# CONJECTURER, DÉBATTRE, RAISONNER EN ARITHMETIQUE, EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS ET AU COLLÈGE

**Thérèse GILBERT**
Formatrice d'enseignants, HAUTE ÉCOLE GALILÉE
GEM
therese.gilbert@galilee.be

**Daniel ZIMMER**
Doctorant, UCLOUVAIN
GEM
daniel.zimmer@uclouvain.be

Résumé
Au départ, une situation d'arithmétique. Elle a l'air simple et pourtant… À partir de « vrai ou faux ? » conçus par les participants, on lance le débat. C'est l'occasion de préciser sa pensée, de réfléchir par analogie, ou de se méfier des analogies, de déjouer des pièges, de contredire, de chercher des contre-exemples, d'envisager une réciproque, de structurer la solution et l'argumentation, de penser en mathématiques.
Dans cet atelier, nous avons fait vivre un débat, en avons raconté l'expérimentation au collège et en formation initiale des enseignants et en avons évoqué d'autres.
Ce fut l'occasion de répondre à notre manière à la question « raisonner en arithmétique, est-ce incongru ? ».

> *Quelle partie des mathématiques enseigner ? Ça n'a pas d'importance. Ce qui est important est que les élèves aient rencontré, au moins une fois, un raisonnement qui les ait convaincus de la vérité de tel résultat, alors même que cette vérité ne leur était pas intuitive (Weil, 1991, p. 10).*

## I - INTRODUCTION

### 1. Motivation et accroche

Souvent, dans les manuels, dans les cours de mathématiques, les élèves doivent montrer leur aptitude mathématique en fournissant *la* bonne réponse attendue. C'est le professeur qui est garant de la vérité des énoncés qui circulent dans la classe. Étant l'expert en mathématiques, il sait et a le devoir de corriger les erreurs de ses élèves, de leur montrer *la* bonne méthode. Les mathématiques apparaissent alors comme un absolu dont le professeur détient les clefs et dans lequel lui seul peut guider les élèves. Ce faisant, les élèves risquent fort de se retrouver relégués au rang de simples consommateurs du savoir dispensé par le professeur.

En définitive, pour beaucoup d'élèves, les mathématiques ne sont vraies que parce que le prof le dit et pas forcément parce qu'elles répondent de façon convaincante à une question qu'ils se posent. Les mathématiques sont là, on les étudie, on les applique, mais on ne se pose pas la question de leur véracité, de leur légitimité.

Nous voudrions, au contraire, que les élèves puissent douter, se convaincre, s'exprimer, apprendre à débattre pour se former à la pensée mathématique et mieux s'approprier le cours. Nous aimerions aussi que les élèves apprennent à argumenter en justifiant leur position, développent leur esprit critique et soient capables de recul sur les affirmations qu'ils avancent.

Nous espérons progresser vers ces objectifs à travers, entre autres, la pratique de débats au cours de mathématiques. Concrètement, une question d'ordre mathématique est posée aux élèves, qui ont alors le loisir de se former leur propre opinion, puis de la partager et de la défendre face à leurs pairs. Le temps du débat, le professeur se garde bien d'être l'arbitre de la vérité des énoncés, mais devient un garant du cadre de discussion, se retirant autant que possible au niveau du fond du propos pour en laisser une responsabilité maximale aux élèves.

### 2. Notre travail au GEM

S'inspirant notamment des travaux de l'IREM de Grenoble sur le débat scientifique en classe (voir par exemple Charlot et al., 2015 ; Lecorre, 2015 ; Legrand, 1993 ; Leroux & Lecorre, 2007) et, au-delà, des travaux du groupe ERMEL (1999) et de l'IREM de Lyon (Arsac et al., 1992), plusieurs membres du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) à Louvain-la-Neuve, dont nous faisons partie, développent et expérimentent des situations de débat autour de questions mathématiques dans des classes du primaire, du secondaire, et en formation d'enseignants. Un recueil de questions de débats découlant de ce travail est à paraître dans un futur plus ou moins proche. Ce travail a déjà donné lieu à quelques publications, par exemple Ben Aïcha (2019 ; 2021), Gilbert (2021) ou Zimmer & Ninove (2022).

