 3
- Retranche 5
- Multiplie le résultat obtenu par 7
- Retranche le nombre de départ
- Ajoute 35 au résultat

-
- Choisis un nombre
 - Calcule son triple et son double
 - Additionne ces deux nombres
 - Divise le résultat par 10

- Choisis un nombre
- Multiplie le par -4
- Retranche 2
- Multiplie le résultat obtenu par 5
- Ajoute 10 au résultat



3) OBSERVATIONS

L'activité permet surtout aux élèves de déceler et de rectifier quelques erreurs portant sur le rôle des parenthèses dans une formule qui résume un programme de calculs.

ACTIVITÉ N° 2 : Transmission de Formules

1) PRÉSENTATION

Notions mathématiques utilisées et matériel nécessaire :

Voir activité 1

Durée : 1h

Objectifs visés :

Savoir transformer une formule en un programme de calcul et plus particulièrement maîtriser l'organisation du calcul défini par la formule.

2) DÉROULEMENT

Les élèves de la classe ou du groupe sont partagés en 2 groupes de même effectif. Chaque élève du premier groupe a un correspondant dans le deuxième groupe.

Chaque élève reçoit une formule à transmettre par l'intermédiaire d'un programme de construction. Il doit donc écrire un programme de construc-

tion qui correspond à cette formule.

Ceci étant fait il y a échange de formules entre les correspondants par l'intermédiaire du professeur.

A partir du programme de calcul reçu, les élèves doivent écrire une formule.

20 minutes avant la fin de l'heure, les élèves correspondants se regroupent et confrontent leurs formules .

Exemples de formules à transmettre:

$$4(5 - 8X) - 4X$$

$$2(5X - 3) + 7$$

$$6(5 - 2X) + X/2$$

$$9(7X - 3) - 4$$

$$(3 + 7X) \times 5 + 2$$

$$8(5 + 3X) - 7$$

3) OBSERVATIONS

Lors de la confrontation, puisque l'ordre d'écriture de la formule finale peut être différent de celui de la formule initiale, il y a discussion pour voir si les formules sont équivalentes.

Il y a aussi révision d'expressions du type "*retrancher ou soustraire à.....*", souvent encore mal maîtrisées.

Cette activité permet surtout aux élèves de voir, qu'à partir d'une formule, on ne commence pas un calcul nécessairement à gauche, mais qu'il y a une organisation du calcul à établir autour de la variable avant de démarrer. Les élèves sont ainsi rendus attentifs au rôle spécifique que joue la variable.

Si cela se révèle nécessaire, on peut jouer sur la complexité des formules à transmettre

ACTIVITÉ N° 3 : Equivalences entre Formules

1) PRÉSENTATION

Notions mathématiques utilisées et matériel nécessaire : voir activité 1.

En outre, on se servira ici des propriétés des opérations : associativité, commutativité, distributivité.

Durée : 2h

Objectifs visés : installer une situation où la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sert d'outil de transformation de formules.

Les élèves auront à conjecturer l'équivalence entre deux programmes de calcul ou deux formules et à établir les équivalences conjecturées à l'aide des propriétés des opérations.

2) DÉROULEMENT ET OBSERVATIONS

Première heure :

Même déroulement que pour l'activité 2 à partir des formules suivantes:

$$A = (6 + 4N) \times 25 - 152$$

$$B = (25 + 125N) \times 8 - 204$$

$$C = 1043 - (25 + 5N) \times 2 + 7$$

$$D = 142 - (10 + 0,2N) \times 5 + 8$$

En même temps il est demandé de faire fonctionner ces formules et ces programmes pour quelques valeurs données pour N.

Par exemple:

pour A, N=13 ; - 8 ; - 4,2 et 57

pour B, N= 14 ; - 9 ; - 5,2 et 58

pour C, N= 7 ; - 12 ; - 150 et 0,3

pour D, N= 8 ; - 13 ; - 151 et 0,4

Ces calculs permettent d'abord de déceler d'éventuelles divergences à rectifier. Cette séance permet ainsi déjà de reprendre les objectifs visés dans les activités 1 et 2, sur des formules un peu plus complexes.

Environ 15 minutes avant la fin, les 4 formules et les résultats respectifs calculés sont écrits au tableau afin que chaque élève les possède. Il est alors demandé d'observer et de voir si on ne peut pas remplacer les programmes, qui comportent en général 6 pas, par un programme beaucoup plus simple.

Sur l'un ou l'autre programme des conjectures sont émises...et mises à l'épreuve de calculs supplémentaires....Il est alors demandé aux élèves d'achever ce travail de conjecture pour les 4 programmes pour la prochaine séance. Les élèves sont forts surpris en général et certains demandent explicitement comment cela se fait...Le terrain est ainsi préparé pour l'heure suivante.

Deuxième heure:

Le début de l'heure est consacré à la confrontation et à la mise au point des conjectures avec l'ensemble des élèves ou en petits groupes.

A savoir :

pour A on trouve $100N - 2$

pour B on trouve $1000N - 4$

pour C on trouve $1000 - 10N$

pour D on trouve $100 - N$

Même si les conjectures se confirment par les vérifications numériques,

comme nous l'avons signalé, le résultat surprend assez les élèves pour qu'une explication qui va au-delà d'une constatation s'impose. pour certains et soit bien venue pour tous.

Le professeur rappelle alors quelques situations où la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition était mise en évidence. Il peut aussi rappeler la commutativité et l'associativité des opérations.

Les élèves sont alors invités à utiliser ces propriétés comme des outils de transformation des formules initiales pour obtenir les formules finales. Le travail se fait par petits groupes de 3 ou 4 élèves.

Même si ce travail de transformation n'est pas encore maîtrisé, il se fait petit à petit et surtout son utilité comme moyen d'établir la conjecture est reconnue par les élèves.

Par la suite, quelques exercices plus classiques peuvent être entrepris sur les transformations d'expressions algébriques.

4. TEST DE FIN D'ANNÉE : QUELLES ÉVOLUTIONS ?

Le test de juin consistait à faire l'état des lieux après la pratique des activités spécifiques respectivement proposées en cinquième et quatrième.

4.1. Population

Les classes concernées par le test ont été : 8 cinquièmes (168 élèves), 5 quatrièmes (106 élèves) et 3 troisièmes (58 élèves). La population soumise aux deux tests était en gros la même que celle qui a passé les tests au premier trimestre.; néanmoins une classe de 4^{ème} et une classe de 5^{ème} s'y sont ajoutées. En troisième, si le nombre de classes n'a pas varié, il est à signaler en revanche un effectif moindre, suite à un absentéisme pour des raisons particulières (voyages). Comme nous l'avons vu, les élèves de 5^{ème} et 4^{ème} ont pratiqué des activités construites pour favoriser des acquisitions algébriques. Ceux de 3^{ème}, qui ont eu un enseignement habituel, permettent de se faire une idée des résultats usuellement obtenus au terme du collège. Ce n'est qu'une idée, car la population d'élèves de 3^{ème} interrogés sur ces sujets n'a pas été très nombreuse

4.2. Le test

Puisque le test de fin d'année est destiné à repérer l'évolution des élèves, il est très semblable à celui du début d'année. Les indications qui suivent reprennent donc à peu de chose près celles qui ont été données à propos du test de début d'année.

Le test se compose de deux parties à passer chacune en environ 30

minutes à des moments différents. Nous avons regroupé les questions suivant les contenus qu'elles abordaient. L'une s'intitule : "*Calcul littéral et numérique*", l'autre "*Programmes de calculs*". En grande partie, les questions sont proposées à des élèves de la classe de 5^{ème} à celle de 3^{ème}, car les situations qu'elles présentent sont accessibles dès la deuxième année du collège. Néanmoins, sur quelques points, une formulation plus particulièrement adaptée aux apprentissages supposés de 4^{ème} et 3^{ème} nous a fait élaborer une version spécifique de la partie "*Programmes de calculs*" pour les élèves de 5^{ème}.

PROGRAMMES DE CALCULS :

Version pour la classe de cinquième.

1) Le compte est bon !

Rappel : tu peux utiliser les quatre opérations, des parenthèses et une seule fois chaque nombre.

Exemple

pour obtenir 18 avec 5, 20 et 3, Adrien a écrit : $20 - 5 + 3 = 18$.

Questions : Ecris de même une égalité qui montre comment on peut obtenir,

a) 325 avec 25, 3 et 100 :

b) 375 avec 25, 3 et 100 :

c) 265 avec 2, 5, 13 et 100 :

2) Un programme de calcul

Présentation du programme. Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 7 à ce nombre
- Multiplier le résultat obtenu par 3
- Retrancher 4

Question :

a) Quel résultat obtient on avec ce programme, si l'on choisit au départ le nombre 5 ?

.....

b) Si le nombre choisi au départ est appelé x , écrire l'expression qui traduit ce programme

3) Une expression

Question : Rédiger un programme de calcul correspondant à l'expression suivante :

$$(2 + 3x) \times 4$$

Le programme :

4) Un calcul astucieux

Question : Ecrire le calcul qui permet de trouver mentalement :

$$785\,999 \times 260 - 785\,999 \times 250$$

Calcul et réponse :

5) Un problème

En prenant un certain nombre et en lui ajoutant **son triple**, on obtient un certain résultat.

Question :

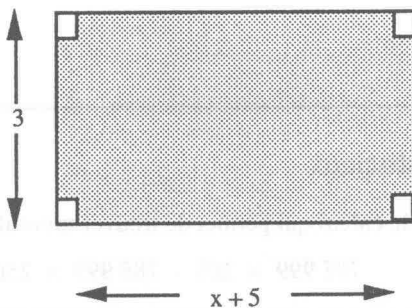
a) **Comment** un élève qui connaît le résultat peut-il retrouver **le nombre de départ** ?

b) Utilise ce que tu viens d'expliquer pour trouver quel **nombre de départ** conduit au **résultat 48**.

--

CALCUL LITTÉRAL ET NUMÉRIQUE

1) Un rectangle



a) Ecrire, en **fonction de x**, le **périmètre** du rectangle ci-dessus :

.....

b) Ecrire, en **fonction de x** l'**aire** du même rectangle :

.....

c) Trouver une **valeur de x** pour que le **périmètre** de ce rectangle soit égale à **27 cm**.

Place pour la recherche :	Réponse :

- d) Trouver une **valeur de x** pour que l'**aire** de ce rectangle soit égale à 45 cm^2 .

Place pour la recherche :	Réponse :

2) Calculs

Calculer pour $a = 100$, $b = 10$ et $c = 2$

a) $a - b + c = \dots\dots\dots$ b) $a + b \times c = \dots\dots\dots$

c) $(a - b) \times c = \dots\dots\dots$ d) $a \times (90 - b) \times c = \dots\dots\dots$

3) Comparaisons

Voici deux rectangles dont on a ôté un carré :

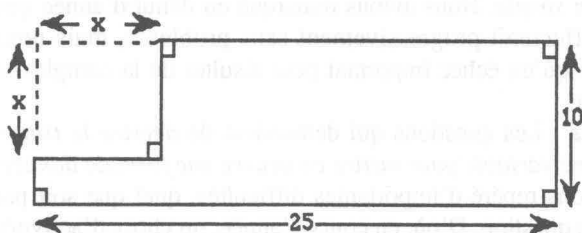


figure 1

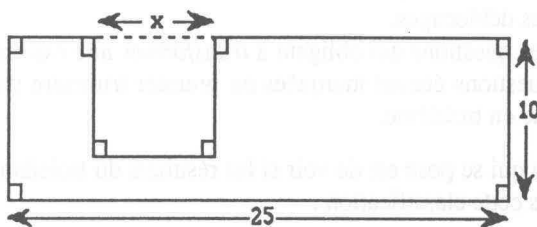


figure 2

- a) Comparer les **périmètres** des deux figures (expliquez) :

- b) Comparer les **aires** des deux figures (expliquez) :

4) Réductions (non proposées en classe de cinquième)

Réduire au maximum les expressions suivantes :

a) $3(a - 2) + 2(2 - a)$	a) $9 - 4(a - 3)$
--------------------------	-------------------

4.3 Les résultats

Pour l'analyse des résultats, les questions ont été regroupées comme suit en catégories selon le type de tâches impliquées.

- **Première catégorie** : les questions où il s'agit de *manipuler des nombres donnés*, soit à propos de situations géométriques simples, soit dans des calculs comportant des sommes et des produits. Dès le premier trimestre, ces calculs étaient en général correctement menés, même si l'on rencontrait parfois des présentations incorrectes (défaut de parenthèses par exemple).

- **Deuxième catégorie** : les questions où il s'agit d'*utiliser une variable pour exprimer une situation simple*. Nous avons remarqué en début d'année que cet apprentissage s'effectuait progressivement sans problème, mais nous avons aussi remarqué qu'un échec important peut résulter de la complexité d'une figure à analyser.

- **Troisième catégorie** : Les questions qui demandent de *décrire le traitement à effectuer sur une variable pour mettre en oeuvre une formule donnée*. C'est là que nous avons repéré d'importantes difficultés, quel que soit par ailleurs le niveau de la question. D'où, en cours d'année, un choix d'activités à même de permettre là des déblocages.

- **Quatrième catégorie** : les questions qui obligent à *transformer une expression en une autre*. Ces questions étaient marquées au premier trimestre par un fort taux d'échec, même en troisième.

Une première question qui se pose est de voir si les résultats du troisième trimestre reflètent toujours cette classification.

Une deuxième question est de voir si à l'intérieur de chacune de ces catégories, nous assistons à une évolution des résultats (si possible positive...).

Une troisième question, posée avec des réserves à propos de la représentativité problématique de la population des élèves de 3^{ème}, est de savoir comment ont évolué les élèves de 3^{ème}, qui n'ont pas suivi, eux, l'enseignement

proposé dans les classes de 4^{ème} (et destiné ultérieurement à être poursuivi en 3^{ème}).

A la suite sont indiqués, catégorie par catégorie, les résultats observés suivis de commentaires inspirés de ces questions.

Première catégorie

(calculer en respectant les règles de priorités, écrire correctement des calculs)

Remarque préliminaire : pour ces questions, nous avons veillé à ce que la difficulté ne réside pas dans le calcul lui-même (les nombres utilisés sont des entiers facilement maniables). Ainsi ce sont l'écriture et l'organisation des calculs qui ont été testés.

PC1 *Le compte est bon* (3 nombres faciles à fabriquer, réussite = 3 réussites)

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	61%	75%	62%

CLN 2 *Calculez des expressions pour certaines valeurs numériques* (4 expressions, 4 calculs, réussite = 4 réponses correctes sur les 4)

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	44%	66%	53%

PC2a *Effectuer un programme de calcul pour un nombre donné*

Réussite en 5^{ème} : 82% (question non posée en 4^{ème} et 3^{ème})

Niveau de réussite observé : les réussites sont importantes pour les questions d'organisation des calculs numériques (de 60% à 80% selon les questions et selon les niveaux).

Néanmoins, la question portant sur 4 expressions à calculer pour 4 valeurs données connaît un succès moindre (de 45 à 65%). Il est vrai que par réussite, nous entendons une réussite totale pour les 4 calculs et que très fréquemment une erreur de calcul s'est glissée dans cette série de 4. Avec une tolérance d'une erreur sur 4 nous obtenons un score semblable aux autres questions de calcul.

Evolution des élèves : par rapport aux résultats du début d'année il y a

stabilité dans la réussite.

Deuxième catégorie

(exprimer des situations à l'aide de variables)

PC2b Ecrire l'expression qui traduit un programme de calcul

	5°/168	4°/106	4°/58
Réussite	60%	81%	57%

CLN1a et b Ecrire en fonction de x le périmètre et l'aire d'un rectangle de côtés 3 et $x+5$

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	56%	78%	76%

CLN1c et d Trouver x pour que le périmètre, l'aire d'un rectangle de côtés 3 et $x+5$ soit..."

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	44%	70%	57%

CLN3 Comparer les périmètres et l'aire de deux figures non convexes

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	20%	19%	9%

Niveau de réussite observé : les pourcentages de réussite, qui atteignent des valeurs élevées sauf pour la dernière des questions ci-dessus, traduisent une bonne maîtrise de tâches fréquemment pratiquées à tous les niveaux depuis l'introduction des nouveaux programmes.

Le seul exercice qui donne de très faibles résultats est celui où c'est la complexité des figures qui fait obstacle. Nous retrouvons là un phénomène déjà constaté au premier trimestre.

Evolution des élèves : par rapport au début de l'année, des progrès sont à signaler en cinquième. Il est vrai que c'est en cinquième que l'on commence à voir plus systématiquement des situations de formulation. Dans nos classes, nous avons développé de nombreuses activités dans ce sens.

Troisième catégorie

(description d'un traitement à effectuer)

PC3 Rédiger un programme de calcul correspondant à une expression donnée

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	26%	75%	60%

Niveau de réussite observé : les réussites s'échelonnent ici de 26 à 75%, c'est à dire qu'il y a des variations importantes selon les niveaux.

Evolution des élèves : en comparant ces résultats à ceux observés au premier trimestre sur une question de formulation identique, nous constatons une persistance de résultats médiocres en 5^{ème} (26% contre 21% au premier trimestre), alors qu'en 4^{ème} (75% contre 24% au premier trimestre), et même en 3^{ème} (60 contre 30%) avec un enseignement usuel, nous assistons à un véritable décollage. Il est vrai que les activités conçues pour que les lettres soient considérées comme des variables ont particulièrement été travaillées en 4^{ème} et aussi en 3^{ème} (à un niveau moindre et pas dans toutes les classes).

On peut s'interroger sur la stagnation constatée en 5^{ème}: il est vrai qu'à ce niveau, les activités développées concernaient les nombres à considérer comme des variables et non pas les lettres. Ces activités n'ont apparemment pas eu d'effets sur les exercices de ce type portant sur des expressions littérales. Pour voir si ces activités ont néanmoins porté des fruits, il faudrait peut-être présenter dans le test un exercice qui permette de repérer la capacité de programmation de calculs.

Quatrième catégorie

(transformer une expression en une autre)

PC4 Un calcul astucieux

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	35%	49%	34%

PC5 Un nombre ajouté à son triple

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	33%	41%	31%

PC2 Trouver un programme plus court

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	non posé	41%	31%

CLN4 Réduire les expressions

	5°/168	4°/106	3°/58
Réussite	non posé	35%	40%

Niveau de réussite observé : Dans cette catégorie d'exercice les pourcentages de réussite se cantonnent dans une fourchette 30 à 50%. Cela prouve que cette tâche reste difficile.

Evolution des élèves : nous pouvons constater une progression à tous les niveaux : de 14 à 35% en 5^{ème} pour le calcul astucieux, de 24 à 49% en quatrième et de 28 à 34% en 3^{ème}. Les progressions sont du même ordre pour la compréhension d'un nombre et de son triple. En particulier, nous constatons aussi des progrès en 5^{ème} et même, en fin de 5^{ème}, les résultats sont supérieurs aux résultats qui avaient été constatés en début de 4^{ème}. Pourrions-nous en conclure que le travail entrepris pour que les nombres aient un statut de variable a été profitable, malgré la stagnation que nous avons constatée dans la catégorie précédente ?

Pour l'exercice "classique" de réduction d'expressions, les résultats des élèves de 3^{ème} sont meilleurs qu'en 4^{ème}, même s'ils ne sont pas satisfaisants (40%). Effet d'un entraînement plus important et systématique ?

4.4. Conclusion

A la suite des activités travaillées avec nos élèves, en 5^{ème} et en 4^{ème}, pouvons nous constater un effet positif sur les capacités à effectuer les tâches repérées en début d'année ?

Signalons tout d'abord que nous n'avons exposé que les activités les plus spécifiques, portant sur les tâches pour lesquelles nous avons décelé d'importantes difficultés, à savoir la transcription d'expressions ou de calculs dans un registre algorithmique. Nous n'avons pas négligé par ailleurs le travail de formulation, particulièrement en 5^{ème}, et de mise en équation en 4^{ème}. D'ailleurs, deux membres de notre groupe ont participé à un travail à ce sujet dans le cadre d'une recherche doctorale effectuée par Monsieur KOUR-KOULOS (1991 ; *"Modélisation mathématique des instructions aboutissant à des équations du 1er degré auprès des élèves de 15 à 16 ans"*). Nous avons tenu compte des apports de cette recherche dans notre enseignement. Et, en ce qui concerne l'organisation de calculs numériques proprement dits et la formulation de situations, nous constatons une stabilité dans la réussite en 4^{ème} et 3^{ème} et des progrès en 5^{ème} (exception faite de figures complexes). Mais ce n'était pas là l'objectif principal de ce travail.

En ce qui concerne les objectifs plus spécifiques, nous constatons des progrès en 5^{ème} et 4^{ème}. D'une part dans la programmation de traitements à effectuer pour mettre en oeuvre un calcul sur une expression littérale où les progrès sont spectaculaires en 4^{ème} alors qu'en 5^{ème} les résultats sont en stagnation. D'autre part dans la transformation d'une expression littérale ou numérique en une autre expression. Dans ce dernier domaine les progrès restent modestes mais touchent 5^{ème} et 4^{ème}.

Pour conclure nous dirons qu'il nous semble que, par les activités que nous avons pratiquées, les conditions pour que les élèves entrent dans un registre où les variables ou les nombres seraient manipulés comme des symboles semblent favorisées. Et on peut alors développer plus efficacement la capacité à transformer une expression numérique ou littérale, même s'il convient de modérer ce propos dans la mesure où les progrès dans ce domaine ont été encore ténus.