### 3. Plan succin de l'atelier

Dans l'atelier que nous avons animé, nous avons proposé aux participants de vivre un débat autour d'une question pouvant convenir à presque tout âge, du collège à l'université, avant d'effectuer un retour sur le moment partagé et de présenter des échos de nos expérimentations dans les classes de collège et au-delà, avec quelques exemples d'énoncés pouvant faire débat.

## II - UN DÉBAT À VIVRE

### 1. Cadre de l'activité de débat proposée

#### *1.1. Structure prévue du débat*

Après l'annonce de l'énoncé du problème, repris ci-dessous, environ deux minutes sont laissées aux participants pour s'approprier la question et y réfléchir en silence.

Cette première phase de réflexion individuelle est suivie d'une phase dite de débat privé (Leroux & Lecorre, 2007) : pendant deux ou trois minutes, les participants peuvent discuter avec leurs voisins directs de leurs ébauches de résolution et de leurs conjectures.

Ensuite, l'animateur du débat procède au relevé des conjectures, en les inscrivant au tableau. À ce stade, il est demandé de ne pas s'exprimer sur la validité des propositions, ni de donner d'arguments pour ou contre. Ceci est particulièrement difficile pour les participants, qui ont tendance à réagir vite. Cette contrainte a pour objectif de laisser à chacun le temps de réfléchir sans à priori sur les propositions des autres.

On sélectionne ensuite les conjectures à débattre : une ou deux qui soient faciles à traiter, et une ou deux plus délicates.

Vient alors la phase dite de débat public, avec le groupe au complet. Pour chaque conjecture sélectionnée, l'animateur procède à un bref vote pour prendre la température de l'audience, proposant de se positionner entre « vrai », « faux » et « autre » (Leroux & Lecorre, 2007 ; Lecorre, 2015). Suite à ce vote, on procède à l'échange des arguments jusqu'à obtention d'un consensus compris et validé par tous. Si besoin, le recours à de nouvelles phases de débat privé ou de recherche individuelle peut être proposé.

Après environ quarante-cinq minutes de débat, nous faisons le point sur les arguments et les démarches. Ce retour pourrait faire partie d'une institutionnalisation plus importante.

### *1.2. Quelques règles pour le débat*

Voici quelques règles pour s'assurer du bon déroulement du débat, règles inspirées librement de Legrand (2017).

- Chacun peut (mais personne ne doit) prendre la parole, mais tout le monde doit participer.
- Chacun s'adresse à l'ensemble du groupe, et non à l'animateur.
    - On s'exprime pour être entendu de tous, en se tournant et regardant le groupe.
    - On annonce sa thèse (« Je pense que ... ») avant de l'argumenter (« Voilà mes raisons... »).
- Chacun est soucieux de connaitre l'avis des autres.
    - On écoute et on regarde celui qui parle.
    - On réagit à ce que les autres disent (avec respect). On peut utiliser des formulations telles que « ce qui m'échappe dans ce que tu dis, c'est… », « je ne suis pas d'accord avec tel argument, telle affirmation... ».
- On (s')interdit les arguments d'autorité (« Je peux vous assurer que... », « parce que c'est comme ça »).
- On peut aller au tableau pour s'expliquer.
- On peut convenir de gestes pour exprimer brièvement son accord, son désaccord...

## 2. Énoncé du problème

*Le plus grand résultat.*

*J'ai deux nombres en tête, 10 et un autre nombre, que je ne vous donne pas. Si je veux fabriquer le plus grand nombre, quelle opération vaut-il mieux que j'utilise parmi l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ? Le premier terme ou facteur du calcul sera 10.*

Donnez un ou des « vrai ou faux ? » raisonnables (ils peuvent être faux, mais pas faux au premier coup d'œil). On peut utiliser des formulations et expressions telles que « toujours », « parfois », « en tout cas », « jamais », « si..., alors ... ».

### 3. Éléments de solution

En réfléchissant au problème, on se rend compte rapidement que « ça dépend du nombre ». La tâche revient alors à la détermination des domaines dans lesquels chaque opération est « la meilleure », c'est-à-dire donne un résultat supérieur aux trois autres. Dans le domaine des négatifs, la soustraction l'emporte, car la multiplication et la division donnent un résultat négatif et l'addition donne un résultat inférieur à 10, alors que la soustraction donne un résultat supérieur à 10. Voilà déjà un premier raisonnement accessible aux élèves.

Si le « deuxième nombre » est positif, la question se complique. S'il est proche de zéro, il est avantageux de diviser, et s'il est suffisamment grand, il vaut mieux multiplier, alors qu'avec 1, il vaut mieux additionner. Comment donner un sens précis à « suffisamment proche de zéro » et « suffisamment grand » ? Une façon de procéder est d'écrire des (in)équations pour déterminer les nombres charnières, où deux opérations donneront le même résultat. Pour départager l'addition de la multiplication, l'équation à résoudre est $10 + x = 10x$, qui a pour solution le nombre $\frac{10}{9}$.

L'équation départageant l'addition de la division est $\frac{10}{x} = 10 + x$. C'est une équation du second degré, dont l'unique solution positive est $-5 + \sqrt{35}$.

Les conclusions que l'on peut tirer de ces observations sont synthétisées dans le graphique présenté à la figure 1.

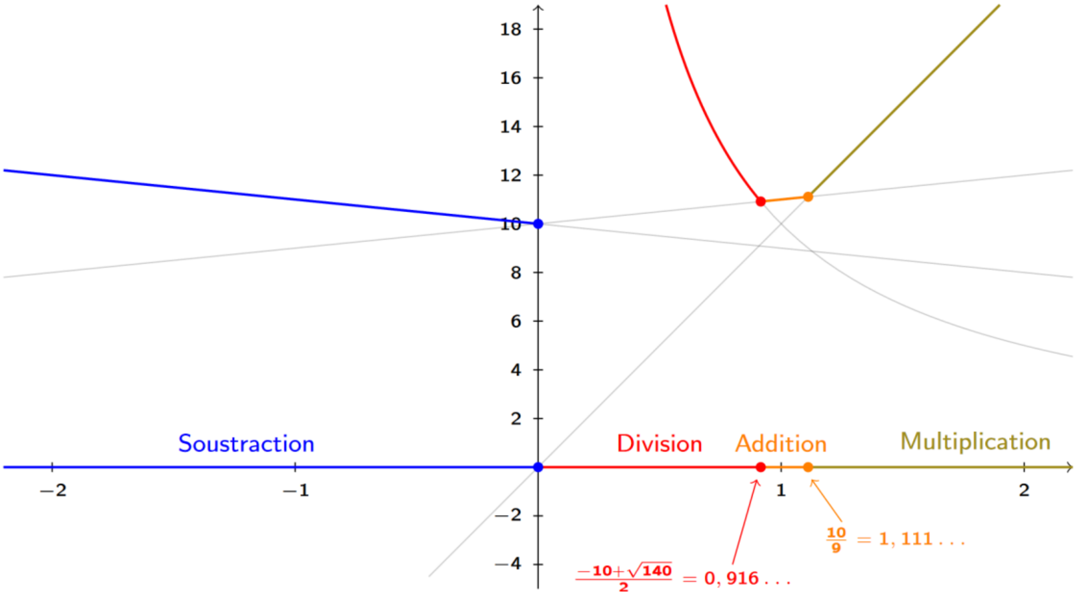


*Figure 1. Graphes des fonctions $10 - x$, $\frac{10}{x}$, $10 + x$ et $10x$, représentés dans un repère où l'axe des abscisses est dilaté. En couleur sur l'axe des abscisses, le domaine sur lequel chacune des quatre opérations donne le résultat le plus élevé.*

Observons qu'on ne s'attend pas forcément à ce que les élèves, en particulier au collège, usent d'une représentation graphique comme celle présentée ci-dessus. Généralement, le temps de débat est l'occasion de formuler et d'interroger quelques conjectures, mais non de résoudre le problème de fond en comble. La mise en débat du problème peut d'ailleurs tout à fait constituer un prélude à une résolution plus complète, effectuée de façon individuelle ou par petits groupes. C'est d'ailleurs cette dernière approche qui a été explorée lors de nos essais en formation d'enseignants.

## 4. Quelques conjectures, démarches empruntées et arguments échangés

Le débat a été proposé dans deux groupes. Voici quelques-uns des « Vrai ou faux ? » écrits au tableau dans l'un ou l'autre groupe :

(1) Il faut toujours multiplier.
(2) Il faut soustraire, on aura plus de chance.
(3) Si le deuxième nombre est supérieur à 1, il faut multiplier.
(4) Si le deuxième nombre est 0, il faut diviser.
(5) Si le deuxième nombre est négatif, on peut soustraire.
(6) Si le deuxième nombre est strictement compris entre 0 et 1, il faut diviser.
(7) Ça peut être n'importe quelle opération en choisissant convenablement le deuxième nombre.
(8) Si $x > \frac{5}{4}$, il faut multiplier.