A PROPOS DES DIFFICULTÉS DU CALCUL ALGÈBRIQUE EN TROISIÈME : IMPRESSION OU RÉALITÉ ?

Robert BUISSON
IREM de Limoges.

I-INTRODUCTION

Les mathématiques que nous devons enseigner ont un statut intermédiaire entre deux pôles : les mathématiques -certains diront LA Mathématique- comme science fondamentale d'une part et la culture générale de la population d'autre part.

Il s'agit bien de deux statuts différents pour une même discipline scientifique, qui est à la fois discipline autonome ayant son propre développement, et discipline instrumentale. Ces deux aspects ne s'opposent pas. Ils se complètent, interfèrent, s'éclairent mutuellement dans ce vaste mouvement qui fait des mathématiques une science vivante.

Les nouveaux programmes insistent que ces deux facettes et visent à les mettre sur un pied d'égalité. Par ailleurs, à l'intérieur même des mathématiques, nombreux sont les va-et-vient entre les différentes branches, ce qui leur confère, dans cette chatoyante diversité, leur unité.

Le concept fondateur des mathématiques - le nombre - ne fut pas élaboré en un jour : le chemin qui y conduisit fut long et sinueux, à travers les siècles.

L'humanité a eu besoin de temps pour établir ses nouveaux savoirs, pour les travailler encore, les dépasser, les comparer, les tester, les prouver, les réfuter parfois.

Nos élèves des classes de Troisième et Seconde, en particulier, n'échappent pas à la règle générale. Ils ont besoin de temps pour apprendre, comprendre, déjouer les pièges, s'initier à ce qui fut élaboré par les générations qui les ont précédés.

Il nous semble cependant que certaines erreurs régulièrement rencontrées, encore en seconde, chez une proportion non négligeable d'élèves doivent faire l'objet d'une attention particulière : parce qu'elles sont trop fréquentes, parce qu'elles révèlent des confusions graves, parce qu'elles relèvent souvent du même phénomène, que l'on pourrait être tentés d'appeler, en première approximation, «*la tentation culturelle du faire simple*».

La «tentation du faire-simple», c'est par exemple quand l'élève écrit :

$$\frac{a+b}{b} = a \text{ ou } \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \text{ ou } a^2 - b^2 = (a - b)^2$$

Or, nous considérons que la simplification des fractions, les opérations sur les fractions doivent être, par exemple, du domaine des connaissances maîtrisées par l'élève en fin de Troisième, le mot connaissance regroupant ici savoirs et savoir-faire.

Une erreur fréquente, en tout cas remarquée comme telle, est $\frac{a+b}{b} = a$, disions-nous il y a quelques lignes. Mais qu'en est-il exactement? Sont-ils vraiment aussi nombreux que cela, les élèves qui comettent cette erreur? Ou sommes-nous tellement agacés que nous leur attribuons une importance exagérée? Quelles proportions d'élèves sont concernées? N'aurions-nous pas tendance à en grossir le nombre, parce qu'en effet, l'apparition répétée de telles erreurs a quelque chose de déstabilisant, de culpabilisant parfois? Bref, s'agit-il d'une réalité ou d'une désagréable illusion?

Nous avons voulu en savoir davantage en procédant à des tests, permettant de préciser ces impressions.

Ce sont les résultats de ces tests, réalisés en Troisième au collège d'Ussel (Corrèze), au cours du deuxième trimestre de l'année scolaire 1990-1991 que nous communiquons dans les paragraphes qui suivent.

Dans le courant de l'année, nous avons ensuite prolongé cette enquête aux erreurs dans les exercices de factorisations et inéquations.

II-TESTS PORTANT SUR L'ERREUR $\frac{a+b}{b} = a$

(ou erreur s'y ramenant)

Premier test :

Nous avons proposé aux élèves une feuille comportant quatre exercices, élaborés en commun. Il y avait trois quarts d'heure pour répondre, les réponses ne nécessitant pratiquement pas de rédaction.

Exercice 1 : Ecris plus simplement : $\frac{15}{10}$; $\frac{10+5}{10}$; $\frac{3 \times 5}{10}$

Exercice 2 : Simplifie, si possible : $\frac{a \times b}{a}$; $\frac{a+b}{a}$

Exercice 3 :

1) Complète le tableau :

	x	y	$\frac{2x+y}{y}$	$2x+1$	$\frac{2xy}{y}$	$2x$
	+1	+3				
	-1	2				
	10	44				
facultatif	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$				
facultatif	10^5	10^3				

2) A l'aide des trois premières lignes :

Que remarques-tu en comparant les colonnes (3) et (4)? Pouvais-tu le prévoir?

Peux-tu faire la même remarque en comparant les colonnes (1) et (2)?
Pouvais-tu le prévoir?

Exercice 4 : Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à $\frac{a+3b}{3}$?

$$\begin{array}{ccc} a + b & \frac{3a+9b}{3} & \frac{5a+3b}{15} \\ \frac{a}{3} + b & \frac{3a + 3b}{3} & \frac{5a + 15b}{15} \end{array}$$

Résultats : (78 élèves testés).

	Ex.1	Ex.2	Ex.3	Ex.4
Une erreur seulement	7	7	29	38
Plus d'une erreur	0	0	26	0
Total exercices faux	7	7	55	38
Pourcentage erreurs	9%	9%	70%	48%

Deuxième test.

Les élèves avaient trente minutes pour répondre.

Dans le tableau suivant, chaque colonne se termine par une expression, entoure la ou les expressions de la colonne concernée qui lui sont égales quel que soit le nombre a .

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\frac{3a - a}{3}$	$\frac{3a - 1}{2 - 2}$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{-5a - 1}{3}$	$\frac{3a}{2a - 1}$
$3a - \frac{a}{3}$	$\frac{3a - 1}{2}$	$0,75a$	$\frac{7a - 1}{3}$	$3\left(\frac{1}{2} - a\right)$
$-\frac{1}{3}$	$2a - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{a^2}{6}$	$\frac{2a-2}{6} + \frac{6-2a}{6}$	$\frac{3}{\frac{2a-1}{a}}$
$\frac{2a}{3}$	$\frac{3a+1}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a-1}{3} - \frac{a-3}{3}$	$\frac{3}{\frac{1}{a}}$

$\frac{0}{3}$	$\frac{a-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{\frac{2a}{a}-\frac{1}{a}}$
$a-\frac{a}{3}$	$2a-\frac{a+1}{2}$	$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}$	$\frac{a-1}{3}-\frac{2a-6}{6}$	$\frac{3}{2-\frac{1}{a}}$

Résultats (93 élèves testés).

	Colonne 1		Colonne 2		Colonne 3	
Juste	76	81%	72	77%	78	83%
Une erreur seulement	11	11,8%	14	15%	9	9,5%
Plus d'une erreur	6	7%	7	8%	6	7%
	Colonne 4		Colonne 5			
Juste	62	66%	59	63%		
Une erreur seulement	19	20%	23	24,5%		
Plus d'une erreur	12	14%	11	12,3%		

Commentaires

Premier test :

- Les calculs portant sur les nombres "simples" sont bien réussis.
- L'exercice 3 qui porte sur les nombres est un échec massif. Les erreurs sont essentiellement dues à la présence des nombres fractionnaires et de ceux écrits sous forme de puissance (lignes facultatives mais qui ont été traitées).
- L'exercice 4 et son pourcentage d'erreurs illustrent la fragilité des élèves pour ce qui concerne les "simplifications" où figurent des lettres.
- Certains mots, qui sont des mots familiers dans la classe de mathématiques, ne sont pas sans ambiguïté. «Simplifie», par exemple, est de ceux-là.

Deuxième test :

Les deux dernières colonnes mettent en lumière les obstacles que constituent pour un grand nombre d'élèves (35%) les calculs numériques faisant intervenir les nombres fractionnaires où figurent des lettres.

Conclusion partielle :

On peut affirmer que les inquiétudes émises concernant les lacunes préjudiciables quant aux connaissances de base du calcul ne sont pas sans fondement. Elles correspondent à une réalité de notre enseignement dont il faut tenir compte.

Prolongement.

Dans le prolongement de cette enquête, il serait intéressant de savoir ce qui peut créer une telle situation. Comment se fait-il, en effet, qu'après tant d'efforts déployés, après avoir multiplié les exemples, contre-exemples, démonstrations, il se trouve encore 25% des élèves environ qui continuent à commettre ces mêmes erreurs?

- a) Considérons par exemple l'écriture $\frac{2+x}{3+x} = \frac{2}{3}$; on a espéré convaincre les élèves qui persistent par plusieurs méthodes :
- rappels sur multiplication et addition
 - démonstration
 - contre-exemples.

Cependant, alors qu'ils semblent convaincus, les élèves récidivent quelques jours ou semaines plus tard.

Nous avons pris au sérieux cette erreur, en essayant de cerner les raisons qui conduisent l'élève à ce calcul faux. Bien évidemment, il y a des restes de confusion entre addition et multiplication, mais là n'est plus l'essentiel (troisième, seconde). Le calcul effectué par les élèves ne relève pas de la seule fantaisie, il s'appuie sur des connaissances - les leurs découlent de leurs observations, de leur expérience restreinte - qui joue le rôle d'obstacle. Pour illustrer cette idée, nous pensons que, par exemple, dans le cas présenté plus haut, les relations du type ci-dessous peuvent jouer ce rôle :

$$\Rightarrow \frac{a+x}{a+x} = \frac{a}{a}$$

$\Rightarrow$ ou bien $(a+x) - (b+x) = a - b$ (conservation de la différence).

b) On observe le même type d'erreur dans l'exercice «d'agrandissement». Proposons aux élèves d'une classe de Troisième d'agrandir une photo rectangulaire dont les dimensions, en cm, sont 4 et 2, de telle sorte que la grande dimension soit 7. Demandons une réponse spontanée, immédiate. On obtient :

$\Rightarrow$ la petite dimension est 5, car on passe de 4 à 7 en ajoutant 3, donc on ajoute 3 à la petite dimension 2.

$\Rightarrow$ la petite dimension est 3 car on passe de 4 à 7, en multipliant 4 par 2 et en retranchant 1 d'où : $2 \times 2 - 1 = 3$.

⇒ la petite dimension est 3,75 car on passe de 4 à 7 par $4 \times \frac{7}{4} = 7$, d'où

$$2 + \frac{7}{4} = 3,75$$

⇒ Enfin, des réponses exactes, les plus nombreuses : Pour passer de 4 à 7 on ajoute 3, donc pour 2 qui est la moitié de 4, on ajoute 1,5. La petite dimension est $2 + 1,5 = 3,5$.

c) Dans le même ordre d'idée, le théorème de Thalès est souvent interprété sous la forme suivante :

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$, comme $OA = OB$ et $OA' = OB'$, ce qui est vrai lorsque OAB est isocèle.

d) Pour essayer d'emporter la conviction des élèves, on peut alors avoir recours à quelques observations.

⇒ Pour le problème d'agrandissement, en utilisant un repère

(AA') a pour coefficient directeur 1

(OA) a pour coefficient directeur 1/2.

Or la proportionnalité des dimensions des rectangles équivaut à l'alignement des points O, A, A' .

D'où (OA') a pour pente 1/2 ; le petit côté est $7 \times \frac{1}{2} = 3,5$.

⇒ Pour l'erreur $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$, on peut faire remarquer que si on ajoute une

même longueur aux côtés OA et OB d'un triangle AOB , sa forme n'est pas conservée sauf dans le cas du triangle isocèle.

III-TESTS PORTANT SUR LES FACTORISATIONS, LES DÉVELOPPEMENTS

On constate encore en début de seconde des erreurs portant sur les priorités opératoires et les fausses implications, ainsi, par exemple, dans une classe de seconde, 8 élèves sur 26 échouent lorsqu'ils sont confrontés à la question suivante : «Simplifier l'écriture $x^2 + x - 3x(1 + 2x)$ », posée quelques jours après la rentrée de septembre 1991.

Nous avons poursuivi notre enquête statistique, en proposant deux fiches d'exercices, les élèves ayant une heure pour répondre aux questions (ce qui fait une moyenne de six minutes de réflexion par colonne). Voici l'une d'entre elles.

FICHE

Dans le tableau suivant, chaque colonne débute par une expression. Entoure la ou les expressions figurant dans la colonne concernée qui lui sont égales, pour n'importe quelles valeurs de x , y , z .

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$xy - y$	$y^2 y$	$3x^2 - (2x)^2$	$xy + x - 3x(y+1)$	$(5x - y)^2$
0	$(y - 1)y$	x^2	$-xy - 2x$	$25x^2 - y^2$
x	$-y^3$	$5x^2$	$x^2y - 3x(y+1)$	$5x^2 - y^2$
$x - 1$	$-3y$	$7x^2$	$-2xy + x + 1$	$(5x - y)(5x + y)$
$y(x - 1)$	y	$-x^2$	$-2x(y + 1)$	$5x^2 - 10xy + y^2$
$xyz - yz$	$2y^2 - 2y$	$-12x^4$	$-2x - 2xy$	$25x^2 - 10xy + y^2$

Résultats (93 élèves testés).

	Colonne 1		Colonne 2		Colonne 3	
Juste	85	91%	84	90%	82	88%
Une erreur seulement	6	6%	5	5,5%	8	8,5%
Plus d'une erreur	2	3%	4	4,5%	3	3,5%
	Colonne 4		Colonne 5			
Juste	77	82%	79	825%		
Une erreur seulement	11	12%	10	10,7%		
Plus d'une erreur	5	6%	4	4,3%		

Commentaires:

A l'examen des résultats, il se confirme que la présence des dénominateurs, y compris lorsqu'ils ne sont pas numériques, est une source de difficulté. Les fractions sont redoutées des élèves. Bonne réussite pour les factorisations.

Plus généralement, nous rappelons ici quelques idées qui nous semblent d'actualité et illustrées par les résultats mentionnés plus haut :

a) Il ne suffit pas de répéter indéfiniment les mêmes arguments pour éliminer

une erreur.

b) Rien n'est trop simple pour un débutant (une situation trop riche n'est pas nécessairement motivante). Ce qui ne motive pas un élève, à coup sûr, c'est de ne pas comprendre et d'échouer.

c) Prendre du temps pour que l'élève transforme la connaissance apportée en un savoir suffisamment ancré.

d) Plus on apporte de connaissances et d'outils, plus on réduit le temps d'apprentissage à une utilisation convenable de chacun d'eux.

IV-TESTS PORTANT SUR LES INÉQUATIONS

Nous avons poursuivi cette enquête par deux fiches de tests sur les inéquations. Pourquoi les inéquations ? Parce que les méthodes y sont moins décelables, les mécanismes de résolution moins bien huilés, les connaissances sur les équations y sont le plus souvent inopérantes et peuvent même y jouer le rôle d'obstacle.

Nous avons proposé deux fiches d'exercices, conçus sur le même principe que les précédentes. Les élèves ont eu cinquante minutes pour répondre.

FICHE N°1

1) Dans la première colonne, entoure les nombres qui sont solutions de l'inéquation de la première ligne.

2) Dans la deuxième colonne, entoure les inéquations qui ont les mêmes solutions que celles de la première ligne.

3) Dans la troisième colonne, barre les inéquations qui ne peuvent servir à résoudre l'inéquation de la première ligne.

(1)	(2)	(3)
$2x - 3 \geq 1$	$-x + 4 \leq -1$	$5x + 3 \geq -15$
3	$-x + 5 \leq 0$	$5x \geq -15 - 3$
-1	$-x + 4 \geq 1$	$5x \geq -18$
924	$-1 \geq 4 - x$	$x \geq -18 - 5$
10^4	$x - 4 \leq 1$	$x \geq -18/5$
2	$-x \leq -5$	$5x \geq 15 - 3$
1,99	$x \leq 5$	$x + 3 \geq -3$
-10^{-4}	$x \geq 5$	$8x \geq -15$

Résultats (153 élèves testés).

	Colonne 1		Colonne 2		Colonne 3	
Juste	28	18%	35	23%	140	91%
Une erreur (*)	118	77%	49	32%	0	0%
Plus d'une erreur	7	4,5%	69	45%	13	8,5%

(*) C'est le cas de -10^{-4} qui entraîne ce fort pourcentage, ce qui vient confirmer les résultats des tests précédents où figurent déjà les puissances.

FICHE N°2

Une seule colonne correspond à la résolution juste de l'inéquation :

$$-6x - 5 \geq -23.$$

Dans les autres colonnes, barre l'étape fausse.

(1)	(2)	(3)	(4)
$-6x \geq -23 - 5$	$-6x \geq -23 + 5$	$-6x \geq -23 + 5$	$-6x - 23 + 5$
$-6x \geq -28$	$-6x \geq -28$	$-6x \geq -18$	$-6x \geq -18$
$x \leq -28/-6$	$x \leq -28/-6$	$x \leq -18/-6$	$x \leq -18/-6$
$x \leq 14/3$	$x \leq 14/3$	$x \leq 3$	$x \leq 3$

Résultats (153 élèves testés)

Identification de la bonne colonne :	99	(65%)
Etapas fausses non reconnues :	39	(25,5%)
N'ont pas compris l'énoncé :	15	(9,5%).

V-EN GUISE DE CONCLUSION

Il s'avère que les impressions dont nous parlions dans l'introduction ne sont pas des illusions et ne relèvent pas de l'exagération. On peut dire qu'en fin de Troisième, un élève sur cinq ne maîtrise pas - loin s'en faut - le calcul algébrique élémentaire. Ce sont ces élèves qui arrivent en Seconde indifférenciée.

La géométrie est devenue prédominante dans les nouveaux programmes, mais il ne faut pas négliger pour autant les calculs numériques. C'est en agissant que l'on comprend, sans doute, mais pas n'importe quelle action, et il est bien illusoire de faire des mathématiques sans connaître les mécanismes premiers du calcul algébrique élémentaire. Pour autant, il faut sans doute se méfier de tout apprentissage de stéréotypes : s'ils permettent de résoudre les exercices immédiats, ils risquent aussi de devenir à long terme, des obstacles à l'acquisition de nouveaux savoirs. Les mécanismes sont indispensables, ils ne doivent pas pour autant devenir des objectifs privilégiés.

ÉTUDE DES FONCTIONS AU COLLÈGE

Annie BOUDOT, Monique GRÉGOIRE

Collège de Montcenis (71)

Michel MOREAU

Collège de La Clayette (71)

Dans les programmes de 6^{ème} à 3^{ème}, la notion de fonction apparaît dans le chapitre «*Gestion de données*». L'objectif se borne pratiquement à des expérimentations de cette notion : il s'agit d'appréhender le fait que certaines grandeurs *dépendent* d'autres grandeurs (...varient en fonction de ... sont en relation avec ... etc ... - Voir Annexe 1).

Il faudra, en dernier lieu, comprendre, voire utiliser, l'expression proprement mathématique : ...«est fonction de» ...

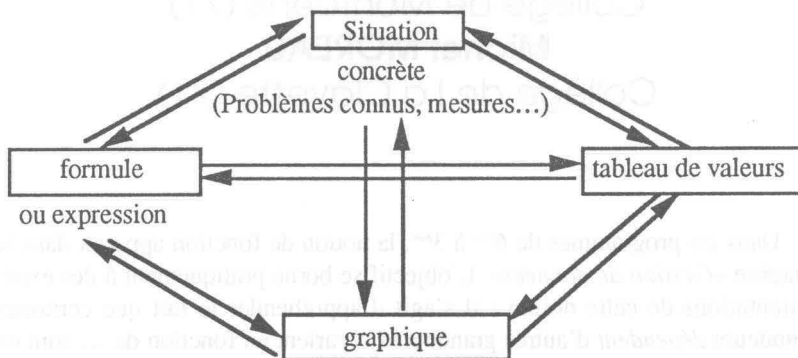
On abordera ainsi tout le calcul algébrique (nous noterons ici, pour simplifier, y la fonction et x la variable (Cf l'introduction de ces lettres dans l'annexe 2) :

- trouver y pour x donné (calcul numérique)
- trouver x pour y donné (équations)
- écrire y en fonction de x (mathématisation d'un problème)
- simplifier une expression (calcul littéral).

L'étude des fonctions linéaire et affine apparaît, mais il s'agit plus d'acquérir des techniques de calcul que d'une véritable étude mathématique, qui sera abordée au lycée.

Les programmes stipulent que les fonctions étudiées seront tirées de situations concrètes. N'y a-t-il pas contradiction avec l'étude, en 4^{ème}, de la fonction $y = -3x$ (dont on peut chercher longtemps une expression concrète) et l'«introduction prudente», en 3^{ème} de la notation $f(x)$? Ou doit-on lire ces deux points comme une ouverture à une vision plus abstraite de la notion de fonction?