Après le débat proprement dit, nous avons fait le point sur les démarches générales, les arguments mathématiques et les outils mathématiques appliqués. Voici d'abord quelques démarches générales qui ont été empruntées.

Les participants ont parfois éprouvé le besoin d'expliciter le sens de la question et de faire préciser l'une ou l'autre conjecture ambiguë (la (2), la (5) ou la (7)). Dans un des deux ateliers, certains ont proposé d'organiser le débat (« traitons d'abord de cette question », « nous pourrions voir ceci à la fin »). D'autres ont structuré l'argumentation, en cours de débat, ou la réponse (sous forme de droite découpée en intervalles) à la fin.

À certains moments, il a fallu reprendre un argument et s'assurer que rien n'avait été oublié, ou pointer les problèmes qui restaient à résoudre, les affirmations encore à prouver. Des participants ont aussi proposé des variations sur la question de départ.

Citons maintenant les démarches mathématiques appliquées. Les participants ont dû rechercher des conjectures, puis des contre-exemples pour contredire certaines affirmations, faire la distinction entre propositions universelle et existentielle, procéder par élimination pour restreindre les opérations à considérer, comparer les opérations deux par deux.

Certains participants ont témoigné du fait qu'ils avaient d'abord pensé qu'avec un nombre plus grand que 1, ce serait la multiplication qui serait gagnante (affirmation (1)) car « c'est à partir du facteur 1 que la multiplication fait grandir ».

L'affirmation (8) a été l'occasion de faire la distinction entre une conjecture non générale (qui ne donne pas la solution complète à la question), une conjecture non intéressante et une conjecture fausse.

À propos de l'affirmation (2), nous avons évoqué les probabilités et la difficulté de comparer des ensembles infinis.

Plusieurs participants ont évoqué le principe de continuité : si l'addition gagne pour le nombre 1, si la multiplication gagne pour de grands nombres, il doit bien y avoir un nombre pour lequel les deux opérations donnent le même résultat ; où se situe la limite ?

Un participant a pensé qu'il pouvait résoudre un des problèmes par analogie : quand on aura résolu le problème de la limite entre les domaines de l'addition et de la multiplication, on aura résolu celui de la limite entre la division et l'addition. Il s'est avéré que ce n'était pas le cas. Il a alors lu deux citations de Grothendieck, que nous reprenons ci-dessous.

> *Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque" (Grothendieck, 2021, p. 200).*

> *Mais il arrive aussi que […] cette image [de la situation] est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse […] est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante – jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi (Grothendieck, 2021, p. 200-201).*

Les preuves fournies ont été soit générales (par exemple pour la soustraction), soit expliquées sur un exemple générique.

Enfin, voici une liste d'outils mathématiques utilisés :

- équations, inéquations, du premier ou du second degré,
- sens des opérations et règles les régissant,
- limite d'une fonction en un point.

## 5. Échos d'expérimentations dans les classes

### *5.1. Au collège*

Le problème a été proposé à plusieurs reprises dans des classes de deuxième et troisième secondaire en Belgique (équivalents respectifs de la quatrième et de la troisième au collège), dans une version réduite aux opérations d'addition, de soustraction et de multiplication. Les élèves n'avaient en effet pas à leur disposition la résolution d'équations du second degré et le problème est déjà suffisamment riche avec ces trois opérations seulement.

L'énoncé n'est pas toujours clairement saisi de prime abord. Parfois, le professeur doit le clarifier en spécifiant bien que l'on compare le résultat des opérations en conservant le même deuxième nombre une fois qu'on l'a choisi. Sans cette contrainte, la question n'est plus si intéressante.

Les élèves envisagent d'abord seulement les nombres naturels et leurs premières conjectures naïves sont de l'ordre de « Forcément, multiplier c'est plus grand » ou « Le moins, il retire. Du coup, c'est pas le meilleur. ». Ces conjectures sont mises à l'épreuve des contre-exemples. Généralement, la modélisation algébrique ne vient pas à l'esprit des élèves, mais le débat est l'occasion d'une grande chasse aux contre-exemples.

Rapidement, ils en viennent à s'intéresser aux nombres négatifs et à démontrer que, dans ce domaine, c'est la soustraction qui gagne. Puis, ils envisagent les nombres « à virgule ». Ce n'est pas forcément la multiplication qui donne le plus grand résultat, puisque par exemple, $10 \cdot 0{,}5 = 5$, alors que $10 + 0{,}5 = 10{,}5$. Des élèves proposent des conjectures comme « Si le deuxième nombre est plus grand que 1,2, c'est la multiplication qui gagne ». Certaines classes sont allées d'elles-mêmes jusqu'à la détermination du point de bascule 1,1111… mais, plutôt que de l'obtenir via la résolution d'une équation, les élèves y arrivent par une succession d'essais-erreurs et d'encadrements.

### 5.2. En formation initiale des enseignants

Voici quelques moments de débat dans une classe d'étudiants AESI[2] en mathématiques. Ils viennent de commencer leurs études et ne sont pas habitués à débattre. Le niveau de connaissance des mathématiques varie grandement d'un étudiant à l'autre[3].

*1. Où il est question de conditions nécessaire et suffisante, d'implication et de réciproque.*

(Vrai ou faux ?) « Si n = 1, l'addition gagne. »

**Esme**. Le +, il peut gagner, oui, mais pas forcément quand $n = 1$. Je dis pas que c'est faux, mais je dis pas que c'est vrai non plus.

**Achille**. On a mis la condition « $n = 1$ » au début : si « ça », alors l'addition gagne. Ça, c'est vrai.

On retrouve ici le problème soulevé par la conjecture (8) au cours de l'atelier : la phrase est vraie, mais ne dit pas toute la vérité sur la question, ce qui peut paraître perturbant pour certains. On observe également une confusion entre condition nécessaire et suffisante : la première phrase est un contre-argument pour la phrase « L'addition gagne seulement si $n = 1$ », l'implication réciproque de l'affirmation débattue.

*2. Un argument de continuité.*

(Vrai ou faux ?) « Si le deuxième nombre est > 1, la multiplication gagne. »

**Achille**. Si $n > 1$, l'addition ne va pas gagner, ça va être la multiplication.

**Brahim**. Si $n = 1{,}00001$, l'addition sera encore plus forte que la multiplication :

[2] Agrégé de l'Enseignement Secondaire Inférieur, c'est-à-dire des étudiants qui se destinent à l'enseignement des mathématiques au collège.

[3] Il n'y a pas de concours d'entrée.

$$10 \cdot 1{,}00001 = 10{,}0001 \; ; \; 10 + 1{,}00001 = 11{,}00001.$$

On peut deviner ici un certain argument de continuité, non exprimé : si pour $n = 1$, l'addition gagne, ce sera aussi le cas pour certains nombres proches de 1.

*3. Sur la précision des énoncés et les quantificateurs cachés.*

(Vrai ou faux ?) « Si le deuxième nombre est > 1, la multiplication gagne. »

**Achille**. Je vote « Autre » car ça peut être faux ou vrai selon les nombres :
Si $n = 1{,}00001$, alors l'addition gagne.
Si $n = 1{,}5$, alors l'addition donne 11,5 et la multiplication donne 15.

**Bouchra**. Donc la multiplication ne gagne pas toujours, donc c'est faux.

**Adèle.** Dans la conjecture, on n'a pas écrit « toujours ».

**Camelia**. Je pense comme Bouchra : « la multiplication gagne » induit que « la multiplication gagne dans tous les cas ».

**Bouchra**. En fait, on devrait dire « la multiplication gagne toujours » ou « la multiplication peut gagner ». [Alors, on pourrait se mettre d'accord.]

Ce type de précision de quantificateurs implicites est assez récurrente dans nos observations de débats en formation des enseignants (voir par exemple Zimmer, 2023). Comme l'observait déjà Durand-Guerrier (1999), la quantification universelle d'énoncés de type « si…, alors… » n'est pas nécessairement évidente pour les élèves et gagne souvent à être explicitée.

### 6. Extension du problème

Le problème présenté dans ces lignes admet une formulation plus générale, qui peut être adaptée pour des élèves plus âgés, ou si l'on veut prolonger la discussion.