La notion de fonction au collège peut être abordée à partir de quatre pôles ; l'objectif est de savoir passer (quand c'est possible et dans les limites du programme) d'un pôle à l'autre, dans tous les sens. Ce que l'on peut résumer ainsi :



Nous exposerons, au niveau de chaque classe, ce qui a été expérimenté, après une étude approfondie du programme :

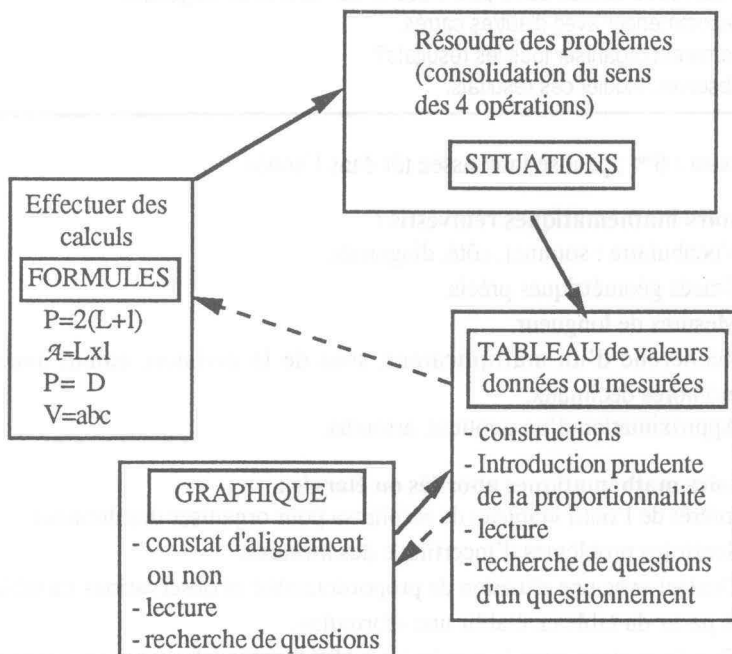
- «les passages d'un pôle à l'autre» étudiés,
- les activités proposées pour travailler tel ou tel «passage»,
- les savoirs formalisés,
- ce qui peut être abordé sans être formalisé.

Sixième

Points du programme abordés :

Les formules ; le périmètre du cercle : mesure → tableau → formule.

- à acquérir en 6ème
- - -→ à aborder



Autres activités possibles :

- longueur de la diagonale du carré
- lectures de tableaux et graphiques.

Rien à formaliser.

Activités présentées :

- 6.1 - Diagonale du carré.
- 6.2 - Périmètre du cercle.

LA DIAGONALE DU CARRÉ

Document-élève et consignes :

- Tracer avec soin un carré puis mesurer son côté et sa diagonale.
- Recommencer avec d'autres carrés.
- Comment organiser tous les résultats?
- Observer, étudier ces résultats.

Niveau : 6^{ème} ; peut se faire assez tôt dans l'année.

Savoirs mathématiques réinvestis :

- ◆ Vocabulaire : sommet, côté, diagonale.
- ◆ Tracés géométriques précis.
- ◆ Mesures de longueur.
- ◆ Recherche d'un multiplicateur, sens de la division, calcul avec des nombres décimaux.
- ◆ Approximation d'un quotient, arrondis.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- ◆ Intérêt de l'outil «tableau de résultats» pour organiser des données.
- ◆ Sentir les problèmes d'incertitude des mesures.
- ◆ Contact avec une situation de proportionnalité et observations du tableau.
- ◆ A partir du tableau, établir une «formule».
- ◆ Familiarisation avec le vocabulaire «En fonction de ...», «est proportionnelle à ...».
- ◆ Exprimer un «lien», une relation entre des mesures de grandeurs.
- ◆ Utiliser une formule.

Durée : environ 2 heures.

Déroulement et observations :

- ◆ Peu d'élèves pensent à utiliser un tableau. On les y invite.
- ◆ On obtient des observations du type «quand le côté double, la diagonale double» :

c	0,5	1
d	0,7	1,4

cela amène une discussion sur les incertitudes de mesures : «le trait est entre 2mm...», «épaisseur des traits».

- ◆ On recherche un «lien», une relation entre c et d . Les élèves proposent de trouver un opérateur.

On recherche les multiplicateurs.

c	multiplicateur	d
5	$\times \dots\dots\dots =$	7
3	$\times \dots\dots\dots =$	4,3

La question se pose de l'arrondi. On trouve 1,4 1,42 1,41 etc... On obtient un même multiplicateur en arrondissant à 1/10 près.

- ◆ Certains résultats sont en contradiction avec les autres ; un retour aux mesures règle le problème.
- ◆ On explicite la relation trouvée. Exprimer la diagonale en fonction du côté. Ecriture d'une «formule» : *Diagonale* $\approx$ côté $\times$ 1,4 ; $d \approx c \times 1,4$.
- ◆ On pose quelques problèmes pour faire fonctionner cette formule.
Côté 25 cm, quelle diagonale? Diagonale du carré, quel côté?

6.2

LONGUEUR DU CERCLE

Document-élève et consignes :

- Vous avez à votre disposition :
plusieurs objets de forme cylindrique, de diamètre varié,
des bandes de papier ou de la ficelle.
- Pour chaque objet, vous devez
mesurer le diamètre (par quelle méthode?),
mesurer le «tour» de l'objet, c'est-à-dire la longueur du cercle de base
(par quelle méthode?),
présenter vos résultats dans un tableau,
rechercher des particularités de ce tableau de valeurs.

Niveau : 6^{ème}

Savoirs mathématiques réinvestis :

- Usage des instruments de mesures.
- Recherche de multiplicateurs, sens de la division.

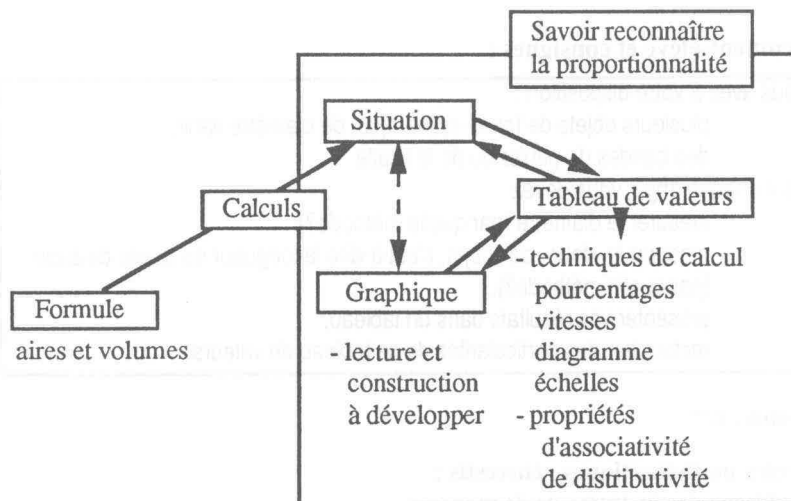
Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- ◆ Effectuer des mesures.
- ◆ Construire un tableau de résultats.
- ◆ Usage de la calculatrice, arrondi d'un résultat.
- ◆ Notion de proportionnalité.
- ◆ Mise en place d'une formule.

Déroulement et observations :

- ◆ Chaque élève devait apporter une ou deux boîtes ronde pour cette activité.
- ◆ Chaque élève a pu réaliser environ 6 mesures différentes.
- ◆ Les recherches de multiplicateurs (divisions) sont à faire à la calculatrice.
- ◆ Un premier examen des résultats permet de repérer les erreurs de mesures ou de calculs et de les refaire.
- ◆ Chaque élève donne la moyenne de ses résultats, ses valeurs moyennes étant écrites au tableau de la classe, la valeur du nombre «PI» est assez bien approchée.
- ◆ La formule est alors écrite sous forme littérale.
- ◆ Cette activité se prolonge par des exercices d'utilisation de cette formule.

Cinquième



Activités nombreuses :

Exemples et contre-exemples de situations de proportionnalité :

- ◆ problèmes connus (vitesses, prix, etc...),
- ◆ formules d'aires, de volumes, ...
- ◆ reproductions,
- ◆ tableaux de nombres.

Formaliser :

- ◆ ce qu'est un tableau de proportionnalité
- ◆ le lier avec le graphique
- ◆ techniques de calcul :
 - dans les tableaux de proportionnalité
 - dans les expressions numériques.

Activités proposées :

- 5.1 - Triangles et plans
- 5.2 - Où l'on plie, on ...

TRIANGLES ET PLANS

Document-élève et consignes :

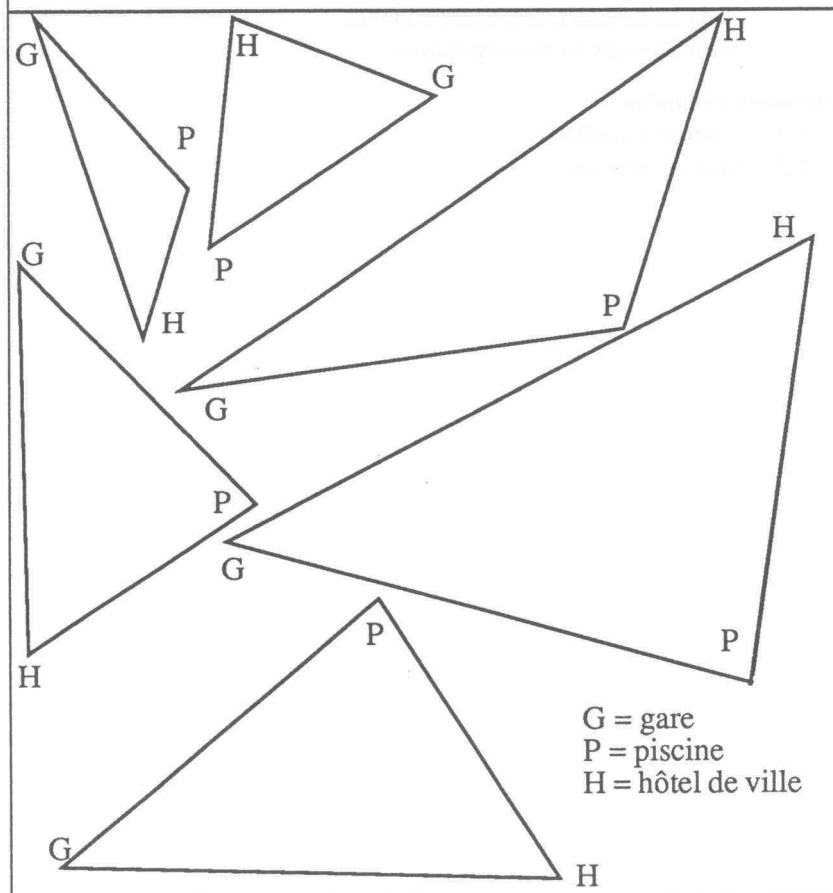
Voici quelques distances relevées dans une ville (à vol d'oiseau).

Gare-Hôtel de Ville : 1,2km

Gare-Piscine : 1km

Piscine-Hôtel de Ville : 800m

Voici des plans de cette ville. Quels sont les plans corrects .



Niveau : 5^{ème}.

Savoirs mathématiques réinvestis :

- ♦ Conversions (éventuellement)
- ♦ Utilisation de tableaux pour comparer des longueurs.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- ♦ Découvrir et redécouvrir la notion de proportionnalité à travers une activité de reproduction.

Déroulement et observations :

- ♦ *Vécu de l'activité* : beaucoup de notions abordées :
 - problème des conversions, indispensables ou non,
 - notion de forme, liée aux angles,
 - idée de tableau pour comparer les longueurs réelles et les longueurs sur le plan,
 - idée de diviseur ou d'opérateur, liée ou non à celle d'échelle.
- ♦ *Formalisation* :
 - nécessité, pour récolter des résultats, de faire des tableaux,
 - lien entre forme, angles et longueurs proportionnelles,
 - tableaux de proportion avec opérateurs.
- ♦ *Suite* : beaucoup de petits problèmes divers avec proportionnalité ou non.

5.2

ON PLIE, ON COUPE, ON COLLE ...

Document-élève et consignes :

Texte donné :

Mesure la feuille à découper.

Inscris les résultats dans le tableau (rectangle 1).

Partage la feuille en deux dans le sens de la largeur.

Mesure la largeur et la longueur du nouveau rectangle.

Inscris les résultats dans le tableau (rectangle 2).

Colle une des moitiés de ta feuille en faisant coïncider les bords.

Avec l'autre moitié, recommence l'opération : mesurer, noter les résultats, coller.

Continue l'opération plusieurs fois.

Etudie le tableau.

Etudie la manière dont les coins des feuilles collées se placent.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis.

- ◆ Lier la notion de proportionnalité au fait que les points du graphique correspondant sont alignés avec l'origine.

Savoirs mathématiques réinvestis :

- ◆ Proportionnalité dans un tableau.

Niveau : 5^{ème}.

Déroulement et observations :

- ◆ Les élèves travaillent deux par deux.
- ◆ A chacun est donnée une feuille A4 de résultats.
- ◆ La feuille à découper est, pour l'un une feuille A4, pour l'autre une feuille format écolier.
- ◆ Les élèves voient très vite que les coins de la feuille A4 sont alignés sur la diagonale de la feuille de résultats, alors que pour la feuille de format écolier, cela «ne marche pas».
- ◆ Ils constatent que, pour la feuille A4, le tableau est à peu près de proportionnalité (l'erreur venant de l'imprécision des mesures), alors que pour la feuille de format écolier, il n'y a pas proportion.
- ◆ Certains groupes remarquent même que, pour cette feuille, les coins se répartissent sur deux droites partant de l'origine.
- ◆ On remarque avec toute la classe que les «coins» sont les points représentatifs du tableau.
- ◆ On relie les deux propriétés.
- ◆ Tableau «idéal» des largeurs et longueurs des rectangles : on constate que le premier est un tableau de proportion et le second n'en est pas un.
- ◆ Graphique correspondant, sur papier millimétré.

Formalisation :

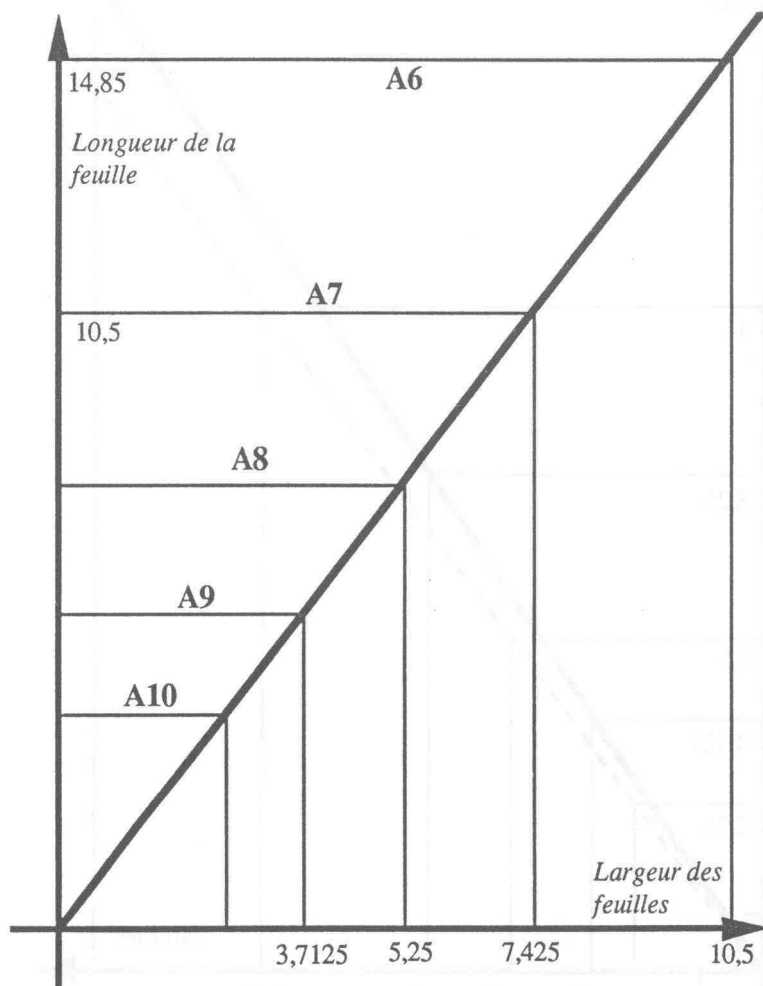
- ◆ Ecriture de la propriété du graphique correspondant à un tableau de proportion.

Suite :

- ◆ Reprise des petits problèmes faits auparavant, avec les graphiques, et vérification de la propriété.

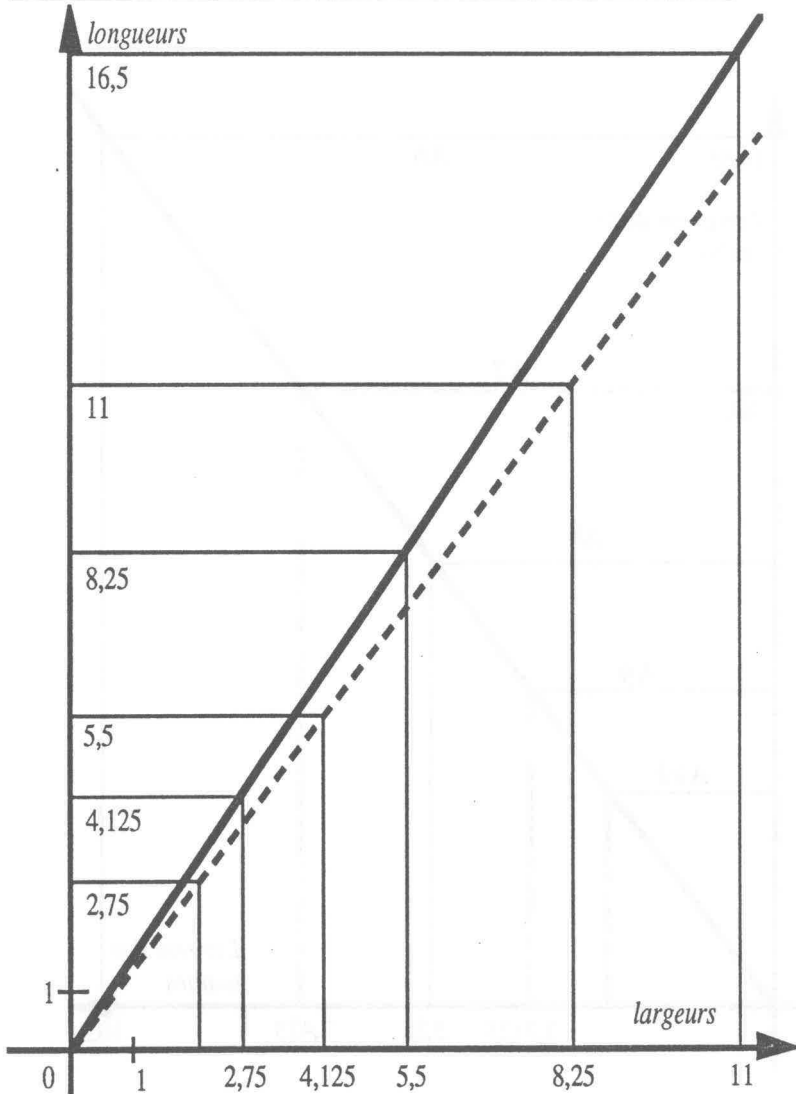
Format des feuilles normalisées.

Largeur	21	14,85	10,5	7,425	5,25	3,7125
x	1,41...	1,41..	1,41...	1,41...	1,41...	1,41...
Longueur	29,7	21	14,85	10,5	7,425	5,25



Feuille format écolier.

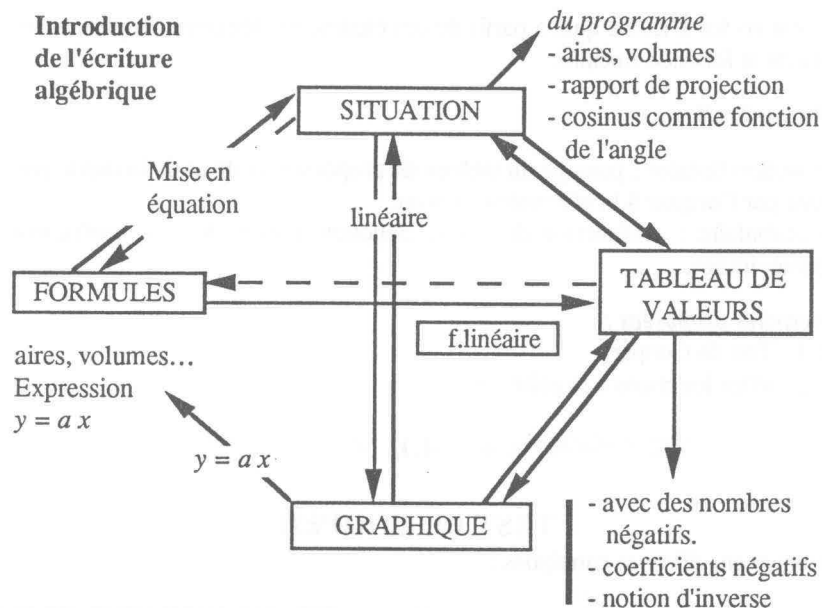
Largeur	16,5	11	8,5	5,5	4,2	2,75	2,1
x	1,33...	1,5	1,22...	1,5	1,33...	1,5	1,33...
Long	.22	16,5	11	8,25	5,5	4,2	2,75



Quatrième

(codage des flèches pzage 15).

- La proportionnalité est en bonne voie d'acquisition.
- On introduit la notion de fonction linéaire.
- On généralise aux nombres relatifs - ce qui est source de difficulté - (cf. Annexe 2).
- On cherche à écrire une valeur en fonction d'une autre ; le calcul littéral se généralise : c'est le passage délicat d'un nombre à la lettre (Cf. Annexe 3).