*J'ai deux nombres en tête, que je ne vous donne pas. Si je veux fabriquer le plus grand nombre, quelle opération vaut-il mieux que j'utilise parmi l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ?*

La discussion comprend alors une multitude de cas, que l'on peut représenter graphiquement dans le plan. À noter que, si le problème initial pouvait être résolu en comparant des fonctions de **R** dans **R**, ici il faudrait raisonner à partir de fonctions de deux variables, ce qui corse nettement la difficulté. Il y a alors peu d'espoir de venir à bout du problème dans le courant du débat, mais celui-ci peut être prolongé par une résolution individuelle ou par groupes.

## III - D'AUTRES DÉBATS RACONTÉS, VÉCUS AU COLLÈGE

### 1. Huit divisé par zéro

*Combien vaut 8 : 0 ?*

Ce sujet de débat se présente généralement spontanément au collège, avec éventuellement un autre nombre que 8. Si cette question survient, au fil d'un cours, plutôt que d'asséner que ça n'a pas de sens ou d'expliquer lui-même pourquoi, l'enseignant peut saisir l'opportunité de renvoyer la balle aux élèves et de leur proposer d'en débattre. C'est une question simple, que tous les élèves peuvent s'approprier et, généralement, la classe n'est pas d'accord à priori. Plusieurs réponses sont généralement proposées par les élèves, par exemple « impossible », « 0 », « 8 » ou « l'infini ».

C'est l'occasion pour les élèves de revenir au sens des opérations : se demander quel nombre est égal au résultat de la division de 8 par 0, c'est se demander *par combien doit-on multiplier 0 pour obtenir 8,* ou *quel est le nombre tel qu'en le multipliant par 0, on trouve 8* ?

Voici quelques arguments des élèves. Certains pensent que 8 : 0 = 8.

- Mais « ça ne peut pas être la même réponse que 8 : 1 ».
- Pourtant, « 8 : 2 a bien la même réponse que $8 \times \frac{1}{2}$ », non ?
- Oui, mais « diviser par deux ou multiplier par un demi, c'est la même chose, alors que diviser par un ou zéro non ».

Le groupe est convaincu et cette solution est rejetée.

Dans une autre classe, un groupe défend que 8 : 0 donne l'infini.

- En effet, « 8 : 2 = 4, parce que 4, il rentre 2 fois dans 8. Du coup, 8 : 0 = l'infini, parce que 0 rentre une infinité de fois dans 8 ».
- Oui, mais « si tu prends 0 une infinité de fois, tu n'obtiens pas 8 », donc ce raisonnement ne tient pas.

Finalement, c'est le sens de l'opérateur de division, inverse de celui de la multiplication, qui permet souvent aux élèves de trancher.

## 2. Combien de nombres entre $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{10}$ ?

*Combien de nombres y a-t-il entre $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{10}$ ? (Adapté de Detaille, 2017)*

Ce débat est un débat préparé et proposé aux élèves par l'enseignant. Quelques réponses proposées par des élèves de treize ans au collège :

- Il n'y en a pas…
- Il y en a un : c'est 0,6.
- Il y en a quinze, on peut les compter : 0,55, 0,56, 0,57, …, 0,69.
- Il y en a seize, car $\frac{6}{11} = \frac{60}{110}$ et $\frac{7}{10} = \frac{77}{110}$.
- Il y en a une infinité !

Des réponses plus saugrenues peuvent survenir : par exemple un élève dit qu'il y en a 0,16, parce que $\frac{7}{10} - \frac{6}{11} \cong 0{,}16$.

La comparaison de fractions n'est pas forcément une mince affaire dès lors que les deux dénominateurs sont différents. Pour un élève, « on ne peut pas comparer deux nombres si leurs dénominateurs ne sont pas les mêmes ». L'enseignant demande si on en est bien sûr et un autre élève propose de trouver un contre-exemple à cet énoncé. Après quelque temps de recherche, on arrive à voir que, par exemple, $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3}$ n'ont pas le même dénominateur, mais l'une des fractions est inférieure à 1 tandis que l'autre lui est supérieure. L'une est donc forcément plus petite.

Les élèves peuvent éprouver le besoin d'écrire les deux nombres en écriture décimale pour les comparer et facilement trouver des nombres intermédiaires. Ce peut être l'occasion de revoir avec eux l'algorithme de la division écrite, en particulier dans le cas où la division ne s'arrête pas. Ceci peut révéler des obstacles chez les élèves, liés à la présence de l'infini. Par exemple, pour une élève, « $\frac{6}{11} = 0{,}54545454\ldots$ continue à l'infini, donc comment pourrait-il y avoir un nombre plus grand ? ». C'est l'occasion de se ramener à des exemples plus familiers déjà rencontrés en classe, comme $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, pour lequel on peut très bien imaginer des nombres supérieurs.