Pour la fonction linéaire, le passage entre les 4 pôles est seulement en cours d'acquisition.

Activités :

En traitant le programme de 4^{ème}, on peut mettre en évidence un certain

nombre de fonctions ; ce sont des occasions de familiariser les élèves avec cette notion :

- cosinus comme opérateur de la projection orthogonal
- utilisation de la propriété de Pythagore
- repérage sur la sphère
- polygones réguliers :
 - angles en fonction du nombre de sommets
 - aire en fonction du nombre de côtés, etc...
- calcul littéral
- résolutions de problèmes aboutissant à des équations
- relation $d = vt$; pourcentages
- introduction de la multiplication des relatifs.

C'est en fin d'année que, à partir de ces études, on dégagera les particularités de la fonction linéaire.

Formalisation :

Fonction linéaire ; passage du tableau de proportionnalité et de la droite passant par l'origine à la « formule » : $y = ax$.

Vocabulaire : ...«fonction de ...» «...fonction linéaire de ...», coefficient, pente, image.

Activités proposées :

4.1 - Test de Cooper.

4.2 - «Des fonctions à la pelle...».

4.1

TEST DE COOPER

Document-élève et consignes :

Le test de Cooper consiste en une course à pied de 12 minutes au cours de laquelle le sujet doit parcourir la plus grande distance possible. D'après la distance parcourue, l'âge et le sexe de la personne, on parvient ainsi à déterminer sa condition physique puis à déterminer un programme d'entraînement adapté à chacun.

Pour ce test, vous avez parcouru un circuit de 200 m un certain nombre de fois. Le temps est chronométré (noté à la fin de chaque tour).

Voici un relevé des temps de passage d'un élève, Yves, en fonction du nombre de tours :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t	0:41	1:42	2:21	3:21	4:13	5:08	6:0	6:58
n	9	10	11	12	13			
t	7:53	8:45	9:43	10:32	11:27			

Attention! L'écriture 3:21 utilisée ici n'est pas celle d'un nombre décimal. Elle signifie 3 min 21 s.

1) REPRESENTATION GRAPHIQUE

On veut construire la représentation graphique de la distance parcourue en fonction du temps :

- en abscisse, on porte le temps (2 cm pour 1 minute) ;
- en ordonnée, on porte les distances (1 cm pour 200 m).

Place les points correspondants aux données du tableau.

Relie ces points par des segments de droite.

2) VITESSE MOYENNE

Quelle est la distance totale parcourue ? En combien de temps ? Exprime ce temps en secondes. Quelle est la distance parcourue «en moyenne» en une seconde ? Ce résultat donne la vitesse moyenne en m/s.

Calcule la distance parcourue en 1 minute, c'est la vitesse moyenne en m/min.

Calcule la distance parcourue «théoriquement» en 1 heure ; exprime cette distance en km, c'est la vitesse moyenne en km/h.

3) VITESSE MOYENNE POUR UN TOUR

A l'aide du tableau du début, calcule la durée en seconde de chaque tour. Quel a été le tour le plus rapide ? Quel a été le tour le plus lent ? Calcule pour chacun d'eux la vitesse moyenne en m/s. Repasse en rouge sur le graphique les segments correspondants à ces deux tours. Explique comment la variation de la vitesse est visible sur le graphique.

4) COURSE IDEALE

En reprenant le tableau du début, calcule la durée moyenne pour un tour. Supposons que l'élève ait une course parfaitement régulière, refais le tableau des temps de passage en prenant pour chaque tour la durée que tu viens de calculer.

Trace la représentation graphique de cette «course idéale», sur la même feuille que précédemment. Que constates-tu ?

Niveau : 4^{ème}.

Savoirs mathématiques réinvestis :

- Opérations sur des durées et changement d'unités.
- Calcul de vitesse et changement d'unités.
- Construction de graphiques.

Durée : 3 heures.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- Construction et interprétation d'un graphique (pente) ;
- Passage d'un graphique expérimental (relevé de valeurs) à un graphique théorique (course idéale).

Remarque :

On peut faire le même travail en demandant à chaque élève d'utiliser ses résultats personnels, le test de Cooper ayant été effectué en cours d'EPS, l'activité est alors plus motivante pour les élèves mais plus difficile à gérer pour l'ensemble de la classe.

Déroulement et observations :

- Au cours de la première séance (2 h) les élèves, par groupes de 4, ont construit le graphique et réalisé les calculs de vitesses.
- Cette première partie a été terminée à la maison si nécessaire.
- Au cours de la seconde séance (1h), après une mise au point collective sur les vitesses, les élèves ont construit le graphique de la «course idéale» et l'ont comparé au précédent.

4.2

DES FONCTIONS

Document-élève et consignes :

I - Nous avons, au cours de l'année, rencontré des «grandeurs» (y) qui étaient fonctions d'autres «grandeurs» (x), en voici quelques exemples :

y en fonction de x

- | | | |
|---|----------------------------------|------------------------|
| 1 | aire d'un carré | côté du carré |
| 2 | périmètre d'un disque | diamètre du disque |
| 3 | prix d'un volume d'essence | volume acheté(5,15F/L) |

- 4 cosinus d'un angle mesure de cet angle
 5 âge de Daniel âge de Valérie
 (sachant que Daniel avait 15 ans lorsque Valérie est née)

- Pour chaque exemple réponds aux trois questions suivantes :

- y est-il proportionnel à x ?
- écris y en fonction de x (formule)
- la représentation de y en fonction de x est-elle une droite ?

II - Voici cinq autres formules qui permettent de calculer un nombre y à partir d'un nombre x :

6 $y = 7x$

7 $y = x - 9$

8 $y = -5x$

9 $y = 3(x + 2)$

10 $y = \sqrt{x}$

- Pour chaque exemple réponds aux deux questions suivantes :

- y est-il proportionnel à x ?
- la représentation graphique est-elle une droite ?

Niveau : 4^{ème} , en fin d'année.

Savoirs mathématiques réinvestis :

- Proportionnalité.
- Construction de graphiques.
- Autres notions rencontrées au cours de l'année (cos, racine carrée).

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- Définir la notion de fonction linéaire.

Déroulement et observations :

- Cette activité n'est pas un travail fait en classe à une date précise, les exemples cités (1 à 5) ont été rencontrés au cours de l'année à l'occasion d'autres activités ou d'autres exercices.
- Il est parfois nécessaire de refaire un tableau de valeurs pour répondre à la question a).
- La mise en commun des réponses permet de rappeler les signes qui indiquent une situation de proportionnalité.
- Pour les exemples 6 à 10, les élèves construisent des tableaux de valeurs puis des graphiques.
- La comparaison des graphiques obtenus avec ceux de la première série

- permet de mettre l'accent sur la relation $y = a.x$, avec quelques difficultés.
- Pour les exemples 6 à 9, les nombres x et y peuvent être négatifs ; ils ne traduisent plus des grandeurs.
 - Pour l'exemple 8, y est fonction décroissante de x . On ne peut plus dire que y est proportionnel à x .
 - Ces deux remarques obligent à adopter un nouveau langage « y est une fonction linéaire de x ».

Troisième

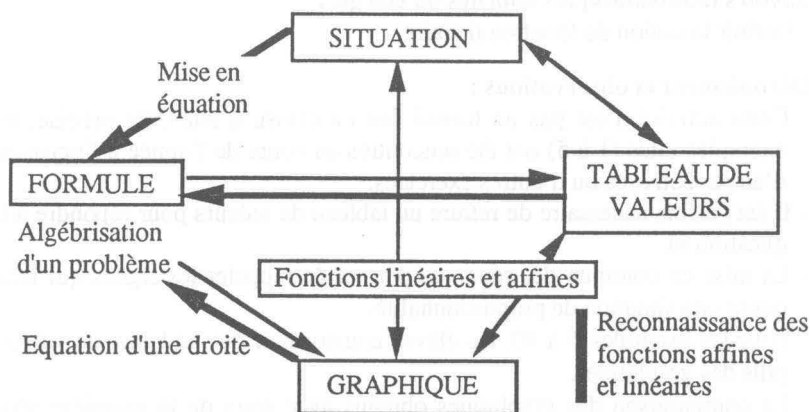
L'utilisation du calcul littéral se généralise, avec une utilisation de plus en plus grande des lettres, qui deviennent objets de calculs.

Le passage entre les quatre pôles devrait pouvoir se faire, en fin d'année, dans tous les sens - au moins pour les cas simples.

Début d'une étude approfondie des fonctions linéaires et affines dont les techniques de calcul doivent être maîtrisées.

Activités nombreuses dans lesquelles on fait apparaître l'outil puissant qu'est le graphique pour certains problèmes dont les modèles ne sont pas encore disponibles.

On a souligné dans ce schéma les liens nouveaux à acquérir ou en cours d'acquisition :



Activités :

En traitant le programme de 3^{ème}, on utilisera au maximum la notion de fonction :

- aire, volume du cône et de la pyramide,
- angles inscrits dans le cercle,
- sinus-tangente,
- grandeurs quotients - grandeurs produits,
- fonction affine,
- résolution graphique de problèmes,
- Thalès - agrandissement, etc...
- etc...

Formalisation :

Fonction affine - Equation d'une droite - Systèmes d'équations à deux inconnues.

Activités proposées :

- 3.1 - Course en taxi
- 3.2 - STOP...

3.1

LA COURSE EN TAXI

Document-élève et consignes :

Jean a pris le taxi pour un petit déplacement, pour 3 km. Il a payé 22 F. Ses amis ont également pris le même taxi, pour des trajets plus longs. Ils ont payé plus cher

- pour 8 km, François a payé 42 F
- pour 12 km, Hélène a payé 58 F
- pour 24 km, Lucie a payé 1056 F
- pour 36 km, Philippe a payé 154 F
- pour 42 km, Myriam a payé 178 F.

Il s'agit de trouver le mode de calcul du prix de la course.
Comment prévoir le prix pour 29 km ?
Et avec 38 F, combien fait-on de km ?

Niveau : 3^{ème}, avant d'avoir abordé la notion de fonction affine.

Savoir mathématiques réinvestis :

- Reconnaissance des situations de proportionnalité ; fonctions linéaires.
- Traduire des données par un graphique.
- Exploitation d'un graphique, lecture.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- Découverte d'une fonction non linéaire par mise en défaut du modèle linéaire.
- Intérêt des études graphiques pour exploiter une situation.
- Comprendre le procédé «fonction affine» (montant fixe + montant proportionnel).
- Découvrir la propriété de proportionnalité des accroissements.

Durée : Environ 3 heures avec la formalisation.

Déroulement et observations :

- Les élèves, spontanément, essaient le modèle linéaire et constatent son inadaptation. (Données disposées en tableau, recherche de multiplicateur...)
- Certains groupes d'élèves essaient de représenter graphiquement. On peut souffler l'idée aux autres groupes. On observe facilement l'alignement, et les élèves, à ce niveau, utilisent facilement l'observation pour répondre aux 2 questions précises (prix pour 29 km et combien de km pour 38 F).
- Le graphique obtenu semble le seul moyen trouvé pour déterminer un prix.
- Le professeur propose alors une étude numérique.
Par rapport à Jean, les amis ont tous parcouru des km supplémentaires et ont payé un supplément de prix.
On demande d'étudier les suppléments de prix en fonction des suppléments de km.
- Les élèves construisent sans problème un tableau, reconnaissent le modèle linéaire. Les deux questions finales sont cette fois résolues par un calcul et on obtient des valeurs exactes.
- Un moment d'échanges ou de discussion dans les groupes est nécessaire pour qu'apparaisse la réponse à la question générale «trouver le mode de calcul...».
- On pourra ensuite travailler sur l'expression d'une fonction affine $y = ax + b$, et sur la signification et la recherche des nombres a et b .

STOP!

Document-élève et consignes :

La distance de freinage d'une voiture est la distance parcourue par cette voiture entre le moment où le freinage est amorcé et l'arrêt complet de la voiture.

On a le tableau suivant :

Vitesse, V (en km/h)	20	40	60	80	100	120
Distance de freinage, F , (en m)	3	11	25	45	70	101

En fait, pour obtenir dans les conditions normales (météorologiques, état des routes, état du véhicule,...) la distance d'arrêt D , d'un véhicule en fonction de sa vitesse, il faut ajouter à la distance de freinage F , vue précédemment, une distance de réaction.

La distance de réaction, R , est définie comme étant la distance parcourue par le véhicule entre l'instant où le conducteur perçoit l'obstacle et l'instant où il commence à freiner. Le décalage de temps intervenant ici est appelé temps de réaction ; ce temps de réaction est en moyenne de 0,6 secondes pour un conducteur «normal» et de 1,8 seconde pour un conducteur «en état d'ébriété».

Sur route mouillée, les distance de freinage augmentent de 30%.

- Quelle relation existe-t-il entre : la distance de freinage, la distance d'arrêt, la distance de réaction ?
- Je souhaite connaître la distance d'arrêt pour un véhicule conduit par un conducteur «normal», sur une route mouillée, à n'importe quelle vitesse.

Niveau : 3^{ème}

Savoirs mathématiques réinvestis :

- Calculs des vitesses, des pourcentages.
- Construction de graphiques.

Savoirs mathématiques abordés ou élargis :

- Résoudre un problème à l'aide d'un graphique.

Durée : 3 heures.

Déroulement et observations :

Pour la première question posée, les élèves ont fait une recherche individuelle, cette question ayant pour but d'aider les élèves à prendre connaissance du texte.

La suite a été faite en groupes de quatre élèves.

Le texte ne donnant aucune précision sur la vitesse à utiliser, les élèves ont fait le choix d'une valeur du tableau et mis en place une technique de calcul de D pour cette vitesse de leur choix.

- A la fin de la première séance (1h), cette étape était franchie pour tous les groupes.

- A la séance suivante (2h), nous avons fait une correction collective de cette première étape, et précisé quelques techniques de calculs :

passage des km/h aux m/s

augmentation de 30% en multipliant par 1,3.

- Le travail a ensuite repris en groupes avec les objectifs suivants :

- 1) Calculer les distances d'arrêts pour les autres vitesses du tableau donné ;
Organiser ces calculs, présentation en tableaux ;
- 2) Déterminer les distances d'arrêt aux vitesses de mon choix : 25 km/h, 50 km/h, 75 km/h. Pour cela, construire une représentation graphique.

CONCLUSION

Par cette étude sur l'acquisition de la notion de fonction au collège, par l'expérimentation - malheureusement partielle - que nous avons pu faire sur chaque niveau, nous avons perçu combien elle était fondamentale en Mathématiques. Elle doit apparaître le plus souvent possible, en abordant beaucoup de points du programme, et dans d'autres activités, qu'elles soient de découverte ou de réinvestissement.

Ces activités nous semblent particulièrement riches par le fait qu'elles abordent un problème dans plusieurs cadres : numériques, littéraux, gra-

priques. Elles peuvent avoir des supports variés : situations concrètes, figures géométriques, gestion de données, etc,..., ce qui, d'après les études didactiques, est fondamental pour l'acquisition de nouveaux savoirs à travers les activités.

Deux charnières nous semblent particulièrement importantes :

- l'acquisition de la notion de proportionnalité, commencée dès le primaire et qui devrait être maîtrisée en 5^{ème} ;
- L'acquisition progressive de l'algébrisation des problèmes, avec tout le calcul littéral, à partir de situations d'abord bien concrètes puis de plus en plus abstraites. Cette démarche devrait s'effectuer pendant tout le temps du collège, mais il ne nous semble pas évident que tout élève en fin de collège la maîtrise complètement. Le fait de généraliser, dès la 4^{ème}, la situation à des nombres relatifs, nous semble une difficulté supplémentaire (cf. Annexe 3).

Nous avons donc, pour ces points, essayé de construire quelques activités qui sont décrites à la suite. Elles ont été expérimentées dans les classes, puis souvent remaniées.

C'est pourquoi nous n'avons pas pu faire une véritable évaluation.

Annexe 1

FONCTIONS

Des expressions employées au collège, en mathématiques (manuels, enseignants) :

- Exprime y en fonction de x .
- Ecris une relation liant x et y .
- Le procédé P qui, à tout nombre x fait correspondre...
- Trouve le procédé qui à tout nombre ...
- Au nombre x , on fait correspondre le nombre obtenu en multipliant...
- La relation liant les nombres...et...
- Etablis la formule donnant...en fonction de...
- Ecris la formule donnant la valeur de...
- Comment obtient-on ... à partir de ...
- Comment ... dépend-il de ...
- Trouve le lien entre ... et ...
- Trouve le prix payé pour x kilomètres.
- Trouve comment passer de ... à ...

Inventaire non exhaustif d'expressions utilisées ...

FONCTIONS et autres matières :

Sciences physiques : on utilise beaucoup : «varier avec», «en fonction de», «formule», «relation».

Histoire et géographie : il a été trouvé presque exclusivement le mot «l'évolution de», sans jamais préciser en fonction de quoi (sous entendu le temps).

Sciences naturelles : on a trouvé les expressions : «relations entre», «exprimer le rapport», «courbe de croissance», «en fonction de».

Annexe 2

L'UTILISATION DES LETTRES

Il appartient au collège de développer progressivement l'usage des lettres, d'abord comme notations puis comme objets de calcul. En effet, on peut considérer que si un élève entrant en 6^{ème} n'a pas encore fait connaissance avec les écritures littérales, un élève sortant de 3^{ème} devrait avoir acquis quelques compétences dans l'usage des lettres.

L'introduction de l'usage des lettres au collège se fait par touches successives, réparties dans le temps, et dans des contextes différents et des situations variées.

Les principales occasions où les lettres font leur apparition peuvent être :

- *La lettre pour exprimer les grandeurs* (périmètre P , hauteur h , longueur l) qui apparaît dès la 6^{ème} et est probablement perçue d'abord comme représentant un mot, puis une grandeur, pour ensuite représenter un nombre et plus tard, faire l'objet de calculs. Plus tard, on passera donc progressivement d'une façon pratique de noter une formule à l'usage de techniques de calcul littéral appliquées à ces formules.

- *La lettre inconnue dans une équation* qui viendra prendre la place du «trou» de «l'opération à trou» du début de 6^{ème}. L'introduction de lettres quelconques au départ glisse ensuite vers l'utilisation privilégiée de la lettre x puis des lettres x et y en 3^{ème}. Les lettres x et y sont pratiquement toujours employées quand il s'agit d'exposer une technique tandis que les autres lettres sont timidement employées pour mettre un problème en équation en marquant le lien avec l'origine concrète du problème (b pour le prix d'une brioche).

- *Les lettres à propos de coordonnées dans un repère*. Dans différentes

matières, pour les grandeurs représentées on utilise des notations. On trouve en légende, sur les axes, d'abord les mots températures, vitesse ... puis les lettres T en $^{\circ}\text{C}$, v en m/s et parfois simplement T , v , t , h ...

Ces lettres qui prennent la place des mots dans la légende des axes désignent ensuite les nombres, coordonnées d'un point et on va vers l'emploi quasi exclusif de x et y avec une répartition précise des rôles $[M(x; y)]$. Ces

lettres sont ensuite objets de calculs $\frac{x_A + x_B}{2}$.

- *Les lettres dans l'étude des fonctions* : après un usage de diverses lettres pour exprimer une grandeur en fonction d'une autre (dans des formules comme $P = 4c$ pour le périmètre du carré), on arrive à un usage privilégié de x et y . Les rôles sont bien fixés : x prend toute une série de valeurs et y représente le résultat d'un calcul appliqué à x .

- En 3^{ème}, une même expression comme $y = 7x - 5$ est rencontrée
- comme équation à 2 inconnues x et y .
- comme expression d'une fonction affine, y variant en fonction de x .
- comme une équation de droite où x et y désignent les coordonnées d'un point.

Cet exemple montre que l'appropriation de ces notions par un élève n'est pas simple : elle nécessite donc du temps et de nombreuses occasions de s'y familiariser dans des activités diverses et des approches variées.

Annexe 3

OBSTACLE A LA CRÉATION DU CONCEPT MATHÉMATIQUE DE FONCTION : LA NATURE DES NOMBRES UTILISÉS

Lorsqu'une fonction est mise en évidence à partir d'une situation concrète, elle n'a de sens, le plus souvent, que pour un domaine de nombres restreint et généralement ces nombres sont positifs.

Or, lorsque nous parlons de fonctions en nous détachant du support concret, nous élargissons en même temps le domaine des nombres que nous utilisons ; en particulier les nombres négatifs apparaissent.

Nous plaçons ainsi nos élèves face à deux difficultés :

- abstraction et
- utilisation de nombres dont les techniques de calcul ne sont pas encore bien maîtrisées.

Pour préparer une bonne acquisition du concept de fonction en classe de 4^{ème} et 3^{ème}, il faut donc, dès la 6^{ème}, apporter beaucoup de soin à la mise en place des nombres négatifs. En particulier, il faut utiliser largement les coordonnées d'un point dans le plan (situation proche de celle de représentation graphique) et faire intervenir les contenus géométriques et numériques du programme.

Voici quelques activités possibles :

Classe de sixième :

- 1) Placer des points donnés par leurs coordonnées ;
Effectuer une construction géométrique (bissectrice, médiatrice) pour obtenir de nouveaux points. Lire les coordonnées de ces points (donner un encadrement à une unité près).
- 2) Associer la notion de symétrie axiale (en utilisant les axes de coordonnées) à celle de nombres opposés.

Classe de cinquième :

- 1) Associer la notion de symétrie centrale de centre O à celle de nombres opposés.
- 2) Associer la notion d'addition des relatifs à celle de translation effectuée sur un quadrillage.
- 3) Représenter graphiquement la fonction $y = x + b$ pour plusieurs valeurs de b (après avoir rempli un tableau de valeurs).
- 4) Représenter graphiquement la fonction $y = a.x$ pour des nombres tous positifs, et pour différentes valeurs de a (après avoir rempli un tableau de valeurs). Comparer avec les situations de proportionnalités.

Classe de quatrième :

- 1) Construire la multiplication des nombres relatifs d'une construction géométrique, l'homothétie :
Homothétie de centre O et de rapport k (k positif) : la construction du point M' correspondant à un point M , permet de définir le produit d'un nombre relatif par un nombre positif.
Homothétie de centre O et de rapport $-k$ (k positif) : la construction du point M' , image du point M , consiste à effectuer une symétrie de centre O puis une homothétie de rapport k . Les coordonnées de M' sont les produits des coordonnées de M par le nombre négatif $-k$.
- 2) Représenter graphiquement la fonction $y = a.x$ pour différentes valeurs de a (après avoir rempli un tableau de valeurs).

ACQUISITION DE LA NOTION DE FONCTION

de la 6^{ème} à la 3^{ème}

Annie AZAM, Georges CHABAT,
Claude FRIBOURG, Brigitte PETIT
IREM de ROUEN

PRÉAMBULE

Nous abordons la notion de fonction au collège en tant qu'outil et non objet mathématique ; rappelons que *«toute définition de la notion de fonction ou d'application est exclue»*

Les travaux sur les fonctions ne peuvent se concevoir qu'à partir de situations concrètes qu'il s'agit le plus souvent de traduire par un tableau de nombres, par un graphique, puis éventuellement, par une relation du type $y = f(x)$.

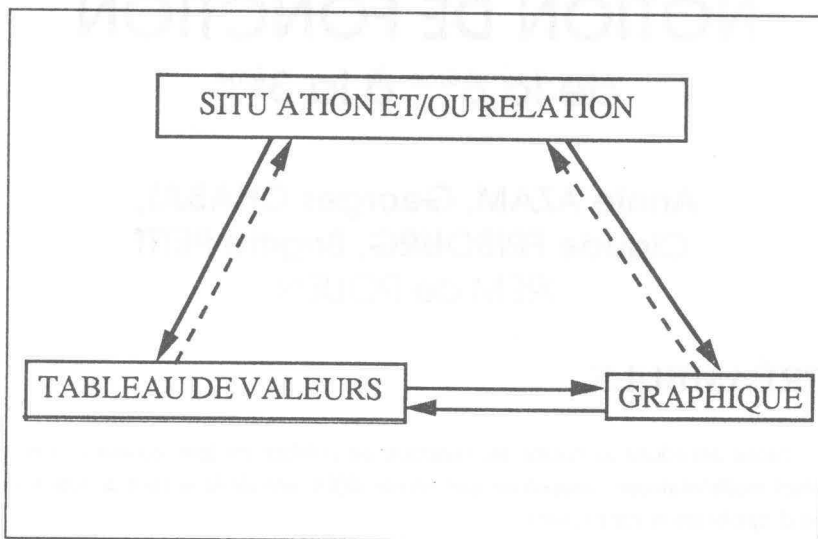
En réalité, les élèves de 4^{ème} ou de 3^{ème} doivent chercher la relation associée au graphique obtenu dans les cas linéaires ou affines seulement, mais pour bien appréhender les seuls cas qui sont au programme, nous travaillons aussi sur des fonctions qui ne sont pas représentées par des droites. Alors il est exclus de chercher la formule correspondante au graphique.

Nous pouvons mesurer la difficulté de cet exercice, toutes proportions gardées, en nous amusant à associer les courbes des équations qui sont proposées sur les pages de couverture de la revue *Audi-Math* n°2.

Par contre, nous pouvons très bien faire vérifier aux élèves une relation donnée, cela fait un très bon exercice de calcul numérique!

En revanche, nous pouvons leur demander d'utiliser un graphique pour compléter un tableau de valeurs, trouver des correspondances, des caractéristiques, expliquer les variations du phénomène étudié.

Le schéma suivant résume tous les changements de cadre possibles, ceux qui sont le plus souvent pratiqués figurent en trait plein :



Au collège, les cadres graphique et numérique sont prépondérants : à partir d'une situation concrète, l'élève est amené à dresser un tableau de valeurs, puis à tracer une représentation graphique de la fonction. Celle-ci est alors exploitée pour résoudre un problème, répondre à une question.

Au lycée, le cadre dominant est le cadre algébrique : une fonction est définie par une formule à partir de laquelle l'élève calcule la dérivée, trace le graphique. Il sera d'autant plus à l'aise dans cette nouvelle situation s'il a eu l'occasion de travailler souvent sur des exemples comme ceux que nous proposons. Cela lui permettra d'acquérir d'autant mieux le concept de fonction.

INTRODUCTION

Le BO spécial n° du 12 Avril 1990 est consacré aux programmes et horaires des classes de Quatrième et Troisième Technologiques. Dans l'Académie de Rouen, celles-ci sont le plus souvent implantées dans les lycées professionnels, mais dans la préface (p.4), le Secrétaire d'Etat indique que *«les nouvelles classes se développeront de plus en plus au collège»*. Pour cette raison, il peut paraître intéressant de connaître le contenu de ce texte.

Les objectifs, tant généraux que particuliers, qui sont recommandés, nous ont paru souvent très proches de la démarche que nous avons adoptée, de sorte que nous en citerons de larges extraits. Vous trouverez peut-être un deuxième motif de le lire in extenso.

Voici quelques objectifs généraux qui ont guidé notre travail :

- p.25.I.4 : *«La démarche consiste à bâtir des mathématiques à partir des problèmes apportés notamment par les disciplines scientifiques et technologiques, et, en retour, à utiliser les savoirs mathématiques comme outils pour la résolution de problèmes issus des autres disciplines ou de la vie courante»* : voir les situations en annexe.
- p.25.II.3 : *«Une distinction claire doit être établie entre :*
 - *les activités prescrites par les programmes, qui doivent être aussi riches et diversifiées que possible,*
 - *les connaissances exigibles qui sont beaucoup plus restreintes que ce qui se fait en classe».*

Les activités que nous proposons peuvent être utilisées à différents niveaux (de la 6^{ème} à la 3^{ème}) et souvent la difficulté augmente avec le numéro de la question posée.

Nous ne sommes jamais partis du programme. Une situation nous ayant paru attractive pour les élèves, nous l'avons explorée avant d'en vérifier la faisabilité pour ceux-ci. Puis nous avons cherché dans quelle mesure elle cadrerait au programme.

Les connaissances exigibles ont été déterminées en dernier lieu et la situation a été étudiée par les élèves de nos classes.

- p.25.II.4 : *«Un sujet mathématique n'est pas un bloc d'un seul tenant : il n'a pas à être présenté de façon exhaustive. Il convient au contraire de :*
- *faire fonctionner les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés à propos de nouvelles situations, et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision ;*
 - *exploiter à chaque étape de l'apprentissage les connaissances nouvellement mises en place ;*
 - *proposer des travaux de synthèse pour coordonner les diverses acquisitions.»*

Chacun sait que les progrès des élèves sont rarement linéaires. L'introduction d'une notion nouvelle par petites touches, sans la nommer mais en la faisant fonctionner, les retours en arrière sous une forme différente, nous sont apparus comme indispensables.

◊ L'étude d'une situation tirée d'une autre discipline ou du domaine professionnel peut aider à débloquer un élève qui n'arrive pas à assimiler une notion mathématique.

- p.27.I En quatrième ... *«les activités devront porter sur des exemples très simples où les variables expriment des quantités dont la signification est clairement perçue par les élèves.»*
- p.28.I.2 *«L'objectif essentiel est d'apprendre aux élèves à substituer de façon correcte des valeurs numériques aux variables intervenant dans des expressions littérales rencontrées en mathématiques ou dans les autres disciplines...»*
- p.30.III *«Dans les situations mettant en jeu des fonctions, on continue d'habituer les élèves aux expressions «en fonction de», et «est fonction de», mais toute définition de la notion de fonction ou d'application est exclue».*
- p.35.III En troisième *«toute définition générale de la notion de fonction ou d'application reste exclue».*

Voici donc le cadre de notre activité clairement tracé, du moins pour les classes de 4^{ème} et de 3^{ème}.

DONNER DU SENS A L'EXPRESSION «FONCTION DE»

L'expression est très couramment employée tant dans le langage quotidien «je m'habille en fonction du temps» que dans les directives ministérielles : BO.p.4 «c'est en fonction de ces exigences que se pose la question des lieux et contenus de formation», ou encore dans les expressions scientifiques : «la tension en fonction de l'intensité».

L'élève devra progressivement passer de l'acception triviale au concept mathématique. Il le découvrira en deux étapes :

- jusqu'en troisième, l'élève travaille sur des grandeurs dépendantes : les changements de l'une induisent les changements de l'autre. Sans variation peut-on caractériser les grandeurs dépendantes?

- c'est au lycée que la notion de fonction sera généralisée et que le cadre mathématique sera mis en place.

Pour les exemples qui sont proposés ci-dessous, l'objectif principal n'est pas nécessairement l'acquisition de la notion de fonction. Toutefois, sans disperser les centres d'intérêt, cette notion peut être mise en évidence même si elle n'est pas explicitement nommée.

La plupart des exemples n'appartiennent pas au domaine mathématique pur. L'interdisciplinarité peut permettre le réinvestissement des acquis dans les différentes matières. Le domaine scientifique paraît nous être le plus proche, mais les disciplines littéraires peuvent fournir nombre d'exemples de relations de cause à effet dont nos collègues se plaignent quelquefois qu'elles ne sont pas suffisamment maîtrisées.

L'étalonnage d'un ressort, les lois d'Ohm viennent immédiatement à l'esprit pour illustrer les fonctions linéaires et affines. Cependant d'autres occasions permettent d'effectuer des mesures, de dresser un tableau, de réaliser un graphique, d'écrire une relation, avant de tirer des conclusions. Ainsi, lors de l'étude des électrolyses, pourquoi ne pas mesurer tension et intensité et rechercher la loi correspondante?

PÉRIMÈTRE DU DISQUE

Matériel nécessaire : disques de diamètres différents (compris entre 5 et 30 cm), ficelle inextensible.

- Les élèves travaillent par groupes de deux : l'un tend la ficelle tandis que

l'autre trace un repère sur les deux extrémités de façon à mesurer le périmètre une fois la ficelle déroulée.

- Chaque groupe vient à son tour compléter le tableau :

Groupe n°	1	2	...
Périmètre : p			
Diamètre : d			
Rapport : p/d			

Généralement, les valeurs trouvées pour le rapport sont comprises entre 3,0 et 3,5.

ÉTALONNAGE

*d'une éprouvette, d'un ballon, d'un erlenmeyer,
d'un verre à pied.*

Manipuler :

- une bande de papier millimétré de 1cm de largeur est collée sur la paroi du récipient,
- l'unité de volume est le tube à essai,
- après chaque tube à essai versé dans le récipient, l'élève trace un repère sur la bande de papier millimétré.

Construire un tableau de nombres :

n	nombre de tubes	
h	hauteur de liquide	

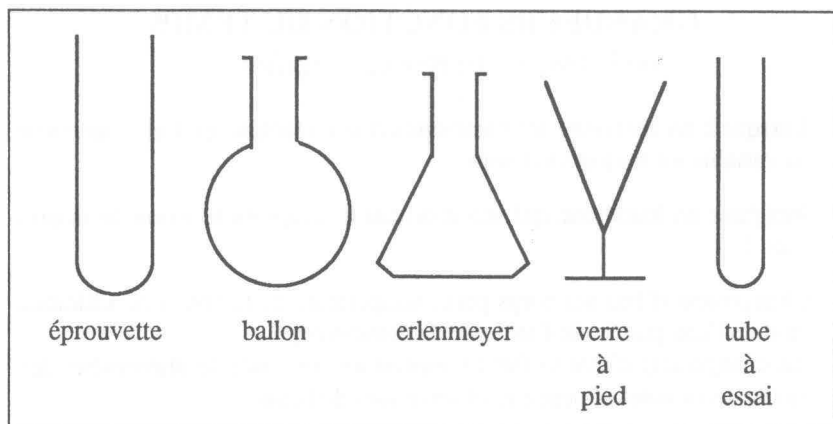
Choisir la variable $n = f(h)$ ou $h = g(n)$?

Tracer le graphique.

Conclure :

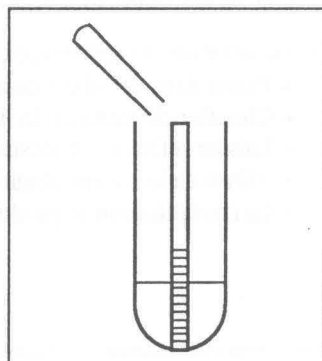
- La courbe obtenue est-elle une fonction précédemment étudiée ?
- n et h sont-ils proportionnels ?
Toutes les grandeurs dépendantes sont-elles proportionnelles ?
- Si n et h varient dans le même sens, sont-ils nécessairement proportionnels ?

Chercher des exemples de situations similaires.

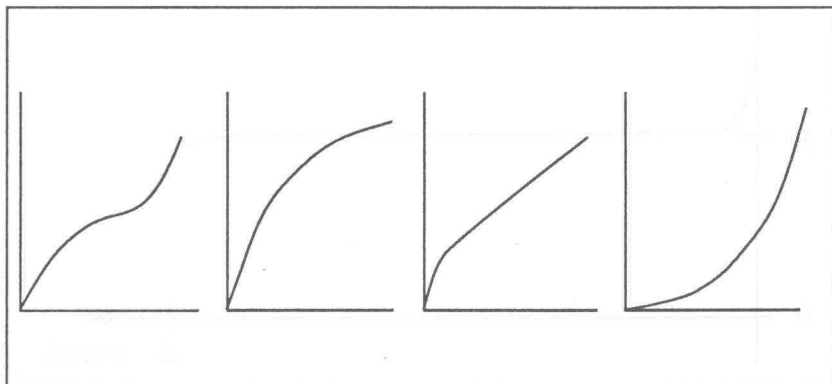


◇ Quelques récipients : ➔
(L'échelle n'est pas respectée)

◇ Mode opératoire



◇ Allure des courbes obtenues (dans le désordre).



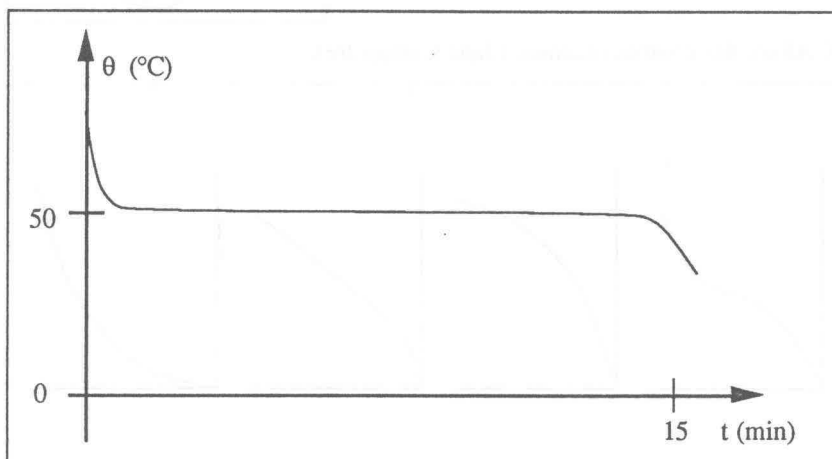
GRANDEURS FONCTION DU TEMPS.

ou le temps variable par excellence...

- Lorsque l'on enregistre les paramètres d'une machine en fonctionnement, la variable est toujours le temps.
- Imaginez un baromètre qui enregistrerait le temps en fonction de la pression !!
- Changement d'état des corps purs : température de fusion et de solidification de l'eau pure et de l'antimite du commerce(*)
Le changement d'état se fait à température constante, le phénomène dure quelques minutes et peut être observé sans difficulté.
- Le graphique permet d'observer la représentation d'une valeur constante (sur un intervalle de temps précis).

(*) L'antimite du commerce est constitué de paradichlorobenzène.

- + Placer dans un tube à essai une ou deux boules préalablement écrasées.
- + Chauffer doucement (la liquéfaction est très rapide).
- + Laisser refroidir en mesurant la température toutes les minutes.
- + Allure de la courbe obtenue.
- + La cristallisation se produit à température constante.



La lettre x possède deux significations antinomiques :

- La première pourrait être qualifiée de statique. Dans une équation, x sera appelée l'inconnue. Pour un élève du premier cycle, l'équation du premier degré conduira à découvrir une valeur pour l'inconnue. Seule cette valeur vérifiera l'égalité.
- La deuxième pourrait être qualifiée de dynamique. Dans une fonction, x sera appelée la variable. Pour étudier la fonction, l'élève attribuera à x plusieurs valeurs. Chacune d'entre elles, prise dans l'intervalle considéré, sera aussi pertinente que toutes les autres.
Dans le premier cas, la valeur unique de x s'imposera d'elle-même. Dans le deuxième cas, l'élève devra prendre en considération plusieurs valeurs pour le même x afin d'étudier la fonction.

Nous avons l'habitude de cette dualité et du premier coup d'œil, la signification *inconnue ou variable*, nous apparaît clairement.

Si les homonymes et les homographes n'ont plus de mystère pour nous, il arrive qu'il n'en soit pas de même pour nos élèves. Suivant que nous soyons artilleur ou petit chanteur à la croix de bois, le mot *canon* n'évoquera pas la même situation. Pour le professeur de mathématiques et son élève, le mot *boule* peut ne pas avoir la même signification. Le professeur de physique et son élève peuvent ne pas avoir la même notion du *pied*. Le professeur d'atelier et un élève ne concevront peut-être pas le *marbre* de la même façon.

Une double signification pour la même lettre dans le domaine mathématique paraîtra d'autant plus étonnante que, par principe, chaque symbole, chaque lettre, chaque grandeur est univoque.

Il nous apparaît donc important d'aider les élèves à discriminer les différentes expressions qui peuvent se présenter à eux.

Le cours de physique peut se prêter à cet apprentissage lors de l'acquisition des notions d'énergie et de puissance. La lettre W désignera la grandeur énergie ($W = 3J$) ou l'unité de puissance ($P = 3W$) suivant sa position dans une expression.

A la différence du cours de physique où la normalisation est parfois rigoureuse, changeons quelquefois la lettre qui désigne l'inconnue ou la variable pour éviter monotonie et habitude.

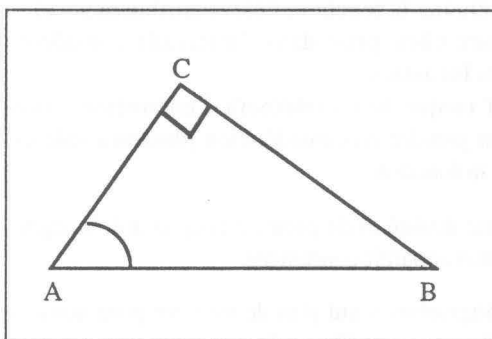
TRIANGLES RECTANGLES

Le premier exercice est une application des calculs sur les cosinus.

Le deuxième exercice est une activité préparatoire à la propriété de Pythagore.

Le point commun à ces exercices est l'utilisation du cercle circonscrit à un triangle rectangle.

I-



On considère un triangle ABC rectangle en C dont l'hypoténuse $[AB]$ mesure 10cm.

On cherche à étudier la varia-

tion de la mesure de $\widehat{A}$ en fonction de la longueur AC .

1) Tracer un segment $[AB]$ mesurant 10cm.

2) Où doit se trouver le point C pour que le triangle ABC soit rectangle en C ?

3) Faire une figure regroupant les différentes valeurs données dans le tableau suivant :

AC en cm	1	2	3	4	5	6	7	8			
mes(A) en $^\circ$									30	20	10

Compléter le tableau en calculant les dimensions manquantes à :

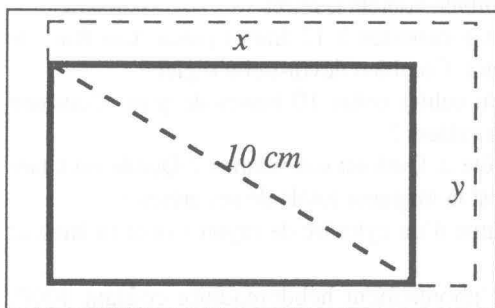
- 1° près pour les angles,
- 0,1 cm près pour les longueurs.

4) Représenter graphiquement mes(A) en fonction de AC

On prendra

- 1cm en abscisse pour 1cm,
- 1cm en ordonnée pour 10° .

II



On cherche à étudier les rectangles dont les diagonales mesurent 10cm.

1) Construire plusieurs rectangles dont les diagonales mesurent 10cm.

2) Si on note x et y les mesures des côtés de ces rectangles, compléter le tableau suivant :

x	
y	

3) Représenter graphiquement les valeurs trouvées en plaçant :

x en abscisse

y en ordonnée.

Etudes complémentaires.

4) Pour chacun des points M de cette représentation, que vaut OM ?

Où se trouvent tous les points M ?