## IV - CONCLUSION

Le débat vécu, ainsi que beaucoup d'autres, sont une occasion d'apprendre à conjecturer, c'est-à-dire :

- à penser les conjectures, à envisager des conjectures variées ;
- à apprendre à les exprimer correctement, à se rendre compte qu'un mot peut changer le sens ;
- à faire préciser la conjecture d'autres élèves ;
- à faire évoluer les conjectures ;
- à élargir le domaine envisagé des nombres ;
- à remettre en question quelques certitudes.

On y apprend aussi des éléments de logique, notamment :

- à utiliser des implications ;
- à distinguer « il faut que » de « il suffit que », à distinguer une implication et sa réciproque ;
- à préciser « toujours », « jamais », « parfois » et à distinguer les propositions universelles et existentielles ;
- à comprendre qu'un contre-exemple suffit à contredire ; à fabriquer des contre-exemples ;
- à comprendre que le fait de ne pas arriver à trouver de contre-exemple ne suffit pas à démontrer une proposition universelle.

Les débats, en arithmétique ou dans d'autres domaines, sont l'occasion d'éprouver la nécessité de démontrer, d'apporter des arguments généraux.

Pour l'enseignant, ils permettent aussi de se rendre compte des lacunes des élèves (ici, de faire le point sur les opérations) et de se rendre compte de la difficulté des élèves à transférer les connaissances (ici, les équations) et leur en donner l'occasion.

Alors raisonner en arithmétique, est-ce incongru ? Non.

## V - BIBLIOGRAPHIE


Arsac, G. Chapiron, G. Colonna, A., Germain, G. Guichard, Y. & Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : Presses universitaires de Lyon.

Ben Aïcha, H. (2019). Des élèves dignes de grands mathématiciens !, *Traces de changements*, 241.

Ben Aïcha, H. (2021). Argumenter et débattre, *Au fil des maths*, *541*, 45-49.

Ben Aïcha, H. & Gilbert, T. (2019). Quatre débats pour éveiller l'esprit critique, https://changement-egalite.be/Quatre-debats-pour-eveiller-l.

Charlot, G. Lecorre, T. Legrand, M. Leroux, A. & Di Martino, H. (2015). Le débat scientifique en classe : une démarche d'investigation collective pour une culture scientifique commune. Dans Theis, L. (ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* (pp. 847-860). Alger : Société Mathématique d'Algérie.

Charrière, G. (1995). Algèbre mode d'emploi. Le Mont-sur-Lausanne : LEP – Loisir et Pédagogie SA.

Detaille, J. (2017). Entre deux nombres. Dans Gilbert, T., Ninove, L. (dir.) et le Groupe d'Enseignement Mathématique, *Le plaisir de chercher en mathématiques, De la maternelle au supérieur : 40 problèmes* (pp. 23-25). Louvain-la-Neuve : Presses Universitaires de Louvain.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, *50*, 57–79.

ERMEL (1999). *Vrai ? Faux ? . . . On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. Paris : Institut national de recherche pédagogique.

Gilbert, T. (2021). Apprendre à débattre et à animer un débat mathématique, *Au fil des maths*, *542*.

Grothendieck, A. (2021). *Récoltes et semailles, I*. Paris : Gallimard.

Lecorre, T. (2015). Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction, *Repères-IREM*, *100*, 51-64.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM, 10*, 123-149.

Legrand, M. (2017). Désir de démocratie et d'humanisme authentiques et nécessité d'opérer une révolution dans notre façon de concevoir le savoir et son partage à l'école, La construction collective d'un sens profond, Forum de l'Education Sfax.

Leroux, L. & Lecorre, T. (2007). Le « Débat scientifique » en classe. Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématiques ?, *APMEP – PLOT*, *19*, 2-15.

Weil, A. (1991). Entretien avec Michel Demazure et Martin Andler, *Gazette des mathématiciens*, *50*, 3-10.

Zimmer, D. & Ninove, L. (2022). Un problème de géométrie pour conjecturer et débattre, *Repères-IREM*, *129*, 62-84.

Zimmer, D. (2023). Narration et analyse, sous le prisme de la logique, d'un débat mathématique vécu en formation d'enseignants. À paraître dans le vol. 3 de la revue *Nexus*.