5) Avec les résultats trouvés, compléter le tableau.:

x^2	...
y^2	...
$x^2 + y^2$	...

En déduire une relation reliant x et y .

LISTE DE SITUATIONS

- 1°) Quelle est l'aire d'un carré de côté a ? Quel est son périmètre ?
- 2°) Quelle est l'aire d'un cercle de rayon r ? Quel est son périmètre ?
- 3°) Un rectangle a pour largeur 1. Sa longueur est le double de sa largeur, quelle est son aire ? Quel est son périmètre ?
- 4°) J'ai cinquante francs. Ma mère me donne x francs. Combien ai-je alors ?
- 5°) Tu as x francs. Tu achètes cinq francs de bonbons. Combien te reste-t-il ?

- 6°) Mon grand-père a soixante-dix ans. Quel âge avait-il il y a x années ?
- 7°) Un livre coûte x francs. Combien coûtent 6 livres ?
- 8°) Madame Martin commande y cassettes à 12 francs pièce. Les frais de port lui sont facturés 18 francs. Combien devra-t-elle régler ?
- 9°) Un stylo coûte x francs. Un cahier coûte 10 francs de plus. Combien coûtent quatre stylos et trois cahiers ?
- 10°) On considère un cube de côté a . Quel est son volume ? Quelle est l'aire totale de ses faces ? quelle est la longueur totale de ses arêtes ?
- 11°) Quels sont l'aire et le volume d'un cylindre de rayon r dont la hauteur est égale au diamètre ?
- 12°) Au ski, avec une carte d'abonnement hebdomadaire coûtant 100F, chaque remontée coûte x francs. Quel est le prix de revient pour un séjour de 2 semaines, sachant que le nombre moyen de remontées a été de 50 par jour ?
- 13°) La moyenne de Nicolas est 12 à la suite de quatre devoirs. Que deviendra sa moyenne si la prochaine note est x ?
- 14°) Pour trois devoirs, la moyenne de Sabine est m . Que deviendra sa moyenne si sa prochaine note est 15 ?
- 15°) Carole mesure aujourd'hui 1,34m. Elle a grandi de x centimètres depuis l'an passé. Combien mesurait-elle alors ?

A partir de cette liste de situations, on peut proposer deux types de travaux.

1) Niveau 6^{ème}-5^{ème} :

- Les élèves préparent des tableaux de valeurs, ils fixent différentes valeurs à la variable et cherchent les résultats correspondants.
- Ils peuvent arriver à généraliser leurs calculs en utilisant les lettres proposées.
- Ils construisent les représentations graphiques et observent la proportionnalité ou la non-proportionnalité.

2) Niveau 4^{ème}-3^{ème}.

- Il s'agit d'avantage de trouver et de simplifier l'expression algébrique associée à chaque problème.

Objectifs généraux :

- 1) Apprendre aux élèves à trouver des écritures littérales en partant de ce qu'ils connaissent le mieux : les formules de géométrie.
- 2) Donner du sens aux écritures littérales en se plaçant avant dans une série de valeurs particulières.

BISSECTRICES

A la règle et au compas (laisse les constructions apparentes)

- 1- Trace un angle de sommet A et de mesure 60° .
- 2- Sur un des côtés, place B tel que $AB = 100$.
- 3- Par B , trace la perpendiculaire à $[AB]$ qui coupe le deuxième côté de l'angle $\widehat{A}$ au point C .

4- Trace $[AD]$ bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

5- Trace $[AE]$ bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.

6- Trace $[AF]$ bissectrice de l'angle $\widehat{DAF}$.

7- Respecte l'ordre indiqué, reproduis et complète le tableau en plaçant sur la ligne :

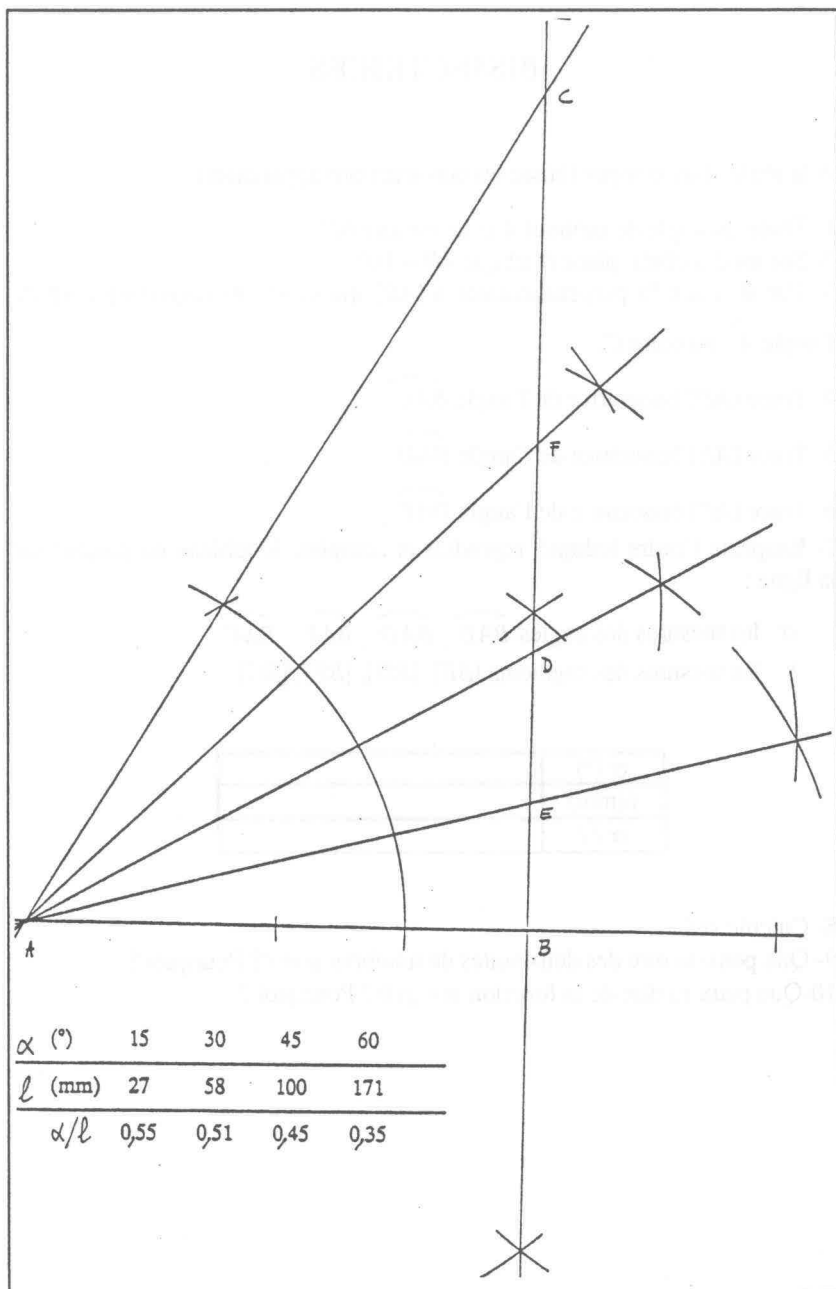
- α les mesures des angles $\widehat{BAE}$, $\widehat{BAD}$, $\widehat{BAF}$, $\widehat{BAC}$;
 l les mesures des segments $[BE]$, $[BD]$, $[BF]$, $[BC]$.

α ($^\circ$)	
l (mm)	
α / l	

8- Calcule α/l

9- Que peux-tu dire des deux suites de nombres α et l ? Pourquoi ?

10- Que peux-tu dire de la fonction $\alpha = g(l)$? Pourquoi ?

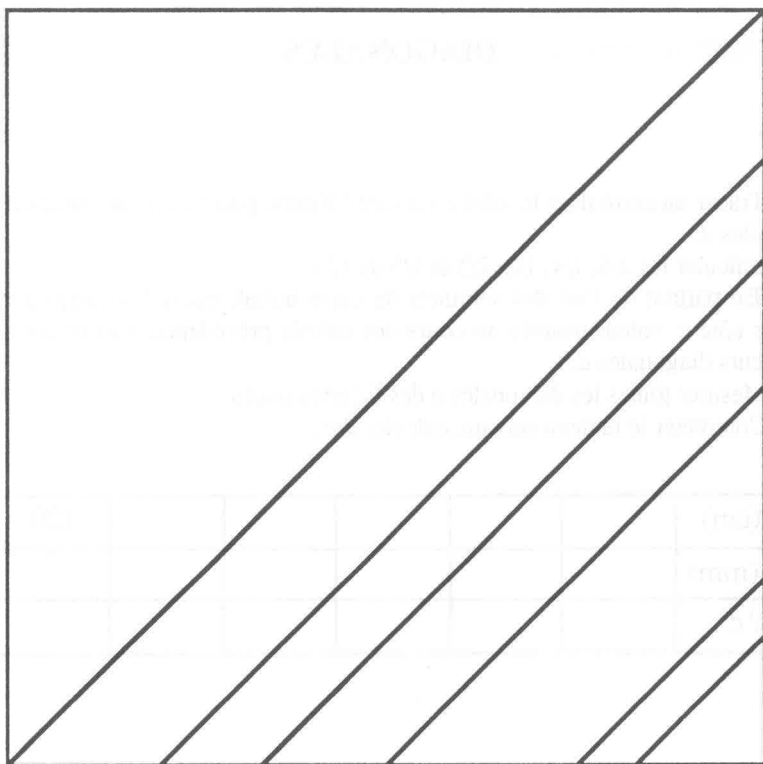


DIAGONALES

- 1 - Tracer un carré dont le côté c mesure 120mm, puis tracer une de ses diagonales d .
- 2 - Calculer les $1/6$, $1/4$, $1/2$, $2/3$ et $4/5$ de 120.
- 3 - En partant de l'un des sommets du carré initial, tracer les carrés ayant pour côté c , valeur trouvée au cours des calculs précédents, puis tracer une de leurs diagonales d .
- 4 - Mesurer toutes les diagonales d des 6 carrés tracés.
- 5 - Compléter le tableau suivant, calculer d/c :

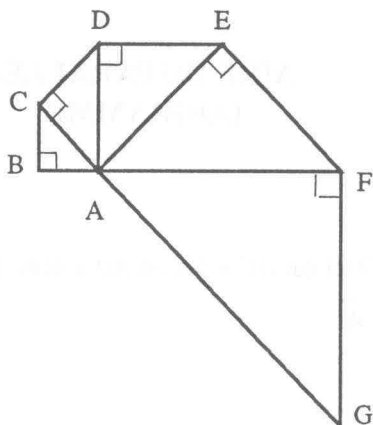
c (cm)						120
d (mm)						
d / c						

- 6 - Que peut-on dire des deux suites de nombres c et d ? Pourquoi ?
- 7 - Représenter graphiquement les indications portées dans le tableau précédent : abscisses : c ordonnées : d .
- 8 - Les points représentés sont-ils alignés ? Pourquoi ?
- 9 - Quelle relation peut-on écrire entre d et c ?



c (cm)	20	30	60	80	96	120
d (mm)	28	42	85	112	136	170
d / c	0,71	0,71	0,70	0,71	0,70	0,70

ESCARGOT



- 1 - Tracer la figure sachant que
 - a- $AB = 1\text{cm}$
 - b- ABC est un triangle rectangle et isocèle.
 - c- chacun des triangles rectangles a pour côté de l'angle droit l'hypoténuse du précédent.

- 2- Mesurer au mm près les côtés des triangles.

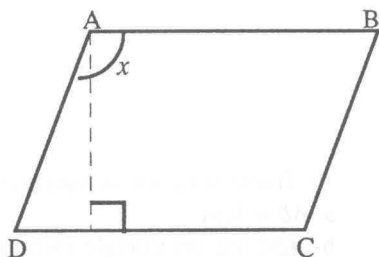
- 3- Calculer AC , AD , AE , AF , AG à 10^{-2} près, et compléter le tableau :

Triangles	ABC	ACD	ADE	AEF	AFG
côté de l'angle droit: c (cm)					
hypoténuse: h (cm)					
h/c					

- 4- Traduire les résultats obtenus par un graphique
abscisses : c ; ordonnées : h .

- 5- Que remarque-t-on dans le tableau ? Sur le graphique ?

- 6- Exprimer l'hypoténuse h en fonction du côté c pour un triangle rectangle isocèle.



AIRE DU PARALLÉLOGRAMME

On considère un parallélogramme $ABCD$ tel que $AC = 5\text{cm}$ et $AD = 4\text{cm}$. On appelle x la mesure en degrés de l'angle $\widehat{A}$.

I-Travail à la maison :

- 1- Construire un parallélogramme $ABCD$.
- 2- Mesurer avec précision la hauteur AH .
- 3- Calculer l'aire de $ABCD$.

II-On se propose d'étudier la variation de l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme $ABCD$ en fonction de x .

- 1- Partager le travail pour réaliser les figures qui permettent de compléter le tableau suivant :

x en degrés	10	20	30	40	50	60	70	80	90
A en cm^2									
x en degrés	100	110	120	130	140	150	160	170	
A en cm^2									

- 2- Faire une représentation graphique de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x :

on prendra : 1cm pour 10° en abscisses
1cm pour 2cm^2 en ordonnées.

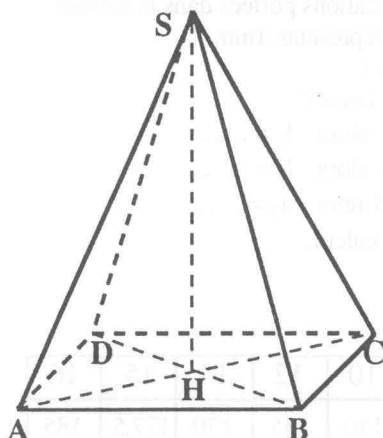
III-Exploitation du graphique.

- 1- Si x est divisé par 2, l'aire est-elle aussi divisée par 2? Donner des exemples.
- 2- L'aire $\mathcal{A}$ est-elle proportionnelle à la mesure x de l'angle?
- 3- Trouver l'aire du parallélogramme correspondant à un angle de 65° , puis de 135° (sur le graphique).
- 4- Pour quel(s) angle(s) l'aire vaut-elle 16 cm^2 ?
- 5- Pour quel angle l'aire est-elle maximale?
Que peut-on dire alors du parallélogramme $ABCD$?

IV-Pour les élèves de Troisième seulement (ou au-delà!).

- 1- Exprimer la hauteur AH du parallélogramme en fonction de x .
- 2- En déduire l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x .
- 3- Vérifier, par le calcul, les résultats trouvés dans le tableau.

VARIATION DU VOLUME D'UNE PYRAMIDE EN FONCTION DE SON ARETE.



On considère une pyramide régulière ($\mathcal{P}$) de sommet S , à base carrée $ABCD$ telle que $AB = 3 \text{ cm}$.

I-Travail à la maison.

- 1- Construire un patron d'une pyramide ($\mathcal{P}$).
- 2- Réaliser ($\mathcal{P}$).
- 3- Mesurer l'arête de ($\mathcal{P}$) avec précision.
- 4- Calculer sa hauteur.
- 5- Calculer son volume.

II-Travail en classe.

- 1- On peut commencer la séance en faisant compléter un tableau de valeurs (arête, volume), ce qui permet à chaque élève de voir si son résultat est plausible, d'écarter et/ou de faire vérifier des résultats étonnants.

2- **Généralisation** : On appelle a la longueur de l'arête [SA].

a- Calculer AH .

b- Calculer la hauteur SH de $(\mathcal{P})$ en fonction de a .

c- Exprimer le volume V de la pyramide en fonction de l'arête a .

$$\text{On obtient } V = 3 \sqrt{a^2 - \frac{9}{2}}.$$

d- Faire un tableau de valeurs (comparer avec le n°1 du II).

e- Construire la courbe représentant V en fonction de a .

CLÉS

d = dimension de l'écrou à serrer (en mm).

l = longueur de la clé (en mm).

I-Clés à pipe

d	6	7	9	10	12	14	15	16
l	78	91	117	130	156	182	195	208

1- Représenter graphiquement les indications portées dans le tableau
abscisses : d , ordonnées : l ; 1mm représente 1mm.

2- Qu'observe-t-on ? Qu'en déduit-on ?

3- Quelle relation peut-on écrire entre l et d ?

4- Lecture sur le graphique si $d_1 = 8$ alors $l_1 = \dots\dots$

si $d_2 = 18$ alors $l_2 = \dots\dots$

si $l_3 = 143$ alors $d_3 = \dots\dots$

5- Vérifier les résultats obtenus par le calcul.

II-Clés à œil.

d	6	7	9	10	12	14	15	16
l	110	117,5	132,5	140	155	170	177,5	185

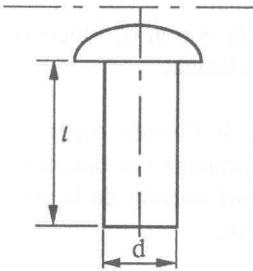
Reprendre les questions précédentes.

Prendre $l_3 = 162,5$ dans la question 4.

CONSTRUCTION RIVÉE

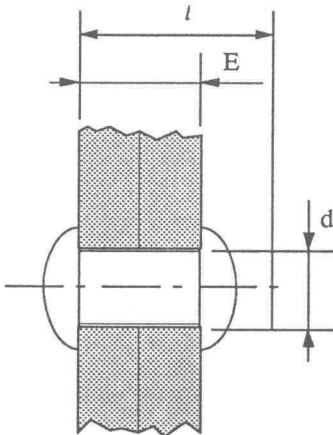
1- Les rivets les plus courants ont les dimensions suivantes (en mm) :

d	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20
l	3	4	5	6	(7)	8	9	10	(11)	12	14	16
	(18)	20	(22)	25	(28)	30	32	35	38	40	45	50
	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110	120	130



* Eviter l'emploi des longueurs entre parenthèses.

* Un rivet est désigné par son diamètre puis par sa longueur. Exemple (8 ; 25) $d = 8$; $l = 25$.



2- La longueur l du rivet choisi dépend de l'épaisseur E des pièces à serrer et du diamètre d du rivet, suivant la formule expérimentale :

$$l = 1,1E + 1,5d.$$

3- Pour réaliser un assemblage d'épaisseur $E = 20\text{mm}$, quelle sera l'expression à utiliser ?

4- En utilisant cette dernière avec des rivets les plus courants, compléter le tableau suivant :

d												
l												

5- Quelles sont les dimensions des rivets retenus ?

CONCLUSION

Les élèves doivent percevoir la fonction comme un outil adapté pour résoudre des problèmes. Ils doivent pouvoir changer de cadre pour avancer dans une recherche, vérifier une conjecture, trouver des cohérences, proposer une solution.

En général, ce travail leur plaît beaucoup et ils réussissent souvent mieux que dans d'autres exercices.

Nous sommes tous convaincus de l'importance de la notion de fonction, mais nous l'abordons souvent au troisième trimestre seulement.

Nous pensons au contraire qu'il faut, tout au long de l'année, saisir les opportunités du programme pour étudier des fonctions dans des situations et contextes variés, sur des exemples concrets, issus le plus souvent de la géométrie, des thèmes transversaux ou du domaine technique.

DES ACTIVITÉS FAISANT INTERVENIR DES FONCTIONS

Michèle MATHIAUD

Collège et Lycée Michelet - Vanves (92)
IREM Paris 7

Voici quelques activités qui ont été réalisées en classe et qui s'inscrivent dans le processus d'apprentissage décrit en début de brochure.

Toutes ces activités sont basées sur l'interaction entre les différents cadres dont on dispose en mathématiques (géométrique, algébrique, numérique, graphique) pour traiter un problème ; cette variété de registres de travail permet à l'élève de contrôler ses réponses et lui donne alors la possibilité d'avancer avec plus de «sécurité» dans sa progression personnelle, dans la construction de ses propres connaissances.

On trouvera les travaux suivants :

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ET TRIANGLE en classe de Sixième ;
COSINUS D'UN ANGLE AIGU en classe de Quatrième ;
AGRANDISSEMENT-RÉDUCTION en classe de Troisième.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ET TRIANGLE

en classe de Sixième

Le travail décrit ici a été réalisé dans une classe de 6^{ème} en milieu d'année scolaire alors que les élèves étaient familiarisés avec l'utilisation des instruments de géométrie : quelques graphiques avaient été confectionnés sur du papier millimétré : représentation de suites proportionnelles ou non, variation de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de ses côtés.

L'objectif principal est de gérer, ordonner et représenter graphiquement de nombreuses données et de découvrir des représentations graphiques moins habituelles.

Les objectifs secondaires sont de divers ordres ; on veut que les élèves soient conduits à :

- faire des constructions et des mesures soignées,
- travailler sur les arrondis,
- être responsabilisés dans un travail collectif,
- représenter graphiquement des données provenant d'un tableau,
- choisir une échelle afin de confectionner un graphique lisible,
- être sensibilisés à des variations de fonctions autres que linéaires,
- être sensibilisés à la notion de continuité, discontinuité.

Les consignes :

1°) Construire des triangles ABC tels que $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$ et l'angle $\widehat{A}$ mesure 30° , puis 60° , 90° , 120° , 150° ; mesurer BC dans chaque cas.

2) Refaire des triangles ABC comme au 1°, mais l'angle $\widehat{A}$ varie de 0° à 180° de 5° en 5° ; mesurer BC sur ces différentes figures.

3°) Présenter clairement les résultats du 1° et du 2°, c'est-à-dire : pour chaque valeur de $\widehat{A}$, indiquer la valeur correspondante de BC.

4°) Représenter sur un graphique tous ces résultats.

5°) Se servir du graphique pour déterminer les valeurs de BC pour des $\widehat{A}$

donnés ou des valeurs de $\widehat{A}$ pour des BC donnés (même la valeur 2 ou la valeur 15).

Déroulement de l'activité.

Les questions sont posées une par une ; un bilan est fait pour chacune d'elles avant de passer à la question suivante.

Les élèves travaillent par groupes de 4.

Le 1°) est entièrement traité en classe de façon à ce que chaque élève puisse à son rythme s'approprier la consigne et poser toutes les questions qu'il veut. En général, les mesures demandées figurent à côté du dessin, aucun élève ne regroupe les résultats.

On donne les mesures au millimètre près et certains remarquent que lorsque l'angle double, le côté augmente, mais «sans doubler» et «pas toujours pareil»...

Le 2°) est démarré en classe ; le travail est réparti dans les groupes de façon à ce que chaque élève n'ait que 5 dessins à exécuter à la maison pour la séance suivante ; on demande aussi d'apporter du papier millimétré.

Collecte et confrontation des résultats du 2°).

Les élèves reviennent avec leurs constructions et leurs mesures au millimètre près, sauf l'un d'entre eux qui n'avait pas de construction, mais une page couverte de décimaux d'ordre 3 : il explique que son père a fait un petit programme sur l'ordinateur (une calculatrice programmable aurait fait le même travail), ce qui lui a permis d'obtenir les «vraies» mesures de BC pour toutes les valeurs de $\widehat{A}$ demandées avec une précision meilleure.

Cette situation (imprévue) a eu l'avantage de :

- sensibiliser aux limites de la fiabilité des résultats obtenus par construction et mesure à l'aide de la règle graduée,
- faire travailler sur les arrondis : on était en droit d'accepter telle mesure et de refuser telle autre puisqu'on connaissait le «presque» bon résultat («presque» provenait des 3 chiffres après la virgule et de la confiance en la machine...),

- comprendre certains résultats choquants, par exemple lorsque $\widehat{A}$ prend les valeurs 170° , 175° , 180° , les mesures correspondantes de BC sont les mêmes (11 cm en arrondissant), alors que l'ordinateur ne donne cette valeur que pour 180° .

Classement des données et fabrication du graphique (3° et 4°).

Pour classer tous ces résultats, on a utilisé un tableau à 2 lignes et de nombreuses colonnes sous la forme :

A (en degré)	0	5	10	
BC (en cm)	3			

La comparaison entre les croissances relatives de A et de BC a été alors plus aisée.

La fabrication du graphique a débuté en classe ; il fallait choisir une échelle de façon à ce que toutes les données figurent. Après discussion, le choix de 1cm pour 10° sur l'axe des abscisses s'imposait presque ; pour les ordonnées, les uns ont pris 1cm pour 1cm, les autres 2cm pour 1cm. Les premiers points ont été placés en classe et le travail était à terminer à la maison et à rendre le cours suivant.

Utilisation du graphique (5°)

Après vérification des graphiques (certains ont été à refaire car, soit ils n'étaient pas suffisamment soignés pour être utilisés par la suite, soit des points étaient mal placés), un travail collectif sur ceux-ci a été fait.

◊ l'observation des graphiques débouche sur les remarques ou questions suivantes :

→ les dessins d'échelles différentes ont même «allure»,

→ doit-on relier les points?

non disent les uns, le dessin est assez chargé,

oui disent les autres, car on verra mieux les points, les températures sont bien reliées, alors pourquoi pas ici?

Trois élèves (il y a toujours dans une classe au moins un élève qui pose la bonne question!!!) disent qu'entre 15° et 20° par exemple, il y a d'autres degrés et même d'autres demi-degrés et même ... et comme BC augmente

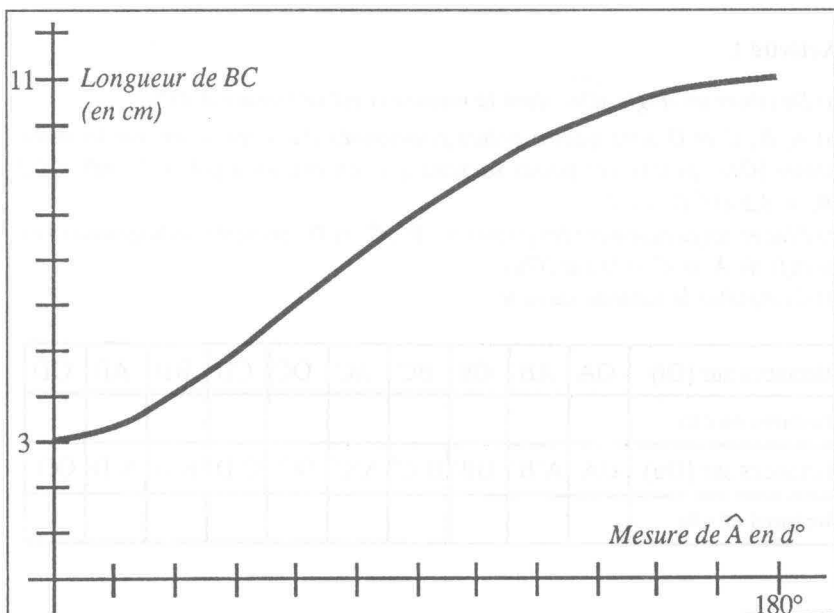
avec $\widehat{A}$ et qu'il y aura des BC qui correspondront à ces valeurs de $\widehat{A}$, il y a des points en plus sur le dessin, mais pas n'importe comment.

La classe conclut alors qu'entre deux petites croix qui représentent un $\widehat{A}$ et son BC, il y en a plein d'autres, mais «bien rangés en montant» et qui vont se toucher, donc si on relie «comme il faut», le trait correspond à des A et des BC de la famille.

→ BC augmente «irrégulièrement» comme on avait déjà pu le constater dans le tableau ; les valeurs de BC sont comprises entre 3 (pourquoi 3 ?) et 11 (pourquoi 11 ?) ; c'est le dessin qui fournira l'explication mais l'inégalité triangulaire ne sera pas institutionnalisée à ce niveau de classe. Ce sera pour la 4^{ème}.

- Des valeurs d'angles seront données et on lira la longueur de BC qui lui correspond et réciproquement ; l'unicité des réponses ne fait aucun doute pour les élèves mais, pour certaines valeurs, la lecture du graphique donne des réponses qui ne satisfont pas ...

Un graphique, aussi précis soit-il, a tout de même des limites...



COSINUS D'UN ANGLE AIGU

Classe de 4^{ème}

Les activités qui suivent ont pour objectif principal la découverte du cosinus d'un angle aigu en classe de 4^{ème}.

Le travail est basé sur l'interaction de différents cadres, géométrique avec ou sans mesure, numérique, graphique, afin de permettre à l'élève de contrôler de plusieurs façons les résultats qu'il pensait obtenir ou ceux qu'il venait d'obtenir.

En géométrie, les élèves ont étudié auparavant les projections d'une droite sur une droite et connaissent la propriété de projection du milieu et des graduations régulières. Du point de vue numérique-graphique, la linéarité d'une fonction a été détectée de plusieurs façons au cours des travaux précédents puis est devenue, conformément au programme, un savoir institutionnalisé.

Un bilan est fait à la fin de chaque activité avant de donner le texte relatif à l'activité suivante.

Texte donné aux élèves;

Activité 1

- a) Dessiner un angle $\widehat{tOu}$ dont la mesure α est inférieure à 45° .
- b) A, B, C et D sont quatre points positionnés dans cet ordre sur la demi-droite $[Ot)$; placer ces points sachant que, en cm, on a $OA = 2$, $AB = 0,5$, $BC = 3,5$ et $CD = 1,2$.
- c) Placer soigneusement les points A' , B' , C' et D' projetés orthogonaux respectifs de A, B, C et D sur $[Ou)$.
- d) Compléter le tableau suivant :

distances sur $[Ot)$	OA	AB	OB	BC	AC	OC	CD	BD	AD	OD
mesures en cm										
distances sur $[Ou)$	OA'	A'B'	OB'	B'C'	A'C'	OC'	C'D'	B'D'	A'D'	OD'
mesures en cm										

e) Sur du papier millimétré, placer les points dont les coordonnées sont les deux nombres de chaque colonne ; les abscisses sont les mesures su [Ot) et les ordonnées sont celles sur [Ou) ; il y aura dix points à placer.

On souhaite enrichir le tableau précédent en donnant les indications suivantes.

Choisir un nombre a positif et inférieur à OD' ; placer sur [Ou) le point F' tel que $OF' = a$; représenter le point F de [Ot) dont F' est le projeté orthogonal ; peut-on CALCULER les nombres suivants : OF , CF , AF , $B'F'$? Justifier.

Choisir un nombre b supérieur à OD ; placer sur [Ou) le point G' tel que $OG' = b$; mêmes questions que précédemment pour le point G et les nombres BG , CG et AG .

Les choix et les raisons des choix.

On a voulu introduire le cosinus comme un coefficient de proportionnalité en faisant fonctionner les propriétés de la proportionnalité ; la reconnaissance de cette situation de proportionnalité est favorisée par :

- le choix des mesures figurant dans le tableau ; ce sont des nombres entiers ou décimaux d'ordre 1 obtenus par l'addition de nombres du tableau et parfois multiples d'autres nombres de ce tableau ; le nombre 1 n'y figure pas, mais il y a le nombre 2 en première colonne ; on attend donc le pointage des propriétés caractéristiques $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(kx) = k f(x)$, ainsi que le calcul de $f(1)$ pour obtenir $f(k)$ à l'aide de $k f(1)$.

- la représentation graphique ; l'alignement des points avec l'origine du repère est une propriété qui est disponible pour les élèves de cette classe puisqu'elle a été utilisée à plusieurs reprises depuis le début de l'année en cours.

La mesure de l'angle α n'a pas été imposée afin d'obtenir dans la classe un éventail assez large de valeurs expérimentales de $\cos \alpha$ et sensibiliser les élèves à la non-proportionnalité de la fonction $\cos$ et à sa décroissance.

Quelques remarques sur le déroulement ; bilan.

La proportionnalité entre les longueurs des segments et celles de leur projeté est rapidement détectée par les mesures ; quelques élèves cherchent à contrôler celles-ci par le calcul de $f(1)$ à partir de mesures donnant $f(2)$; le graphique sera un autre élément de conviction, bien que, déjà fortement

convaincus, certains élèves «trichent» sur des coordonnées afin que leurs points soient bien alignés ; l'enseignant dit alors aux élèves qu'il y a bien ici situation de proportionnalité. Il existe donc un coefficient de proportionnalité qui multiplie les longueurs des segments de $[Ot]$ afin d'obtenir celles de leurs correspondants sur $[Ou]$ indépendamment de l'unité choisie (dans le tableau de proportionnalité, on peut multiplier les colonnes par 10^p , p entier relatif).

Pour compléter le tableau, les caractéristiques de la linéarité sont utilisées, c'est-à-dire :

- le calcul de quatrièmes proportionnelles,
- l'utilisation sur des colonnes complètes du tableau des propriétés de la fonction $f : f(x + y) = f(x) + f(y)$ ou $f(kx) = k.f(x)$,
- la lecture du graphique.

Les résultats provenant des calculs ou du graphique peuvent aussi être vérifiés sur le dessin.

Suite de la séquence.

On donne le texte des activités 2 puis 3.

Activité 2 :

Même directives que celles de l'activité 1 en prenant pour $\widehat{tOu}$ un angle dont la mesure est le double de α .

Au bilan, on pointera le fait qu'il y a toujours proportionnalité entre les distances de deux points et celles de leurs projetés et que le coefficient est différent du précédent puisqu'on n'obtient pas les mêmes mesures pour les projetés ; sur le graphique, les points correspondants à α sont «au-dessus» de ceux qui correspondent à 2α ...bizarre...

Activité 3 :

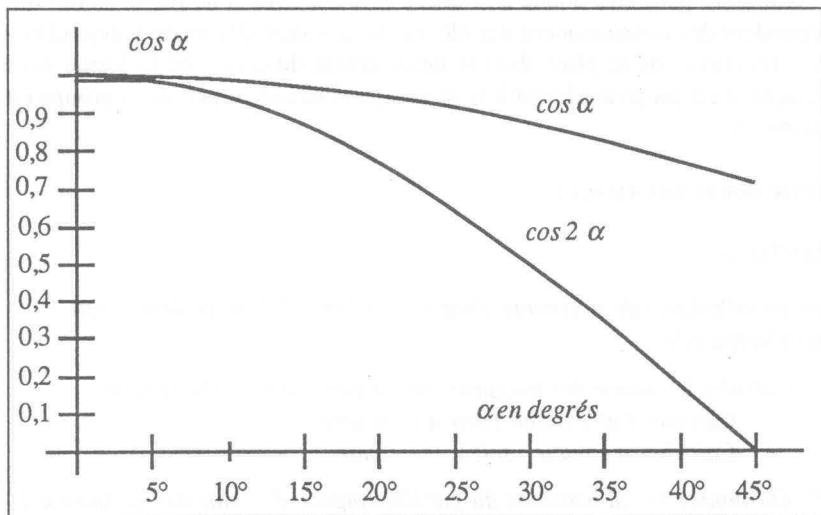
a) Dans chacun des tableaux des activités précédentes, trouver une valeur approchée des coefficients de proportionnalité.

b) A l'aide de la calculatrice, en se plaçant en mode «degrés», donner $\cos \alpha$ puis $\cos 2\alpha$ et comparer avec les résultats de a).

Lors du bilan, on donnera un nom aux coefficients de proportionnalité et en rassemblant les résultats de la classe, on pointera le fait que les $\cos \alpha$ et

$\cos 2\alpha$ ne sont pas, eux, proportionnels.

Par la suite, afin de bien marquer la décroissance et la non linéarité de la fonction COS, on pourra faire la représentation graphique de $y = \cos x$ pour x variant entre 0° et 90° , à l'aide de la calculatrice, et s'en servir dans des problèmes.



AGRANDISSEMENT...RÉDUCTION

Le texte présenté ici a été proposé à des élèves de 3^{me} un mois et demi après le début de l'année scolaire. A cette date, la classe avait travaillé sur :

- mise en équation de problèmes de la vie courante, de géométrie plane ou de l'espace,
- résolution d'équations,
- lecture, interprétation et fabrication de graphiques représentant des variations de distances en fonction du temps,
- Thalès.

L'objectif principal est la mise en évidence des coefficients k , k^2 et k^3 dans une réduction ou un agrandissement.

Les objectifs secondaires sont variés ; à cette période de l'année, il y a :

- calculs numériques et de grandeurs avec différenciation des unités,
- transposition de langage Français-Math, Math-Français,
- calcul du pourcentage ou d'une fraction d'une quantité,
- fabrication et lecture de représentations graphiques de fonctions puis comparaison de différents types de variations...

Ce texte peut être donné à d'autres niveaux avec d'autres objectifs qui dépendent des connaissances des élèves, de la nature des travaux déjà effectués en classe, de la place dans le déroulement du cours, de la forme sous laquelle il est proposé (devoir à la maison, travail individuel ou en groupe en classe...).

Texte donné aux élèves :

PARTIE A.

Un parallélépipède a comme dimensions 1cm, 2,7cm et 4cm ; soit P ce parallélépipède.

1°) Calculer la somme des longueurs des arêtes ; soit S cette somme.

Calculer l'aire totale ; soit A cette aire.

Calculer le volume ; soit V ce volume.

2°) On double les dimensions du parallélépipède P ; calculer la somme S' des arêtes de ce nouveau parallélépipède P' , l'aire totale A' et le volume V' . Exprimer S' en fonction de S , A' en fonction de A et V' en fonction de V .

3°) On réduit les dimensions de P de trois cinquièmes de leur valeur ; Calculer la somme S'' des arêtes de ce parallélépipède P'' , l'aire totale A'' et le volume V'' .

4°) On diminue les dimensions de P de 20% de leur valeur ; quel est l'effet sur la somme des arêtes, l'aire totale et le volume de ce nouveau parallélépipède?

Lorsque le bilan est fait, la partie B est donnée.

PARTIE B)

On multiplie les dimensions du parallélépipède P par un nombre positif k .

1°) Exprimer en fonction de k la somme $S(k)$ des arêtes, l'aire $A(k)$ de toutes les faces, le volume $V(k)$ du solide.

Quelles relations y a-t-il entre $S(k)$ et S , entre $A(k)$ et A , entre $V(k)$ et V ?

2°) - Représenter graphiquement (trois dessins séparés) les variations de $S(k)$, $A(k)$, $V(k)$ en fonction des variations de k (faire varier k entre 0 et 3).

3°) Sur les graphiques, placer les points correspondant à S , A , V , S' , A' , V' , S'' , A'' , V'' et lire les valeurs de k auxquelles ils correspondent.

- Lire les valeurs de $S(k)$, $A(k)$ et $V(k)$ correspondant à $k = 0,7$ puis à $k = 1,39$, puis à $k = 2,8$.

- A quelles valeurs de k correspondent les résultats suivants :

$S(k) = 50\text{cm}$, $A(k) = 75\text{cm}^2$, $V(k) = 28,2\text{cm}^3$?

Vérifier les réponses.

Analyse de la tâche des élèves

Les élèves sont amenés à travailler dans des cadres variés, ce qui leur permet de contrôler leurs résultats de plusieurs façons. Les différents cadres sont les suivants

- géométrie dans l'espace et dans le plan,
- nombres et grandeurs,
- calcul littéral avec utilisation des lettres qui changent de statut (d'abord indéterminée, puis variable, puis inconnue),
- graphique (représentation des fonctions et lecture de celles-ci).

Dans la partie A.

Les tâches à accomplir ne sont pas toutes des nouveautés pour les élèves car certaines ont été déjà rencontrées par exemple lors des travaux sur les mises en équation ou les lectures et fabrication de graphiques concernant les vitesses ; voyons ces tâches plus en détail.

Tout d'abord, un travail sur les solides est demandé ; il y aura à savoir ce qu'est un parallélépipède, éventuellement à préciser le sens des mots «arêtes» et «aire totale», formuler le volume et utiliser les unités des grandeurs adéquates ; les solides ont été remis en mémoire au cours de mises en équation et semblaient alors une connaissance disponible pour les élèves.

Il faudra ensuite traduire du «Français» en «Math» pour répondre aux questions 2°, 3°, et 4° lorsque le texte parle de «doubler», «réduire de trois cinquièmes», «diminuer de 20%», «exprimer en fonction de». Ce travail sera en partie nouveau pour la classe et présentera des difficultés pour un certain nombre d'élèves.

Le calcul numérique ne doit pas poser problème puisque les résultats sont des décimaux, les calculs peuvent être faits entièrement à la calculatrice. On peut introduire d'autres nombres - c'est là une variable didactique -, qui conduisent à des résultats rationnels non décimaux afin d'obliger les élèves à faire des calculs fractionnaires «à la main», à différencier des résultats exacts, approchés ou arrondis.

L'organisation de ce calcul numérique est l'occasion de pointer l'intérêt de la factorisation et du calcul mental afin d'éviter la répétition des opérations avec les mêmes nombres (somme des arêtes, aire).

Dans la partie B.

La nouveauté n'est pas dans l'accumulation des écritures littérales mais dans la représentation graphique des trois fonctions ; il y aura à représenter $S(k) = 30,8 k$ puis $A(k) = 35k^2$ et enfin $V(k) = 10,8k^3$. On peut penser que la linéarité de $S(k)$ sera reconnue et facilitera le tracé du graphique ; quant aux tracés des deux autres représentations, on doit s'attendre à un dessin de fonctions affines par intervalles car les seuls graphiques utilisés ou fabriqués en classe de Troisième étaient de ce type ; il y aura donc tout un travail à faire à ce sujet.

Chronique des séquences.

Première séquence :

Après réponses à quelques questions posées par la classe (doit-on réaliser le solide, doit-on le dessiner en perspective cavalière...), un travail par groupes de deux est démarré par tous. Le parallélépipède est familier à la classe et c'est seulement au niveau de l'organisation des calculs à l'aide d'une représentation du solide, que l'enseignant a fait faire des remarques. Les questions 1° et 2° sont bien traitées, réalisées suivant des rythmes différents. Les difficultés d'interprétation du texte des questions 3° et 4° ainsi que la transposition en langage mathématique sont rencontrées par de nombreux élèves et provoquent des discussions. Une mise en commun est alors faite, suivie par un travail en classe et terminé à la maison.

Deuxième séquence :

Un bilan de la partie A est fait puis le texte de la partie B est donné. Le 1° provoque des questions de la part de quelques élèves car ceux-ci veulent donner une valeur numérique à la lettre k ; on précise alors le sens de «en fonction de ».

Comme on s'y attendait, c'est la question 2° qui a permis aux élèves de faire des «découvertes».

L'enseignant constate que la fonction linéaire est rarement réinvestie mais plus souvent redécouverte après avoir placé plusieurs points qui semblaient alignés avec l'origine ; on peut expliquer cette non reconnaissance peut-être du fait que le coefficient n'est pas entier (30,8) et que la variable est nommée par la lettre k au lieu du x ...

Le tracé des deux autres courbes est celui attendu, sauf pour deux groupes qui, s'étant rendu compte que les points n'étaient pas alignés, ont placé «plein» de points ; leurs courbes étaient très correctes. La plupart des groupes placent quatre ou cinq points puis les rejoignent par des segments ; le calcul des coordonnées du milieu d'un de ces segments prouve que celui-ci ne fait pas partie de la représentation de la fonction, donc ne doit pas figurer sur le dessin ; la question de la «liaison» des points est soulevée comme elle l'avait déjà été à propos des travaux sur les graphiques des vitesses.

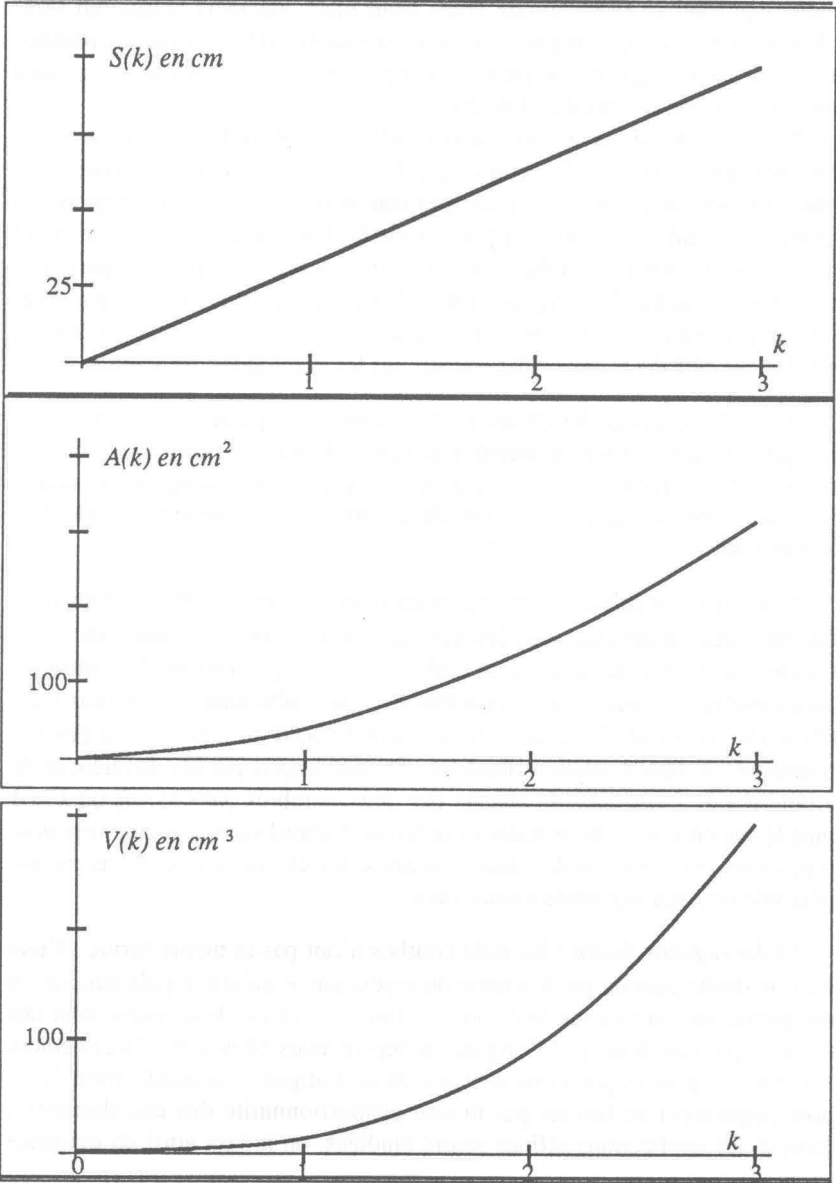
Au cours de ce travail, les élèves sont conduits à comparer la fonction linéaire, qui fait partie (théoriquement) d'un savoir disponible, avec des fonctions en x^2 et x^3 , qu'ils ne connaissent pas ou plutôt qui n'ont pas été encore «catáloguées» ; cette comparaison se fait dans deux registres : le registre calcul, le registre dessin.

⇒ *Le registre calcul* : pour tracer les trois courbes, les élèves établissent des tableaux en prenant dans les trois tableaux les même valeurs de k ; la fonction linéaire correspond à un tableau où il y a proportionnalité entre les coordonnées, «ça augmente régulièrement» ; en établissant les tableaux relatifs à $35k^2$ et à $10,8k^3$, les élèves constatent d'abord qu'il n'y a plus proportionnalité, ni «augmentation régulière» et sont surpris par les différences de «rapidité» de croissance de chacun des deux nombres dans le cas où $k < 1$ puis le cas où $k > 1$; les remarques se feront d'abord sur une même fonction, puis après comparaison des deux fonctions, les élèves diront «ça augmente plus vite» ou «ça augmente moins vite».

⇒ *Le registre dessin* : les trois courbes n'ont pas la même forme ; l'une est une droite passant par l'origine du repère parce qu'elle représente, on en est persuadés maintenant, une fonction linéaire ; et les deux autres sont des courbes passant aussi par l'origine du repère mais elles sont effectivement «courbes» car leurs points ne sont pas du tout alignés ; la justification de ce non alignement se fait ici par la non proportionnalité des coordonnées ; lorsque les applications affines seront étudiées, on mettra ainsi en évidence

la proportionnalité des «accroissements» des abscisses et des ordonnées ou la non proportionnalité pour cette justification.

Bilan.



Un bilan en classe a précédé l'institutionnalisation des propriétés relatives à l'agrandissement et à la réduction ; des exercices d'application d'abord directe, puis indirecte, ont permis à l'élève de se familiariser avec cette nouvelle notion afin que celle-ci devienne un outil désormais disponible pour résoudre des problèmes.

Quant aux tracés des courbes, le savoir non institutionnalisé pour l'instant est le suivant : on est conduit à distinguer la fonction en k des fonctions en k^α , $\alpha = 2$ ou 3 ; pour la première représentation, on obtiendra une droite ou un sous-ensemble, donc le calcul des coordonnées d'un ou deux points suffit ; pour les deux autres, on n'obtient pas de droite, mais une courbe «courbe», donc on est obligé de placer de nombreux points afin d'obtenir un dessin correct donc de faire de nombreux calculs ; ce sera l'occasion, lorsque l'expression algébrique de la fonction sera plus compliquée, d'apprendre à se servir d'une calculatrice programmable.

EN FIN DE TROISIÈME... PUIS DEUX A TROIS MOIS PLUS TARD

Les tests dont il est question ci-dessous ont été élaborés par une équipe de l'IREM de MONTPELLIER en Septembre 1990 afin de faire un état des lieux à l'arrivée des élèves de Seconde «nouvelle mouture».

Les résultats de cette consultation ont été présentés en Novembre 1990 lors d'une commission Inter-IREM élargie aux membres du premier Cycle et de Niveaux d'Approfondissement qui travaille sur le second Cycle.

Enseignant depuis plusieurs années en Troisième et en Seconde, j'ai voulu «en savoir plus» sur le sujet, les pourcentages de bonnes réponses me paraissant faibles.

En Juin 1991, j'ai demandé à plusieurs membres des réseaux IREM et à d'autres responsables pédagogiques (Jean-Paul Ortheau, I.P.R. à Reims, Pierre Cohen, ex-enseignant en math et actuellement Principal de Collège) de faire passer les tests en question avec la consigne suivante : tous les élèves de Troisième de l'établissement sont testés, sans exclure ceux qui n'entreront pas en Seconde à la rentrée suivante ; nous ne comptabilisons que les bonnes réponses sans analyse de celles-ci.

En Septembre 1991, les enseignants de huit classes de Seconde dans mon lycée de région parisienne ont testé leurs élèves.

Je remercie les nombreux collègues dont la diligence a permis de donner à cette étude une certaine fiabilité et je précise à toute fin utile la localisation géographique des établissements où les tests ont été soumis. Il s'agit des collèges suivants :

- Les Fontanilles à Castelnaudary (Aude)
- La Roche Beaulieu à Razac (Dordogne)
- Saint-Exupéry à Vanves (Hauts de Seine)
- Paul Fort à Reims (Marne)
- Université à Reims (Marne)
- Les Bruyères à La Clayette (Saône et Loire)
- Anne-Marie Javouhey à Autun (Saône et Loire)
- Charles Péguy à Verneuil (Seine et Marne)
- Charcot à Fresnes (Val de Marne).

Au point de vue effectifs, 760 élèves de Troisième et 456 élèves de Seconde ont passé ces tests.

Globalement, nous constatons que les résultats de 3^{me} sont meilleurs qu'en Seconde alors que tous les élèves de 3^{me} ne vont pas en Seconde, les uns redoublent et d'autres vont en lycée professionnel.

Les dates de passage de ces tests influent certainement sur la qualité des réponses obtenues ; il s'agit pour les Troisièmes d'une fin d'année scolaire avant le «Brevet», c'est-à-dire d'une période de révision, de mise au point alors que pour les Secondes, il s'agit au contraire d'une période de «remise en train», de rappel de connaissances ponctuelles, de savoirs, sans remise en œuvre obligatoire de méthodes.

Ces résultats renforcent des convictions : certaines connaissances ne sont qu'en cours d'acquisition à un niveau de classe donné alors que nous les croyions assimilées ; elles ont réellement besoin de fonctionner souvent et dans des situations variées pour pouvoir être mobilisées à bon escient ultérieurement...

SEPTEMBRE 1991

NOM : CLASSE :

Prénom :

TEST DE DEBUT D'ANNEE (Classe de Seconde)

ACTIVITES NUMERIQUES EN MATHEMATIQUES

Durée : 1 heure 30

Toutes les questions sont indépendantes.

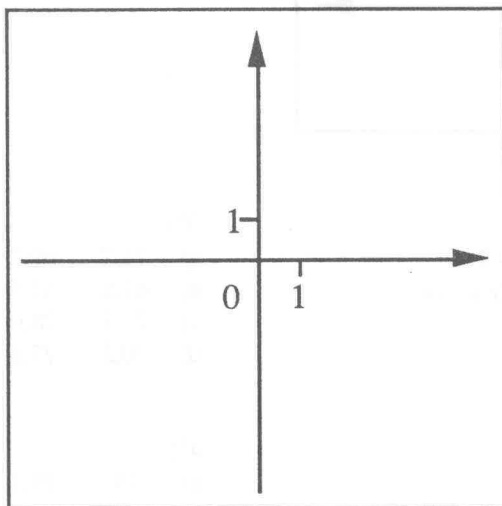
Passer à la question suivante si vous ne savez pas répondre, vous y reviendrez s'il vous reste du temps.

1°)

a) Dessiner la droite D d'équation : $y = 2x - 3$.

b) Dessiner la droite D' passant par les points A(1 ; 2) et B(3 ; 1) puis déterminer l'équation de cette droite.

c) Comment sont D et D' ? Justifier.



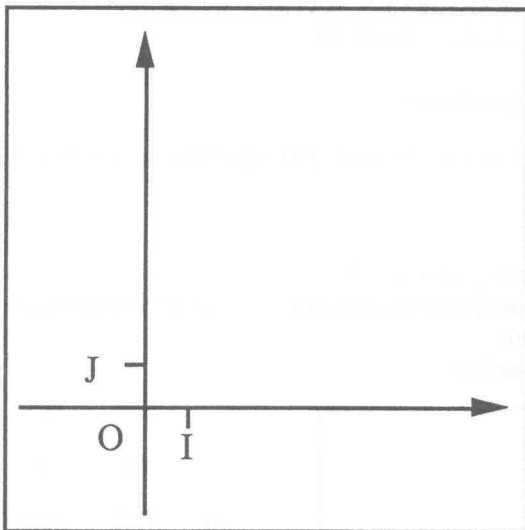
	3 ^{ème}	2 ^{de}
	%	%
a)	72,2	72,8
b)	71,6	87,0
b')	39,1	38,0
c)	60,5	66,0
c')	45,9	34,1

2°)

a) Tracer dans le repère (O,I,J) la droite D de coefficient directeur 3 passant par le point A(2 ; 5).

b) Donner l'équation de la droite D.

c) Une droite D' est parallèle à la droite D. Quel est le coefficient directeur de D' ?



	3 ^{ème}	2 ^{de}
	%	%
a)	38,7	35,0
b)	43,6	43,7
c)	56,9	47,5

3°)

Factoriser:

$$(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2) =$$

$$(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3) =$$

$$(x + 5)^2 - 4 =$$

$$2x + 10 =$$

3°)

a)	71,2	69,2
b)	67,8	67,5
c)	27,7	28,6
d)	70,2	77,8

4°)

Développer et réduire :

$$(2x + 5)^2 =$$

$$- 2(3 - x) =$$

$$(1 - x)(1 + x) =$$

$$(2x - 3)(x + 5) =$$

4°)

a)	78	79,1
b)	78,6	83
c)	73,9	78,7
d)	78,3	78

5°)

Sans utiliser la calculatrice, simplifier les écritures suivantes

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 =$$

$$(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) =$$

$$\sqrt{45} + \sqrt{125} - 2\sqrt{5} =$$

$$\frac{3\sqrt{72}}{5\sqrt{2}} =$$

	3 ^{ème} %	2 ^{de} %
5°)		
a)	36,0	38,3
b)	52,9	60,7
c)	64,5	66,8
d)	36,0	41,2

6°)

a) Comment choisir x pour que $2x + 3 \leq -4$?

b) Résoudre l'inéquation $2x + 3 > 5x + 2$ et représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres qui sont solutions de l'inéquation.

c) Un aquarium parallélépipédique a pour section 50cm x 30cm. Quelles sont les hauteurs possibles d'eau afin qu'il contienne entre 30 et 40 litres d'eau ?

	6°)	
a)	57,1	56
b)	49,3	46,7
c)	25,1	20,7

7°)

Résoudre : $(2x + 1)(1 - x) = 0$

7°)	63,2	55,1
-----	------	------

8°)

a) Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

b) En donner une interprétation graphique.

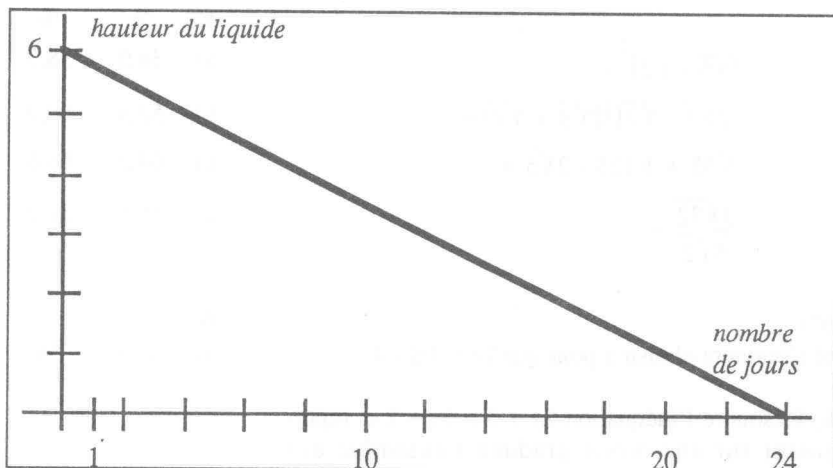
a)	43,0	39,4
b)	11,7	04,5

9°) Compléter le tableau ci-dessous sachant que c'est celui d'une fonction affine.

2	-1	0	-2	5	
5	-1				4

35,0	23,7
------	------

10°) Un flacon contient un liquide qui s'évapore chaque jour. Le graphique représente les variations en fonction du temps de la hauteur du liquide. L'unité de temps choisie est le jour, l'unité de hauteur est le centimètre.



- | | 3 ^{ème}
% | 2 ^{de}
% |
|---|-----------------------|----------------------|
| a) Quelle est la hauteur du liquide au début de l'expérience ? | a) 97,1 | 88,3 |
| b) Au bout de combien de temps le liquide s'est-il évaporé complètement ? | b) 98,3 | 88,4 |
| c) Quelle est la hauteur du liquide après 18 jours d'évaporation ? | c) 94,3 | 83,4 |
| d) A quel moment la hauteur du liquide est-elle de 3,4 cm ? | d) 81,7 | 54,9 |

11°)

Un élève a obtenu pour les devoirs à la maison les notes suivantes : 11 ; 15 ; 8 ; 12, et pour les contrôles en classe : 10 ; 13 ; 9 ; 11 ; 8. Sachant que les contrôles en classe comptent double, calculer la moyenne de cet élève.

11° 68,2 57,1

12°)

Le prix d'une place de cinéma en 1989 est de 34 F et en 1990 de 37 F. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

3^{ème}
%

2^{de}
%

12° 46,2 42,3

13°)

On annonce une augmentation de 5% du prix des mobylettes. Par quel nombre sera multiplié le prix actuel des mobylettes pour obtenir le nouveau prix ?

13° 46,9 24,3

ADRESSES DES IREM

IREM DE BESANCON

Faculté des Sciences et techniques - Route de Gray, La bouloie
25030 BESANCON CEDEX. Tél.81.66.61.92 - Direct 81.66.61.99.

IREM DE BORDEAUX

351, cours de la Libération -
33405 TALENCE CEDEX . Tél.56.84.61.20 (21) (22)

IREM DE BRETAGNE OCCIDENTALE (BREST)

Faculté des Sciences et Techniques- 6 avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST CEDEX . Tél.98.03.16.94.(488) - 98.01.20.69.

IREM DE BASSE NORMANDIE (CAEN)

Université . Batiment Premier Cycle. Esplanade de la paix.
14032 CAEN CEDEX. Tél. 31.44.29.91.- 31.44.29.91

IREM DE CLERMONT-FERRAND

Complexe Scientifique des Céseaux. BP 45 .
63170 AUBIERE . Tél. 73.40.70.97 (98).

IREM DE DIJON

Université de Bourgogne. Fac des Sciences Mirande. BP 138.
21004 DIJON CEDEX . Tél.80.39.52.30.

IREM DE GRENOBLE

Domaine universitaire . BP 41 .
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX. Tél.76.51.46.62.

IREM DE LILLE

Université des Sciences et Techniques. Bâtiment A.
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX . Tél. 20.43.41.81 ou 82.

IREM DE LIMOGES

123 rue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX .Tél.55.45.72.49.

IREM DE LORRAINE

Université Nancy I. Faculté des Sciences. Bd des aiguillettes. Bât. 1er cycle.
54506 VANDOEUVRE LES NANCY CEDEX .Tél.83.27.55.51.

IREM DE LYON

Université Claude Bernard. Lyon I..(Bât. 711)
43 Boulevard du 11 novembre 1918. 69622 VILLEURBANNE CEDEX.
Tél.72.44.81.24 ou 72.44.80.00 poste 37 24.

IREM DU MANS

Université du Maine. Route de Laval
72017 LE MANS CEDEX.

IREM DE MARSEILLE

Faculté de Sciences de Luminy. 70 rue Léon Lachamp.
13288 MARSEILLE CEDEX.
Tél. 91.41.39.40 ou 91.26.90.00.

IREM DE MONTPELLIER

Université des Sciences et Techniques. Place E.Bataillon.
34060 MONTPELLIER CEDEX. Tél. 67.14.33.83 (84) poste 383.

IREM DE NANTES

Faculté des Sciences. Département de mathématiques. 2 rue de la
Houssinière. BP 1044.
44037 NANTES CEDEX. Tél. 43.83.32.00

IREM DE NICE

Université de Nice. Fac de Sciences. Parc Valrose.
06034 NICE CEDEX . Tél.93.52.98.73.

IREM D'ORLEANS

Domaine Universitaire. Rue de Chartres.USR Sciences . Dép. Maths
45046 ORLEANS CEDEX. Tél.38.41.71.71.- 38.41.71.90.

IREM PARIS-NORD

Université de Paris Nord. Avenue Jean Baptiste Clément.
93430 VILLETANEUSE . Tél.(1) 48.21.61.70 poste 4390 à 4394.

IREM PARIS-VII

Université Paris VII. Tour 56. 2 place Jussieu.
75005 PARISTél. (1) 43.36.25.25 postes 5383 à 5386 ou (1) 43.29.26.17.

IREM DE PICARDIE

48 rue Raspail . BP 619

02100 SAINT QUENTIN . Tél.23.62.62.98 ou 23.67.06.18.

IREM DE POITIERS

40 avenue du Recteur Pineau.

86022 POITIERS CEDEX. Tél.49.45.38.77..

IREM DE REIMS

Université de Reims

Moulin de la Housse. B.P. 347.

51062 REIMS CEDEX . Tél.26.40.42.01 ou 26.47.82.61 poste 208.

IREM DE RENNES

Campus Beaulieu. Avenue du Général Leclerc.

35042 RENNES CEDEX. Tél.99.28.61.23 ou 99.28.63.42.

IREM DE ROUEN (HAUTE NORMANDIE)

1, rue Thomas Becket. BP 27

76130 MONT SAINT AIGNAN. Tél. 35.14.61.41.

IREM DE STRASBOURG

10 rue du Général Zimmer.

67084 STRASBOURG CEDEX. Tél. 88.41.63.00 poste 240.

IREM DE TOULOUSE

Université Paul Sabatier.118 route de Narbonne.

31062 TOULOUSE CEDEX. Tél.61.55.68.83.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE CHIRAT
42540 ST-JUST-LA-PENDUE
EN MAI 1992
DÉPÔT LÉGAL 1992 N° 6888

IMPRIMÉ EN FRANCE

